Università di Perugia
Dipartimento di Matematica e Informatica

Appunti *Simulazione*

Formulario

Anno Accademico 2021-2022

Last Update: January 29, 2023

Contents

*”Oi, con quanto sentimento
defeco sul tuo naso,
così che ti coli sul mento.”*

Wolfgang Amadeus Mozart

Chapter 1

Distribuzioni

1.1 Stimare la Distribuzione

Per stimare una distribuzione avendo solo i dati iniziali del problema effettua le seguenti operazioni:

N.B. *nel caso di Intervalli,* categoria_i *va sostituito con* $\text{Punto Medio Intervallo}_i$

1. $n = \sum f_i$: assicurati di aver calcolato la somma totale delle osservazioni
2. Calcola la **Media**:
   (a) Aggiungi *Colonna Totale*: $\text{categoria}_i * f_i$
   (b) Calcola la media effettiva con: $media = \frac{\sum totale}{n}$
3. Calcola la **Varianza** σ^2:
   (a) Aggiungi *Colonna ris*: $(\text{categoria}_i - \text{media})^2 * f_i$
   (b) Calcola la varianza effettiva con: $\sigma^2 = \frac{\sum \text{ris}}{n-1}$
4. Calcola la **Deviazione Standard** σ:
   (a) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
5. Calcola $V = \frac{\sigma}{\text{media}}$

Una volta completati tutti i calcoli controlla se il coefficiente V è vicino ad 1 e:

- **se lo è** allora utilizza l'**Esponenziale**,
- **se non lo è** è **Poissoniana** ma per avere una verifica, controlla che la media e la varianza siano uguali.

Note:
Si può avere una prima idea del tipo di distribuzione anche osservando le frequenze per categoria:

- Se le frequenze hanno valori alti per le prime categorie e poi decrescono, probabilmente è esponenziale negativa.
- Se le frequenze hanno valori bassi per le prime categorie e poi crescono, probabilmente è esponenziale…
- Se le frequenze hanno valori alti nelle categorie centrali e bassi verso le categorie agli estremi, probabilmente è Poissoniana
- Nel caso in cui sia geometrica solitamente viene esplicitato.

1.2 Calcolare la Probabilità di una Distribuzione

N.B. *nel caso di Intervalli,* categoria_i *va sostituito con* intervallo_i

1.2.1 Esponenziale

Numero di Parametri: 1

1.2.1.1 Senza Intervalli

$$p(i) = \frac{e^{\frac{-\text{categoria}_i}{\text{media}}}}{\text{media}}$$

1.2.1.2 Con Intervalli

$$p(i) = 1 - e^{\frac{-\text{intervallo}_i}{\text{media}}}$$

1.2.2 Poisson

Numero di Parametri: 1

$$p(i) = \frac{e^{-\text{media}} * \text{media}^{\text{categoria}_i}}{\text{categoria}_i!}$$

1.2.3 Geometrica

Numero di Parametri: 1

$$p(i) = \rho * (1 - \rho)^{\text{categoria}_i}$$

1.2.4 Normale

Numero di Parametri: 2

1.2.5 Uniforme

Numero di Parametri: 0

$$p(i) = 1/\text{numero categorie}$$

1.3 Come Raggruppare

Raggruppare le categorie se $\exists\ categoria < 5$:

- Parti dall'ultimo a salire (dal basso verso l'alto delle categorie)
- Raggruppale tutte nell'ultima categoria che le faccia diventare maggiori di 5 sommando le frequenze.
- *Esempio*:

VALORI	frequenze	f(i) raggruppate
0	59	59
1	26	26
2	24	24
3	18	18
4	12	12
5	5	5
6	4	12
7	3	
9	3	
11	2	

VALORI	frequenze	f(i) raggruppate
0	59	59
1	26	26
2	24	24
3	18	18
4	12	12
5	5	9
6	1	
7	1	
9	1	
11	1	

Chapter 2

Goodness of Fit

2.1 Test χ^2

Devi utilizzare questa sezione solo se il numero delle **osservazioni totale** $n > 30$.

2.1.1 Dati senza Intervalli

Devi utilizzare questa sezione solo quando hai dei dati **Senza Intervalli**, devi anche fare attenzione che il **numero di osservazioni** $n > 30$!!

Operazioni da effettuare:

1. Riportare i dati in una tabella in Calc:
    - *Colonna 1*: *categorie*
    - *Colonna 2*: f_i
2. Calcolare:
    (a) n = $\sum(f_i)$
    (b) ~~$f(i) = f_i/n$: non serve~~
    (c) Capire la distribuzione se non è data (vedi 1.1)
    (d) $p(i)$: dipende dalla distribuzione (vedi 1.2)
    (e) $F_i = n * p(i)$: numero di intervalli unitari teorici con i arrivi
    (f) Raggruppare f_i e F_i se $\exists$ *categoria* < 5 (vedi 1.3)
    (g) $G_i = \frac{(f_i - F_i)^2}{F_i}$

(h) $V = \sum G_i$: sommare tutti i valori di G

(i) df = Numero Categorie − 1 − Numero Parametri Distribuzione

Una volta terminati i calcoli devi guardare la riga nella tabella del χ^2 (vedi 2.4.1) con lo stesso valore di df: devi controllare che il valore V ricada negli intervalli che non superino il P_{95}.

2.1.2 Dati con Intervalli

Devi utilizzare questa sezione solo quando hai dei dati divisi in **Intervalli**, devi anche fare attenzione che il **numero di osservazioni** $n > 30$!!

Calcoli da effettuare:

1. Riportare i dati in una tabella in Calc:
   - *Colonna 1*: *categorie*, probabilmente devi aggiungerle tu, parti da 0 in poi
   - *Colonna 2*: *intervallo*, del tipo $x_1 - x_2$. Fai sempre attenzione che $x_2 \geq x_1$!!! In caso li inverti.
   - *Colonna 3*: $frequenza$ f_i
2. Aggiungere *Colonna* x_1 (intervallo più piccolo)
3. Aggiungere *Colonna* x_2 (intervallo più grande)
4. Aggiungere *Colonna Punto Medio Intervalli* tra x_2 e x_1 con $\frac{x_1+x_2}{2}$
5. Calcolare:

   (a) capire la distribuzione se non è data (vedi 1.1)

   (b) ~~$f(i) = f_i/n$: non serve~~

   (c) $p(i) = p(x_2) - p(x_1)$ = calcolare secondo la distribuzione (vedi 1.2)

   (d) $F_i = n * p(i)$: numero di intervalli unitari teorici con i arrivi

   (e) Raggruppare f_i e F_i se $\exists$ *categoria* < 5 (vedi 1.3)

   (f) $G_i = \frac{(f_i - F_i)^2}{F_i}$

   (g) $V = \sum G_i$: sommare tutti i valori di G

   (h) df = Numero Categorie − 1 − Numero Parametri Distribuzione

Una volta terminati i calcoli devi guardare la riga nella tabella del χ^2 (vedi 2.4.1) con lo stesso valore di df: devi controllare che il valore V ricada negli intervalli che non superino il P_{95}.

2.2 Test Kolmogorov

Devi utilizzare questa sezione solo se il numero delle **osservazioni totale** $n < 30$.

2.2.1 Dati Senza Intervalli

Devi utilizzare questa sezione solo quando hai dei dati **Senza Intervalli**, devi anche fare attenzione che il **numero di osservazioni totali** $n < 30$!!

Operazioni da effettuare:

1. Riportare i dati in una tabella in Calc:
   - *Colonna categorie*
   - *Colonna frequenze* f_i
2. Calcolare:
   (a) $f(i) = f_i/n$: frequenze osservate
   (b) Individuare la distribuzione di probabilità adatta (vedi 1.1)
   (c) $p(i)$: probabilità teorica (vedi 1.2)
   (d) $d_i = cumsum(f(i))$: somma cumulativa delle $f(i)$
   (e) $D_i = cumsum(p(i))$: somma cumulativa delle $p(i)$
   (f) $D = |d_i - D_i|$: la differenza assoluta
   (g) $D_{max} = \max(D)$: il massimo valore tra le differenze assolute D

Una volta completati tutti i calcoli, cercare nella tabella di *Kolmogorov-Smirnov* (vedi 2.4.2) la riga corrispondente al valore delle osservazioni totali n: se il valore D_{max} è sotto il $D_{0,10}$ la distribuzione è accettata, altrimenti no.

2.2.2 Dati Con Intervalli

Devi utilizzare questa sezione solo quando hai dei dati **Senza Intervalli**, devi anche fare attenzione che il **numero di osservazioni totali** $n < 30$!!

N.B.: *non abbiamo trovato esercizi con cui testare questa sezione !*

Operazioni da effettuare:

1. Riportare i dati in una tabella in Calc:
   - *Colonna categorie*: probabilmente devi aggiungerle tu, parti da 0 in poi
   - *Colonna intervallo*: del tipo $x_1 - x_2$. Fai sempre attenzione che $x_2 \geq x_1$!!! In caso li inverti.
   - *Colonna frequenze* f_i
2. Aggiungere *Colonna* x_1 (estremo più piccolo dell'intervallo)
3. Aggiungere *Colonna* x_2 (estremo più grande dell'intervallo)
4. Calcolare:
   (a) $f(i) = f_i/n$: frequenze osservate
   (b) Individuare la distribuzione di probabilità adatta (vedi 1.1)
   (c) $p(i) = p(x_2) - p(x_1)$: probabilità teorica per ogni intervallo (vedi 1.2)
   (d) $d_i = cumsum(f(i))$: somma cumulativa delle $f(i)$
   (e) $D_i = cumsum(p(i))$: somma cumulativa delle $p(i)$
   (f) $D = |d_i - D_i|$: la differenza assoluta
   (g) $D_{max} = \max(D)$: il massimo valore tra le differenze assolute D

Una volta completati tutti i calcoli, cercare nella tabella di *Kolmogorov-Smirnov* (vedi 2.4.2) la riga corrispondente al valore delle osservazioni totali n: se il valore D_{max} è sotto il $D_{0,10}$ la distribuzione è accettata, altrimenti no.

2.3 Informazioni utili su Formule

2.3.1 Komorov

2.3.1.1 *cumsum*

Per calcolare *cumsum* (somma cumulativa) va eseguito il seguente procedimento:

- La prima cella resta uguale alla prima cella della colonna di riferimento (es. $f(i)$ o $p(i)$)

- Dalla seconda cella in poi si blocca la prima cella della somma cumulativa (quella calcolata al punto precedente) e si somma fino alla cella i di riferimento (vedi Figura 2.1)

=C2

	FREQUENZE	f(i)	totale	ris	p(i)	d_i
0	3	0,15	0	10,83	0,149569	0,15
1	6	0,3	6	4,86	0,28418	0,45
2	5	0,25	10	0,05	0,269971	0,7
3	3	0,15	9	3,63	0,170982	0,85
4	2	0,1	8	8,82	0,081216	0,95
5	1	0,05	5	9,61	0,030862	1

=SOMMA($C$2:C3)

FREQUENZE	f(i)	totale	ris	p(i)	d_i
3	0,15	0	10,83	0,149569	0,15
6	0,3	6	4,86	0,28418	0,45
5	0,25	10	0,05	0,269971	0,7
3	0,15	9	3,63	0,170982	0,85
2	0,1	8	8,82	0,081216	0,95
1	0,05	5	9,61	0,030862	1

=SOMMA($C$2:C7)

FREQUENZE	f(i)	totale	ris	p(i)	d_i
3	0,15	0	10,83	0,149569	0,15
6	0,3	6	4,86	0,28418	0,45
5	0,25	10	0,05	0,269971	0,7
3	0,15	9	3,63	0,170982	0,85
2	0,1	8	8,82	0,081216	0,95
1	0,05	5	9,61	0,030862	1

Figure 2.1: Esempio di calcolo della funzione *cumsum*

2.4 Tabelle di Riferimento

2.4.1 Tabella di Riferimento Test χ^2

Tabella 2.9 Percentili della distribuzione χ^2

df	$P_{0,5}$	P_1	$P_{2,5}$	P_5	P_{10}	P_{90}	P_{95}	$P_{97,5}$	P_{99}	$P_{99,5}$
1	0,000039	0,00016	0,00098	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,0100	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	4,61	5,99	7,38	9,21	10,60
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
24	9,89	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
120	83,85	86,92	91,58	95,70	100,62	140,23	146,57	152,21	158,95	163,64

Figure 2.2: Tabella di Riferimento per Test χ^2

df	$P_{0.5}$	P_{1}	$P_{2.5}$	P_{5}	P_{10}	P_{90}	P_{95}	$P_{97.5}$	P_{99}	$P_{99.5}$
1	0.000039	0.00016	0.00098	0.0039	0.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.0100	0.0201	0.0506	0.1026	0.2107	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.0717	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.676	0.872	1.237	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.62	140.23	146.57	152.21	158.95	163.65

Table 2.1: Tabella di Riferimento per Test χ^2

2.4.2 Tabella di Riferimento Test Kolmogorov

n	$D_{0,10}$	$D_{0,05}$	$D_{0,01}$
1	0,950	0,975	0,995
2	0,776	0,842	0,929
3	0,642	0,708	0,828
4	0,564	0,624	0,733
5	0,510	0,565	0,669
6	0,470	0,521	0,618
7	0,438	0,486	0,577
8	0,411	0,457	0,543
9	0,388	0,432	0,514
10	0,368	0,410	0,490
11	0,352	0,391	0,468
12	0,338	0,375	0,450
13	0,325	0,361	0,433
14	0,314	0,349	0,418
15	0,304	0,338	0,404
16	0,295	0,328	0,392
17	0,286	0,318	0,381
18	0,278	0,309	0,371
19	0,272	0,301	0,363
20	0,264	0,294	0,356
25	0,24	0,27	0,32
30	0,22	0,24	0,29
35	0,21	0,23	0,27
Oltre 35	$\frac{1,22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1,63}{\sqrt{n}}$

Figure 2.3: Tabella di Riferimento per Test Kolmogorov

Chapter 3

Sistemi a Coda Singola

3.1 Come Riconoscere un Modello di Coda

Un modello di coda secondo la notazione di Kendall è così rappresentato:

$$A/b/c/n/p/z$$

dove:

- A: indica la distribuzione del tempo di inter-arrivo
- b: indica la distribuzione del tempo di servizio T_s
- c: indica il numero di serventi
- n: indica la dimensione della coda
- p: indica la dimensione della popolazione
- Z: indica la disciplina di servizio

Tale notazione si semplifica in $A/b/c$ nel caso in cui la dimensione della popolazione e della coda sono infinite e la disciplina di servizio segue la logica FIFO ($n = p = \infty$ e Z = FIFO).
Per quanto riguarda i possibili valori di A, b e c:

- A e b: può assumere i valori D (distribuzione deterministica o costante), M (distribuzione esponenziale negativa), G (distribuzione generale), H_h (distribuzione iperesponenziale), E_k (l'Erlangiana a k stadi)
- c: 1 o m, dove 1 indica un singolo servente e m indica che ci sono serventi multipli. Non importa inizialmente specificare quanto è m, ma per le formule successive il valore va sostituito con il numero esatto di serventi.

3.1.1 Consigli

Solitamente negli esercizi è sottinteso che la dimensione della popolazione e della coda sono infinite (non lo sono soltanto nel caso in cui viene specificato diversamente), lo stesso vale per la gestione del servizio che è sempre FIFO (salvo casi estremi che devono essere specificati).
Per quanto riguarda le distribuzioni degli interarrivi e del servizio: essi sono sempre specificati e nei soli casi in cui non viene esplicitato il tipo di distribuzione (che ovviamente può essere diverso per interarrivo e servizio) si considera la distribuzione generale G.
Nei pochi casi in cui la distribuzione è deterministica è sempre specificato, ad esempio viene detto che il tempo è costante.

3.2 Parametri Fondamentali

- Δ: Tempo di Inter-arrivo (il tempo che intercorre tra un arrivo e il successivo)
- w: Numero di utenti in coda
- t_w: Tempo di Attesa in Coda
- s: Numero di Utenti in Servizio
- t_s: Tempo di Servizio
- q: Numero di Utenti nel Sistema
- t_q: Tempo di Risposta

N.B.

- Tutti i **Tempi** vanno espressi in **minuti**,
- tutti i valori precedenti sono **interi** e **maggiori o uguali** a 0,
- $0 \leq s \leq c$.
- **stare bene a tenti a se la chiede in ore o minuti** 🐖

3.3 Come Calcolare i Parametri Base

- *Tempo Medio di Servizio* $T_s = \frac{1}{\mu}$
- *Tempo medio di Inter-arrivi* $\mu = \frac{1}{T_s}$
- *Tasso medio di Arrivi* $\lambda = \Delta^{-1}$
- *Intensità del Traffico* $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

3.3.1 Domande

- *Qual è la distribuzione di probabilità del numero di arrivi?*

  Nel caso in cui abbiamo i **tempi di inter-arrivo Esponenziali** allora avremo i **tempi di arrivo** con distribuzione di **Poisson**:

  - La **densità di probabilità** del numero di **arrivi** si calcola con:

    $$P_d = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

  - Se si ha un **blocco del sistema** per un **tempo** t, la **probabilità che ci siano** n **utenti** è:

    $$P_d = \frac{e^{-t\lambda}\left(t\lambda\right)^n}{n!}$$

- *Qual è la distribuzione di probabilità dei tempi di Inter-Arrivo?*

  Nel caso in cui abbiamo i **tempi di arrivo** con distribuzione di **Poisson** allora i **tempi di inter-arrivo** saranno **esponenziali**:

  - La **densità di probabilità** dei tempi di inter-arrivo si calcola con

    $$f(n) = \lambda e^{-\lambda n}$$

  - Se si ha un **blocco del sistema** per un **tempo** t, la **probabilità che ci siano** n **utenti** è:

    $$f(n) = t\lambda e^{-t\lambda n}$$

  - La **funzione di distribuzione** è:

    $$F(n) = 1 - e^{-\lambda n}$$

3.4 Condizione di Stazionarietà

$$\rho \leq 1$$

Controllare bene (*STARE BENE A TENTI*) che la condizione di Stazionarietà sia verificata altrimenti l'esercizio non si può continuare.

3.5 M/M/1

Sistema aperto denotato da un singolo servente:

- Distribuzione del Tempo di Inter-arrivo Esponenziale con parametro λ
- Tempo di Servizio Esponenziale di parametro μ

3.5.1 Parametri

- Numero di Utenti Medio: $N = \frac{\rho}{1-\rho} = \lambda R$
- Numero Medio di Utenti in Coda: $W = N - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}$
- Tempo Medio di Risposta: $R = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho} = T_s + T_w = \frac{N}{\lambda}$
- Tempo di Attesa Medio in Coda: $T_w = \frac{\frac{\rho}{\mu}}{1-\rho} = R - T_s$
- Probabilità di Osservare almeno k utenti in un Sistema in condizione di Stazionarietà: $= \rho^k$
- Probabilità di avere 0 utenti nel sistema: $\pi_0 = 1 - \rho$
- Probabilità di avere k utenti nel sistema: $\pi_k = \rho^k \pi_0 = \rho^k(1 - \rho)$

3.6 M/M/m

Sistema aperto dotato di m serventi:

- Distribuzione del Tempo di Arrivo Poissoniano con parametro λ
- Distribuzione del Tempo di Servizio Esponenziale con parametro μ

3.6.1 Parametri

- Numero di Servienti: m
- Tempo Medio di Servizio: T_s (vedi 3.3)
- Tasso Medio di Arrivi λ (vedi 3.3)
- Tempo Medio di Inter-Arrivo: μ (vedi 3.3)
- Intensità del Traffico: $\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$
- Probabilità di avere 0 utenti nel sistema:

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{(m\rho)^k}{k!}\right) + \frac{(m\rho)^m}{m!}\frac{1}{1-\rho}\right]^{-1}$$

- Probabilità di avere k utenti nel sistema:
  - se $1 \leq k \leq m$

$$\pi_k = \frac{(m\rho)^k}{k!}\pi_0$$

  - se $k > m$

$$\pi_k = \frac{m^m \rho^k}{m!}\pi_0$$

- Numero Medio di Serventi Occupati:

$$E[s] = \sum_{k=0}^{m-1}(k\pi_k) + \frac{m\pi_m}{1-\rho} = m\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- Numero di Utenti Medio: $N = m\rho + \pi_m \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$
- Numero di Utenti Medio in Coda: $W = \pi_m \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$
- Tempo Medio di Risposta: $R = \frac{N}{\lambda} = \frac{m\rho + W}{\lambda}$
- Tempo di Attesa in Coda:

$$T_w = \frac{\pi_m}{m\mu(1-\rho)^2}$$

- Tempo di Utilizzo (tempo in cui si sta bene a tenti): $U = 1 - \pi_0 = \rho$
- Tempo di Non Utilizzo: $\hat{U} = 1 - U$

- Probabilità che un Utente in Arrivo trovi tutti i serventi occupati:

$$Prob_{coda} = \sum_{k=m}^{+\infty} \pi_k = \pi_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} \frac{1}{1-\rho}$$

- Probabilità che un Utente in Arrivo Non trovi una coda:

$$Pro\hat{b}_{coda} = 1 - Prob_{coda}$$

3.7 M/M/∞

Sistema aperto con infiniti servienti:

- Distribuzione del Tempo di Arrivo Poissoniano di parametro λ
- Distribuzione del Tempo di Servizio Esponenziale di parametro μ

3.7.1 Parametri

- Intensità del Traffico: ρ (vedi 3.3)
- Probabilità di avere k utenti, che coincide (in questo caso specifico) con la Probabilità di avere k serventi occupati:

  $$\pi_k = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}$$

  con $k \geq 0$
- Numero Medio di Utenti: $N = \rho$
- Tempo Medio di Risposta, che coincide con il Tempo Medio di Servizio:

  $$R = T_s = \frac{1}{\mu}$$

3.8 M/M/1/K (dimensione coda finita)

Sistema $M/M/1$ dove sono ammessi al più K utenti (coda finita):

- Distribuzione del Tempo di Inter-arrivo vedi 3.5
- Tempo di Servizio vedi 3.5

Esempio: Il processo di arrivo è Poissoniano di parametro λ, ma un utente che arrivando trova il sistema completo, cioè con K utenti già presenti, non viene accettato e viene perso. Il sistema $M/M/1/K$ è un sistema con perdita. Nel caso particolare in cui $K = 1$, al più un utente è ammesso nel sistema e di conseguenza non si forma mai coda. La distribuzione del tempo di servizio è esponenziale di parametro μ, vi è un singolo servente, e la disciplina di coda è FIFO.

3.8.1 Parametri

- Per quelli base vedere 3.3 e 3.5
- Probabilità di avere k utenti nel sistema:

$$\pi_k = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^K \quad \text{con} \quad 0 \leq k \leq K$$

$$\pi_k = 0 \quad \text{con} \;\; k > K$$

  dove $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

  Nel caso particolare di $K = 1$ lo spazio è formato da 2 soli stati e si ricava:

$$\pi_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

- Utilizzazione CPU: $U = 1 - \pi_0 = \rho$
- Frequenza media del completamento delle richieste (throughput):

$$X = \mu(1 - \pi_0) = \mu U = \frac{U}{E(T_s)}$$

- Il tempo che ciascun utente impiega per la prossima richiesta: $R + \frac{1}{\lambda}$ secondi
- Frequenza media di generazione richieste:

$$\frac{M}{R + \frac{1}{\lambda}}$$

- In stato stazionario, le frequenze di generazione e il tempo di completamento delle richieste devono essere uguali:

$$X = \mu(1-\pi_0) = \frac{M}{R+\frac{1}{\lambda}}$$

$$R = \frac{M}{\mu(1-\pi_0)} - \frac{1}{\lambda} = \frac{M}{X} - \frac{1}{\lambda} = \frac{\text{Numero Clienti}}{\text{Throughput Medio}}$$

3.9 M/M/1//M (dimensione popolazione finita)

Sistema $M/M/1$ dove la popolazione è finita di dimensione $M > 0$:

- Distribuzione del Tempo di Inter-arrivo vedi 3.5
- Tempo di Servizio vedi 3.5

Esempio: Consideriamo il sistema $M/M/1$ assumendo che gli utenti provengano da una popolazione finita, di dimensione $M > 0$. Ogni utente si trova ad ogni istante o all'interno del sistema (in coda o in servizio) o all'esterno. Assumiamo che ogni utente, una volta che ha lasciato il sistema dopo essere stato servito, si ripresenti al sistema stesso dopo un tempo esponenziale di parametro λ. Inoltre assumiamo che ogni utente sia indipendente dagli altri. Questo comporta che, se vi sono k utenti nel sistema $(0 \leq k \leq M)$ ed $M-k$ all'esterno, il processo di arrivo totale è dato dalla composizione di $M-k$ processi di Poisson indipendenti, ognuno di parametro λ. Per la proprietà di composizione dei processi di Poisson, anche il processo totale di arrivo al sistema è ancora un processo di Poisson di parametro dipendente dallo stato $\lambda(k) = (M-k)\lambda,\ (0 \leq k \leq M)$.

3.9.1 Parametri

- Per quelli base vedere 3.3 e 3.5
- La condizione di stazionarietà è certamente verificata, poiché il processo è finito e irriducibile e la distribuzione stazionaria del numero di utenti nel sistema, dalle formule:

  $$\pi_k = \pi_0 \rho^k \frac{M!}{(M-k)!} \quad \text{con} \quad 0 \leq k \leq M$$

  con

  $$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{M} \rho^k \frac{M!}{(M-k)!}\right]^{-1} \quad \text{dove} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\pi_k = 0 \quad \text{con} \;\; k > M$$

3.10 M/G/1

Sistema aperto con un singolo servente:

- Distribuzione del Tempo di Inter-Arrivo Esponenziale con parametro λ
- Distribuzione del Tempo di Servizio degli Utenti Indipendente con Distribuzione Generale

3.10.1 Parametri

- Per quelli di base vedere 3.3
- Numero Medio di Utenti (formula di *Khintchine-Pollaczk* 👰🏿):

$$N = \rho + \frac{\rho^2(1 + C_B^2)}{2(1-\rho)}$$

  dove :

  - $C_B = \sigma\mu$ (Coefficiente di Variazione)
  - $\sigma = \sqrt{\text{Varianza}}$ (Deviazione Standard)

- Tempo Medio di Risposta di un lavoro: $R = \frac{N}{\lambda}$
- Tempo Medio di Attesa in Coda: $W = \lambda T_w = N - \rho$
- Tempo di Attesa in Coda: $T_w = \frac{N-\rho}{\lambda}$

N.B.

- Se $\rho = 1$ e quindi il sistema è **congestionato**, allora gli indici medi N, W, R, T_w tendono a crescere senza limite.

3.11 M/D/1

Versione di $M/G/1$ con Distribuzione del Tempo di Servizio *Deterministico*:

- Distribuzione del Tempo di Inter-Arrivo Esponenziale con parametro λ
- Distribuzione del Tempo di Servizio degli Utenti Indipendente con Distribuzione Deterministica

3.11.1 Parametri

- Valore Medio degli Utenti nel Sistema:

$$N = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

- Numero di Utenti Medio in Attesa:

$$W = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}$$

N.B.

- Tutti i parametri che non sono stati elencati sono calcolati come scritto in 3.10
- Se $\rho = 1$ e quindi il sistema è **congestionato**, allora gli indici medi N, W, R, T_w tendono a crescere senza limite.