2.1 Spherical harmonic functions

The aim of this section is to introduce preliminary material about spherical harmonic functions. We denote the latitude and longitude coordinates of a spatial point on $\mathbb{S}^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ by $L \in [0, \pi]$ and $\ell \in [0, 2\pi)$, respectively. For two locations on $\mathbb{S}^2$, with coordinates (L_1, ℓ_1) and (L_2, ℓ_2), the great circle distance between them is given by

$$d_{GC}(L_1, L_2, \Delta\ell) = 2\arcsin\left\{\left[\sin^2\left(\frac{L_1 - L_2}{2}\right) + \sin L_1 \sin L_2 \sin^2\left(\frac{\Delta\ell}{2}\right)\right]^{1/2}\right\},$$

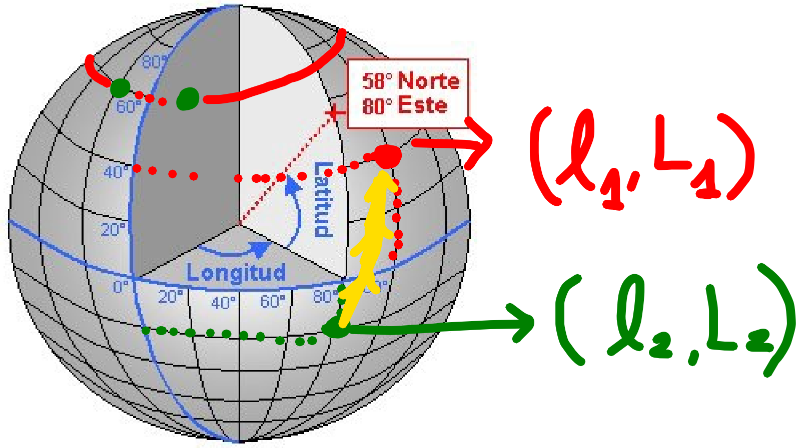
where $\Delta\ell = \ell_1 - \ell_2$. This metric represents the length of the shortest arc joining two spherical locations, so it is always true that $d_{GC}(L_1, L_2, \Delta\ell) \in [0, \pi]$.

Consideremos

$$S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$$

la esfera unitaria.

Sea $\ell \in [0, 2\pi)$ la longitud y $L \in [0, \pi]$ la latitud.



Sean $(\ell_1, L_1), (\ell_2, L_2)$ dos puntos en S^2. La distancia geodesica entre $(\ell_1, L_1), (\ell_2, L_2)$ viene dada por:

$$d_{GC}((\ell_1, L_1); (\ell_2, L_2)) = 2\arcsin\left\{\left[\sin^2\left(\frac{L_1 - L_2}{2}\right) + \sin L_1 \sin L_2 \cdot \sin^2\left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{2}\right)\right]^{1/2}\right\}$$

En particular:

$$d_{GC}(L_1, L_2, \Delta\ell) \in [0, \pi]$$

Esfericos Armonicos

Nota que las funciones complejas cuadrado integrable en S^2 es un espacio de Hilbert (heredado de $L^2(S^2)$). Como los polinomios son densos se tiene el siguiente resultado:

Existe una base ortogonal para estas funciones estas las llamamos los esfericos armonicos. Las denotamos por $Y_{n,m}(L, \ell)$ con $n \in \mathbb{N}_0$ y $m \in \{-n, \dots, n\}$ donde:

$$Y_{n,m}(L, \ell) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\, P_{nm}(\cos L)\, e^{im\ell}$$

Con P_{nm} Polinomio de Legendre.

Propiedad: $Y_{nm}(L, \ell) = (-1)^m \overline{Y_{n-m}(L, \ell)}$

↳ Implica el siguiente resultado

$$P_n(\cos(d_{GC}(L_1, L_2, \Delta\ell))) = P_n(\cos L_1) P_n(\cos L_2) + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos(m\Delta\ell) P_{nm}(\cos L_1) P_{nm}(\cos L_2)$$

Con $P_n = P_{n0}$

Proceso Axialmente Simetricos

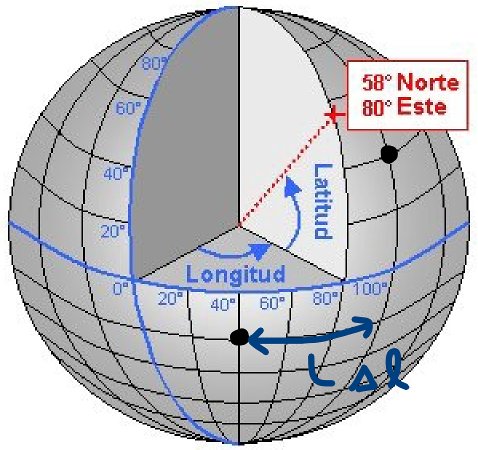
Sea $Z(L, \ell)$ un campo aleatorio tal que:

$$E[Z] = 0$$

$$E[Z^2] < +\infty$$

Diremos que Z es un proceso axialmente simetrico si:

$$\mathrm{Cov}(Z(L_1, \ell_1); Z(L_2, \ell_2)) = C(L_1, L_2, \Delta\ell)$$



Def: Z C.A. Ax. sim es longitudinalmente reversible si: $C(L_1, L_2, \Delta\ell) = C(L_1, L_2, -\Delta\ell)$

En general C no cumple lo anterior. En ese caso se dice longitudinalmente irreversible.

Si Z es C.A. Ax. sim entonces Admite una expansión K-L

$$Z(L,\ell)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} C_{nm} Y_{nm}(L,\ell)$$

donde C_{nm} es un campo aleatorio complejo Normal de media 0.

$$C_{nm} = a_{nm} + b_{nm} i$$

Con $a_{nm} \sim N(0,\sigma_1^2)$; $b_{nm} \sim N(0,\sigma_2^2)$

Si quiero que el campo aleatorio sea real $C_{nm} = (-1)^m \overline{C_{n-m}}$ se debe imponer. Dado esto se reduce la expanción a:

$$Z(L,\ell)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n0}\tilde{P}_{n0}(\cos L) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\{a_{nm}\cos(m\ell)+b_{nm}\sin(m\ell)\}\cdot \tilde{P}_{nm}(\cos L)$$

Con $\tilde{P}_{nm}=\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\, P_{nm}$

Para mantener la Ax. sim se debe pedir que:

(C1) $\mathrm{Cov}\{a_{n0},a_{n'0}\} = \mathrm{Cov}\{b_{n0},b_{n'0}\} = f_0(n,n')$; $\forall n,n' \geq 0$

(C2) $\mathrm{Cov}\{a_{nm},a_{n'm'}\} = \mathrm{Cov}\{b_{nm},b_{n'm'}\} = \delta_m^{m'} f_m(n,n')/2$ $\forall n,n' \geq m,\ m>0.$

(C3) $\mathrm{Cov}\{a_{nm},b_{n'm'}\} = -\mathrm{Cov}\{b_{nm},a_{n'm'}\} = \delta_m^{m'} g_m(n,n')/2$ $\forall n,n' \geq m,\ m>0.$

Con $\delta_m^{m'} = \begin{cases} 0, & m\neq m' \\ 1, & m=m \end{cases}$; $f_m(n,n')$ cov.ind, $g_m(n,n')$ cov. cruzada

Prop: $g_m(n,n') = -g_m(n',n)$, $g(n,n)=0$.

De esta forma si $V_m = (a_{n_1,m}, a_{n_2 m},\ldots, b_{n_1 m},\ldots)^T$ $n_1,n_2,\ldots \geq m$ entonces $V_m \sim N(\vec{0},\Gamma_m)$

con $\Gamma_m = \begin{pmatrix} F_m & G_m \\ G_m^T & F_m \end{pmatrix}$; cuyas entradas son $f_m(n_i,n_j)$ y $g_m(n_i,n_j)$ resp.

Juntando todas las condiciones tenemos que:

$$C(L_1,L_2,\Delta\ell) = \sum_{n,n'=0}^{\infty} f_0(n,n')\tilde{P}_{n0}(\cos L_1)\tilde{P}_{n'0}(\cos L_2) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n,n'=m}^{\infty}\{f_m(n,n')\cos(m\Delta\ell) + g_m(n,n')\sin(m\Delta\ell)\}\tilde{P}_{nm}(\cos L_1)\cdot\tilde{P}_{n'm}(\cos L_2)$$