

# Practica Industrial

Fabián Ramírez Díaz

## 1. Semana 1

La referencia de este capítulo esta en el siguiente paper <https://arxiv.org/pdf/1505.01394.pdf>

### 1.1. Coherencia en Series de tiempo

Para introducir al concepto de coherencia, presentaremos un ejemplo en el contexto de series de tiempo. Entonces, sean las series  $Z_1(t)$  y  $Z_2(t)$  dos series de tiempo débilmente estacionarias con función de covarianza con la siguiente estructura:

$$\text{cov}(Z_k(t+h); Z_k(t)) = C_{kk}(h)$$

Y la cruzada con la siguiente estructura:

$$\text{cov}(Z_k(t+h); Z_l(t)) = C_{kl}(h)$$

También se sabe que sus densidades espectrales vienen dadas por:

$$f_{kl}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} C_{kl}(h) \exp\{-i\omega h\} dh$$

#### Definición: Coherencia de Series de tiempo

Se define la función de coherencia cuadrática entre dos series de tiempos dependiente de una frecuencia  $\omega$  a la función:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{|f_{12}(\omega)|^2}{f_{11}(\omega)f_{22}(\omega)}$$

Esta función puede interpretarse como una cuantificación de la relación lineal entre dos series de tiempo a una frecuencia  $\omega$ .

### 1.2. Coherencia en campos aleatorios

Sea el campo aleatorio complejo dado por  $\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = (Z_1(\mathbf{s}), \dots, Z_p(\mathbf{s}))$  débilmente estacionario y de media  $\mathbf{0}$ , con matriz de covarianza  $\mathbf{C}(\mathbf{h}) = (C_{ij}(\mathbf{h}))_{i,j=1}^p$ .

**Observación:** Recordemos que proceso estacionario complejo se tiene que  $\text{cov}(Z_i(s_1), Z_j(s_2)) = \mathbb{E}[Z_i(s_1)\overline{Z_j(s_2)}]$ , tal que se tenga que  $C_{i,j}(\mathbf{h}) = \overline{C_{j,i}(\mathbf{h})}$ .

**Teorema:**  $C$  es semi-definida positiva si y sólo si:

$$C_{ij}(\mathbf{h}) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\omega^T \mathbf{h}) f_{ij}(\omega) d\omega$$

Además  $C$  es semi-definida positiva si y sólo si la matriz  $\mathbf{f}(\omega) = (f_{ij}(\omega))_{i,j=1}^p$  es semi-definida positiva donde  $f$  es la densidad espectral la cual cumple que  $f_{ij}(\omega) = \overline{f_{ji}(\omega)}$  y:

$$f_{ij}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i\omega^T \mathbf{h}) C_{ij}(\mathbf{h}) d\mathbf{h}$$

La idea a partir de ahora sera trabajar este concepto en el plano con la finalidad de mapear las ideas a la esfera.

Sea  $(Z_1(s), Z_2(s))^T$  un campo aleatorio complejo de media 0 y débilmente estacionario. Con matriz de covarianza  $C(\mathbf{h})$  que admita una matriz de densidad espectral  $\mathbf{f}(\omega) = (\mathbf{f}_{ij}(\omega))_{i,j=1}^2$ .

Para realizar predicciones en un punto  $s_0$  tenemos que el funcional que minimiza el error cuadrático medio  $\mathbb{E} \left| \left( Z_1(s_0) - \int_{\mathbb{R}^d} K(\mathbf{u} - s_0) Z_2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \right)^2 \right|$  viene dado por:

$$K(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i\omega^T \mathbf{u}) \frac{f_{12}(\omega)}{f_{22}(\omega)} d\omega = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-i\omega^T \mathbf{u}) \sqrt{\frac{f_{11}(\omega)}{f_{22}(\omega)}} \gamma(\omega) d\omega$$

Adicionalmente tenemos que  $\hat{Z}_1(s_0) = \int_{\mathbb{R}^d} K(\mathbf{u} - s_0) Z_2(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$  y la densidad espectral del estimador viene dada por:

$$f_{1|2}(\omega) = f_{11}(\omega) |\gamma(\omega)|^2$$