Quinta Lista de Exercícios de Mecânica Estatística

Fabio de Moraes Canedo
7994642

13 de dezembro de 2018

1 P1

Nesse problema, temos que minimizar a equação:

$$f(m) = \frac{a}{2}m^2 + \frac{b}{4}m^4 + \frac{c}{6}m^6 \tag{1}$$

Derivando esta em relação a m e igualando a 0, obtemos:

$$am + bm^3 + cm^5 = 0 \tag{2}$$

Cujas soluções são:

$$m = 0 \tag{3a}$$

$$m = \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}} \tag{3b}$$

$$m = -\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}} \tag{3c}$$

Isso implica na condição para as soluções que:

$$a > a_0 = \frac{b^2}{4c} \tag{4}$$

Mas temos, também, a condição:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m^2} \geq 0 \tag{5}$$

O que leva a:

$$a + 3bm^2 + 5cm^4 \geq 0 \tag{6}$$

Além disso para que a solução seja de fato um mínimo global, teremos:

$$f(m) < 0 \tag{7}$$

Para que a solução $m = 0$ não seja mínimo global. Dessa maneira, substituímos a solução com sinal adequado, ou seja, positivo dentro da raíz. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}
a + \frac{b}{2}m^2 + \frac{c}{3}m^4 &< 0 \\
\left(a + bm^2 + cm^4\right) + -\frac{b}{2}m^2 - \frac{2}{3}cm^4 &< 0 \\
-\frac{b}{2} &< \frac{2}{3}cm^2 \\
-\frac{3b}{4c} &< m^2 \\
-\frac{3b}{4c} &< \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} \\
-\frac{b}{2} &< \sqrt{b^2 - 4ac} \\
\frac{b^2}{4} &< b^2 - 4ac \\
a < a_1 &= \frac{3b^2}{16c}
\end{aligned} \tag{8}$$

A solução $m = 0$, combinada com a condição (5), nos leva a:

$$a \geq 0 \tag{9}$$

Mostrando que é necessário que $a < 0$ para que haja esse mínimo local.

2 P2

Nesse problema, temos que derivar a equação:

$$f(\phi, A) = \frac{a|\phi|^2}{2} + \frac{b|\phi|^4}{4} + \frac{c|\phi|^6}{6} + \frac{A^2}{2\sigma^2} - A\lambda|\phi|^2 \tag{10}$$

em relação a A e igualar a zero, o que leva a:

$$A = \lambda|\phi|^2\sigma^2 \tag{11}$$

Substituindo A na expressão original de f, obtemos uma f_{eff}:

$$f_{eff} = \frac{a|\phi|^2}{2} + \frac{b - 2\lambda^2\sigma^2}{4}|\phi|^4 + \frac{c|\phi|^6}{6} \tag{12}$$

Aplicando a condição da equação (8), obtemos:

$$\sigma^2 < \frac{1}{2\lambda^2}\left(b - \frac{4}{3}\sqrt{3ac}\right) \tag{13}$$

3 P3

Nesse problema, começamos com o funcional assumindo que os campos são uniformes no espaço, isso resulta em:

$$F[\phi(x), A(x)] = C\left(\frac{a}{2}|\phi|^2 + \frac{b}{4}|\phi|^4 + \lambda|\phi|^2A^2\right) \tag{14}$$

Agora, derivando em relação a A e ϕ, obtemos:

$$\frac{\partial F}{\partial A} = 2\lambda|\phi|^2A = 0 \tag{15a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi^*} = \phi\left(\frac{a}{2} + \lambda A + \frac{b}{2}|\phi|^2\right) = 0 \tag{15b}$$

Portanto, obtemos para $A = 0$:

$$\phi = sqrt - \frac{2a}{b} \tag{16}$$

Expandindo ao redor do mínimo($\phi = -\frac{2a}{b} + v(x)$) e mantendo apenas termos de ordem no máximo quadrática, obtemos:

$$\begin{aligned} F[\phi(x), A(x)] &= \int \mathbf{d}^dx|\nabla\phi|^2 + \frac{a}{2}|\phi|^2 + \frac{b}{4}|\phi|^4 + (\nabla A)^2 + \lambda|\phi|^2A^2 \\ &= \int \mathbf{d}^dx|\nabla v|^2 + \frac{a}{2}v^2 + (\nabla A)^2 + \lambda\sqrt{\frac{-2a}{b}}A^2 \end{aligned} \tag{17}$$

O que desacopla os campos dando massa ao campo A.