

Relatório – Sobre diferentes métodos de resolução de sistemas lineares para computar os índices de criminalidade sobre um grafo de Manhattan

Vinícius Girão de Castro — 15491730

Natália Carvalho — 15497232

Larissa Rocha Gonçalves — 15522431

Fabio Araujo — 16311045

O que fizemos?

1. Extraímos a maior componente conexa G do grafo providenciado.
2. Escolhemos, convenientemente, 10 vértices de G e valores, entre 1 e 10, para cada um destes.
3. Construímos a matriz laplaciana L e a matriz de penalidades P , com $\alpha = 10^7$, assim como o vetor b , como instruído.
4. Resolvemos o sistema $(L + P)x = Pb$ por meio de diferentes métodos e comparamos os resultados obtidos.

Para os métodos iterativos...

- Utilizamos uma tolerância de 1e-6.
- Empregamos a norma ℓ^2 (euclidiana para vetores reais) para verificar a qualidade da convergência de cada método. Além disso, também calculamos a norma relativa da seguinte forma:

$$\ell_{rel}^2(x) = \frac{\|x - y\|}{\|y\| + \epsilon}, \text{ com } \epsilon > 0,$$

onde y é a solução exata.

Métodos utilizados

Decomposição LU

- Levou 792.882385 segundos (aproximadamente 13 minutos).

Decomposição de Cholesky

- Como G é um grafo conexo, sabemos que L é simétrica semidefinida positiva.
- Levou 298.476189 segundos (aproximadamente 5 minutos).

Método de Jacobi

- Convergiu com 1000 iterações e em 0.545334 segundo.
- Este método foi o que mais divergiu do resultado exato, com uma norma ℓ^2 da diferença em relação ao resultado exato de $3.768525e+02$ e uma norma relativa de $8.318139e-01$, o que justifica o mapa insatisfatório.

Gauss-Seidel

- Convergiu com 1000 iterações e em 0.368160 segundo.
- Apesar de ter se aproximado mais da solução exata do que o método de Jacobi, com uma norma ℓ^2 da diferença de $3.274648e+02$ e uma norma relativa de $7.228020e-01$, o método de Gauss-Seidel ainda resulta numa representação longe da ideal.

Gradientes conjugados (CG)

- A convergência do método dos gradientes conjugados é garantida pelo fato de que a matriz $L + P$ é simétrica definida positiva.
- O método CG convergiu com 1101 iterações e em 0.1703 segundo.
- Convergiu eficientemente, com uma norma ℓ^2 da diferença de $3.172346e-05$ e uma norma relativa de $7.002212e-08$.

Interpretando os resultados

- **Métodos diretos:**

Apesar de ambos terem fornecido a resposta exata, o método de Cholesky o fez num tempo consideravelmente menor.

- **Métodos iterativos:**

Os métodos de Gauss-Jacobi e de Gauss-Seidel se provaram ineficazes para solucionar o sistema de forma aceitável, enquanto que o método dos gradientes conjugados foi extremamente eficiente.

Neste caso, convém optar pelo método dos gradientes conjugados!