Formulario Teoria delle Code

Domenico Benfenati

26 gennaio 2023

Sommario

In questo documento vengono riportare le formule principali da usare per l'esame di *Impianti di Elaborazione* durante lo scritto di Teoria delle Code.

1 Glossario

- N: numero di utenti totali all'interno di un sistema;
- N_Q : numero di utenti in coda;
- T: tempo di risposta di un servente;
- W: tempo di attesa all'interno della coda;
- L: lunghezza della coda;
- S: tempo di servizio di un servente;
- R: job non completati nel sistema.

2 Formule Generali

- **Legge di Little** $\rightarrow E[N] = \lambda E[T]$
- **DTMC** $\rightarrow \underline{\pi} = \underline{\pi} \cdot \underline{\underline{P}}$

  in regime stazionario

- **CTMC** $\rightarrow \underline{p} \cdot \underline{\underline{Q}} = 0$

  in regime stazionario

- **Processo nascita-morte** $\rightarrow \underline{\mu}_n \cdot \underline{p}_n = \underline{\lambda}_{n-1} \cdot \underline{p}_{n-1}$

  ricordati sempre che vale la formula $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$

- **Notazione di Kendall** $\rightarrow A/S/m/c/p/SD$

  - A: tipologia di processo di arrivo;
  - S: tipologia di processo di servizio;
  - m: numero di serventi;
  - c: numero di utenti totali nel sistema;
  - p: numero della popolazione, cioè di richiedenti di un servizio;
  - SD: disciplina di scheduling.

3 Coda di tipo MM1

Processo di Markov in entrata e uscita, con 1 servente

3.1 Formula Stazionaria

$\lambda p_{n-1} = \mu p_n \rightarrow p_n = \rho^n p_0 \rightarrow p_0 = 1 - \rho \rightarrow p_n = \rho^n(1-\rho)$

Vale sempre che $\rho < 1$

3.2 Probabilità di sistema occupato

$P(N > 0) = \rho$

3.3 Numero medio di utenti

$E[N] = \sum_{i=0}^{\infty} ip_i = \ldots = \frac{\rho}{1-\rho}$

3.4 Tempo medio di risposta

$E[T] = \frac{1}{\mu - \lambda}$

3.5 Tempo medio di attesa

$E[N_Q] = \lambda E[W] = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

3.6 Formule di distribuzione dei tempi

$P\{T > t\} = e^{-(\mu-\lambda)t}$
$P\{W > t\} = \rho e^{-(\mu-\lambda)t}$

3.7 Dimensionamento della coda

rappresenta la probabilità che all'arrivo di un job la cosa sia piena e sto servendo 1 job

$P\{N \geq L+2\} = \rho^{L+2}$

4 Coda di tipo MMm

Processo di Markov in entrata e uscita, con m serventi

4.1 Formula Stazionaria

$$\begin{cases} \lambda p_{i-1} = i\mu p_i \quad (i \leq m) \\ \lambda p_{i-1} = m\mu p_i \quad (i \geq m) \end{cases}$$

$\rho = \dfrac{\lambda}{m\mu}$

4.2 Tempo medio di risposta

$$E[T] = \frac{1}{\mu} + E[W]$$

4.3 Tempo medio di attesa

$$E[W] = P_Q \frac{1}{2\mu - \lambda}$$

4.4 Caso particolare: MM2

4.4.1 Formula Stazionaria

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho}$$

4.4.2 Probabilità che un processo venga accodato

$$P_Q = \sum_{i=2}^{\infty} p_i = \frac{2\rho^2}{1+\rho}$$

4.4.3 Numero medio di utenti nel sistema

$$E[N] = \frac{2\rho}{1-\rho^2}$$

4.4.4 Numero medio di utenti in coda

$$E[N_Q] = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2}$$

5 Coda di tipo MMmk

Coda di Markov di dimensione k; è un sisteme con perdita

5.1 Probabilità di coda piena

$P\{N = k\} = p_k$

Si sfrutta sempre la formula stazionaria delle code MMm

5.2 Tasso di job bloccati

$\lambda \cdot p_k$

5.3 Througput del sistema

è un throughput in entrata

$\lambda(1-p_k)$

5.4 Legge di Little modificata per sistemi con perdita

$E[N]=\lambda(1-p_k)E[T]$

6 Coda di tipo MMmm

É un sistema **senza coda**

6.1 Probabilità di blocco, o di perdita di un job

$$P_B(m,\alpha)=p_m=\frac{\frac{\alpha^m}{m!}}{1+\frac{\alpha^1}{1!}+\frac{\alpha^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha^m}{m!}}$$

Ricorda che il parametro α è calcolabile così $\alpha=\frac{\lambda}{\mu}$, ma anche tramite la formula $\rho=\frac{\alpha}{m}$

7 Coda di tipo MMmKN

Sistema di Markov con coda finita e thinking time

7.1 Formula Stazionaria

$$p_n=\frac{N!}{(N-n)!}\cdot\rho^n\cdot p_0 \quad \rightarrow p_0=\frac{1}{\sum p_n}=\frac{1}{\sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{(N-n)!}\rho^n}$$

7.2 Throughput medio del sistema

è un throughput in uscita dal sistema

$E[R]=\mu(1-p_0)$

7.3 Tempo medio di risposta del sistema

$$E[T]=\frac{\text{Num. utenti}}{\text{throughput medio}}-\text{Thinking time}=\frac{N}{E[R]}-\frac{1}{\lambda}$$

7.4 Probabilità di blocco

Vale solo per sistemi MMssn

$$p_s*=\frac{\binom{n-1}{s}\alpha^s}{\sum_{j=0}^{s}\binom{n-1}{j}\alpha^j}$$

Ricorda che il binomiale si esprime come segue: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

8 Coda di tipo MG1

Coda con tempi di servizio non Poissoniani

8.1 Tempo medio di attesa

$E[W] = E[N_Q] \cdot E[S] + E[R] \rightarrow E[W] = \frac{E[R]}{1 - \lambda E[S]} = \frac{E[R]}{1 - \rho}$

8.2 Formula PK

$E[R] = \frac{\lambda}{2} E[S^2]$

Ricorda che $E[S^2] = (E[S])^2 + VAR(S)$, dove $VAR(S)$ indica la **varianza** della variabile aleatoria S

8.3 Tempo medio di risposta

$E[T] = E[S] + \frac{\lambda E[S^2]}{2(1 - \rho)}$

8.4 Numero medio di utenti in coda

$E[N_Q] = \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1 - \rho)}$

8.5 Numero medio di utenti nell'intero sistema

$E[N] = \lambda E[S] + \frac{\lambda^2 E[S^2]}{2(1 - \rho)}$

Reti di Code

9 Formule generali

Teorema di Burke. *In un rete di code aperte, tutte MMm senza feedback, posso analizzare i sistemi in maniera separata, rendendo le code tra loro indipendenti. Si può dire quindi che, nel caso di due sole code, la probabilità che ci siano n_1 utenti nella prima e n_2 utenti nella seconda è pari a*

$$P\{N = \{n_1, n_2\}\} = P(N_1 = n_1) \cdot P(N_2 = n_2)$$

Inoltre, se l'entrata della rete è di tipo Poissoniano, allora il λ in entrata sarà pari al λ in uscita

9.1 Caso Particolare: Two Node Tandem

$P(n_1, n_2) = p_1(n_1) \cdot p_2(n_2) \rightarrow P(n_1, n_2) = \rho_1^{n_1}(1-\rho_1) \cdot \rho_2^{n_2}(1-\rho_2)$

Si tratta di 2 code MM1

10 Reti di Jackson

Sono reti aperte. Ogni coda è a se

10.1 Tempo medio nella coda i-esima

$E[T_i] = \dfrac{E[N_i]}{\lambda_i} = \dfrac{1}{(\mu_i - \lambda_i)}$

10.2 Tempo medio nella rete

$E[T] = \dfrac{E[N]}{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\sum_{j=0}^{K} \dfrac{\rho_j}{1-\rho_j}$

Ricorda che K è il numero di code presente nella rete, e che $E[N] = E[N_1] + E[N_2] + \ldots + E[N_K]$

11 Reti chiuse

Per risolvere una rete chiusa, devi tenere a mente che **ogni λ è combinazione lineare degli altri, quindi** $\lambda_i = \alpha\hat{\lambda_i}$. Va imposta una soluzione iniziale al sistema per trovare i vari λ e risolvere la rete.

11.1 Numero possibile di stati che assume la rete

$\text{Num.Stati} = \dbinom{M+K-1}{M-1}$

K: numero utenti; M: numero code

12 Mean Value Analysis

Si svolgono operazioni ricorsive al fine di risolvere una rete

Caso Base $\overline{N_i}[0] = 0$

La rete è vuota

Passo Ricorsivo $\overline{T_i}[k] = (1 + \overline{N_i}[k-1])\dfrac{1}{\mu_i}$

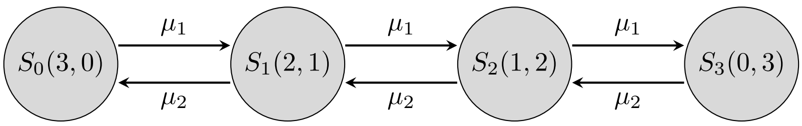
k è sia il numero di utenti sia il passo ricorsivo

$$\overline{N_i}[k] = k \cdot \frac{\hat{\lambda}_i \cdot \overline{T_i}[k]}{\sum_{j=1}^{M} \hat{\lambda}_j \cdot \overline{T_j}[k]}$$

$$\lambda_i[k] = \frac{\overline{N_i}[k]}{\overline{T_i}[k]}$$

13 Gordon- Newell

Serve a determinare la probabilità di essere in un determinato stato della rete. Viene riportato l'esempio con una rete con due code.



Stato (3,0): $p_{3,0} = \dfrac{1}{G}{\hat{\rho}_1}^3$

Stato (2,1): $p_{2,1} = \dfrac{1}{G}{\hat{\rho}_1}^2\hat{\rho}_2$

Stato (1,2): $p_{1,2} = \dfrac{1}{G}\hat{\rho}_1{\hat{\rho}_2}^2$

Stato (0,3): $p_{0,3} = \dfrac{1}{G}{\hat{\rho}_2}^3$

Fattore G: si ottiene dalla formula $\sum p_{i,j} = 1$

In generale: *Se nello stato S_i ho X utenti nella coda 1 e Y utenti nella coda 2, allora le p saranno calcolato tutte come $\hat{\rho}^X\hat{\rho}^Y$ a seconda di X e Y dello stato S_i, tutto fratto il fattore di normalizzazione G*