Relatório – Solução de Sistemas Lineares Aplicados a Grafos de Manhattan

Vinícius Girão de Castro — 15491730
Natália Carvalho — 15497232
Larissa —
Fábio Araujo — 16311045

Objetivo

Este trabalho tem como objetivo resolver um sistema linear oriundo de um grafo de ruas da ilha de Manhattan, utilizando diferentes métodos numéricos: LU, Cholesky, Jacobi, Gauss-Seidel e Gradientes Conjugados; e comparar o desempenho de cada um.

Descrição do problema

Utilizando os arquivos manh.el (arestas) e manh.xy (coordenadas dos vértices), foi construído um grafo representando o sistema de ruas de Manhattan. As etapas seguidas foram:

- Seleção da maior componente conexa do grafo;
- escolha de k vértices aleatórios $v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{ik}$ e atribuição de valores $c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ik} \in (0, 10]$;
- construção da matriz Laplaciana L do grafo;
- Construção da matriz de penalidades $P = (P_{ij})$, onde

$$P_{ij} = \begin{cases} \alpha = 1.0e7, \text{ se } j \text{ é um índice de um vértice escolhido} \\ 0, \text{ caso contrário;} \end{cases}$$

- construção do vetor $b = (b_j)$, onde

$$b_j = \begin{cases} c_{i_s}, \text{ se j=i}_s \\ 0, \text{ caso contrário;} \end{cases}$$

- resolução do sistema $(L + P)\,x = Pb$.

Métodos utilizados

Decomposição LU

- A matriz $A = L + P$ foi decomposta em $A = LU$;
- Resolvido em duas etapas:
  a) $Ly = Pb$
  b) $Ux = y$;
- vantagem: aplicável à qualquer matriz não singular;
- desvantagem: alto custo para matrizes esparsas.

Decomposição de Cholesky

O método iterativo estrutura-se com a decomposição $A = HH^T$, sendo H triangular inferior. Então é calculada a solução em duas etapas:

a) $Hy = Pb$

b) $H^T x = y$.

Para que possamos determinar H, é necessário que a matriz A seja simétrica definida positiva.

Sabe-se que toda matriz Laplaciana de um grafo conexo é necessariamente simétrica semidefinida positiva, mas ao adicionar a matriz de penalidades, com valores grandes e positivos na diagonal, algumas posições da solução são fortemente forçadas a assumir os valores desejados definidos em b. Esses grandes valores diagonais empurram todos os autovalores da matriz para cima, garantindo que todos sejam estritamente positivos.

Em conclusão, a matriz A torna-se simétrica definida positiva (SPD), o que justifica o uso seguro da Decomposição de Cholesky. Tal método tem como vantagem ser mais eficiente que LU, apesar de requerer que a matriz seja SPD. Para o teste com 400 valores, o método levou 306.722567 segundos, ou seja, pouco mais de 5 minutos.

Método de Jacobi

- Iterativo, baseado em $A = D + R$;
- iteração: $x^{k+1} = D^{-1}\left(Pb - Rx^k\right)$;
- vantagem: simples e paralelizável;
- desvantagem: convergência lenta.

Gauss-Seidel

- Iterativo - usa atualizações imediatas;
- iteração: $(x_i)^{k+1} = (1/A_{ii})\left(Pb_i - \text{ somas envolvendo } x^{k+1} \text{ e } x^k\right)$;
- vantagem: converge mais rápido que Jacobi;
- desvantagem: menos paralelizável.

Gradientes conjugados (CG)

- Iterativo para matrizes SPD;
- minimiza $f(x) = 0.5x^T Ax - x^T Pb$;
- atualiza x em direções ortogonais;
- vantagem: eficiente para matrizes grandes esparsas;
- desvantagem: depende do condicionamento.

Comparativo dos métodos

Tabela 1: Comparação dos métodos

Método	LU	Cholesky	Jacobi	Gauss-Seidel	CG
Tipo	Direto	Direto	Iterativo	Iterativo	Iterativo
Requisitos	Matriz não singular	Matriz SPD	Preferível diagonal dominante	Igual ao Jacobi	Matriz SPD
Observações	Alto custo de memória	Mais eficiente que LU	Convergência lenta	Convergência mais rápida	Melhor desempenho geral

Conclusão

Todos os métodos foram capazes de resolver o sistema. Os métodos diretos (LU e Cholesky) forneceram soluções exatas rapidamente, com destaque para o Cholesky, que foi mais eficiente devido à estrutura da matriz.

Entre os iterativos, os Gradientes Conjugados apresentaram o melhor desempenho para o caso estudado, sendo uma excelente opção para problemas de grande escala com matrizes esparsas e SPD.