Ayudantía Mat023 - 14 de Agosto

Problema 1

Sea $u = x^3 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$ donde f es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Determine, si es posible, $g(x, y, z)$ tal que:

$$x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + z \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = u \cdot g(x, y, z)$$

Respuesta: $g(x, y, z) = 3$
Ayuda: Sean $v = \frac{y}{x}$ y $w = \frac{z}{x}$ entonces: $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) + x^3 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x}\right)$ ...

Problema 2

Averigüe si el teorema de la función implícita permite decidir si el sistema de ecuaciones:

$$x + y - 2uv = 0 \quad \wedge \quad 2xy - u^3 - v^3 = 0$$

tiene solución para u y v en términos de x e y cerca del punto dado por $x = y = u = v = 1$ o cerca del punto dado por $x = -2, y = 0, u = 1, v = -1$. En los puntos donde es aplicable el teorema calcule $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$

Respuesta: $u_x(-2, 0, 1, -1) = -\frac{1}{4}$ y $v_x(-2, 0, 1, -1) = \frac{1}{4}$

Problema 3

Una empresa produce tres tipos de artículos: A, B y C . El ingreso obtenido al producir x unidades de A , y unidades de B y z unidades de C es$(x-20)(y-30)+100$ millones de dólares. El costo de producción está dado por $(x-20)^2+(y-30)^2+7(z-10)^2$ millones de dólares. Determine las cantidades óptimas (no nulas) de producción de tal modo que la utilidad sea máxima.

Respuesta: 20 unidades de A, 30 unidades de B y 10 unidades de C.
Ayuda: La función objetivo es $f(x, y, z) = (x - 20)(y - 30) + 100 - ((x - 20)^2 + (y - 30)^2 + 7(z - 10)^2)$

Problema 4

Determine la distancia máxima, y mínima de la elipse dada por $x^2 + 4y^2 = 4$ a la recta definida por $y = 4 - x$.
Respuesta: La distancia máxima es $f\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ y la mínima es $f\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

Ayuda: El problema es $\begin{cases} \text{optimizar } f(x) = \dfrac{|x + y - 4|}{\sqrt{2}} \\ \\ \text{s.a. } g(x) = x^2 + 4y^2 - 4 \end{cases}$

Problema 5

Considere la transformación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (u, v)$ donde

$$u = x^2 + xy + y^2 \quad \wedge \quad v = 2x + y$$

Calcule $\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}$ cuando $x = 1, y = 1, u = 3, v = 3$.
Respuesta: $\frac{1}{3}$
Ayuda: Usar el teorema de la función inversa.