

# Sobre diferentes métodos de resolução de sistemas lineares para computar os índices de criminalidade sobre um grafo de Manhattan

Vinícius Girão   Natália Carvalho   Larissa Rocha   Fabio Araujo

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo

April 28, 2025

# O que fizemos?

# O que fizemos?

- 1 Extraímos a maior componente conexa  $G$  do grafo providenciado.

# O que fizemos?

- 1 Extraímos a maior componente conexa  $G$  do grafo providenciado.
- 2 Escolhemos, convenientemente, 10 vértices de  $G$  e valores, entre 1 e 10, para cada um destes.

# O que fizemos?

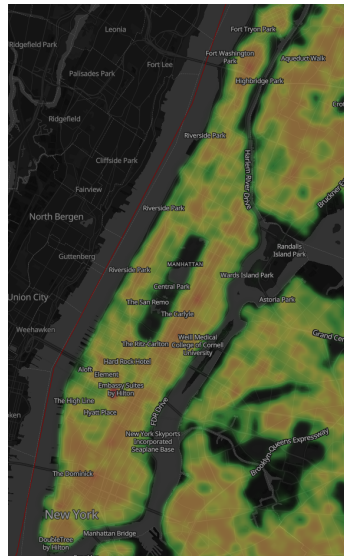
- 1 Extraímos a maior componente conexa  $G$  do grafo providenciado.
- 2 Escolhemos, convenientemente, 10 vértices de  $G$  e valores, entre 1 e 10, para cada um destes.
- 3 Construimos a matriz laplaciana  $L$  e a matriz de penalidades  $P$ , com  $\alpha = 10^7$ , assim como o vetor  $b$ , como instruído.

# O que fizemos?

- 1 Extraímos a maior componente conexa  $G$  do grafo providenciado.
- 2 Escolhemos, convenientemente, 10 vértices de  $G$  e valores, entre 1 e 10, para cada um destes.
- 3 Construimos a matriz laplaciana  $L$  e a matriz de penalidades  $P$ , com  $\alpha = 10^7$ , assim como o vetor  $b$ , como instruído.
- 4 Resolvemos o sistema  $(L + P)x = Pb$  por meio de diferentes métodos e comparamos os resultados obtidos.

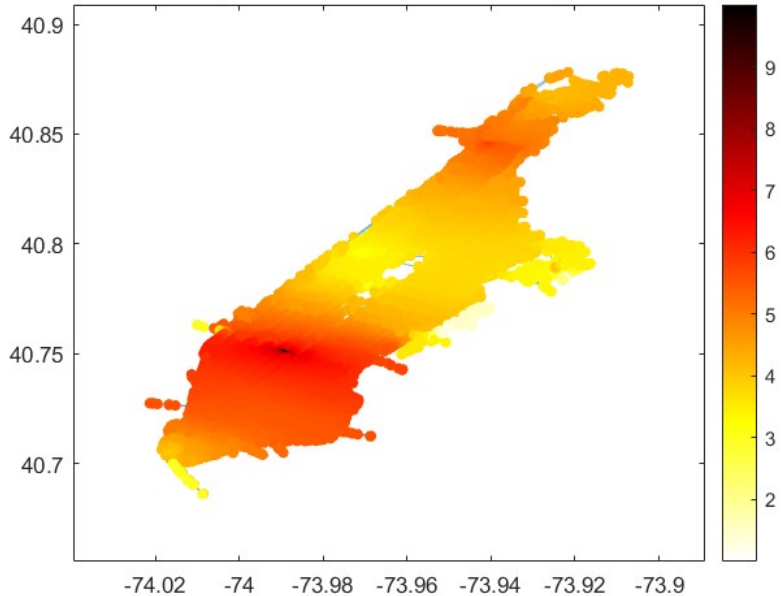
# O que fizemos?

- 1 Extraímos a maior componente conexa  $G$  do grafo providenciado.
- 2 Escolhemos, convenientemente, 10 vértices de  $G$  e valores, entre 1 e 10, para cada um destes.
- 3 Construimos a matriz laplaciana  $L$  e a matriz de penalidades  $P$ , com  $\alpha = 10^7$ , assim como o vetor  $b$ , como instruído.
- 4 Resolvemos o sistema  $(L + P)x = Pb$  por meio de diferentes métodos e comparamos os resultados obtidos.



Fonte: [safemap.io](https://safemap.io/)/NYC Open Data

## Solução exata interpolada sobre o grafo





# Métodos diretos

## Decomposição LU

## Decomposição LU

- 1 Levou 792.882385 segundos (aproximadamente 13 minutos).

## Cholesky

### Decomposição LU

- 1 Levou 792.882385 segundos (aproximadamente 13 minutos).

## Decomposição LU

- 1 Levou 792.882385 segundos (aproximadamente 13 minutos).

## Cholesky

- 1 Como  $G$  é um grafo conexo, sabemos que  $L$  é simétrica semidefinida positiva.

## Decomposição LU

- 1 Levou 792.882385 segundos (aproximadamente 13 minutos).

## Cholesky

- 1 Como  $G$  é um grafo conexo, sabemos que  $L$  é simétrica semidefinida positiva.
- 2 Levou 298.476189 segundos (aproximadamente 5 minutos).

# Para os métodos iterativos...

# Para os métodos iterativos...

- 1 Utilizamos uma tolerância de  $1e-6$ .



# Para os métodos iterativos...

- 1 Utilizamos uma tolerância de  $1e-6$ .
- 2 Empregamos a norma  $\ell^2$  (euclidiana para vetores reais) para verificar a qualidade da convergência de cada método. Além disso, também calculamos a norma relativa da seguinte forma:

# Para os métodos iterativos...

- 1 Utilizamos uma tolerância de  $1e-6$ .
- 2 Empregamos a norma  $\ell^2$  (euclidiana para vetores reais) para verificar a qualidade da convergência de cada método. Além disso, também calculamos a norma relativa da seguinte forma:

$$\ell_{rel}^2(x) = \frac{\|x - y\|}{\|y\| + \epsilon}, \text{ com } \epsilon > 0,$$

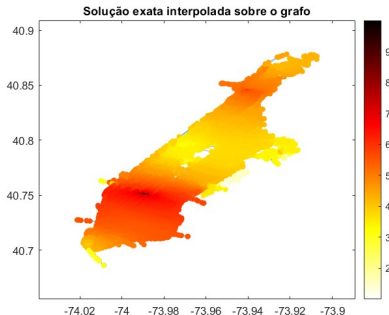
onde  $y$  é a solução exata.

# Para os métodos iterativos...

- 1 Utilizamos uma tolerância de  $1e-6$ .
- 2 Empregamos a norma  $\ell^2$  (euclidiana para vetores reais) para verificar a qualidade da convergência de cada método. Além disso, também calculamos a norma relativa da seguinte forma:

$$\ell_{rel}^2(x) = \frac{\|x - y\|}{\|y\| + \epsilon}, \text{ com } \epsilon > 0,$$

onde  $y$  é a solução exata.

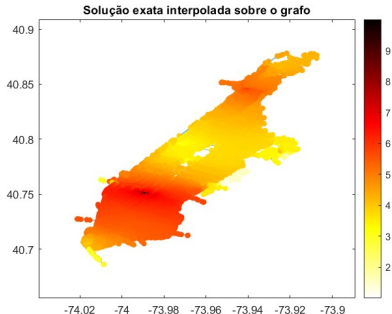


# Para os métodos iterativos...

- 1 Utilizamos uma tolerância de  $1e-6$ .
- 2 Empregamos a norma  $\ell^2$  (euclidiana para vetores reais) para verificar a qualidade da convergência de cada método. Além disso, também calculamos a norma relativa da seguinte forma:

$$\ell_{rel}^2(x) = \frac{\|x - y\|}{\|y\| + \epsilon}, \text{ com } \epsilon > 0,$$

onde  $y$  é a solução exata.



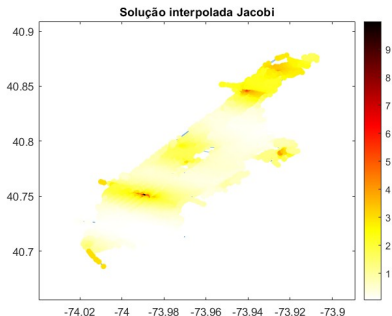
Buscamos uma solução dessa forma.

# Gauss-Jacobi

- 1 Convergiu com 1000 iterações e em 0.545334 segundo.

- 1 Convergiu com 1000 iterações e em 0.545334 segundo.
- 2 Este método foi o que mais divergiu do resultado exato, com uma norma  $\ell^2$  da diferença em relação ao resultado exato de  $3.768525e+02$  e uma norma relativa de  $8.318139e-01$ , o que justifica o mapa insatisfatório.

- 1 Convergiu com 1000 iterações e em 0.545334 segundo.
- 2 Este método foi o que mais divergiu do resultado exato, com uma norma  $\ell^2$  da diferença em relação ao resultado exato de  $3.768525e+02$  e uma norma relativa de  $8.318139e-01$ , o que justifica o mapa insatisfatório.



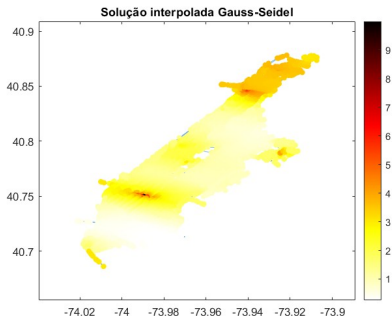




- 1 Convergiu com 1000 iterações e em 0.368160 segundo.

- 1 Convergiu com 1000 iterações e em 0.368160 segundo.
- 2 Apesar de ter se aproximado mais da solução exata do que o método de Jacobi, com uma norma  $\ell^2$  da diferença de  $3.274648e+02$  e uma norma relativa de  $7.228020e-01$ , o método de Gauss-Seidel ainda resulta numa representação longe da ideal.

- 1 Convergiu com 1000 iterações e em 0.368160 segundo.
- 2 Apesar de ter se aproximado mais da solução exata do que o método de Jacobi, com uma norma  $\ell^2$  da diferença de  $3.274648e+02$  e uma norma relativa de  $7.228020e-01$ , o método de Gauss-Seidel ainda resulta numa representação longe da ideal.



# Gradientes conjugados

# Gradientes conjugados

- 1 A convergência do método dos gradientes conjugados é garantida pelo fato de que a matriz  $L + P$  é simétrica definida positiva.

# Gradientes conjugados

- 1 A convergência do método dos gradientes conjugados é garantida pelo fato de que a matriz  $L + P$  é simétrica definida positiva.
- 2 O método CG convergiu com 1101 iterações e em 0.1703 segundo.

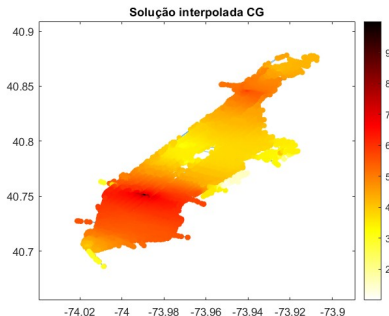
# Gradientes conjugados

- 1 A convergência do método dos gradientes conjugados é garantida pelo fato de que a matriz  $L + P$  é simétrica definida positiva.
- 2 O método CG convergiu com 1101 iterações e em 0.1703 segundo.
- 3 Convergiu eficientemente, com uma norma  $\ell^2$  da diferença de  $3.172346\text{e-}05$  e uma norma relativa de  $7.002212\text{e-}08$ .



# Gradientes conjugados

- 1 A convergência do método dos gradientes conjugados é garantida pelo fato de que a matriz  $L + P$  é simétrica definida positiva.
- 2 O método CG convergiu com 1101 iterações e em 0.1703 segundo.
- 3 Convergiu eficientemente, com uma norma  $\ell^2$  da diferença de  $3.172346\text{e-}05$  e uma norma relativa de  $7.002212\text{e-}08$ .



# Interpretando os resultados

## Métodos diretos

## Métodos diretos

Apesar de ambos terem fornecido a resposta exata, o método de Cholesky o fez num tempo consideravelmente menor.

## Métodos iterativos

### Métodos diretos

Apesar de ambos terem fornecido a resposta exata, o método de Cholesky o fez num tempo consideravelmente menor.

## Métodos diretos

Apesar de ambos terem fornecido a resposta exata, o método de Cholesky o fez num tempo consideravelmente menor.

## Métodos iterativos

Os métodos de Gauss-Jacobi e de Gauss-Seidel se provaram ineficazes para solucionar o sistema de forma aceitável, enquanto que o método dos gradientes conjugados foi extremamente eficiente.

## Métodos diretos

Apesar de ambos terem fornecido a resposta exata, o método de Cholesky o fez num tempo consideravelmente menor.

## Métodos iterativos

Os métodos de Gauss-Jacobi e de Gauss-Seidel se provaram ineficazes para solucionar o sistema de forma aceitável, enquanto que o método dos gradientes conjugados foi extremamente eficiente.

Neste caso, convém optar pelo método dos gradientes conjugados!