MAT-269: Análisis Estadístico Multivariado **Nombre:** ______________________
Certamen 1. Junio 15, 2020 **Profesor:** Felipe Osorio
Entrega: Junio 16, 2020 (18:00 hrs.)

---

1. (20 pts) Considere una muestra de n observaciones $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ con pesos asociados $u_1, \dots, u_n$. Defina

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{x}}_n &= \frac{1}{U_n} \sum_{i=1}^n u_i \boldsymbol{x}_i, \qquad U_n = \sum_{i=1}^n u_i, \\ \boldsymbol{Q}_n &= \sum_{i=1}^n u_i (\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}_n)(\boldsymbol{x}_i - \overline{\boldsymbol{x}}_n)^\top, \\ \boldsymbol{d}_n &= \boldsymbol{x}_n - \overline{\boldsymbol{x}}_{n-1}. \end{aligned}$$

Muestre que

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{x}}_n &= \overline{\boldsymbol{x}}_{n-1} + \frac{u_n}{U_n} \boldsymbol{d}_n, \\ \boldsymbol{Q}_n &= \boldsymbol{Q}_{n-1} + \Big(u_n - \frac{u_n^2}{U_n} \Big) \boldsymbol{d}_n \boldsymbol{d}_n^\top. \end{aligned}$$

2. (20 pts) Asuma $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ variables IID desde

$$\mathsf{N}_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Obtenga el estimador ML de ρ y su distribución asintótica.

3. (20 pts) Si $\boldsymbol{A} \sim \mathsf{W}_m(n, \boldsymbol{\Sigma})$, donde $n > m - 1$ y $\boldsymbol{\Sigma} > 0$. Muestre que el estimador máximo verosímil de $\boldsymbol{\Sigma}$ es $\frac{1}{n}\boldsymbol{A}$.

Sugerencia: Recuerde que la densidad de una matriz $\boldsymbol{A}$ con distribución $\mathsf{W}_m(n, \boldsymbol{\Sigma})$, está dada por

$$f(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2^{mn}\,\Gamma_m(n/2)} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-n/2} \exp\{-\tfrac{1}{2} \operatorname{tr} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{A}\} \, |\boldsymbol{A}|^{(n-m-1)/2}.$$

4. (20 pts) Sea $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ muestra aleatoria desde $\mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1)$ independiente de $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n$ muestra aleatoria desde $\mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2)$, donde $\boldsymbol{\Sigma}_1$ y $\boldsymbol{\Sigma}_2$ son desconocidas y desiguales. Considere la hipótesis

$$H_0 : \boldsymbol{\mu}_1 = \boldsymbol{\mu}_2, \qquad \text{versus} \qquad H_1 : \boldsymbol{\mu}_1 \neq \boldsymbol{\mu}_2.$$

a) Sea $\boldsymbol{z}_i = \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{y}_i$, de modo que $\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_n$ son vectores aleatorios independientes $\mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}_1 - \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2)$. A partir de $\boldsymbol{z}_1, \dots, \boldsymbol{z}_n$ contruya un estadístico T^2 apropiado para probar H_0. Indique la distribución de T^2.

b) Suponga $\boldsymbol{\Sigma}_1 = k\boldsymbol{\Sigma}_2$ con k conocido. Derive un estadístico T^2 de Hotelling para probar H_0.

5. (20 pts) Sea $\overline{\boldsymbol{x}}$ y $\boldsymbol{S}$ basados en una muestra de n observaciones desde $\mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ y sea $\boldsymbol{x}$ una nueva observación proveniente de $\mathsf{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Muestre que

$$\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}} \sim \mathsf{N}_p\Big(\mathbf{0}, \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)\boldsymbol{\Sigma}\Big),$$

y verifique

$$\frac{n}{n+1}(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}})^\top \boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{x} - \overline{\boldsymbol{x}}) \sim \mathsf{T}^2(p, n-1).$$