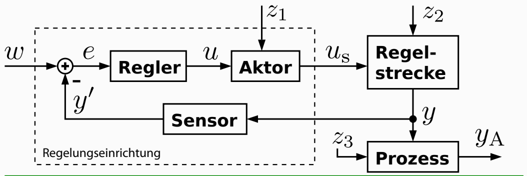
Regelungssysteme

1. Der Regelkreis



Regelfehler	$e = w - y$	Differenz zwischen „Soll" und „Ist"
Stellgröße	u_S	Eingang der Regelgröße
Führungsgröße	w	Sollverlauf, Vorgabe
Aufgabengröße	y_A	Die zu beinflussende Größe
Regelgröße	y	Die vom Sensor erfasste Größe
Störgrößen	z_i	Nicht beeinflussbare Störungen

Zustand: Ausgang eines Integrators

2. Modellbildung, Linearisierung, lin. Systeme

2.1. Zustandsbeschreibung linearer Systeme

mit r Erregungen, n Zustandsgrößen und k Ausgängen.
Die Zustandsgrößen $\underline{x}$ müssen einen stetigen Verlauf haben!

Allgemeine Zustandsgleichung:	$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}\underline{v}(t)$
Allgemeine Ausgangsgleichung:	$\underline{y}(t) = \underline{C}\underline{x}(t) + \underline{D}\underline{v}(t)$
Zustandsvariable	$\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$
Ausgangsvariable	$\underline{y}(t) \in \mathbb{R}^k$
Erregungsvektor	$\underline{v} \in \mathbb{R}^r$
Systemmatrix	$\underline{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$
Einkopplungsmatrix	$\underline{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}$
Auskopplungsmatrix	$\underline{C} \in \mathbb{R}^{k\times n}$
Durchgangsmatrix	$\underline{D} \in \mathbb{R}^{k\times r}$

Falls $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ oder $\underline{D}$ zeitvariabel sind handelt es sich um ein LTV-System, falls nicht um ein LTI-System.

2.2. Linearisierung

Gegeben (nicht linear): $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$ $\qquad$ $\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u})$

2.2.1 um eine allg. Referenzlösung

– todo –

2.2.2 um eine Ruhelaage

$$\Delta\dot{\underline{x}} = \underline{A}\Delta\underline{x} + \underline{B}\Delta\underline{u} \qquad \Delta\underline{y} = \underline{C}\Delta\underline{x} + \underline{D}\Delta\underline{u}$$

$$\underline{A} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \qquad \underline{C} = \left.\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right|_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)}$$

$$\underline{B} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right|_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \qquad \underline{D} = \left.\frac{\partial g_i}{\partial u_j}\right|_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)}$$

3. Darstellung von LTI-SISO Systemen

3.1. Differentialgleichungen (DGL)

Gleichung mit Funktion y und deren n-ten Ableitungen $y', y'', \dots$
Allgemeine DGL n-ter Ordnung:
$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b_m x^{(m)} + \ldots + b_1 x' + b_0 x$
Gesucht ist eine Funktion y und keine Zahl! In der Praxis werden DGLs numerisch für diskrete Werte gelöst.

3.1.1 DGL-Systeme

Jede DGL lässt sich reduzieren auf ein DGL-System 1. Ordnung:
1. Substituiere $x_i := y^{(i-1)}$ und drücke $\dot{x}_i$ durch $x_1, \ldots, x_n$ aus.
$\Rightarrow \boxed{\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{s}(t)}$ mit $\underline{x}_{\text{ges}} = \underline{x}_{\text{hom}} + \underline{x}_{\text{part}}$
Hom. Lösung: 1. Bestimme EW λ_i und Basis aus EV $\underline{b}_i$ von $\underline{A}$
2. $\underline{x}_{\text{hom}} = \underline{c} \cdot e^{(x - x_0)\underline{A}} = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \cdot e^{\lambda_i x} \cdot \underline{b}_i$
3. Bestimmung der Konstanten durch einsetzen der Anfangsbedingungen!

3.2. Die Übertragungsfunktion

Beschreibt das System vollständig. Wird im Laplacebereich angegeben.
Übertragungsfunktion einer lin. DGL n-ter Ordnung in Polynomform:

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_k s^k + \ldots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_r s^n + \ldots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{Z(s)}{N(s)}}$$

(n = Ordnung der DGL = Anzahl der Pole)

Übertragungsfunktion der Zustandsbeschreibung:
$\underline{G}(s) = \{\underline{C}(s\underline{E} - \underline{A})^{-1}\underline{B} + \underline{D}\}$
für $q = r = 1$ (SISO-System):
$G(s) = \{\underline{c}^T(s\underline{E} - \underline{A})^{-1}\underline{b} + d\}$

Linearfaktorenform: $G(s) = \frac{\beta_m}{\alpha_n} \frac{\prod(s - z_j)}{\prod(s - p_i)}$

Zeitkonstantenform: $G(s) = \frac{\beta_0}{\alpha_0} \frac{\prod(1 + T_v s)}{\prod(1 + T s)}$

Partialbruchform: $G(s) = A_0 \sum \frac{A_j}{s - p_j} = A_0 + G^+(s)$

3.2.1 Wichtige spezielle Übertragungsfunktionen (Frequenzantw.)

$u(t)$	$U(s)$	Zeitantwort	Frequenzantwort
$\delta(t)$	1	Impulsantw. $g(t)$	Gewichtsfkt. $G(s)$
$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	Sprungantw. $h(t)$	Übergangsfkt $H(s)$
$t \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{s^2}$	Anstiegsantw.	Rampenantwort

Übertragungsfunktion des Reglers $G_R(s)$
Übertragungsfunktion des Stellers/Strecke $G_S(s)$
Übertragungsfunktion der Rückführung $G_r(s)$
Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises $G_0(s) = G_R(s) G_S(s)$

3.2.2 Frequenzgang

Der FG ist die Systemantwort bei harmonischer Erregung $u(t) = e^{i\omega t}$
Nach dem Einschwingen (wird ignoriert) ist die Systemantwort ebenfalls harmonisch, allerdings mit anderer Amplitude und Phase.
Frequenzgang: $G(i\omega) = G(s)|_{s = 0 + i\omega, \omega > 0} = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$

3.2.3 Zustandsraummodell

DGL n-ter Ordnung:
$a_n y^{(n)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b_m x^{(m)} + \ldots + b_1 x' + b_0 x$
Lässt sich immer reduzieren auf ein DGL-System 1. Ordnung:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Normalformen

Kanonische Normalform
zur Entkopplung des Systems bzw. der zugehörigen DGLs.
Wähle $\underline{T}$ so das $\underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T}$ eine Diagonalmatrix ist:
$\underline{T}^{-1}\underline{A}\underline{T} = \operatorname{diag}(\lambda_i)$
$\dot{\underline{x}}_{\underline{k}} = \operatorname{diag}(\lambda_i)\underline{x}_k + \underline{b}_k u$
$y = \underline{c}_{\underline{k}}^T \underline{x}_{\underline{k}} + du$

Regelungsnormalform:
nur die letzte Zustandsvariable x_{Rn} wird direkt durch den Eingang beeinflusst
Steuerbarkeitsmatrix: $\underline{S}_S = \begin{bmatrix} \underline{b} & \underline{A}\underline{b} & \underline{A}^2\underline{b} & \ldots & \underline{A}^{n-1}\underline{b} \end{bmatrix}$
! RNF existiert nur falls $\underline{S}_S$ regulär ist $\rightarrow$ System ist vollst. steuerbar

$$\text{Transformationsmatrix } \underline{T}_R = \begin{bmatrix} \underline{s}_R^T \\ \underline{s}_R^T \underline{A} \\ \underline{s}_R^T \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{s}_R^T \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

Beobachtungsnormalform:
$\dot{\underline{x}}_B = \underline{A}_B \underline{x}_B + \underline{b}_B u \quad \underline{x}_B(t_0) = \underline{x}_{B0}$
$y = \underline{c}_B^T \underline{x}_B + du$

$$\text{Beobachtbarkeitsmatrix } \underline{S}_B = \begin{bmatrix} \underline{c}^T \\ \underline{c}^T \underline{A} \\ \underline{c}^T \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{c}^T \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}$$

Transformationsmatrix $\underline{T}_B = \begin{bmatrix} \underline{s}_B & \underline{A}\underline{s}_B & \ldots & \underline{A}^{n-1}\underline{s}_b \end{bmatrix}$

$\underline{A}_R = \underline{A}_B^T \quad \underline{b}_R = \underline{c}_B \quad \underline{c}_R = \underline{b}_B$

3.3. Schockschaltbildalgebra

Serienschaltung: $G(s) = \prod G_i(s)$
Parallelschaltung: $G(s) = \sum G_i(s)$
Kreisstruktur: $G(s) = \frac{G_{\text{Vor}}(s)}{1 \mp G_{\text{Vor}}(s) G_{\text{Rück}}(s)}$

3.4. Laplacetransformation

Anfangswertsatz: $y(t \to \infty) = \lim\limits_{s \to 0} [sG(s)U(s)]$
Endwertsatz: $y(t = 0^+) = \lim\limits_{s \to \infty} [sG(s)U(s)]$
Bleibender Regelfehler: $e(\infty) = u(\infty) - y(\infty)$

4. Systembausteine

4.1. P-System

$y(t) = K_P u(t) \qquad G(s) = K_P$

4.2. I-System

$\dot{y}(t) = K_I u(t) \qquad G(s) = \frac{K_I}{s}$

4.3. D-System

$y(t) = K_D \dot{u}(t) \qquad G(s) = K_D s$

4.4. Totzeitsystem

$y(t) = K u(t - T_t) \qquad G(s) = K e^{-sT_t}$

4.5. PT$_1$-Systeme

$T\dot{y}(t) + y(t) = K_P u(t) \qquad G(s) = \frac{K_P}{1 + sT}$

4.6. PT$_2$-Systeme

$\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \dot{y}(t) + \omega_0^2 y = K_P \omega_0^2 u(t)$
$G(s) = K_P \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 + \omega_0^2}$
Einstellzeit T_{Ein} bis Signal im 5% Bereich stabil.
Übung:
1. Verschieben der Summationsstelle
2. Vertauschen/Zusammenfassen der Summationsstelle

n Pole $\neq 0$ im Nenner: T$_n$ System
Allgemeine Polform: $p_{1/2} = \underbrace{-\omega_0 D}_{\sigma_e} \pm i \underbrace{\omega_0 \sqrt{1 - D^2}}_{\omega_e}$
Dämpfung D entscheidet ob System stabil: $D \leq 0$: instabil

5. Stabilität von Systemen

5.1. Definitionen

stabil bzw. zustandsstabil: $\|\underline{x}_0\| < \varepsilon_1 \Rightarrow \|\underline{x}(t)\| < \varepsilon_2$

asymptotisch stabil: zustandsstabil und $\lim\limits_{t \to \infty} \|\underline{x}(t)\| = 0$

robust stabil: bleibt auch bei Paramterabweichungen stabil.
Beispiel untersch. Systemmatrix: $\forall \underline{A} \in \{\underline{A}_{\min}; \underline{A}_{\max}\}$ stabil

5.1.1 Stabilitätsbedingung

für LTI-Systeme

$$\boxed{\operatorname{Re}\{\lambda_i(A)\} < 0 \quad i = 1, \ldots, n}$$

5.2. Routh-Hurwitz-Kriterium

Gegeben:
charakteristisches Polynom: $N(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_0$

Notwendige Bedingung: $b_i > 0 \quad \forall i \leq n$ oder $b_i < 0 \quad \forall i \leq n$

Betrachte Koeffizienten b_i des Nenners von $G(s)$

$n = 1: \quad b_1 > 0, \quad b_0 > 0$
$n = 2: \quad b_2 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_0 > 0$
$n = 3: \quad b_3 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_0 > 0$
$\qquad b_2 b_1 - b_0 b_3 > 0$
$n = 4: \quad b_4 > 0, \quad b_3 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_0 > 0$
$\qquad b_3 b_2 b_1 - b_0 b_3^2 - b_1^2 b_4 > 0$

> Ein System ist dann und nur dann stabil, wenn gilt:
> $b_n > 0$ und alle n Hurwitzdeterminanten > 0

5.3. Direkte Methode von Lyapunov

Betrachte nur Systemmatrix $\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}$: $\boxed{\underset{\sim}{\boldsymbol{A}}^\top \underset{\sim}{\boldsymbol{P}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{P}}\underset{\sim}{\boldsymbol{A}} = -\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}}}$

1. Wähle $\underset{\sim}{\boldsymbol{Q}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}_n$ 2. Berechne $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$

System asymptotisch stabil $\Longleftrightarrow$ $\underset{\sim}{\boldsymbol{P}}$ symm. und pos. definit

5.4. Eigenwerte und Polstellen

5.4.1 Pole

Pole p_i von $G(s)$: Alle $\operatorname{Re}\{p_i\} < 0$

$G(s) = \sum \frac{k_i}{s-p_i} \quad \Rightarrow \quad g(t) = \sum k_i e^{p_i t}$

5.4.2 Nyquist Kriterium

Betrachtet Ortskurve und Pole $p_{\text{links}}, p_{\text{rechts}}, p_{\text{auf}}$ im Bezug auf die Imaginärachse. Das System ist stabil falls die OK nicht durch $-1+0\mathrm{i}$ verläuft und die Phasenänderung $W_{\text{soll}} = \underset{\omega=0}{\overset{\omega\to\infty}{\Delta}} \Phi = \pi p_{\text{rechts}} + \frac{\pi}{2} p_{\text{auf}}$

5.4.3 Dominanz im System

Vorraussetzung $T_{\max} > \tau_{\min}$

Große Zeitkonstanten, Pole mit pos. Realteil (instabil),

5.5. Zustandssteuerbarkeit und -beobachtbarkeit

zustandssteuerbar: man kann $\underline{\boldsymbol{x}}(t<\infty) = 0$ mit $\underline{\boldsymbol{u}}(t)$ erreichen

zustandsbeobachtbar: man kann $\underline{\boldsymbol{x}}_0$ aus $\underline{\boldsymbol{y}}(t<\infty)$ bestimmen

5.6. E/A (BIBO) Stabilität (äußere Stabilität)

E/A Stabilität

$\operatorname{Re}\{p_i\} < 0 \quad i = 1, 2, \dots n$

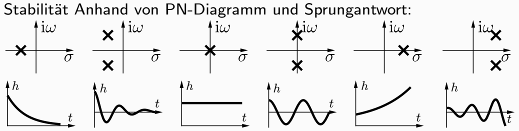
$\sum$ ist E/A-stabil, falls gilt:

Definition: $\|\underline{\boldsymbol{u}}(t)\| < \varepsilon_1 \Rightarrow \|\underline{\boldsymbol{x}}(t)\| < \varepsilon_2$

Pole der Übertragungsfunktion:

$\operatorname{Re}\{p_i\} < 0 \quad i = 1, 2, \dots n$

Stabilität Anhand von PN-Diagramm und Sprungantwort:



stabil | stabil | stabil*. | stabil* | instabil | instabil

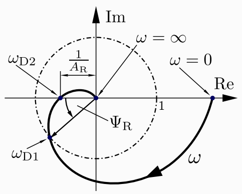
*: An der Stabilitätsgrenze.

Zusammenhang zwischen innerer und äußerer Stabilität

Falls $\sum$ vollst. steuer- und beobachtbar, oder nur auf einer Untermenge steuer- und beobachtbar:

$\Rightarrow$ asymptotisch stabil $\Leftrightarrow$ E/A-stabil

5.7. Frequenzgangfunktion $G_0(\mathrm{i}\omega)$



$A(\omega_{D1}) = 1 \qquad \varphi(\omega_{D2}) = -\pi$

$T_{\text{ein}} \approx \frac{3}{\omega_{D1}}$

Stabilitätskriterien mit Totzeit:

geschl. RK ist E/A stabil falls:

Phasenrad $\Phi_R > 0$

Amplitudenrand $A_R > 1$

$\Psi_R \approx 30^\circ \Leftrightarrow$ gutes Störverhalten

$\Psi_R \approx 60^\circ \Leftrightarrow$ gutes Folgeverhalten

6. Grundlagen Reglerentwurf

Ziel: ideale Führung und ideal Störungsrobust $y(t) \overset{!}{=} 1 \cdot w(t) + \sum 0 z_i(t)$

$G_0(s) = G_R(s) G_S(s) G_r(s)$