Análise Comparativa de Métodos Numéricos para Cálculo de Raízes Reais em Polinômios de Grau Ímpar

Fábio Araújo da Silva — Nº USP: 16311045
Pedro Luís Anghievisck — Nº USP: 15656521

SME0206 – 2º semestre de 2025

8 de setembro de 2025

Resumo

Este artigo compara os métodos da Bisseção, de Newton-Raphson e das Secantes na determinação de raízes reais da função $f(x) = 3x^5 + 8x^4 - 6x^3 - 16x^2 - 9x - 24$. Apresentam-se as descrições dos métodos, condições suficientes de convergência, implementação independente em programas (Python), análise gráfica da existência de raízes nos intervalos $[-2, -1]$ e $[1, 2]$, determinação das raízes exatas para comparação e discussão de resultados (número de iterações e precisão com tolerância 10^{-6}).

1 Introdução

O objetivo é resolver o problema proposto em disciplina de Análise Numérica: (i) descrever os métodos de Bisseção, Newton-Raphson e Secantes; (ii) evidenciar graficamente a existência de pelo menos uma raiz em $[-2, -1]$ e $[1, 2]$; (iii) determinar *todas* as raízes exatas de f para servir de referência; (iv) verificar condições suficientes de convergência; (v) aproximar as raízes nos dois intervalos com precisão 10^{-6}, gerando arquivos de saída tabulados por método, em dupla precisão, com pelo menos oito casas decimais.

Contribuições. (i) Corrige-se a determinação das raízes exatas por fatoração simbólica; (ii) documentam-se dificuldades práticas de implementação e as soluções adotadas; (iii) inclui-se um gráfico programático (pgfplots) que marca as raízes reais pedidas.

2 Métodos e Procedimentos

2.1 Bisseção

Baseia-se no Teorema do Valor Intermediário: se $f(a)f(b) < 0$ em $[a, b]$, há uma raiz em (a, b). A cada iteração k, toma-se $x_k = \frac{a_k+b_k}{2}$, avalia-se $f(x_k)$ e escolhe-se o subintervalo com troca de sinal. *Critério de parada:* $(b_k - a_k)/2 < \texttt{tol}$ (sem usar o erro verdadeiro e_k). *Saída tabular:* k, a_k, b_k, x_k, $f(x_k)$ e o erro $e_k = |x_k - \bar{x}|$ (apenas para *relato/aval.*, não para parar).

2.2 Newton–Raphson

Iteração $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, com convergência quadrática quando x_0 está suficientemente próximo de raiz simples e f' não se anula no percurso. *Parada:* $|x_{k+1} - x_k| < \texttt{tol}$. *Saída tabular:* k, x_k, $f(x_k)$, $f'(x_k)$, e_k.

2.3 Secantes

Aproxima Newton substituindo $f'(x_k)$ por a diferença quociente usando x_k e x_{k-1}:

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\,\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Parada: $|x_{k+1} - x_k| < \texttt{tol}$. *Saída tabular:* k, x_k, $f(x_k)$, e_k.

2.4 Implementação, entradas/saídas e dificuldades

Cada método foi implementado em arquivo Python distinto (`bissecao.py`, `newton_raphson.py`, `secantes.py`) e orquestrado por `main.py`. Entradas: função f, (e f' para Newton), aproximações iniciais, $\texttt{tol} = 10^{-6}$ e `maxit`. Saídas: arquivos `{metodo}_saida1.txt` (para $[-2,-1]$) e `{metodo}_saida2.txt` (para $[1,2]$), com colunas alinhadas e *8 casas decimais* em dupla precisão.

Dificuldades e soluções práticas (documentadas no código): (i) *Derivada nula* em Newton: caso $f'(x_k) = 0$, interrompe-se com mensagem de falha (evita divisão por zero); (ii) *Secantes:* checa-se $f(x_k) - f(x_{k-1}) \neq 0$ para evitar divisão por zero; (iii) *Escolha de x_0 em Newton ($[-2,-1]$):* como f' e f'' mudam de sinal nesse intervalo, as condições suficientes globais não se verificam; adotou-se $x_0 = -1{,}5$, que empiricamente converge para a raiz correta; (iv) *Apresentação*: arredondamento consistente (8 casas) e supressão de "$-0{,}00000000$" na escrita das tabelas.

3 Resultados

3.1 Análise gráfica e existência de raízes em $[-2,-1]$ e $[1,2]$

A Figura 1 apresenta $f(x)$ no intervalo $[-3,3]$ com destaque das raízes reais e dos dois intervalos de interesse. Nota-se $f(-2)\cdot f(-1) = 10\cdot(-20) < 0$ e $f(1)\cdot f(2) = -44\cdot 70 < 0$, garantindo ao menos uma raiz real em cada intervalo.

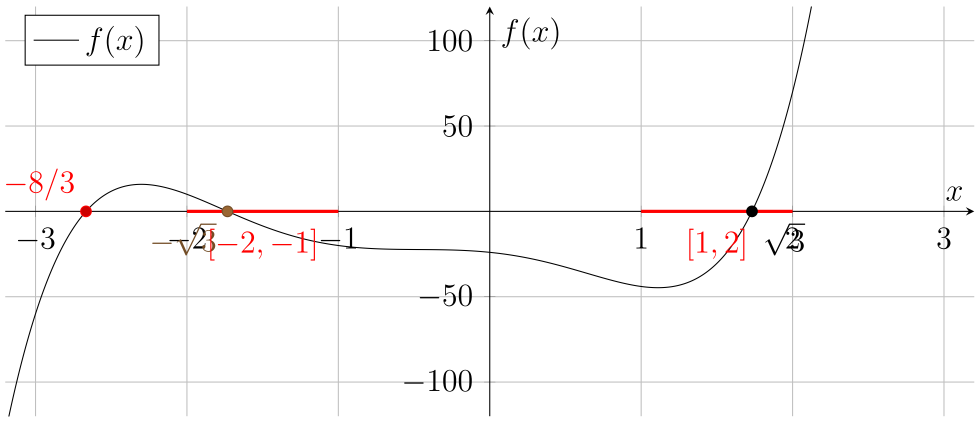

Figura 1: Gráfico de $f(x) = 3x^5 + 8x^4 - 6x^3 - 16x^2 - 9x - 24$ com raízes reais destacadas e intervalos $[-2, -1]$ e $[1, 2]$.

3.2 Raízes exatas de $f(x)$

A fatoração simbólica de f é:

$$f(x) = (3x + 8)\,(x^2 - 3)\,(x^2 + 1).$$

Logo, as **raízes exatas** são

$$x = -\tfrac{8}{3}, \quad x = \pm\sqrt{3}, \quad x = \pm i.$$

Para comparação numérica neste trabalho, interessam as *raízes reais* $-\frac{8}{3}$, $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$. As duas raízes requeridas nos intervalos especificados são $-\sqrt{3} \in [-2, -1]$ e $\sqrt{3} \in [1, 2]$.

3.3 Condições suficientes de convergência (resumo)

Bisseção: exige $f(a)f(b) < 0$, satisfeita em $[-2, -1]$ e $[1, 2]$; garante convergência.
Newton: condições clássicas (raiz simples, $f' \neq 0$ na vizinhança e escolha de x_0 com $f(x_0)f''(x_0) > 0$) asseguram convergência local. Em $[1, 2]$, $x_0 = 2$ atende bem; em $[-2, -1]$, como f' e f'' mudam de sinal, adota-se $x_0 = -1{,}5$ por empirismo seguro.
Secantes: convergência superlinear sob hipóteses suaves, em geral quando os chutes iniciais estão suficientemente próximos/“cercando” a raiz. Usaram-se os extremos do intervalo como x_0 e x_1.

3.4 Aproximações numéricas (tolerância 10^{-6})

Critérios de parada *sem* uso de e_k: Bisseção: $(b-a)/2 < 10^{-6}$; Newton: $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$; Secantes: $|x_{k+1} - x_k| < 10^{-6}$. As tabelas completas (com k, valores e e_k) estão nos arquivos `bissecao_saida*.txt`, `newton_saida*.txt` e `secantes_saida*.txt`. Abaixo, um *resumo* do número de iterações por método e intervalo, com as escolhas iniciais: Bisseção ($[a, b]$), Newton (x_0), Secantes (x_0, x_1 nos extremos).

Tabela 1: Resumo de iterações para `tol` $= 10^{-6}$

Método	$[-2,-1]$ (raiz $-\sqrt{3}$)	$[1,2]$ (raiz $\sqrt{3}$)
Bisseção (a,b)	19	19
Newton (x_0)	4 (com $x_0 = -1{,}5$)	5 (com $x_0 = 2{,}0$)
Secantes (x_0, x_1)	5 (com $-2, -1$)	8 (com $1, 2$)

Discussão. Os resultados confirmam a teoria: Newton apresentou menor número de iterações (convergência quadrática), seguido das Secantes (superlinear) e da Bisseção (linear). A Bisseção, embora mais lenta, é a mais robusta quando há troca de sinal; Newton é extremamente eficiente quando bem-inicializado e com derivada disponível; Secantes evita derivada, com custo por iteração baixo e desempenho intermediário.

4 Conclusões

Todos os objetivos propostos foram alcançados. As raízes exatas reais foram determinadas por fatoração: $-\frac{8}{3}$, $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$; as raízes-alvo dos intervalos foram $-\sqrt{3}$ e $\sqrt{3}$. As condições de convergência dos métodos foram verificadas e discutidas; implementações independentes geraram saídas tabuladas com 8 casas decimais em dupla precisão; os critérios de parada não utilizaram o erro verdadeiro. Comparativamente, Newton demandou menos iterações quando inicializado de forma adequada; Secantes obteve desempenho intermediário sem derivadas; Bisseção garantiu convergência ao custo de mais iterações. Os artefatos (código e arquivos de saída) acompanham este relatório.

Referências

- ABNT. **NBR 6023:2018**: Informação e documentação — Referências — Elaboração. Rio de Janeiro, 2018.
- FRANCO, N. **Equações e Inequações: fundamentos e métodos**. 2. ed. São Paulo: Ed. XYZ, 2006.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1996.