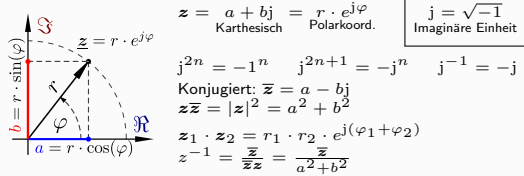


1. Mathematische Grundlagen

1.1. Komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$



1.2. LaPlace - Korrespondenzen und Rechenregeln

$g(t)$	$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$
Einheitsimpuls $\delta(t)$	1
Einheitssprung $\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)	$\frac{1}{s^n}$
t^n ($n = 1, 2, 3, \dots$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$t^n e^{-at}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$\frac{1}{b-a} (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\frac{1}{b-a} (e^{-bt} - e^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{ab} (1 + \frac{1}{a-b} (be^{-at} - ae^{-bt}))$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

Zeitbereich	Frequenzbereich	Kommentar
$c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t)$	$c_1 G_1(s) + c_2 G_2(s)$	Linearitätsregel
$g(t - T_t)$	$e^{-sT_t} G(s)$	Verschiebungsregel
$g(at)$	$\frac{1}{a} G(\frac{s}{a})$	Ähnlichkeitsregel
e^{at}	$G(s - a)$	Dämpfungsregel
$\frac{dg}{dt}$	$sG(s)$	Differentiationsregel
$\int_0^t g(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s} G(s)$	Integrationsregel

Hinweis: wird noch vervollständigt

1.3. Exponentialfunktion und Logarithmus

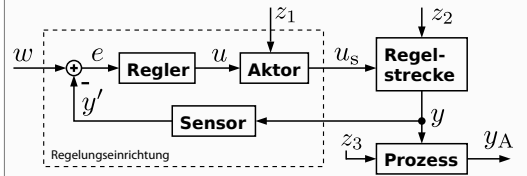
$a^x = e^{x \ln a}$	$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$	$\ln x \leq x - 1$
$\ln(x^a) = a \ln(x)$	$\ln(\frac{x}{a}) = \ln x - \ln a$	$\log(1) = 0$

1.4. Matrizen

1.4.1. 2×2 -Matrix invertieren

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

2. Der Regelkreis



Regelfehler	$e = w - y$	Differenz zwischen „Soll“ und „Ist“
Stellgröße	u_s	Eingang der Regelgröße
Führungsgröße	w	Sollverlauf, Vorgabe
Aufabengröße	y_A	Die zu beeinflussende Größe
Regelgröße	y	Die vom Sensor erfasste Größe
Störgrößen	z_i	Nicht beeinflussbare Störungen

2.1. Standardübertragungsfunktionen

Gelten für den oben dargestellten Standardregelkreis.

$$Y(s) = \frac{G_R G_S}{1 + G_0} W + \frac{G_S}{1 + G_0} Z_1 + \frac{1}{1 + G_0} Z_2 + \frac{-G_0}{1 + G_0} Z_3$$

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_0} W + \frac{-G_S G_R}{1 + G_0} Z_1 + \frac{-G_R}{1 + G_0} Z_2 + \frac{-G_R}{1 + G_0} Z_3$$

Zustand: Ausgang eines Integrators

3. Modellbildung, Linearisierung, lin. Systeme

3.1. Zustandsbeschreibung linearer Systeme

mit r Erregungen, n Zustandsgrößen und k Ausgängen.
Die Zustandsgrößen \underline{x} müssen einen stetigen Verlauf haben!

Allgemeine Zustandsgleichung:	$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{B}\underline{u}(t)$
Allgemeine Ausgangsgleichung:	$\underline{y}(t) = \underline{C}\underline{x}(t) + \underline{D}\underline{u}(t)$
Zustandsvariable	$\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$
Ausgangsvariable	$\underline{y}(t) \in \mathbb{R}^k$
Erregungsvektor	$\underline{u} \in \mathbb{R}^r$
Systemmatrix	$\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$
Einkopplungsmatrix	$\underline{B} \in \mathbb{R}^{n \times r}$
Auskopplungsmatrix	$\underline{C} \in \mathbb{R}^{k \times n}$
Durchgangsmatrix	$\underline{D} \in \mathbb{R}^{k \times r}$

Falls \underline{A} , \underline{B} , \underline{C} oder \underline{D} zeitvariabel sind handelt es sich um ein LTV-System, falls nicht um ein LTI-System.

3.2. Linearisierung

Gegeben (nicht linear): $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$ $\underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, \underline{u})$

3.2.1. um eine allg. Referenzlösung

Referenzlösung $\underline{x}^*(t)$, $\underline{y}^*(t)$, $\underline{u}^*(t)$ mit $t \geq 0$ liegt vor.

$$\Delta \dot{\underline{x}} = \underline{A}(\underline{x}) \Delta \underline{x} + \underline{B}(\underline{x}) \Delta \underline{u}$$

$$\underline{A}(t) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \bigg|_{(\underline{x}^*(t), \underline{u}^*(t))} \quad \underline{B}(t) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right] \bigg|_{(\underline{x}^*(t), \underline{u}^*(t))}$$

$$\Delta \underline{y} = \underline{C}(\underline{x}) \Delta \underline{x} + \underline{D}(\underline{x}) \Delta \underline{u}$$

$$\underline{C}(t) = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right] \bigg|_{(\underline{x}^*(t), \underline{u}^*(t))} \quad \underline{D}(t) = \left[\frac{\partial g_i}{\partial u_j} \right] \bigg|_{(\underline{x}^*(t), \underline{u}^*(t))}$$

3.2.2. um eine Ruhelage

Spezielle Referenzlösung \underline{x}^* , \underline{y}^* , \underline{u}^* konstant in Ruhelage.

$$\Delta \dot{\underline{x}} = \underline{A} \Delta \underline{x} + \underline{B} \Delta \underline{u} \quad \Delta \underline{y} = \underline{C} \Delta \underline{x} + \underline{D} \Delta \underline{u}$$

$$\underline{A} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right] \bigg|_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \quad \underline{C} = \left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right] \bigg|_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)}$$

$$\underline{B} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_j} \right] \bigg|_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)} \quad \underline{D} = \left[\frac{\partial g_i}{\partial u_j} \right] \bigg|_{(\underline{x}^*, \underline{u}^*)}$$

4. Darstellung von LTI-SISO Systemen

4.1. Differentialgleichungen (DGL)

Gleichung mit Funktion y und deren n -ten Ableitungen y', y'', \dots

Allgemeine DGL n -ter Ordnung:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m x^{(m)} + \dots + b_1 x' + b_0 x$$

Gesucht ist eine Funktion y und keine Zahl! In der Praxis werden DGLs numerisch für diskrete Werte gelöst.

4.1.1. DGL-Systeme

Jede DGL lässt sich reduzieren auf ein DGL-System 1. Ordnung:

1. Substituiere $x_i := y^{(i-1)}$ und drücke \dot{x}_i durch x_1, \dots, x_n aus.

$$\Rightarrow \dot{\underline{x}}(t) = \underline{A}\underline{x}(t) + \underline{s}(t) \quad \text{mit } \underline{x}_{\text{ges}} = \underline{x}_{\text{hom}} + \underline{x}_{\text{part}}$$

Hom. Lösung: 1. Bestimme EW λ_i und Basis aus EV \underline{b}_i von \underline{A}

$$2. \underline{x}_{\text{hom}} = \underline{c} \cdot e^{(x-x_0)\underline{A}} = \sum_{i=0}^n c_i \cdot e^{\lambda_i x} \cdot \underline{b}_i$$

3. Bestimmung der Konstanten durch einsetzen der Anfangsbedingungen!

4.2. Die Übertragungsfunktion

Beschreibt das System vollständig. Wird im Laplacebereich angegeben.

Übertragungsfunktion einer lin. DGL n -ter Ordnung in Polynomform:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\beta_m s^m + \dots + \beta_1 s + \beta_0}{\alpha_n s^n + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0} = \frac{Z(s)}{N(s)}$$

(n = Ordnung der DGL = Anzahl der Pole)

$$\text{Übertragungsfunktion der Zustandsbeschreibung: } \underline{G}(s) = \{ \underline{C}(s\underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D} \}$$

für $q = r = 1$ (SISO-System): $G(s) = \{ \underline{c}^T (s\underline{E} - \underline{A})^{-1} \underline{b} + d \}$

$$\text{Linearfaktorenform: } G(s) = \frac{\beta_m}{\alpha_n} \frac{\prod (s - z_j)}{\prod (s - p_i)}$$

$$\text{Zeitkonstantenform: } G(s) = \frac{\beta_0}{\alpha_0} \frac{\prod (1 + T_{p_i} s)}{\prod (1 + T_{z_j} s)}$$

$$\text{Partialbruchform: } G(s) = A_0 \sum \frac{A_j}{s - p_j} = A_0 + G^+(s)$$

4.2.1. Dominierendes Verhalten und Ordnungsreduktion

Pole nahe der Imaginärachse dominieren. Anwendung auf Zeitkonstantenform.

- Sortiere Zeitkonstanten nach Größe
- Gilt zwischen 2 benachbarten Werten $T_i > 10\tau_j$, so können τ_j und alle kleineren Werte vernachlässigt werden.
- $G(s) = \prod_i \frac{K_i}{(1 + T_i s)} \prod_j \frac{1}{(1 + \tau_j s)} \rightarrow G^*(s) = \prod_i \frac{K_i}{(1 + T_i s)}$

Hinweise:

- Zeitkonstanten aus Polen: $T_i = \frac{1}{|p_i|}$
- Pole auf oder rechts von Imaginärachse dürfen nicht vernachlässigt werden.

4.2.2. Wichtige spezielle Übertragungsfunktionen (Frequenzantw.)

$u(t)$	$U(s)$	Zeitantwort	Frequenzantwort
$\delta(t)$	1	Gewichtsfunktion $g(t)$	$G(s)$
$\sigma(t)$	$\frac{1}{s}$	Übergangsfunktion $h(t)$	$H(s)$
$t \cdot \sigma(t)$	$\frac{1}{s^2}$	Anstiegsantw.	Rampenantwort

ÜTF Regler $G_R(s)$

ÜTF Steller/Strecke $G_S(s)$

ÜTF Rückführung $G_r(s)$

ÜTF offener Regelkreis $G_O(s) = G_R(s)G_S(s)G_r(s)$

Führungsübertragungsfunktion $G_w(s) = \frac{Y(s)}{W(s)}$

Störübertragungsfunktion $G_z(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)}$

Es gilt $N_{RK}(s) = N_O + Z_O$

4.2.3. Frequenzgang

Der FG ist die Systemantwort bei harmonischer Erregung $u(t) = e^{j\omega t}$
Nach dem Einschwingen (wird ignoriert) ist die Systemantwort ebenfalls harmonisch, allerdings mit anderer Amplitude und Phase.

$$\text{Frequenzgang: } G(j\omega) = G(s)|_{s=0+j\omega, \omega>0} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

4.2.4. Zustandsraummodell

DGL n -ter Ordnung:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u' + b_0 u$$

Lässt sich immer reduzieren auf ein DGL-System 1. Ordnung:

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\text{wobei } \underline{x} = \frac{1}{b_0} \begin{bmatrix} y & y' & \dots & y^{(n)} \end{bmatrix}^T$$

Normalformen

- Kanonische Normalform

zur Entkopplung des Systems bzw. der zugehörigen DGLs.

Wähle \underline{T} , sodass $\underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T}$ eine Diagonalmatrix ist:

$$\underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} = \text{diag}(\lambda_i)$$

$$\dot{\underline{\hat{x}}} = \text{diag}(\lambda_i) \underline{\hat{x}} + \underline{\hat{b}} u$$

$$y = \underline{c}^T \underline{\hat{x}} + du$$

- Regelungsnormform:

nur die letzte Zustandsvariable x_{Rn} wird direkt durch den Eingang beeinflusst

Steuerbarkeitsmatrix: $\underline{S}_S = \begin{bmatrix} \underline{b} & \underline{A}\underline{b} & \underline{A}^2\underline{b} & \dots & \underline{A}^{n-1}\underline{b} \end{bmatrix}$
! RNF existiert nur falls \underline{S}_S regulär ist \rightarrow System ist vollst. steuerbar

$$\text{Transformationsmatrix } \underline{T}_R = \begin{bmatrix} \underline{s}_R^T \\ \underline{s}_R^T \underline{A} \\ \underline{s}_R^T \underline{A}^2 \\ \vdots \\ \underline{s}_R^T \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1}$$

- Beobachtungsnormalform:

$$\dot{\underline{\hat{x}}}_B = \underline{A}_B \underline{\hat{x}}_B + \underline{b}_B u \quad \underline{\hat{x}}_B(t_0) = \underline{x}_{B0}$$

$$y = \underline{c}_B^T \underline{\hat{x}}_B + du$$

Beobachtbarkeitsmatrix

$$\underline{S}_B = \begin{bmatrix} \underline{c}^T & \underline{c}^T \underline{A} & \underline{c}^T \underline{A}^2 & \dots & \underline{c}^T \underline{A}^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

Transformationsmatrix

$$\underline{T}_B = \begin{bmatrix} \underline{s}_B & \underline{A}\underline{s}_B & \dots & \underline{A}^{n-1}\underline{s}_B \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}_R = \underline{A}_B^T \quad \underline{b}_R = \underline{c}_B \quad \underline{c}_R = \underline{b}_B$$

4.3. Schockschaltbildalgebra

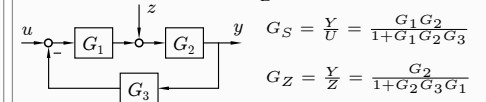
Serienschaltung: $G(s) = \prod G_i(s)$

Parallelschaltung: $G(s) = \sum G_i(s)$

Kreisstruktur: $G(s) = \frac{G_{\text{Vor}}(s)}{1 \mp G_{\text{Vor}}(s)G_{\text{Rück}}(s)}$

$$\text{Umformung: } \frac{\frac{A}{B}}{1 \pm \frac{A}{B} \frac{C}{D}} = \frac{DA}{AC \pm BD} \quad \frac{1}{1 + \frac{B}{A}} = \frac{B}{A+B}$$

$$\text{Umformung bei } G_{\text{Rück}} = 1: \frac{\frac{A}{B}}{1 \pm \frac{A}{B}} = \frac{A}{A \pm B}$$



4.4. Anfangs und Endwertsatz

Voraussetzung: höchstens ein einfacher Pol von $Y(s)$ am Ursprung, die restlichen in der linken Halbebene.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} sX(s)$$

Anfangswertsatz: $y(t = 0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sG(s)U(s)]$

Endwertsatz: $y(t \rightarrow \infty) = \lim_{s \rightarrow 0} [sG(s)U(s)]$

Regelfehler: $e(\infty) = w(\infty) - y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s(1 - G_w(s))W(s)$

5. Systembausteine

System	Zeitbereich	Frequenzbereich $G(s)$
P-System	$y(t) = K_P u(t)$	K_P
I-System	$\dot{y}(t) = K_I u(t)$	$\frac{K_I}{s}$
D-System	$y(t) = K_D \dot{u}(t)$	$K_D s$
Totzeitsystem	$y(t) = K u(t - T_t)$	$K e^{-sT_t}$
PT ₁ -Systeme	$T \dot{y}(t) + y(t) = K_P u(t)$	$\frac{K_P}{1+sT}$
PT ₂ -Systeme	$\ddot{y}(t) + 2D\omega_0 \dot{y}(t) + \omega_0^2 y = K_P \omega_0^2 u(t)$	$K_P \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$

Einstellzeit T_{Ein} bis Signal im 5% Bereich stabil.

Übung:

1. Verschieben der Summationsstelle
2. Vertauschen/Zusammenfassen der Summationsstelle

5.1. PT₂ Systeme

DGL: $\ddot{y} + 2D\omega_0 \dot{y} + \omega_0^2 y = K\omega_0^2 u$

Übertragungsfunktion: $G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2}$

n Pole $\neq 0$ im Nenner: T_n System

Allgemeine Polform: $p_{1/2} = \frac{-\omega_0 D \pm j\omega_0 \sqrt{1 - D^2}}{\omega_e}$

Dämpfung	Systemverhalten
$D < 0$	System instabil
$D = 0$	Grenzstabil, Dauerschwingung, Resonanzkatastrophe
$D \in]0; 1[$	Abkl. Schwingung, Konjugiert komplexe Pole Für $0 < D < \frac{\sqrt{2}}{2}$ Resonanz $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}$ $A_{\max} = A(\omega_r) = \frac{K}{2D\sqrt{1 - D^2}}$
$D = \frac{\sqrt{2}}{2}$	Minimale Einschwingzeit T_{Ein}
$D = 1$	Aperiodisch \leftrightarrow reeler Doppelpol \leftrightarrow Diskriminante = 0
$D > 1$	Griechfall, verschiedene reele Pole

6. Stabilität von LTI-Systemen

6.1. Definitionen

stabil bzw. zustandsstabil: $\|\underline{x}_0\| < \varepsilon_1 \Rightarrow \|\underline{x}(t)\| < \varepsilon_2$

asymptotisch stabil: zustandsstabil und $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{x}(t)\| = 0$

robust stabil: bleibt auch bei Parameterabweichungen stabil.

Beispiel untersch. Systemmatrix: $\forall \underline{A} \in \{\underline{A}_{\min}; \underline{A}_{\max}\}$ stabil

6.1.1. Stabilitätsbedingung für LTI-Systeme

$$\text{Re} \{ \lambda_i(\underline{A}) \} < 0 \quad i = 1, \dots, n$$

6.2. Routh-Hurwitz-Kriterium

Gegeben:

charakteristisches Polynom: $N(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0$

Notwendige Bedingung: $b_i > 0 \quad \forall i \leq n$ oder $b_i < 0 \quad \forall i \leq n$

Betrachte Koeffizienten b_i des Nenners von $G(s)$

- $n = 1:$ $b_1 > 0, \quad b_0 > 0$
- $n = 2:$ $b_2 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_0 > 0$
- $n = 3:$ $b_3 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_0 > 0$
 $b_2 b_1 - b_0 b_3 > 0$
- $n = 4:$ $b_4 > 0, \quad b_3 > 0, \quad b_2 > 0, \quad b_1 > 0, \quad b_0 > 0$
 $b_3 b_2 b_1 - b_0 b_3^2 - b_1^2 b_4 > 0$

Ein System ist dann und nur dann stabil, wenn gilt:
 $b_n > 0$ und alle n Hurwitzdeterminanten > 0

6.3. Direkte Methode von Lyapunov

Der GGP \underline{x}^* ist asymptotisch stabil, wenn eine Lyapunov-Funktion $V(\underline{x})$ gefunden werden kann mit:

1. $V(\underline{x}^*) = 0$
2. $V(\underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x}$
3. $\frac{d}{dt} V(\underline{x}) < 0 \quad \forall$ Lösungen $\underline{x}(t)$ der DGL

Für lineare System mit Systemmatrix \underline{A} :

$$\underline{A}^T \underline{P} + \underline{P} \underline{A} = -\underline{Q}$$

Direkte Methode von Lyapunov für lineare Systeme

- Wähle $\underline{Q} = \underline{E}_n$
- Berechne \underline{P}
- System asymptotisch stabil $\iff \underline{P}$ symm. und pos. definit

6.4. Eigenwerte und Polstellen

6.4.1. Pole

Pole p_i von $G(s)$: Alle $\text{Re} \{ p_i \} < 0$

$$G(s) = \sum \frac{k_i}{s - p_i} \Rightarrow g(t) = \sum k_i e^{p_i t}$$

6.4.2. Dominanz im System

Vorraussetzung $T_{\max} < \tau_{\min}$

Große Zeitkonstanten, Pole mit pos. Realteil (instabil)

6.5. Zustandssteuerbarkeit und -beobachtbarkeit

6.5.1. Zustandssteuerbarkeit

Def.: Man kann mit $\underline{u}(t)$ in endlicher Zeit $\underline{x}(t < \infty) = 0$ erreichen

Bedingung: $\text{Rang}(\underline{Q}_{SZ}) = n$ bzw. $\det(\underline{Q}_{SZ}) \neq 0$

mit Zustandssteuerbarkeitsmatrix $\underline{Q}_{SZ} = [\underline{B}, \underline{A}\underline{B}, \dots, \underline{A}^{n-1}\underline{B}]$

6.5.2. Zustandsbeobachtbarkeit

Def.: Anfangszustände \underline{x}_0 aus Verlauf $\underline{y}(t < \infty)$ bestimmbar

Bedingung: $\text{Rang}(\underline{Q}_{BZ}) = n$ bzw. $\det(\underline{Q}_{BZ}) \neq 0$

mit Zustandssteubeobachtbarkeitsmatrix
 $\underline{Q}_{BZ} = [\underline{C}^T, \underline{A}^T \underline{C}^T, \dots, (\underline{A}^T)^{n-1} \underline{C}^T]$

6.6. E/A (BIBO) Stabilität (äußere Stabilität)

$$\text{Re} \{ p_i \} < 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

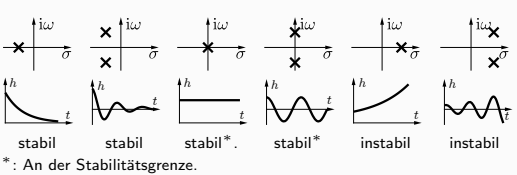
\sum ist E/A-stabil, falls gilt:

Definition: $\|\underline{x}(t)\| < \varepsilon_1 \Rightarrow \|\underline{x}(t)\| < \varepsilon_2$

Pole der Übertragungsfunktion:

$\text{Re} \{ p_i \} < 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$

Stabilität anhand von PN-Diagramm und Impulsantwort:



Zusammenhang zwischen innerer und äußerer Stabilität

Falls \sum vollst. steuer- und beobachtbar, oder nur auf einer Untermenge steuer- und beobachtbar: \Rightarrow asymptotisch stabil \iff E/A-stabil

Stabilitätsreserve

Absolut: $\sigma_{gr} = \min p_i$

Relativ: $D_{gr} = \cos(\varphi_{gr})$

7. Stabilitätsanalyse im Frequenzteich

für alle Systeme (auch mit Totzeit) möglich.

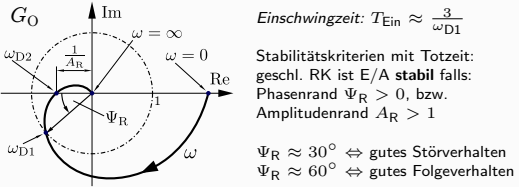
ω_A	Abtastfrequenz
ω_g	Grenzfrequenz
ω_B	Systembandbreite

7.1. Frequenzgangfunktion $G(j\omega)$

Beschreibt die Auswirkungen von sinusförmigen Anregungen auf die Systemantwort.

Die Auswirkungen auf Amplitude A und Phasenverschiebung φ ergeben die Frequenzgangfunktion $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \text{Re} \{ G(j\omega) \} + j \text{Im} \{ G(j\omega) \}$$



Kenngößen:	Bodediagramm:
Amplituden-Durchtrittsfrequenz ω_{D1} :	$A(\omega_{D1}) = 1$
Phasen-Durchtrittsfrequenz ω_{D2}	$\varphi(\omega_{D2}) = -\pi = -180^\circ$
Phasenrand/Phasenreserve Ψ_R :	$\Psi_R = \varphi(\omega_{D1}) + \pi$
Amplitudenrand/-reserve $A_R (= K_{\text{krit}})$	$\frac{1}{A_R} = A(\omega_{D2})$

7.1.1. Schwingbedingung

Situation in der der Regelkreis sich selbst erregen und (theoretisch) mit ω_{krit} weiterschwingen würde.

$$G_0(j\omega) \stackrel{!}{=} -1 + j0$$

Der Regelkreis befindet sich an der Stabilitätsgrenze:
 \Rightarrow Dauerschwingungen mit $\omega = \omega_{\text{krit}}$ und $K = K_{\text{krit}}$ (krit. Verstärkung)

7.2. Nyquist

7.2.1. Nyquist Ortskurve

Die Nyquist Ortskurve ist die Frequenzgang Ortskurve des offenen Regelkreises $G_o(s)$

7.2.2. Nyquist Kriterium

Ein geschlossener linearer Regelkreis ist dann stabil, wenn die Ortskurve des offenen Regelkreises $G_o(j\omega)$

1. nicht durch $-1 + j0$ verläuft und
2. die Phasenänderung von $-1 + j0$ aus gesehen folgende Bedingung erfüllt

$$W_{\text{ist}} = \frac{\omega = \infty}{\omega = 0} \Phi \stackrel{!}{=} W_{\text{soll}} = \pi n_{\text{rechts}} + \frac{\pi}{2} n_{\text{auf}}$$

n_{rechts} : Anzahl der Pole von $G_o(s)$ rechts der Imaginärachse

n_{auf} : Anzahl der Pole von $G_o(s)$ auf der Imaginärachse

7.2.3. Linke-Hand-Regel

anwendbar falls $n_r = 0$ und $n_a \leq 1$

Definition:

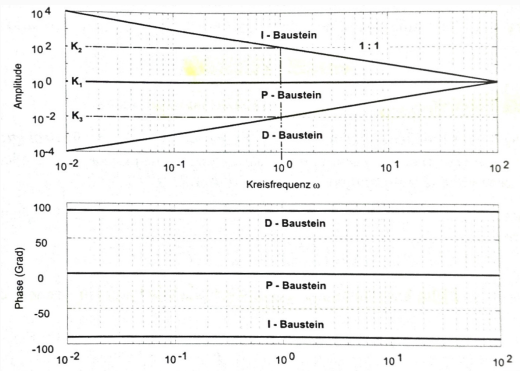
Der geschlossens Regelkreis ist stabil, wenn beim Entlangwandern auf der $G_0(j\omega)$ - Ortskurve von $\omega = 0$ nach $\omega = \infty$ (Blick nach vorne!) der kritische Punkt P_{krit} beim Passieren des diem am nächsten liegenden Ortskurvenabschnittes stets linker Hand liegt.

7.3. Bode-Diagramm

aufteilung der Frequenzgangfunktion in Phase ($\varphi(\omega)$) und Amplitude ($A(\omega)$).

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

7.3.1. Typische Regelstrecken



Die Eckfrequenz ω_E bezeichnet die Stelle von $G(j\omega)$ mit $A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{2}}$

Zusätzlich gilt: $\omega_E = \frac{1}{T}$

Im PT_1 -System gilt: $A(\omega_E) = \frac{K}{\sqrt{2}} \quad \omega_B = \omega_E$

Baustein	Auswirkung auf Amplitude	Ausw. Phase
Verstärkung K	$A(\omega) = K$	$\varphi(\omega) = 0$
Pol im Ursprung	1:1 Abfall, $A(\omega = 1) = 1$	$\varphi(\omega) = -90^\circ$
Reeller Pol $s = -\omega_E$	$A(\omega) = 1$ für $\omega \ll \omega_E$	$\varphi(\omega) = 0$
	1:1 Abfall für $\omega \gg \omega_E$	$\varphi(\omega) = -90^\circ$

Weitere Auswirkungen siehe Skript S. 130

7.4. Systeme mit Totzeit

lassen sich schwer regeln.

Stabilitätsbedingung: $0 < K_0 < 1$
bleibende Regeldifferenz nach Sprunganregung $\sigma(t)$ immer $> 0,5$

8. Grundlagen Reglerentwurf

Ziel: ideale Führung und ideal Störungsrobust:

$$y(t) \stackrel{!}{=} 1 \cdot w(t) + \sum 0 \cdot z_i(t)$$

Generell: P-Strecke mit I-Regler, I-Strecke mit P-Regler!

8.1. Entwurfsvorschriften

Stabilität: $\Psi_R > 0$

Gutes stationäres Verhalten: $|G_o(j\omega)|_{\omega \ll \omega_{D1}} \gg 1 \rightarrow$ I-Regler oder starker P-Regler

Gutes Einschwingverhalten:

$$|G_o(j\omega)| \approx \frac{1}{\omega_{D1}}, \quad 0,5\omega_{D1} \leq \omega \leq 5\omega_{D1}$$

Bandbreite: $\omega_B \approx \omega_{D1}$

Einschwingzeit: $T_{\text{ein}} = 3\hat{T} \approx \frac{3}{\omega_{D1}}$

gutes Folgeverhalten: $\Psi \approx 60^\circ$

gutes Störverhalten: $\Psi \approx 30^\circ$

wenig Messrauschen: $|G_o(j\omega)|_{\omega \gg \omega_{D1}} \ll 1$

8.2. Reglerentwurf nach Ziegler-Nichols

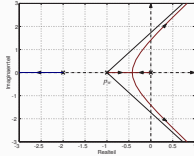
Regeltyp	K_R	T_n	T_v
P	$0,5 K_{R,\text{krit}}$	(∞)	(0)
PI	$0,45 K_{R,\text{krit}}$	$0,85 T_{\text{krit}}$	(0)
PID	$0,7 K_{R,\text{krit}}$	$0,4 T_{\text{krit}}$	$0,15 T_{\text{krit}}$

8.3. Wurzel Ortskurven WOK

Entspricht Verlauf der Polstellen p^{RK} des geregelten Kreises G_{RK} für steigendes K

WOK ist immer symm. zur Realachse!

Totzeitglied im System \Rightarrow WOK ungültig!



$$G_0(s; K) = K \frac{Z_0(s)}{N_0(s)} = KQ \frac{\prod_{\mu=1}^m (s - q_{\mu}^0)}{\prod_{\nu=1}^n (s - p_{\nu}^0)}$$

Falls offener RK G_0 linear vom Faktor K abhängt gelten folgende Regeln für den geschlossenen RK G_{RK} :

- Die Pole p^{RK} liegen symm. zur reellen Achse bzw. darauf
- n Äste beginnen für $K = 0$ in den Polen p^0
- m Äste enden für $K \rightarrow \infty$ in den NST q^0
- $n - m$ Äste enden für $K \rightarrow \infty$ im Unendlichen, ihre Asymptoten laufen durch den Wurzelschwerpunkt $p_w = \frac{\sum p^0 - \sum q^0}{n - m}$ und schließen mit der reellen Achse den Winkel Φ_l ein
- $\Phi_l = \frac{(2l-1)\pi}{n-m}$ für $KQ > 0$ bzw. $\Phi_l = \frac{(2l-2)\pi}{n-m}$ für $KQ < 0$ mit $l = 1, \dots, (n - m)$
- Ein Punkt der reellen Achse ist genau dann Teil der WOK des geschlossenen Kreises, wenn die Anzahl der rechts von dem Punkt liegenden Pole und Nullstellen des offenen Kreises
 - für $KQ > 0$ ungerade
 - für $KQ < 0$ gerade oder nullist.

Verzweigungspunkt (Dplt. Polstelle): $N_{RK}(s) = 0 \wedge N'_{RK}(s) = 0$

Falls eine Grenzgerade $\text{Re}\{s\} = \sigma_{gr} < 0$ existiert und alle Pole links von dieser sind so schwingt das System schneller als $T = \frac{1}{|\sigma_{gr}|}$ ein.

8.4. Auswahl von Reglern

für praktische Anwendungen:

Strecke		Regler				
Typ	Beispiel	P	I	PI	PD	PID
P	Durchfluss	-	g	F,S	-	aufw.
PT ₁	Druck	F,e	g	S	g	aufw.
PT _n	Temperatur	g,e	-	g	-	F,S
T _n	Förderband	-	g	F,S	-	-
IT _n	Füllstand	F	i	S	F	S
I ₂	Kurs, Lage	i	-	-	F,S	-

i: instabil, g: geeignet, F: gute Führung, S: Störungsrobust, e: bleibender Regelfehler, aufw.: zu aufwendig

9. Erweiterte Regelungsstrukturen

9.1. Vorsteuerung

Zusätzlich zum Eingang wird noch eine Steuerrung hinzugefügt
Idealfall: $G_V(s) = \frac{1}{G_H(s)G_S(s)}$

9.2. Störgrößenaufschaltung

Idealfall: $G_A(s) = -\frac{1}{G_H(s)}$

9.3. Kaskadenregelung

Verschachtelte Regelrückführungen. Wird von außen nach innen reaktiver!
System lässt sich von innen nach außen hochfahren. Beispiel: Fahrzeugabstandregelung mit innerer Geeschwindigkeitsregelung

10. Zustandsregelung

Falls Stabilität der Zustände von Interesse. Erlaubt Platzierung der Eigenwerte/Pole durch Messung/Beobachtung der Zustände

10.1. Zustandsbeobachter (Simulation)

Ein Zustandsbeobachter ist ein dynamisches (Hilfs) System das alle nicht direkt messbaren Zustands- oder davon abgeleitete Größen aufgrund weniger direkter Messungen und durch ein Prozessmodell rekonstruiert bzw. schätzt.

10.1.1. Vollständiger Zustandsbeobachter

$\hat{\underline{x}}$	Schätzfehler
$\underline{v}, \underline{w}$	Prozess- bzw. Messrauschen
\underline{y}	direkte Messungen
\underline{u}	Eingangsgrößen
\underline{x}	Zustände
\underline{L}	Beobachter-Rückführmatrix

Gegeben: vollst. beobachtbares MIMO-System:

$$\dot{\underline{x}} = \underline{A}\underline{x} + \underline{B}\underline{u} + \underline{G}\underline{v} \quad \underline{y} = \underline{C}\underline{x} + \underline{w}$$

allgemeiner Form eines Beobachters:

$$\dot{\hat{\underline{x}}} = \hat{\underline{A}}\hat{\underline{x}} + \hat{\underline{B}}\underline{u} + \hat{\underline{L}}\underline{y} \quad \hat{\underline{y}} = \hat{\underline{C}}\hat{\underline{x}}$$

Schätzfehler: $\underline{\hat{x}}(t) = \hat{\underline{x}}(t) - \underline{x}(t)$

Asymptotischer Zustandsbeobachter:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\hat{x}}} &= (\underline{A} - \underline{L}\underline{C})\underline{\hat{x}} + \underline{B}\underline{u} + \underline{L}\underline{y} & \hat{\underline{y}} &= \underline{C}\underline{\hat{x}} \\ \underline{\hat{A}} &= \underline{A}_{\text{Beo}} \end{aligned}$$

alternative Schreibweise: $\dot{\underline{\hat{x}}} = \underbrace{\underline{A}\underline{\hat{x}} + \underline{B}\underline{u}}_{\text{Prozessmodell}} + \underbrace{\underline{L}(\underline{y} - \underline{C}\underline{\hat{x}})}_{\text{Korrekturterm}}$

Anschaulich ist der Beobachter ein 'Regelkreis' der die Schätzwerte für unbekannte Größen im System kontinuierlich verbessert und letztendes den 'Regel'fehler minimiert.

$$\text{Fehler-DGL (inkl. Rauschterm): } \dot{\underline{\hat{x}}} = \underbrace{(\underline{A} - \underline{L}\underline{C})\underline{\hat{x}}}_{\text{homogen}} + \underbrace{\underline{L}\underline{w} - \underline{G}\underline{v}}_{\text{inhomogen}}$$

Faustregel (für einen guten Kompromiss zwischen schnellem Einschwingen und Rauschen): $\text{Re}\{\lambda_i(\hat{\underline{A}})\} \leq \text{Re}\{\lambda_i(\underline{A})\} \quad \forall i$

10.1.2. Kalman-Bucy-Filter

Ziel: Bestimmung einer (rausch)optimalen \underline{L} -Matrix.

$$\text{Filtergleichungen: } \dot{\underline{\hat{x}}} = \underline{A}\underline{\hat{x}} + \underline{B}\underline{u} + \underline{L}(\underline{y} - \underline{C}\underline{\hat{x}})$$

$\underline{L} = \underline{\Pi}_+ \underline{C}^T \underline{W}^{-1}$ mit $\underline{\Pi}_+$ ist Kovarianzmatrix des Schätzfehlers.

$$\text{Kovarianzgleichung: } -\underline{A}\underline{\Pi} - \underline{\Pi}\underline{A}^T + \underline{\Pi}\underline{C}^T \underline{W}^{-1} \underline{C}\underline{\Pi} = \underline{G}\underline{V}\underline{G}^T$$

10.1.3. Zustandsraum-Kompensator

Zusammengesetzte Regeleinrichtung aus Zustandsregler und Zustandsbeobachter

$$G_{\text{Komp}}^y(s) = \frac{U(s)}{Y(s)} = \frac{\det \begin{bmatrix} s\underline{E} - \underline{A}_{\text{Komp}} & -\underline{l} \\ \underline{k}^T & 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} s\underline{E} - \underline{A}_{\text{Komp}} & 0 \\ \underline{k}^T & 0 \end{bmatrix}} = -\underline{k}^T (s\underline{E} - \underline{A}_{\text{Komp}})^{-1} \underline{l}$$
$$G_{\text{Komp}}^{w'}(s) = \frac{U(s)}{W'(s)} = -\underline{k}^T (s\underline{E} - \underline{A}_{\text{Komp}})^{-1} \underline{b} + 1$$

mit $\underline{A}_{\text{Komp}} = \underline{A} - \underline{L}\underline{C} - \underline{b}\underline{k}^T$

$$\text{Nullstellen } Z_{\text{Komp}}^y(s) = -\det \begin{bmatrix} s\underline{E} - \underline{A}_{\text{Komp}} & -\underline{l} \\ \underline{k}^T & 0 \end{bmatrix} = 0$$
$$\text{Polstellen } N_{\text{Komp}}^{y,w'}(s) = \det(s\underline{E} - \underline{A}_{\text{Komp}}) = 0$$

11. Zeitdiskrete Regelungsmodelle

$$\underline{x}_k = \underline{x}(t_k) = \underline{x}(kT_A)$$

Differenzengleichung ($\underline{\hat{y}}_k = \underline{y}_{k+1}$):

$$a_n y_{k-n} + a_{n-1} y_{k-n+1} + \dots + a_0 y_k = b_m u_{k-m} + \dots + b_0 u_k$$

11.1. Z-Übertragungsfunktion

$$\text{Z-Transformation } x(t) \xrightarrow{Z} X(z)$$

$$\text{Differenzensatz: } x_{k+1} \xrightarrow{Z} zX(z) - zx_0$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\beta_r z^r + \dots + \beta_1 z + \beta_0}{\alpha_n z^n + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0}$$

$$\text{MIMO } \underline{H}(z) = \frac{\underline{Y}(z)}{\underline{U}(z)} = \underline{C}(z\underline{1} - \underline{A})^{-1} \underline{B} + \underline{D}$$

$$\text{Es gilt: } \underline{A} = \underline{T}\underline{\Lambda}\underline{T}^{-1} \quad \underline{A}^k = \underline{T}\underline{\Lambda}^k \underline{T}^{-1}$$

11.2. Stabilität

Anhand der Eigenwerte λ_i der zeitdiskreten Systemmatrix \underline{A} :

System stabil für $|\lambda_i(\underline{A})| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$

11.3. Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit

Allgemein analog zum kontinuierlichen Fall.

Steuerssequenz \underline{u}_s , um Anfangszustand \underline{x}_0 in endlicher Zeit in Nullzustand zu überführen, kann berechnet werden:

$$\text{Lösungsformel: } \underline{x}_k = \underline{A}^k \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \underline{A}^{k-j-1} \underline{B} \underline{u}_j$$

11.4. Rechteck-Approximation

$$\Delta y := x_k h \Rightarrow y_k = y_{k-1} + x_k h$$

$$\text{Laplace in Z Umrechnen: } s \hat{=} \frac{z-1}{hz} = \frac{1-z^{-1}}{h}$$

11.5. Trapez-Approximation

$$\text{Laplace in Z Umrechnen: } s \hat{=} \frac{2}{h} \frac{z-1}{z+1} = \frac{2}{h} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

11.6. Wahl der Abtastrate

$$\text{Abtastrate } h = T_A = \frac{1}{f_A} \quad 15\omega_B \leq \omega_A \approx 20\omega_g \leq 50\omega_B$$

- Zeitverhalten des kontinuierlichen geschlossenen Regelkreises bestimmen, z.B. durch Partialbruchzerlegung und Grenzwerte anhand Abb. 11.11 (S.199)
- T', T_s bzw. T'_t berechnen.
- Nach Abbildung T_A berechnen.

11.7. Schutzfilter

Messrauschen lässt sich durch Schutzfilter dämpfen. $\omega_A = 2\pi f_A$

- Butterworth-Filter 1. Ordnung \rightarrow einfach

$$G_r(s) = \frac{0,5\omega_A}{s+0,5\omega_A}$$

- Butterworth-Filter 2. Ordnung \rightarrow steilere Flanke

$$G_r(s) = \frac{(0,5\omega_A)^2}{s^2 + \sqrt{2}(0,5\omega_A)s + (0,5\omega_A)^2}$$

12. Ereignisdiskrete Steuerung und Petrinetze

12.1. Petrinetze $N = (P, T, F)$

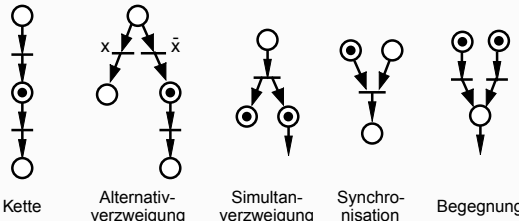
P die Menge Plätze (Zustände)

N die Menge der Transitionen oder Übergänge

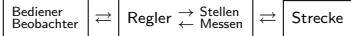
$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ Menge der gerichteten Kanten

Marken auf Plätzen zeigen an, dass der Zustand aktiv ist.

Schalten: Alle Plätze vor transition müssen markiert sein, nach dem schalten sind alle Plätze hinter der transition markiert.



13. Technik



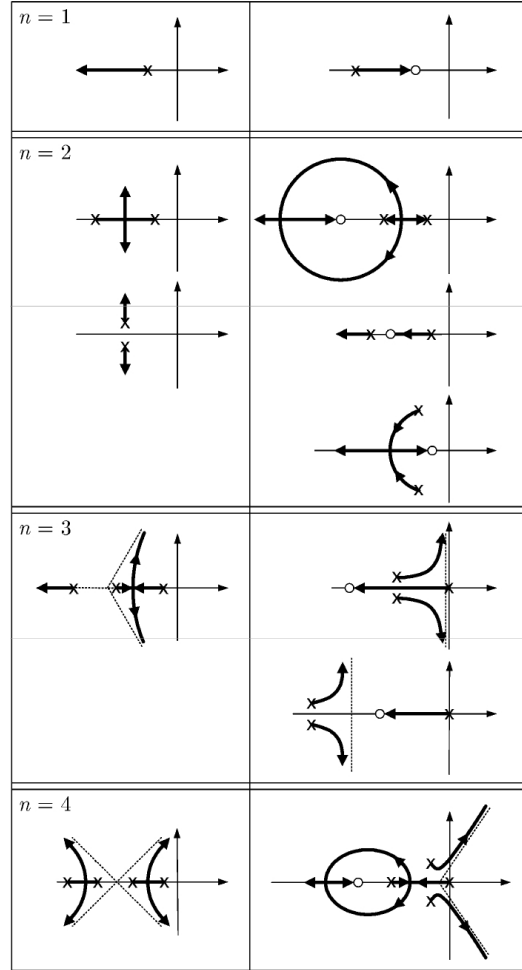
Auch wichtig:



Schrödingers Katze:

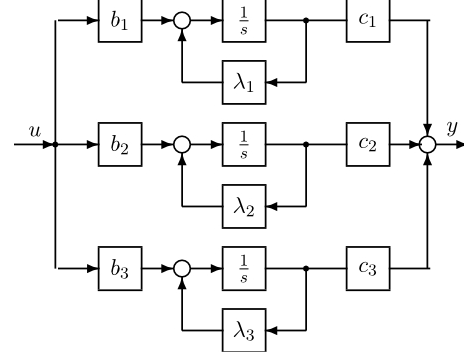
Anhang

13.1. Mögliche Arten von WOKs:



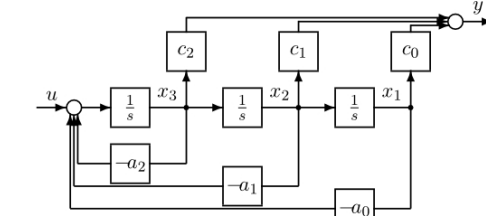
13.2. Normalformen

Kanonische Normalform:



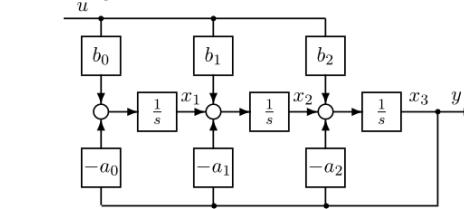
$$G(s) = \frac{b_1 c_1}{s - \lambda_1} + \frac{b_2 c_2}{s - \lambda_2} + \frac{b_3 c_3}{s - \lambda_3}$$

Regelungsnormalform:



$$G(s) = \frac{\frac{1}{s^3}(c_2 s^2 + c_1 s + c_0)}{1 + \frac{1}{s^3}(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)} = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

Beobachtungsnormalform:



$$G(s) = \frac{(b_0 + b_1 s + b_2 s^2) \frac{1}{s^3}}{1 + \frac{1}{s^3}(a_0 + a_1 s + a_2 s^2)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

13.3. Strecke/Regler Auswahl

Regler $G_R(s)$	Regelstrecke $G_S(s)$	bleibende Regeldifferenz e_∞ für			
		w $z_1 = 0$ $z_2 = 0$	w $z_1 = 0$ $z_2 = 0$	$w = 0$ $z_2 = 0$	$w = 0$ $z_1 = 0$
P	K_P	P-Typ	$\frac{1}{1 + K_P \cdot K_S} \cdot w_0$	∞	$\frac{-K_S}{1 + K_P \cdot K_S} \cdot z_0$
I	$\frac{K_I}{s}$		0	$\frac{1}{K_I \cdot K_S} \cdot w_0$	0
PI	$K_P + \frac{K_I}{s}$		0	$\frac{1}{K_I \cdot K_S} \cdot w_0$	0
I_2	$\frac{K_I}{s^2}$		0	0	0
P	K_P	I-Typ	0	$\frac{1}{K_S \cdot K_P} \cdot w_0$	$\frac{-1}{K_P} \cdot z_0$
I	$\frac{K_I}{s}$		0	0	0
PI	$K_P + \frac{K_I}{s}$		0	0	0

13.4. Zustandsbeobachter(Simulation)

