Ayudantía 1 - MAT023

Fabián Ramírez / FabiMath

Problema 1

Sea $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(p(x)) = \left(p(0) + p'(1), \int_0^1 p(x)dx \right)$$

a) Pruebe que T es una transformación lineal.

b) Muestre que T es un isomorfismo.

Problema 2

Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que:

$$\begin{array}{ll} T(1) = (1,0,-1) & T(1+x) = (2,1,-1) \\ T\left(1+x+x^2\right) = (2,0,0) & T\left(1+x+x^2+x^3\right) = (3,0,1) \end{array}$$

a) Determine explícitamente T.

b) Obtenga el kernel y la imagen de T.

c) ¿Es T inyectiva?, ¿es T epiyectiva?

Problema 3

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que:

$$T(p(x)) = (p'(1), p''(x) - p'(0), p(0) + p''(0))$$

Considere las bases $B_1 = \left\{1, 1-x, x^2 - x\right\}$ y $B_2 = \{(0,0,1),(1,1,1),(1,-1,0)\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

a) Calcule la dimensión de Im T.

b) Si T es invertible. Determine la matriz asociada a la inversa de T desde B_2 a la base B_1.

Solución Problema 1:

a) Sean $\alpha \in \mathbb{R}, p, q \in \mathbb{R}_1[x]$ entonces:

$$\begin{aligned}
T(\alpha p(x)+q(x)) &= \left(\alpha p(0)+q(0)+\alpha p'(1)+q'(1), \int_0^1 (\alpha p(x)+q(x))dx\right) \\
&= \left(\alpha p(0)+\alpha p'(1), \int_0^1 \alpha p(x)dx\right) + \left(q(0)+q'(1), \int_0^1 q(x)dx\right) \\
&= \alpha\left(p(0)+p'(1), \int_0^1 p(x)dx\right) + \left(q(0)+q'(1), \int_0^1 q(x)dx\right) \\
&= \alpha T(p(x)) + T(q(x))
\end{aligned}$$

Por tanto T es una transformación lineal.

b) Mostraremos que T es inyectiva, entonces basta mostrar que $\ker(T) := \{0\}$. Entonces sea $p(x) = ax+b$, luego $p'(x) = a$, por consecuencia $p(0) = b$, $p'(1) = a$ y $\int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 (ax+b)dx = \frac{1}{2}a + b$. Finalmente $p(x) = ax+b \in \ker(T) \Leftrightarrow T(p(x)) = (0,0)$, por tanto T es inyectiva.

Ahora mostraremos que T es sobreyectiva, para ello notemos que:

$$\dim(\mathbb{R}_1[x]) = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T) \Longrightarrow 2 = 0 + \dim(\text{Im } T)$$

Por tanto $\dim(\text{Im } T) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2) = \dim(\mathbb{R}_1[x])$, por conclusión T es una aplicación sobreyectiva. Finalmente como T es una función lineal y biyectiva entonces T es un isomorfismo entre $\mathbb{R}_1[x]$ y $\mathbb{R}^2$.

Solución Problema 2:

a) Notemos que $\left\{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\right\}$ es linealmente independiente y es base de $\mathbb{R}_3[x]$. Sea $a+bx+cx^2+dx^3 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (1+x) + \gamma \cdot \left(1+x+x^2\right) + \delta \cdot \left(1+x+x^2+x^3\right)$ con:

$$\begin{aligned}
a &= \alpha+\beta+\gamma+\delta \\
b &= \beta+\gamma+\delta \\
c &= \gamma+\delta \\
d &= \delta
\end{aligned}$$

De donde obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\delta &= d \\
\gamma &= c-d \\
\beta &= b-c+d-d = b-c \\
\alpha &= a-b+c-c+d-d = a-b
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned}
T\left(a+bx+cx^2+dx^3\right) &= (a-b)T(1) + (b-c)T(1+x) + (c-d)T\left(1+x+x^2\right) + dT\left(1+x+x^2+x^3\right) \\
&= (a-b)(1,0,-1) + (b-c)(2,1,-1) + (c-d)(2,0,0) + d(3,0,1) \\
&= (a+b+d, b-c, -a+c+d)
\end{aligned}$$

b) Recordemos que:

$$a+bx+cx^2+dx^3 \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow (a+b+d, b-c, -a+c+d) = (0,0,0)$$

Entonces se debe cumplir que:

$$a+b+d = 0 \quad \wedge \quad b-c = 0 \quad \wedge \quad -a+c+d = 0$$

Escribiendolo en forma matricial tenemos que:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Escalonando} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde obtenemos que:

$$\begin{array}{lllll} a=0 & \wedge & b+d=0 & \wedge & c+d=0 \\ a=0 & \wedge & b=-d & \wedge & c=-d \end{array}$$

Concluyendo que $a+bx+cx^2+dx^3 \in \operatorname{Ker}(T) \Leftrightarrow a+bx+cx^2+dx^3 = -dx-dx^2+dx^3 = d\left(-x-x^2+x^3\right)$. Finalmente tenemos que $\operatorname{Ker}(T) = \left\langle -x-x^2+x^3 \right\rangle$.

Por otro lado por Teorema del Nucleo-Imagen tenemos que $\dim(\operatorname{Im} T) = 3$, por tanto T es sobreyectiva, lo que implica directamente que $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^3$.

c) T es sobreyectiva por el resultado anterior, y T no es inyectiva pues su kernel es distinto del trivial (0).

Solución Problema 3:

a) Sea $p(x) = ax^2+bx+c$ entonces se tiene que:

$$\begin{array}{l} p'(x) = 2ax+b \Rightarrow p'(1) = 2a+b \quad , \quad p'(0) = b \\ p''(x) = 2a \\ T\left(ax^2+bx+c\right) = (2a+b, 2a-b, 2a+c) \end{array}$$

Recordemos que $\left\{1, x, x^2\right\}$ es base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$. Luego $\operatorname{Im}(T) = \left\langle T(1), T(x), T\left(x^2\right)\right\rangle$. Notemos que

$$\begin{array}{l} T(1) = (0,0,1) \\ T(x) = (1,-1,0) \\ T\left(x^2\right) = (2,2,2) \end{array}$$

Donde $(0,0,1), (1,-1,0)$y$(2,2,2)$ son linealmente independientes. Por tanto son base de $\mathbb{R}^3$ y nos permite concluir que $\dim(\operatorname{Im} T) = 3$.

b) Es facil chequear por Teorema de Nucleo-Imagen que $\ker T = \{0\}$ y como $\dim(\operatorname{Im} T) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ se tiene que T es un isomorfismo. Luego buscando la matriz asociada a T tenemos que:

$$\begin{array}{l} T\left(ax^2+bx+c\right) = (2a+b, 2a-b, 2a+c) \quad B_1 = \left\{1, 1-x, x^2-x\right\} \\ T(1) = (0,0,1) \\ T(1-x) = (-1,1,1) \\ T\left(x^2-x\right) = (1,1,2) \\ B_2 = \{(0,0,1), (1,1,1), (1,-1,0)\} \\ (0,0,1) = 1 \cdot (0,0,1) + 0 \cdot (1,1,1) + 0 \cdot (1,-1,0) \\ (-1,0,1) = 1 \cdot (0,0,1) + 0 \cdot (1,1,1) + (-1) \cdot (1,-1,0) \\ (1,3,2) = 0 \cdot (0,0,1) + 2 \cdot (1,1,1) + (-1) \cdot (1,-1,0) \end{array}$$

Finalmente:

$$[T]_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego $\left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1}$ es la inversa de $[T]_{B_1}^{B_2}$. Entonces:

$$\left[T^{-1}\right]_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Resumen Certamen 1

FabiMath

Los siguientes resultados pueden útiles para el estudio personal.

Definición

Recuerda que $T : V \to U$ con V, U espacios vectoriales es una transformación lineal si:

- $\forall v, u \in V$ se tiene que $T(u + v) = T(u) + T(v)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ y $\forall v \in V$ se tiene que $T(\alpha v) = \alpha T(v)$

Resultados

1. Sea $T : V \to U$ una transformación lineal. T es inyectiva si y sólo si $\ker T := \{0\}$, donde

$$\ker T := \{v \in V; T(v) = 0\}$$

2. **Teorema del Nucleo-Imagen** Sea $T : V \to U$ una transformación lineal. Entonces:

$$\dim(V) = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T)$$

3. Sea $T : V \to U$ una transformación lineal. T es sobreyectiva si y sólo si $\dim(U) = \dim(\text{Im } T)$