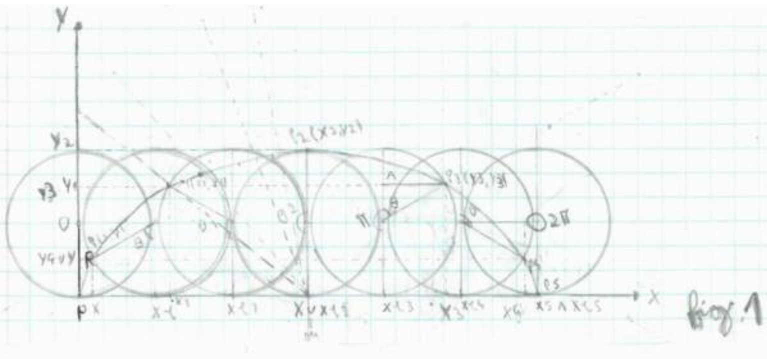
Demonstração de que a Ciclóide Invertida corresponde à curva Tautocrônica com uma grande precisão

Introdução:

Neste meu trabalho, no qual dediquei algum tempo apenas com o intuito de dignificar a maravilha da figura mais adiante , irão ver um método novo e inteligente que permite que a propriedade Tautocrônica da Ciclóide seja facilmente compreendida ao contrário de métodos comuns usados até então que fazem recurso de matemática analítica avançada dada em universidades mais detalhadamente, então apelo assim a todos para em vez de ocuparem seu tempo visualizando outras coisas talvez menos interessantes , sejam capazes de visualizar este trabalho até ao fim.

Sumário:

O que é uma Ciclóide



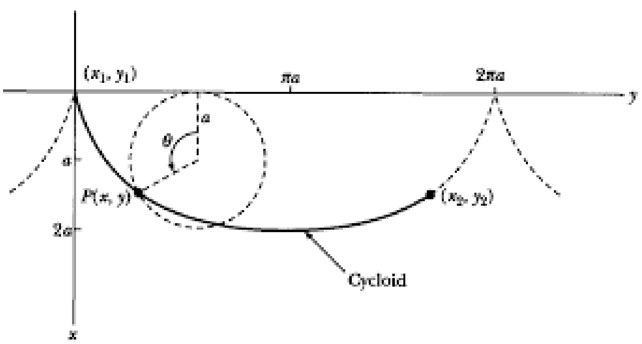
Vamos pensar em uma roda de carro que apresenta um ponto fixo como referência de observação que neste caso é o ponto representado por (P) no 1º círculo à esquerda da ciclóide ao lado, obtida por mim no papel.
 Entretanto imaginando o movimento dessa roda sobre uma superfície horizontal,vamos observar a trajectória desse ponto fixo.
 Sendo que a curva descrita por esse ponto é a curva denominada de "Ciclóide".

Fig.1 - Representação de uma Ciclóide

Detalhe importante:

:Para quem desconhece a parametrização da ciclóide e suas equações aconselho que visualizem o seguinte vídeo:https://www.youtube.com/watch?v=t0O9446kGxk

Apresentação do problema da Curva Tautocrônica



Uma tautocrônica ou Curva isocrônica é a curva em que verifica-se que o tempo gasto por um objeto para deslizar sem fricção em gravidade uniforme até seu ponto de mínimo é independente de seu ponto de partida.

A solução para este problema é a curva representada anteriormente ,mas agora invertida, ou seja a solução para este problema é uma ciclóide invertida.

fig.2- Ciclóide invertida

Método detalhado que demonstra a propriedade Tautocrônica curva da ciclóide invertida

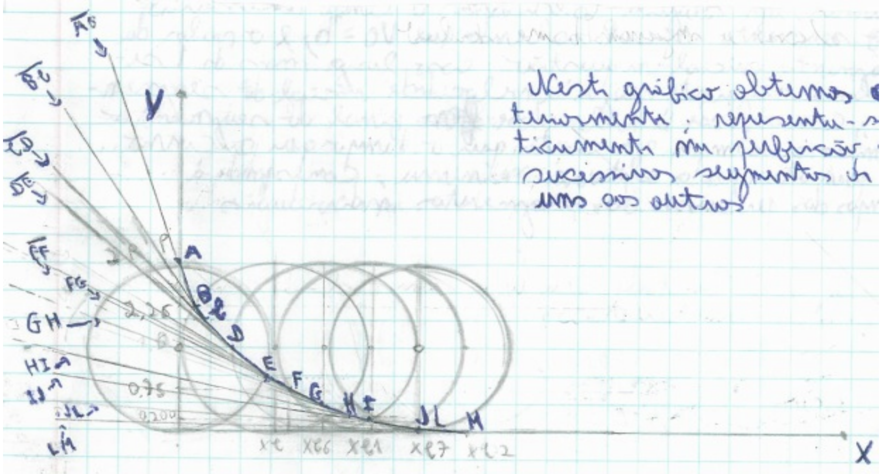


fig.2 - Ciclóide invertida representada por mim através de sucessivos segmentos de reta azuis para demonstrar que ela é uma curva Tautocrônica

Procedimento Inicial

Inicialmente obtive a ciclóide invertida ao lado a lápis e posteriormente a representei praticamente na perfeição através de sucessivos segmentos de reta azuis, sendo que cada segmento de reta faz um ângulo relativamente à reta horizontal formada na sua origem.

Prova científica da utilidade do método

Como podemos imaginar que cada segmento de reta representa um plano inclinado , sabendo as distâncias dos segmentos e o ângulo que cada segmento de reta faz relativamente à reta horizontal que intersecta a sua origem, podemos fazer recurso das leis do plano inclinado para demonstrar que o tempo que um corpo leva para atingir a altura mínima por acção da gravidade e sem atritos é basicamente uma constante, independentemente do ponto de partida.

Detalhe importante:Quem desconhece as leis matemáticas da queda de um corpo num plano inclinado recomendo que visualize o seguinte site: https://www.sofisica.com.br/conteudos/Mecanica/Dinamica/pi.php

Como todas as ciclóides podem ser representadas pela união de segmentos, temos que para cada segmento de reta com um ângulo relativamente à horizontal existe uma aceleração constante igual a : a= g * sen α

Então podemos concluir que em cada segmento de reta temos um tipo de movimento uniformemente acelerado , logo para cada segmento temos que a distância percorrida é igual a: $d= vo^* t + 1/2\ \ a^* t^2$

Então sabendo a distância a ser percorrida e a velocidade inicial , podemos descobrir o tempo ao quadrado isolando = $t^2 = (d - vot) / 1/2 * a$; Em que : d- comprimento do segmeto

Vo- Velocidade na posição inicial do segmento

Com este método podemos afirmar que consideramos o ponto onde o corpo inicia o movimento verificando se existe 1 ou mais segmentos, em seguida calculamos o tempo necessário para percorrer o segmento inicial sabendo que Vo = 0 ; e o valor da distância do segmento inicial em questão ; caso haja mais de 1 segmento (o que aconteceria caso o ponto de partida correspondesse a um ponto com altura maior que (L) da figura acima), tendo-se na queda outros segmentos para além do segmento : LM ; neste caso teríamos que a velocidade inicial do segmento seguinte , correspondia à velocidade final do segmento anterior , ou seja , caso o corpo inicia-se seu movimento em (A) ele iria adquirir uma velocidade até ao extremo do segmento : AB que seria a velocidade final atingida neste segmento quando o corpo está em B sendo ela também a velocidade inicial do segmento : BC , justificando-se o que foi dito anteriormente;dando-se este procedimento com os segmentos seguintes.

Cálculo matemático que demonstra a obtenção de tempos de queda constantes para distintos pontos de partida com uma boa precisão

Distância dos segmentos e ângulo do fim de cada segmento relativamente à horizontal que eu obtive nas minha precisas medições:

Segmento AB: d= 0,85 cm ; α= 72º
Segmento BC: d= 0,3 cm ; α1= 58,5 º
Segmento CD: d= 0,68 cm ; α2= 46,5º
Segmento DE: d= 0,78 cm ; α3= 42,5º
Segmento EF: d= 0,43 cm ; α4= 29º
Segmento FG: d= 0,6 cm ; α5= 28º
Segmento GH: d= 0,5 cm ; α6= 22º
Segmento HI: d= 0,35 cm ; α7= 9º
Segmento IJ: d= 0,8 cm ; α8= 4º
Segmento JL: d= 0,3 cm ; α9= 4,5º
Segmento LM: d=0,48 cm ; α10= 1,5º

Cálculos do tempo de queda constante

Primeiramente vamos considerar que o corpo inicia seu movimento em (A) , sendo que como tal vamos considerar o tempo de deslocamento em todos os segmentos; sabendo que o corpo inicia o seu movimento em (A) e considerando que g= 10 m/s e a= $g * \text{sen } \alpha = g * \text{sen } 72^o = 9{,}510 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2(AB) = (d\ AB - 0) / 1/2 *9{,}510 = d\ AB / 4{,}755 = 0{,}0085 / 4{,}755 = 0{,}0017875 \Leftrightarrow t (AB) = \sqrt{ (t^2)} = 0{,}04227$ s

Segmento (BC):Como agora neste caso já temos velocidade inicial não nula (existe velocidade no ponto B) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Vo= g * \text{sen } \alpha * (t\ AB)= 9{,}510 * 0{,}04227 = 0{,}4019877$ (m/s) $\Leftrightarrow (d\ BC) = Vo * t1 + (1/2 * g \text{ sen } \alpha1 * t1^2) \Leftrightarrow 0{,} 4019877 * t1 + (1/2* 10 * \text{sen } 58{,}5^o * t1^2) \Leftrightarrow 0{,}4019877 * t1 + (4{,}25 * t1^2)= (d\ BC)= 0{,}003$ m $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}003 = 0{,}00696* 0{,}4019877 + (4{,}25 * 0{,}00696^2) \Leftrightarrow t1= 0{,}00696$ s = t (BC)

Analisando agora t (CD) ; Neste caso $vo (1)= Vo + g*\text{sen } \alpha(1) * t (BC)=$
$= 0{,}40198+ (8{,}5* 0{,}00696) = 0{,}461147$ (m/s)
$\Leftrightarrow d (CD) = Vo(1) * t2 + (1/2* g* \text{sen } 46{,}5^o * t(2)^2)=$
$=0{,}461147 * t2 + (1/2* 7{,}5 * t^2) = 0{,}461147 * t2 + (3{,}75 * t^2)=$
$= 0{,}0068$ m $= 0{,}461147* 0{,}013306 + (3{,}75 * 0{,}013306^2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t2= 0{,}013306$ s

Nota importante
estamos perante um tipo de função do 2ºgrau em que $f(x) = ax^2 + bx + 0$; e para f(x) diferente de zero (distâncias diferentes de zero) uma única raiz "positiva" pode satisfazer o problema que corresponde ao tempo.

Analisando agora t (DE); $vo (2)= Vo(1) + g*\text{sen } \alpha(2) * t (CD)= 0{,}461147+ (7{,}5*0{,}013306)=0{,}560942$ (m/s) $\Leftrightarrow d (DE) =Vo(2) * t3 +(1/2* g *\text{sen } 42{,}5^o *(t3)^2)= 0{,}560942 * t3 + (1/2* 6{,}75 *(t3)^2)= =0{,}560942 * t3 + (3{,}375 *t(3)^2) = 0{,}0078m \Leftrightarrow t3= 0{,}012904$ s

Analisando agora t (EF); $vo (3) = Vo(2) + g*\text{sen}* \alpha (3) * t(3)= 0{,}560942 + (6{,}75*0{,}012904)= 0{,}648044$ m/s $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow d(EF) = Vo(3) * t4 +(1/2 * g* \text{sen } 29^o * (t4)^2)= 0{,}648044 * t4 +(1/2* 4{,}848096202 * (t4)^2=0{,}648044 * t4+(2{,}424048101 * t^2)= 0{,}0043$ m $\Leftrightarrow$
$t4= 0{,}006479$ s

Analisando agora t (FG) ; $Vo (4)= Vo(3) + g*\text{sen}* \alpha(4) * t (4) = 0{,}648044 + (4{,}848096202 * 0{,}006479)= 0{,}679454$ (m/s)$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow d (FG) = Vo(4) * t5 +(1/2 * g * \text{sen } 28^o * (t5)^2) = 0{,}679454 * t5 +(1/2* 4{,}694715628 * (t5)^2)= 0{,}679454 * t5 + (2{,}347357814* (t5)^2)=$
$0{,}006$ m $\Leftrightarrow t5= 0{,}00858$ s

Analisando agora t (GH) ; $Vo (5) = Vo4+ (g* \text{sen } 28^o * t(5)) =$
$=0{,}679454 + (4{,}694715628 * 0{,}00858)=$
$= 0{,}7197346$ (m/s)

$\Leftrightarrow d (GH)= Vo (5) * t6 +(1/2 * g * \text{sen } 22^o * (t6)^2) = 0{,}7197346 * t6 + (1{,}873032967 * (t6)^2)= 0{,}005$ m $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t6= 0{,}00683$ s

Analisando t (HI) ; $Vo(6)= Vo(5) + (g * \text{sen } 22^o * t(6) = 0{,}7197346 + (3{,}746065934 * 0{,}00683) = 0{,}74532023$ (m/s) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow d (HI) = Vo (6) * t(7) + (1/2 * g* \text{sen } \alpha7 * t(7)^2) = 0{,}74532023 * t(7) + (1/2 * 1{,}56434465 * t(7)^2) =$
$= 0{,}74532023 * t(7) + (0{,}782172325 * t(7)^2)= 0{,}0035$ m $\Leftrightarrow t7 = 0{,}004674$ s

Analisando agora t (IJ) ; Neste caso $Vo(7)= Vo6 +(g*\text{sen } 9^o * t(7))=0{,}74532023 + (1{,}56434465 * 0{,}004674) =$
$= 0{,}7526319768$ (m/s) $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow d(IJ) = Vo7* t8 + (1/2 * g * \text{sen } 4^o * t8^2) = Vo7 * t8 + (0{,}3487823685 * (t8^2))= 0{,}008$ m $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t8= 0{,}010578$ s

Analisando posteriormente t (JL) ; $Vo8= Vo7 + (g* \text{sen } \alpha (8) * t(8)) = 0{,}7526319768 + (0{,}697564737 * 0{,}10578) = 0{,}8300203$ m/s $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow d (JL))= Vo8 * t (9) + (1/2\ g * \text{sen } 4{,}5^o * t(9)^2) = Vo8 * t9 + (0{,}39* t^2)= 0{,}003$ m $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t9= 0{,}003609$ s

Por fim para (LM) ; temos $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow Vo9 = Vo8 + (g * \text{sen } 4{,}5^o * t (9)) = 0{,}8300203 + (0{,}78 * 0{,}003609))=$
$=0{,}83283532$ m/s $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow d(LM) = Vo9 * t10 + (1/2 * g *\text{sen } 1{,}5^o * (t10)^2) = Vo9 * t10 +(1/2 * 0{,}25 * t^2)=$
$= Vo9 * t10 +(0{,}125 * t^2) = 0{,}0048$ m $\Leftrightarrow t10= 0{,}0057585$ s.

Estando todos os intervalos de tempo calculados que são 11 ao todo; pois existem 11 segmentos de reta ; nos compete somarmos os 11 intervalos de tempo obtidos de modo a obter com uma excelente aproximação o tempo de queda do corpo que se desloca na curva de Ciclóide de (A) até (M) , sendo este tempo obtido um tempo com uma bela aproximação da realidade ,pois os segmentos de reta equivalem basicamente a uma Ciclóide.

Tempo de queda $\Leftrightarrow Tq(AM)= t(AB) + t(BC) + t(CD) + t(DE) + t(EF) + t(FG) + t(GH) + t(HI) + t(IJ) + t(JL) + t(LM)= 0{,}1219$ s

Equivalendo este tempo ao tempo de queda de um corpo na Ciclóide para qualquer ponto de partida com um erro desprezível

Agora vamos considerar como ponto de partida (D) ; e demonstrar que o tempo de queda corresponde basicamente a tq (AM)
Portanto, como o ponto de partida considerado agora é (D), havendo uma velocidade nula em (D) temos :

$t^2 (DE) = d (DE) - 0 / (1/2* g * \text{sen } \alpha)= 0{,}0078/ (1/2*6{,}75) = 0{,}0078/ (3{,}375) = 0{,}0023111 \Leftrightarrow t = \sqrt{0{,}0023111}= 0{,}048074$ s

Analisando em seguida (EF), Temos neste caso que $Vo= g^* \text{sen } 42{,}5^o * t= 0{,}3244996$ m/s ⇔
⇔ $d(EF) = Vo * (t1) + (1/2 * g * \text{sen } 29^o * t(1)^2) = 0{,}3244996 * (t1) + (2{,}42408101 * t^2) = 0{,}0043$ m ⇔ $t1= 0{,}0121489$ s

Analisando agora t(FG),neste caso temos que $Vo1= (g^* \text{sen } 29^o * t1) + Vo = 0{,}38339863$ m/s ⇔
⇔ $d (FG) = Vo1 * (t2) + (1/2 *g *\text{sen } 28^* (t2^2)) = Vo1 * t2 + (1/2 * g * \text{sen } 28^o * (t2)^2) = Vo1 * (t2)^2 +(2{,}347357814 * (t2)^2)= 0{,}006$ m ⇔
⇔ $t2= 0{,}014835$ s

Analisando agora d(GH) ⇔ $Vo2 = Vo1 + (g * \text{sen } 22^o * t2)=0{,}4430447$ m/s⇔
⇔ $d(GH)= Vo2 * (t3) + (1/2 * g * \text{sen } 22^o * (t3)^2) = Vo2^* (t3) + (1{,}873032967 * (t3)^2) = 0{,}005$ m ⇔ $t3= 0{,}010576$ s

Analisando agora d (HI) ⇔ $Vo3= Vo2 + (g^*\text{sen } 22^o * t3) = 0{,}49266309331$ m/s ⇔
⇔ $d(HI) = Vo3 * (t4) + (1/2^* g *\text{sen } 9^o * (t4)^2) = Vo3 * (t4) + (0{,}782172325 * (t4)^2) = 0{,}0035$ m ⇔ $t4= 0{,}007026$ s

Analisando agora d(IJ) ⇔ $Vo4= Vo3 + (g^* \text{sen } 9^o * t4) = 0{,}5036541$ m/s ⇔
⇔ $d(IJ) = Vo4 * (t5) +(1/2^* g * \text{sen } 4^o * (t5^2)) = Vo4^* t5 + (0{,}3487823685 * t^2) = 0{,}008$ m ⇔ $t5= 0{,}0157145$ s

Analisando agora d(JL) , temos que $Vo5 = Vo4 + (g^*\text{sen } 4^o * t5)=$
$= 0{,}51461$ m/s ⇔
⇔ $d(JL) = Vo5 * (t6) + (1/2 * g * \text{sen } 4{,}5^o * (t6)^2) = Vo5 * (t6) + (0{,}39 * (t6)^2) = 0{,}003$ m ⇔ $t6= 0{,}005805$ s

Analisando finalmente d (LM) ,obtemos que $Vo6 = Vo5 + (g^* \text{sen } 4{,}5^o *t\ 6)= 0{,}559889$ m/s ⇔
⇔ $d(LM) = Vo6 * (t7) + (1/2 * g * \text{sen } 1{,}5^o * (t7)) = Vo6 * (t7) + (0{,}125 * (t7)^2) = 0{,}0048$ m ⇔
⇔ $t7= 0{,}0085569$ s

Provando agora que o tempo de queda equivale basicamente a uma constante para pontos de partida diferentes; vamos somar os tempos da descida quando o corpo inicia o movimento em (D) e demonstrar que é igual ao tempo de descida anterior(quando o corpo iniciou o movimento em (A) ⇔ $t (DM) = 0{,}048074 + 0{,}0121489 + 0{,}014835 + 0{,}010576 + 0{,}007026 + 0{,}0157145 + 0{,}005805 + 0{,}0085569 =$
$= 0{,}122$ s ≅ $t (AM) ≅ 0{,}1219$ s

Por fim dando outro exemplo para demonstrar que de facto independentemente do ponto de início de partida, o corpo sempre atingirá o ponto de altura mínimo num tempo praticamente constante,vamos considerar que ele começa o seu movimento em (J):

Havendo uma velocidade nula em (J) , temos que :
$: t^2 (JL) = (d (JL) - 0) / (1/2 * g^*\text{sen } 4{,}5^o) = (0{,}003-0) / (1/2 * 10 * 0{,}078) = 0{,}003 / 1/2 * 0{,}78= 0{,}003 / 0{,}39=$
$= 0{,}0076923076= t^2$ ⇔ $t= 0{,}087705801$s

Analisando agora o último segmento a percorrer-se, portanto (LM), teremos que : $Vo = g * \text{sen } 4{,}5^o * t = 0{,}78 *0{,}087705801=0{,}06841052$ m/s⇔
⇔ $d (LM) = Vo * t1 + (1/2 * g * \text{sen } 1{,}5^o * (t1)^2) = Vo * t1 + (0{,}125 * (t1)^2) = 0{,}06841052 * t1 + (0{,}125 * (t1)^2) = 0{,}0048$ m ⇔
⇔ $t1=0{,}06293$ s

Demonstrando que o tempo se aproxima igualmente de uma constante, quando o corpo começa o seu movimento em (J); temos que:
Tq(JM)≅ tq(DM) ≅ Tq(AM) ⇔ $Tq(J) = 0{,}087705801 + 0{,}06923 = 0{,}150$ s

Com isto está concluído o meu trabalho que demonstra que a ciclóide invertida corresponde à curva Tautocrônica com uma grande exatidão, até mais e um obrigado a todos que apreciaram a minha dedicão,qualquer dúvida é só perguntar-me.

Meu email: fabiocardoso2010@live.com.pt