Calcolo combinatorio

In quanti modi può accadere un evento?
Quanti.....

Il calcolo combinatorio si occupa di determinare (<u>contare</u>) quanti sono i raggruppamenti che si possono fare con n oggetti di un insieme finito, secondo determinate regole.

CALCOLO COMBINATORIO

Dato un collettivo formato da n elementi a1,a2,...ai,...an ,

il calcolo combinatorio
permette di
calcolare il numero dei gruppi possibili

che si possono formare con gli elementi di partenza in modo che i gruppi possano riconoscersi in base a determinate caratteristiche.
Indicato con n il numero degli elementi a disposizione nell'ambito del collettivo osservato , k il numero degli elementi del gruppo che si vuole formare siamo interessati a conoscere

quanti gruppi possiamo formare di k elementi con n elementi a disposizione
in modo che sia possibile riconoscere la diversità tra i gruppi,

le caratteristiche in base alle quali possiamo dire che due gruppi si differenziano.
Le modalità di riconoscimento di ogni gruppo rispetto all'altro sono diverse e riguardano specificatamente il problema da risolvere.

Esempi:

A) In una gara sportiva con n partecipanti si prevede vengano premiati i primi tre in ordine di arrivo.

In questo caso i gruppi devono differenziarsi o per l'ordine di presentazione:

a1,a2,a3 (primo premio all'elemento 1 , secondo premio all'elemento 2 e terzo premio all'elemento 3)

a2,a1,a3 (primo premio all'elemento 2 , secondo premio all'elemento 1 e terzo premio all'elemento 3)

o per avere almeno un elemento differente:

a1,a2,a3 oppure a1,a2,a4

non è possibile che la stessa persona possa vincere due dei tre premi e pertanto l'elemento non si può ripetere .

Se il regolamento prevede un premio per tutti i partecipanti i gruppi si differenzieranno solo per l'ordine di arrivo a1 , a2 , a3 ,...an , a1 , an , a3 ,...a2 .

B)
In un sistema di allarme alfa numerico sia i numeri che le lettere logicamente si possono ripetere
e i gruppi saranno differenti:
per l'ordine
oppure per avere elementi , numeri o lettere, diversi

C)
Nella scelta di una rappresentanza studentesca (con studenti con pari prerogative)
i gruppi devono differenziarsi:
per aver almeno un elemento diverso
non avrebbero senso gruppi che differiscano per l'ordine, non sarebbero possibili gruppi con elementi che si ripetono.

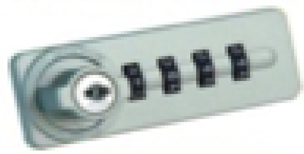
PROBLEMI

- **1) In quanti modi diversi 10 ragazzi di una compagnia si possono sedere su 10 poltrone adiacenti libere di un cinema?**
- **2) Quanti numeri di 4 cifre si possono comporre con le cifre 1,2,3,4,5,6?**
- **3) Quanti anagrammi si possono comporre con le lettere della parola TOMA? E con la parola AMA?**
- **4) Quanti terni si possono fare con i 90 numeri del Lotto?**
- **5) In quanti modi diversi 7 caramelle identiche possono essere distribuite tra 4 bambini?**
  E se le caramelle fossero diverse?

Attenzione al linguaggio

Nel linguaggio comune

Combinazione di una serratura



1844 apre
ma 8441 NON apre

Combinazione Vincente

Anche **73 68 26 75 76 86**
è vincente

In matematica

DISPOSIZIONE
Raggruppamento
ordinato

COMBINAZIONE
Raggruppamento
NON ordinato

“NOMI” DEI RAGGRUPPAMENTI

DISPOSIZIONI: quando l’ordine degli elementi è importante.

PERMUTAZIONI:casi particolari di disposizioni

COMBINAZIONI: quando l’ordine degli elementi non ha alcuna importanza .

I RAGGRUPPAMENTI
POSSONO ESSERE:

- SEMPLICI: quando gli oggetti sono tutti diversi

- CON RIPETIZIONE: quando gli oggetti vi figurano una o più volte

TIPI DI RAGGRUPPAMENTI

- **Disposizioni**
  - **semplici**
  - **con ripetizione**
- **Combinazioni**
  - **semplici**
  - **con ripetizione**
- **Permutazioni**
  - **semplici**
  - **con oggetti identici**

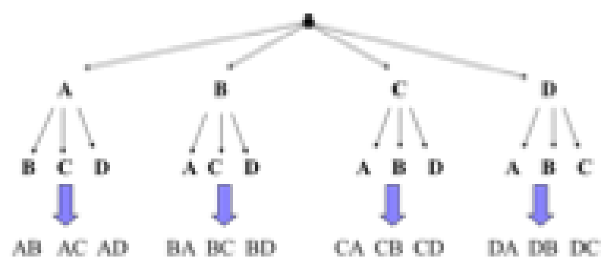
Disposizioni semplici

Si chiamano Disposizioni semplici i raggruppamenti composti da k elementi che si possono formare a partire da un insieme di n elementi, dove tali raggruppamenti differiscono tra loro o per la loro natura o per l'ordine (k<=n)

Come calcolare il numero di disposizioni semplici?

PROBLEMA:

DATE LE 4 LETTERE A,B,C,D QUANTI SONO I GRUPPI DI DUE ELEMENTI CHE DIFFERISCONO TRA LORO PER ORDINE O NATURA?



Il n° di *disposizioni semplici* di 4 oggetti distinti presi a 2 a 2 è: $D_{4,2} = 4*3 = 12$

In Generale:

Il numero di DISPOSIZIONI SEMPLICI di n oggetti distinti presi k per volta è:

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-k+1) \quad \text{con } n>k$$

(cioè il prodotto di k numeri naturali decrescenti a partire da n)

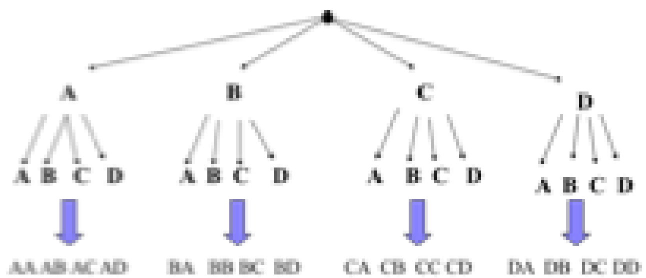
Disposizioni con ripetizione

Si chiamano Disposizioni con ripetizione i raggruppamenti composti da **k elementi**, **anche ripetuti**, che si possono formare a partire da un insieme di n elementi, dove tali raggruppamenti differiscono tra loro o per la loro natura o per l'ordine (k>=<n)

Come calcolare il numero di disposizioni con ripetizione?

PROBLEMA:

DATE LE 4 LETTERE A,B,C,D QUANTI SONO I GRUPPI DI DUE ELEMENTI CHE DIFFERISCONO TRA LORO PER ORDINE O NATURA CON RIPETIZIONE?



Il n° di *disposizioni con ripetizione* di 4 oggetti distinti presi a 2 a 2 è: $D'_{4,2} = 4*4 = 16$

In generale:

Il numero delle DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE di n

oggetti distinti presi k per volta è: $D'_{n,k} = n^k$

Riassumendo:

PROBLEMA:

Raggruppare gli elementi a-b-c a gruppi di 2

senza ripetizione e con ripetizione

1° modo

COPPIE ORDINATE:

ab	ac
ba	bc
ca	cb

DISPOSIZIONI semplici ($D_{3,2}$)

1° modo

COPPIE ORDINATE:

aa	ab	ac
bb	ba	bc
cc	ca	cb

DISPOSIZIONI con ripetizione ($D'_{3,2}$)

CHE COSA SONO LE PERMUTAZIONI?

Le permutazioni semplici di n oggetti distinti sono tutti i possibili raggruppamenti contenenti la totalità degli n oggetti e che differiscono solo per l'ordine. Sono cioè un caso particolare di disposizioni $D_{n,k}$ dove $n=k$

$$P_n = D_{n,n}$$

$$P_n = n!$$

PERMUTAZIONI SEMPLICI

ESEMPIO: **COSTRUIRE E CONTARE GLI ANAGRAMMI (anche privi di senso) DELLA PAROLA APE**

A	P → E		A P E
	E → P		A E P
P	A → E		P A E
	E → A		P E A
E	A → P		E A P
	P → A		E P A

Il n° delle *permutazioni* di 3 oggetti distinti è:

$$P_3 = D_{3,3} = 3*2*1 = 6$$

PERMUTAZIONI CON OGGETTI IDENTICI

ESEMPIO: COSTRUIRE E CONTARE GLI ANAGRAMMI

(anche privi di senso) DELLA PAROLA **ALA**

A	L	A	A L A
	A	L	A A L
L	A	A	L A A
	A	A	L A A
A	A	L	A A L
	L	A	A L A

uguali a 2 a 2

LE *PERMUTAZIONI* DI 3 OGGETTI , 2 DEI QUALI IDENTICI, SONO: $P_3^{(2)} = P_3/2! = 3$

IN GENERALE:

se tra gli ***n*** oggetti dati ve ne sono ***α*** uguali tra loro, ***β*** uguali tra loro… il numero delle permutazioni degli ***n*** oggetti assegnati risulta:

$$P_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{n!}{\alpha! * \beta!}$$

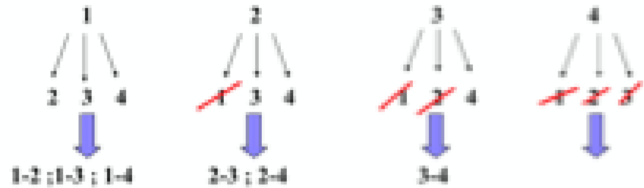
Combinazioni semplici

Si chiamano combinazioni tutti i raggruppamenti formati da k oggetti che si possono formare a partire da n elementi tenendo conto che ogni gruppo si differenzia da un altro solo per la natura degli elementi componenti. ($k<=n$) L'ordine degli elementi non deve essere considerato!!!

Come calcolare il numero di combinazioni semplici ?

PROBLEMA:

DATE LE 4 CIFRE 1,2,3,4 QUANTE SONO LE **COPPIE** DI NUMERI **DISTINTI** CHE SI POSSONO FORMARE CHE DIFFERISCONO SOLO PER LA NATURA DEGLI ELEMENTI CHE LI COMPONGONO?



Le *combinazioni semplici* di 4 oggetti presi a 2 a 2 sono : $C_{4,2} = D_{4,2} / 2 = 4*3 / 2 = 6$

In generale:

Il numero delle COMBINAZIONI SEMPLICI di n oggetti distinti presi k per volta è:

$$C_{n,k} = D_{n,k} / k! = \binom{n}{k} \quad \text{con } n>=k$$

coefficiente binomiale

Combinazioni con ripetizione

Si chiamano combinazioni con ripetizione tutti i raggruppamenti, formati da k oggetti, che si possono formare a partire da n elementi, tenendo conto che ogni elemento di un gruppo può essere ripetuto fino a k volte e in ciascun gruppo è diverso il numero delle volte in cui un elemento compare. (k>=<n)
L'ordine degli elementi non deve essere considerato!!!

Come calcolare il numero di combinazioni con ripetizione ?

PROBLEMA:

DATE LE **2** LETTERE a,b QUANTE SONO LE COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE DI TALI OGGETTI PRESI A 3 A 3?

a a a
a a b
a b b
b b b

Il n° di *combinazioni con ripetizione* di n oggetti distinti presi a 3 a 3 è :

$$C'_{2,3}=\binom{2+3-1}{3}=\binom{4}{3}=4$$

In generale:

Il numero delle COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE di n oggetti distinti presi k per volta è:

$$C'_{n,k}=\binom{n+k-1}{n} \text{ con } n>=<k$$

(cioè è il prodotto di k fattori crescenti a partire da n, diviso k!)

Ora risolviamo i problemi
formulati all'inizio
della presentazione!!!!!!!