2.1 Spherical harmonic functions

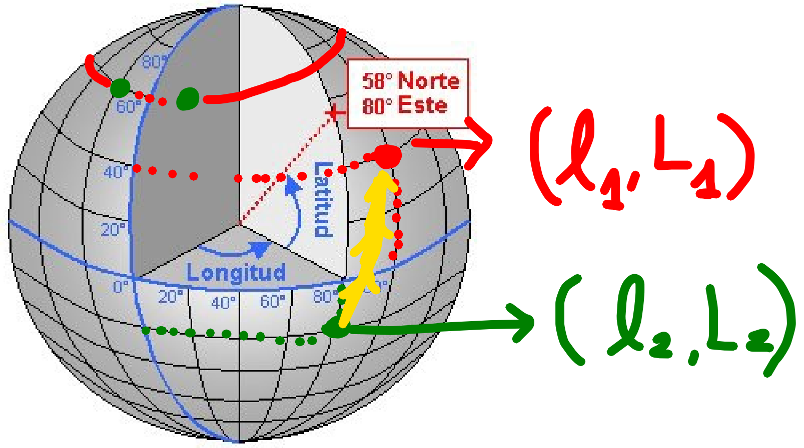
The aim of this section is to introduce preliminary material about spherical harmonic functions. We denote the latitude and longitude coordinates of a spatial point on $\mathbb{S}^2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ by $L \in [0,\pi]$ and $\ell \in [0, 2\pi)$, respectively. For two locations on $\mathbb{S}^2$, with coordinates (L_1, ℓ_1) and (L_2, ℓ_2), the great circle distance between them is given by

$$\mathrm{d}_{\mathrm{GC}}(L_1, L_2, \Delta\ell) = 2\arcsin\left\{\left[\sin^2\left(\frac{L_1 - L_2}{2}\right) + \sin L_1 \sin L_2 \sin^2\left(\frac{\Delta\ell}{2}\right)\right]^{1/2}\right\},$$

where $\Delta\ell = \ell_1 - \ell_2$. This metric represents the length of the shortest arc joining two spherical locations, so it is always true that $\mathrm{d}_{\mathrm{GC}}(L_1, L_2, \Delta\ell) \in [0, \pi]$.

Consideremos $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ la esfera unitaria.

Sea $\ell \in [0, 2\pi)$ la longitud y $L \in [0, \pi]$ la latitud.



Sean $(\ell_1, L_1), (\ell_2, L_2)$ dos puntos en S^2. La distancia geodesica entre $(\ell_1, L_1), (\ell_2, L_2)$ viene dada por:

$$d_{GC}((\ell_1, L_1); (\ell_2, L_2)) = 2\arcsin\left\{\left[\sin^2\left(\frac{L_1 - L_2}{2}\right) + \sin L_1 \sin L_2 \cdot \sin^2\left(\frac{\ell_2 - \ell_1}{2}\right)\right]^{1/2}\right\}$$

En particular:

$$d_{GC}(L_1, L_2, \Delta\ell) \in [0, \pi]$$

Esfericos Armonicos

Nota que las funciones complejas cuadrado integrable en S^2 es un espacio de Hilbert (heredado de $L^2(S^2)$). Como los polinomios son densos se tiene el siguiente resultado:

Existe una base ortogonal para estas funciones estas las llamamos los esfericos armonicos. Las denotamos por $Y_{n,m}(L, \ell)$ con $n \in \mathbb{N}_0$ y $m \in \{-n, \dots, n\}$ donde:

$$Y_{n,m}(L, \ell) = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\, P_{nm}(\cos L)\, e^{im\ell}$$

Con P_{nm} Polinomios de Legendre.

Propiedad: $Y_{nm}(L, \ell) = (-1)^m \overline{Y_{n-m}(L, \ell)}$

↳ Implica el siguiente resultado

$$P_n(\cos(d_{GC}(L_1, L_2, \Delta\ell))) = P_n(\cos L_1) P_n(\cos L_2) + 2\sum_{m=1}^{n} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cos(m\Delta\ell) P_{nm}(\cos L_1) P_{nm}(\cos L_2)$$

Con $P_n = P_{n0}$

Proceso Axialmente Simetrico

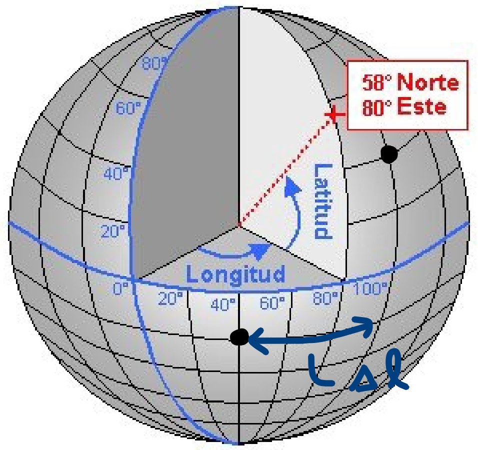
Sea $Z(L, \ell)$ un campo aleatorio tal que:

$$E[Z] = 0$$

$$E[Z^2] < +\infty$$

Diremos que Z es un proceso axialmente simetrico si:

$$Cov(Z(L_1, \ell_1); Z(L_2, \ell_2)) = C(L_1, L_2, \Delta\ell)$$



Def: Z c.a. ax. sim es longitudinalmente reversible si: $C(L_1, L_2, \Delta\ell) = C(L_1, L_2, -\Delta\ell)$

En general C no cumple lo anterior. En ese caso se dice longitudinalmente irreversible.

Karhunen–Loe`ve expansions of axially symmetric processes

Si Z es C.A. AX. sim entonces Admite una expansión K-L

$$Z(L,\ell)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} C_{nm}\, Y_{nm}(L,\ell)$$

donde C_{nm} es un campo aleatorio complejo Normal de media 0.

$$C_{nm} = a_{nm} + b_{nm}\, i$$

Con $a_{nm}\sim N(0,\sigma_1^2)$; $b_{nm}\sim N(0,\sigma_2^2)$

Si quiero que el campo aleatorio sea real $C_{nm}=(-1)^m\,\overline{C_{n-m}}$ se debe imponer. Dado esto se reduce la expansión a:

$$Z(L,\ell)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n0}\,\tilde P_{n0}(\cos L) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\{a_{nm}\cos(m\ell)+b_{nm}\sin(m\ell)\}\cdot\tilde P_{nm}(\cos L)$$

Con $\tilde P_{nm}=\sqrt{\frac{2n+1}{4\pi}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}}\, P_{nm}$

Para mantener la AX. sim se debe pedir que:

(C1) $\mathrm{Cov}\{a_{n0},a_{n'0}\}=\mathrm{Cov}\{b_{n0},b_{n'0}\}=f_0(n,n');\ \forall n,n'\geq 0$

(C2) $\mathrm{Cov}\{a_{nm},a_{n'm'}\}=\mathrm{Cov}\{b_{nm},b_{n'm'}\}=\delta_m^{m'} f_m(n,n')/2$ $\forall n,n'\geq m,\ m>0.$

(C3) $\mathrm{Cov}\{a_{nm},b_{n'm'}\}=-\mathrm{Cov}\{b_{nm},a_{n'm'}\}=\delta_m^{m'} g_m(n,n')/2$ $\forall n,n'\geq m,\ m>0.$

Con $\delta_m^{m'}=\begin{cases}0, & m\neq m'\\ 1, & m=m'\end{cases}$; $f_m(n,n')$ cov.ind, $g_m(n,n')$ cov. cruzada

Prop: $g_m(n,n')=-g_m(n',n)$, $g(n,n)=0$.

De esta forma si $V_m=(a_{n_1,m}, a_{n_2 m},\dots,b_{n_1 m},\dots)^T$ $n_1,n_2,\dots\geq m$ entonces $V_m\sim N(\vec 0,\Gamma_m)$

con $\Gamma_m=\begin{pmatrix}F_m & G_m\\ G_m^T & F_m\end{pmatrix}$; cuyas entradas son $f_m(n_i,n_j)$ y $g_m(n_i,n_j)$ resp.

Juntando Todas las condiciones tenemos que:

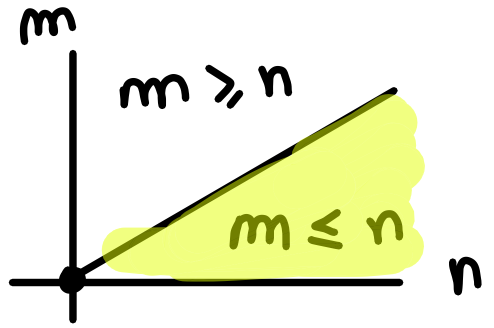
$$C(L_1,L_2,\Delta\ell)=\sum_{n,n'=0}^{\infty} f_0(n,n')\,\tilde P_{n0}(\cos L_1)\,\tilde P_{n'0}(\cos L_2) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n,n'=m}^{\infty}\{f_m(n,n')\cos(m\Delta\ell) + g_m(n,n')\sin(m\Delta\ell)\}\,\tilde P_{nm}(\cos L_1)\cdot\tilde P_{n'm}(\cos L_2)$$

$$C(L_1,L_2,\Delta\ell)=\sum_{n,n'=0} f_0(n,n')\,\tilde P_{n0}(\cos L_1)\,\tilde P_{n'0}(\cos L_2) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n,n'=m}^{\infty}\{f_m(n,n')\cos(m\Delta\ell)\,\tilde P_{nm}(\cos L_1)\cdot\tilde P_{n'm}(\cos L_2)\}$$

reversible:

$$f_m(n,n')=\begin{cases}0; & n\neq n'\\ d_n; & n=n'\end{cases}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} d_n\,\tilde P_{n0}(\cos L_1)\,\tilde P_{n0}(\cos L_2) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} d_n\cdot\cos(m\Delta\ell)\,\tilde P_{nm}(\cos L_1)\,\tilde P_{nm}(\cos L_2)$$



$$=\sum_{n=0}^{\infty} d_n\tilde P_{n0}\cdots + 2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} d_n\cos(m\Delta\ell)\left(\frac{2n+1}{4\pi}\,\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,P_{nm}(\cos L_1)\,P_{nm}(\cos L_2)\right)$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty} d_n\,\frac{2n+1}{4\pi}\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,P_{nm}(\cos L_1)\,P_{nm}(\cos L_2)$$