Practica Industrial

Fabián Ramírez Díaz

1. Semana 1

La referencia de este capitulo esta en el siguiente paper https://arxiv.org/pdf/1505.01394.pdf

1.1. Coherencia en Series de tiempo

Para introduccir al concepto de coherencia, presentaremos un ejemplo en el contexto de series de tiempo. Entonces, sean las series $Z_1(t)$ y $Z_2(t)$ dos series de tiempo débilmente estacionarias con función de convarianza con la siguiente estructura:

$$\text{cov}\left(Z_k(t+h); Z_k(t)\right) = C_{kk}(h)$$

Y la cruzada con la siguiente estructura:

$$\text{cov}\left(Z_k(t+h); Z_l(t)\right) = C_{kl}(h)$$

También se sabe que sus densidades espectrales vienen dadas por:

$$f_{kl}(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} C_{kl}(h) \exp\{-i\omega h\}\, dh$$

Definición: Coherencia de Series de tiempo

Se define la función de coherencia cuadratica entre dos series de tiempos dependiente de una frecuencia ω a la función:

$$\gamma^2(\omega) = \frac{\left|f_{12}(\omega)\right|^2}{f_{11}(\omega) f_{22}(\omega)}$$

Esta función puede interpretarse como una cuantificación de la relación lineal entre dos series de tiempo a una frecuencia ω.

1.2. Coherencia en campos aleatorios

Sea el campo aleatorio complejo dado por $\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = \left(\mathbf{Z_1}(\mathbf{s}), ..., \mathbf{Z_p}(\mathbf{s})\right)$ debilmente estacionario y de media $\mathbf{0}$, con matriz de covarianza $\mathbf{C}(\mathbf{h})=\left(C_{ij}(\mathbf{h})\right)_{i,j=1}^{p}$.

Observación: Recordemos que proceso estacionario complejo se tiene que $\text{cov}\left(Z_i(s)_1, Z_j(s)_2\right) = \mathbb{E}\left[Z_i(s_1)\overline{Z_j(s_2)}\right]$, tal que se tenga que $C_{i,j}(\mathbf{h})=\overline{C_{j,i}(\mathbf{h})}$.

Teorema: $\mathbf{C}$ es semi-definida positiva si y sólo si:

$$C_{ij}(\mathbf{h}) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(i\omega^{\mathrm{T}}\mathbf{h}\right) f_{ij}(\omega)\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$$

Además $\mathbf{C}$ es semi-definida positiva si y sólo si la matriz $\mathrm{f}(\omega) = \left(f_{ij}(\omega)\right)_{i,j=1}^{p}$ es semi-definida positva donde f es la densidad espectral la cual cumple que $f_{ij}(\omega) = \overline{f_{ji}(\omega)}$ y:

$$f_{ij}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-i\omega^{\mathrm{T}}\mathbf{h}\right) C_{ij}(\mathbf{h})\mathrm{dh}$$

La idea a partir de ahora sera trabajar este concepto en el plano con la finalidad de mapear las ideas a la esfera.

Sea $(Z_1(\mathrm{s}), Z_2(\mathrm{s}))^{\mathrm{T}}$ un campo aleatorio complejo de media 0 y débilmente estacionario. Con matriz de covarianza $\mathbf{C}(\mathbf{h})$ que admita una matriz de densidad espectral $\mathbf{f}(\omega) = \left(\mathbf{f_{ij}}(\omega)\right)_{\mathbf{i,j=1}}^{\mathbf{2}}$.

Para realizar predicciones en un punto s_0 tenemos que el funcional que minimiza el error cuadratico medio $\mathbb{E}\left|\left(Z_1(\mathrm{s}_0) - \int_{\mathbb{R}^d} K(\mathbf{u}-\mathbf{s}_0) Z_2(\mathbf{u})\mathrm{d}\mathbf{u}\right)^2\right|$ viene dado por:

$$K(\mathbf{u}) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-i\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\right) \frac{f_{12}(\boldsymbol{\omega})}{f_{22}(\boldsymbol{\omega})}\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \exp\left(-i\boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}\right) \sqrt{\frac{f_{11}(\boldsymbol{\omega})}{f_{22}(\boldsymbol{\omega})}}\gamma(\boldsymbol{\omega})\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$$

Adicionalmente tenemos que $\hat{Z}_1(s_0) = \int_{\mathbb{R}^d} K(\mathbf{u}-\mathbf{s}_0) Z_2(\mathbf{u})\mathrm{d}\mathbf{u}$ y la densidad espectral del estimador viene dada por:

$$f_{1|2}(\boldsymbol{\omega}) = f_{11}(\boldsymbol{\omega})|\gamma(\boldsymbol{\omega})|^2$$

Obteniendo el siguiente resultado:

$$|\gamma(\boldsymbol{\omega})|^2 = \frac{f_{1|2}(\boldsymbol{\omega})}{f_{11}(\boldsymbol{\omega})}$$