Sobre diferentes métodos de resolução de sistemas lineares para computar os índices de criminalidade sobre um grafo de Manhattan

Vinícius Girão   Natália Carvalho   Larissa Rocha   Fábio Kauê

Instituto de Ciências Matématicas e de Computação da Universidade de São Paulo

28 de abril de 2025

O que fizemos?

O que fizemos?

1. Extraímos a maior componente conexa do grafo providenciado.

O que fizemos?

1. Extraímos a maior componente conexa do grafo providenciado.
2. Escolhemos, convenientemente, 10 vértices do grafo e valores, entre 1 e 10, para cada um destes.

O que fizemos?

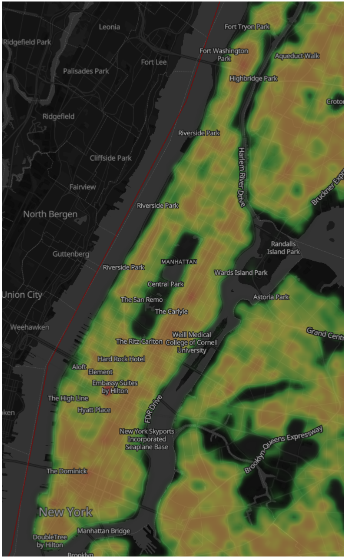
1. Extraímos a maior componente conexa do grafo providenciado.
2. Escolhemos, convenientemente, 10 vértices do grafo e valores, entre 1 e 10, para cada um destes.
3. Construímos a matriz laplaciana L e a matriz de penalidades P, com $\alpha = 10^{-7}$, assim como o vetor b, como instruído.

O que fizemos?

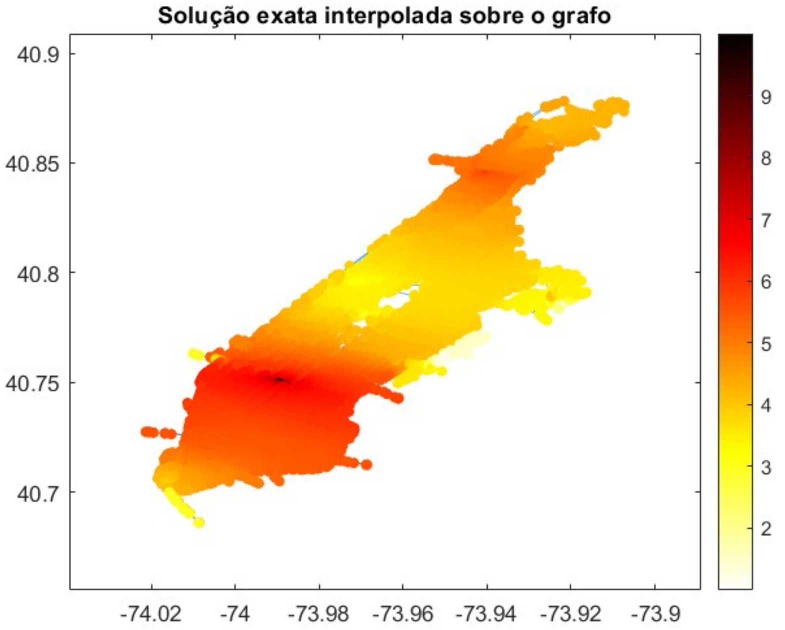
1. Extraímos a maior componente conexa do grafo providenciado.
2. Escolhemos, convenientemente, 10 vértices do grafo e valores, entre 1 e 10, para cada um destes.
3. Construímos a matriz laplaciana L e a matriz de penalidades P, com $\alpha = 10^{-7}$, assim como o vetor b, como instruído.
4. Resolvemos o sistema $(L + P)\,x = Pb$ por meio de diferentes métodos e comparamos os resultados obtidos.

O que fizemos?

1. Extraímos a maior componente conexa do grafo providenciado.
2. Escolhemos, convenientemente, 10 vértices do grafo e valores, entre 1 e 10, para cada um destes.
3. Construímos a matriz laplaciana L e a matriz de penalidades P, com $\alpha = 10^{-7}$, assim como o vetor b, como instruído.
4. Resolvemos o sistema $(L + P)x = Pb$ por meio de diferentes métodos e comparamos os resultados obtidos.



Fonte:safemap.io/NYC Open Data


Solução exata interpolada sobre o grafo
40.9
40.85
40.8
40.75
40.7
-74.02
-74
-73.98
-73.96
-73.94
-73.92
-73.9
9
8
7
6
5
4
3
2

Decomposição LU

Cholesky

Para os métodos iterativos...

Para os métodos iterativos...

1. Utilizamos uma tolerância de 1e-6.

Para os métodos iterativos...

1. Utilizamos uma tolerância de 1e-6.
2. Empregamos a norma ℓ^2 (euclidiana para vetores reais) para verificar a qualidade da convergência de cada método. Além disso, também calculamos a norma relativa da seguinte forma:

Para os métodos iterativos...

1. Utilizamos uma tolerância de 1e-6.
2. Empregamos a norma ℓ^2 (euclidiana para vetores reais) para verificar a qualidade da convergência de cada método. Além disso, também calculamos a norma relativa da seguinte forma:

$$\ell^2_{rel}(x) = \frac{\|x - y\|}{\|y\| + \epsilon}, \text{ com } \epsilon > 0,$$

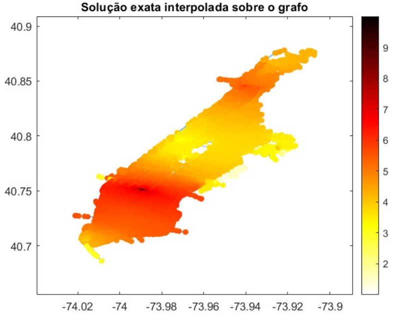
onde y é a solução exata.

Para os métodos iterativos...

1. Utilizamos uma tolerância de 1e-6.
2. Empregamos a norma ℓ^2 (euclidiana para vetores reais) para verificar a qualidade da convergência de cada método. Além disso, também calculamos a norma relativa da seguinte forma:

$$\ell^2_{rel}(x) = \frac{\|x - y\|}{\|y\| + \epsilon}, \text{ com } \epsilon > 0,$$

onde y é a solução exata.

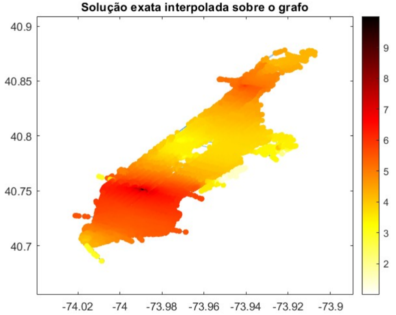


Para os métodos iterativos...

1. Utilizamos uma tolerância de 1e-6.
2. Empregamos a norma ℓ^2 (euclidiana para vetores reais) para verificar a qualidade da convergência de cada método. Além disso, também calculamos a norma relativa da seguinte forma:

$$\ell^2_{rel}(x) = \frac{\|x - y\|}{\|y\| + \epsilon}, \text{ com } \epsilon > 0,$$

onde y é a solução exata.



Buscamos uma solução dessa forma.

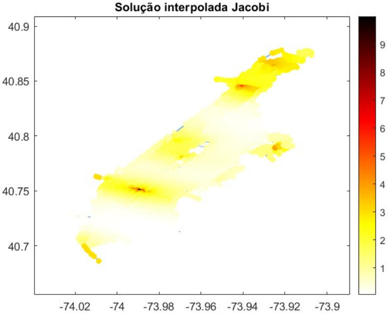
Gauss-Jacobi

Gauss-Jacobi

1. Convergiu com 1000 iterações e em 0.545334 segundo.

Gauss-Jacobi

1. Convergiu com 1000 iterações e em 0.545334 segundo.
2. Este método foi o que mais divergiu do resultado exato, com uma norma ℓ^2 da diferença em relação ao resultado exato de 3.768525e+02 e uma norma relativa de 8.318139e-01, o que justifica o mapa insatisfatório.



Gauss-Seidel

Gauss-Seidel

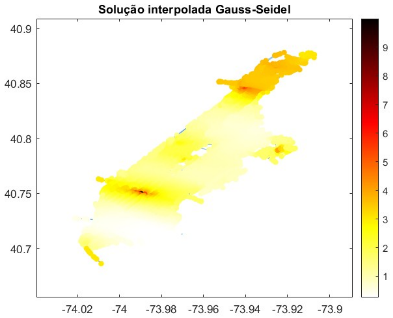
1. Convergiu com 1000 iterações e em 0.368160 segundo.

Gauss-Seidel

1. Convergiu com 1000 iterações e em 0.368160 segundo.
2. Apesar de ter se aproximado mais da solução exata do que o método de Jacobi, com uma norma ℓ^2 da diferença de 3.274648e+02 e uma norma relativa de 7.228020e-01, o método de Gauss-Seidel ainda resulta numa representação longe da ideal.

Gauss-Seidel

1. Convergiu com 1000 iterações e em 0.368160 segundo.
2. Apesar de ter se aproximado mais da solução exata do que o método de Jacobi, com uma norma ℓ^2 da diferença de 3.274648e+02 e uma norma relativa de 7.228020e-01, o método de Gauss-Seidel ainda resulta numa representação longe da ideal.



Gradientes conjugados

Gradientes conjugados

1. A convergência do método dos gradientes conjugados é garantida pelo fato de que a matriz $L + P$ é simétrica definida positiva.

Gradientes conjugados

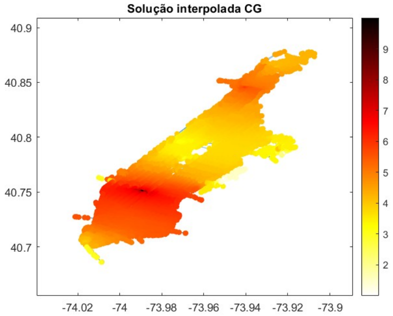
1. A convergência do método dos gradientes conjugados é garantida pelo fato de que a matriz $L + P$ é simétrica definida positiva.
2. O método CG convergiu com 1101 iterações e em 0.1703 segundo.

Gradientes conjugados

1. A convergência do método dos gradientes conjugados é garantida pelo fato de que a matriz $L + P$ é simétrica definida positiva.
2. O método CG convergiu com 1101 iterações e em 0.1703 segundo.
3. Convergiu eficientemente, com uma norma ℓ^2 da diferença de 3.172346e-05 e uma norma relativa de 7.002212e-08.

Gradientes conjugados

1. A convergência do método dos gradientes conjugados é garantida pelo fato de que a matriz $L + P$ é simétrica definida positiva.
2. O método CG convergiu com 1101 iterações e em 0.1703 segundo.
3. Convergiu eficientemente, com uma norma ℓ^2 da diferença de 3.172346e-05 e uma norma relativa de 7.002212e-08.



Interpretando os resultados