

# Analoge aktive Filter

1. Allgemeine Bemerkungen
2. Theoretische Grundlagen der Tiefpassfilter
3. Tiefpass-Hochpass-Transformation
4. Realisierung von Tief- und Hochpassfiltern
5. Realisierung von Tief- und Hochpassfiltern
6. Realisierung von Tief- und Hochpassfiltern höherer Ordnung
7. Bandpassfilter
8. Realisierung von Bandpassfiltern 2. Ordnung

Anhang:           1 Berechnung einer Filterfunktion  
                      2 Vergleich mit VZ2-Glied

Quellen:

Tietze Schenk, Halbleiterschaltungstechnik, 978-3-540-00429-5

Filter Skript Prof. Roland Küng

Ziele:

Filterübertragungsfunktionen 1. und 2. Ordnung kennen. Tiefpass, Hochpass und Bandpass bis 2. Ordnung berechnen und dimensionieren können. Verschiedene Implementationen kennen.

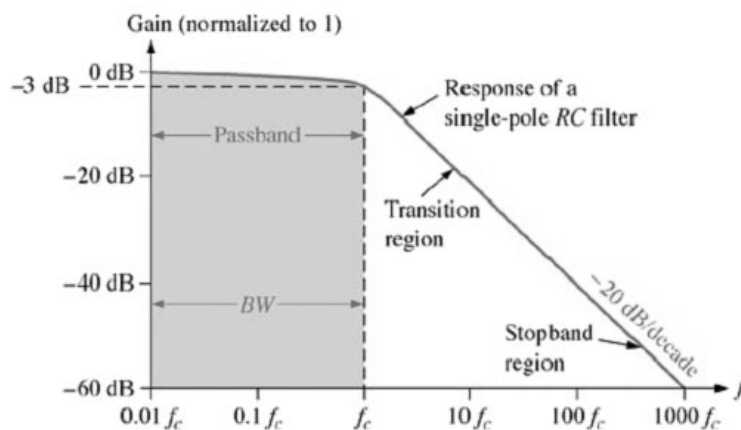
# Analoge aktive Filter

## 1. Allgemeine Bemerkungen

Filter sind Schaltungen mit frequenzabhängiger Übertragungsfunktion. Sie werden genutzt, um bestimmte Frequenzanteile von Signalgemischen gezielt hervorzuheben oder zu unterdrücken. Sie werden eingeteilt in:

- Tiefpässe,
- Hochpässe,
- Bandpässe,
- Bandsperren,
- Allpässe.

Ihre Übertragungsfunktion lässt sich in Durchlass- und Sperrbereiche unterteilen. Die Grenze zwischen Durchlass- und Sperrbereich heißt Grenzfrequenz. Bei ihr ist der Betrag der Übertragungsfunktion auf das  $1/\sqrt{2}$ -fache (-3dB) gegenüber dem Durchlassbereich abgefallen. Im Sperrbereich sinkt die Betragsfunktion in Abhängigkeit von der Frequenz mit  $n * 20 \text{ dB/Dekade}$ . Dabei gibt  $n$  die Ordnung des Filters an.



(a) Comparison of an ideal low-pass filter response with actual response

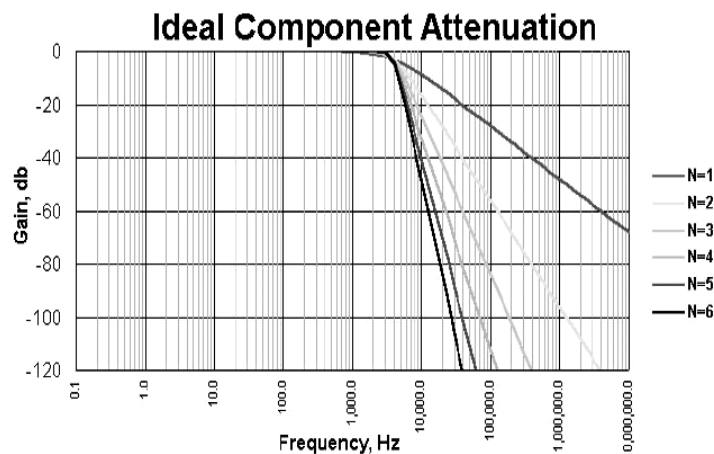
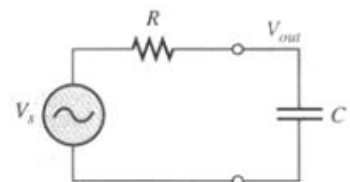


Abb. 2.6.0: Frequenzgang Filter 2. und n.ter Ordnung

Die Nutzung von Operationsverstärkern ermöglicht eine Realisierung der Filterfunktionen mit beliebiger Ordnung und Lage der Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktionen, ohne auf die Verwendung von Induktivitäten angewiesen zu sein.

Dies ist besonders bei niedrigen Grenzfrequenzen von Vorteil, da die Realisierung großer Induktivitäten sehr material- und platzaufwendig ist.

In der analogen Schaltungstechnik sind zwei Filterrealisierungen von besonderer Bedeutung: Passive LC-Filter und aktive RC-Filter. Die aktiven RC-Filter gehören zu den wichtigen Baugruppen der wert- und zeitkontinuierlichen Signalverarbeitung, also der reinen Analogtechnik. Mit RC-Gliedern beschaltete Operationsverstärkerschaltungen bilden ihre schaltungstechnische Basis.

Die Realisierung aktiver Filter erfolgt auf der Basis rückgekoppelter Operationsverstärkerschaltungen. Zur Gestaltung des gewünschten Amplituden- und Phasenfrequenzganges bzw. der Laufzeitcharakteristik dienen passende RC-Kombinationen innerhalb der Rückkopplungsschleife. Vorteile gegenüber passiven RC-Filtern sind:

- höhere Flankensteilheit,
- einstellbare Filtercharakteristik,
- einstellbare Verstärkung im Durchlassbereich,
- rückwirkungsfreies Zusammenschalten mehrerer Filterstufen.

Insbesondere der letzte Aspekt ist von großer Bedeutung. Da die OpAmp-Schaltung meist einen hohen Eingangswiderstand besitzen, eignen sie sich hervorragend, um durch Kettenschaltung mehrerer Filterstufen niedriger Ordnung eine Gesamtübertragungsfunktion höherer Ordnung zu erzeugen. Da die Toleranzempfindlichkeit der Schaltung mit der Filterordnung wächst und die Stabilität bedroht, konzentriert man sich praktisch nur auf die Umsetzung von Grundschaltungen erster und zweiter Ordnung und deren Kettenschaltung.

## 2 Theoretische Grundlagen der Tiefpassfilter

Für den Frequenzgang eines einfachen Tiefpasses nach Abb. 2.6.1 ergibt sich:

$$\underline{A}(j\omega) = \frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + j\omega RC}. \quad (2.6.1)$$

Ersetzt man  $j\omega$  durch  $p$  (in der engl. Literatur  $s$ ), erhält man daraus die Übertragungsfunktion

$$A(p) = \frac{L\{U_a(t)\}}{L\{U_e(t)\}} = \frac{1}{1 + pRC}. \quad (2.6.2)$$

Sie gibt das Verhältnis der Laplace Transformierten von Ausgangs- und Eingangsspannung für beliebig von der Zeit abhängige Signale an. Umgekehrt ergibt sich der Übergang von der Übertragungsfunktion  $A(p)$  zum Frequenzgang  $\underline{A}(j\omega)$  für sinusförmige Eingangssignale.

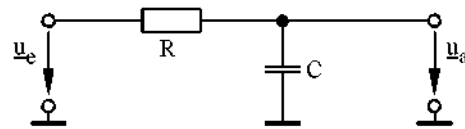


Abb. 2.6.1 Einfacher passiver Tiefpass

Um zu einer allgemeinen Darstellung zu kommen, ist es zweckmäßig, die komplexe Frequenzvariable  $p$  zu normieren auf die Grenzfrequenz des gesamten Filters. Wir setzen

$$P = \frac{j\omega}{\omega_g} = j \frac{f}{f_g} = j\Omega. \quad (2.6.4)$$

Die Schaltung in Abb. 2.6.1 besitzt die Grenzfrequenz  $f_g = 1/2\pi RC$ . Damit ergibt sich  $P = j\omega RC$  und

$$A(P) = \frac{1}{1 + P}. \quad (2.6.5)$$

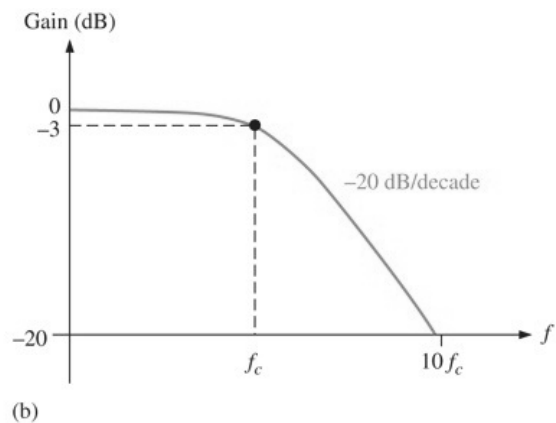
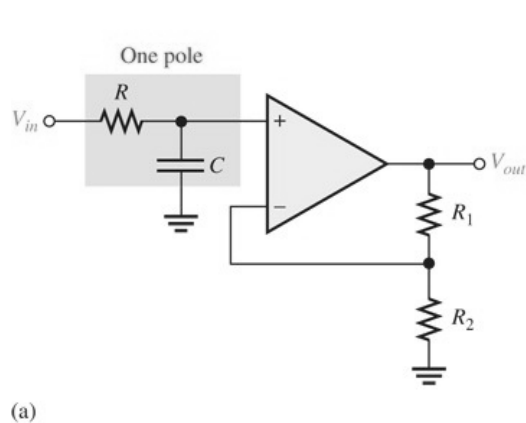


Abb. 2.6.1b: Tiefpass 1. Ordnung mit Verstärkung oder Buffer ( $R_1 = 0 \Omega$ )

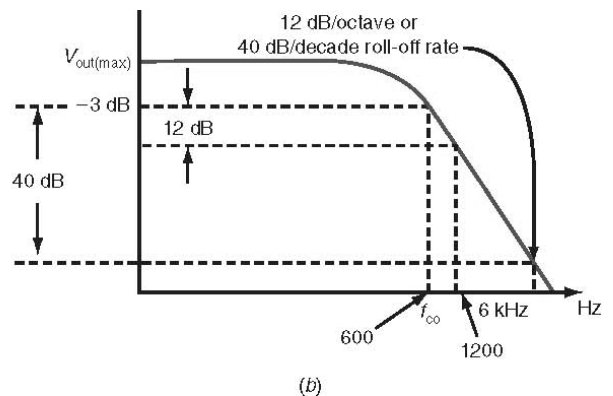
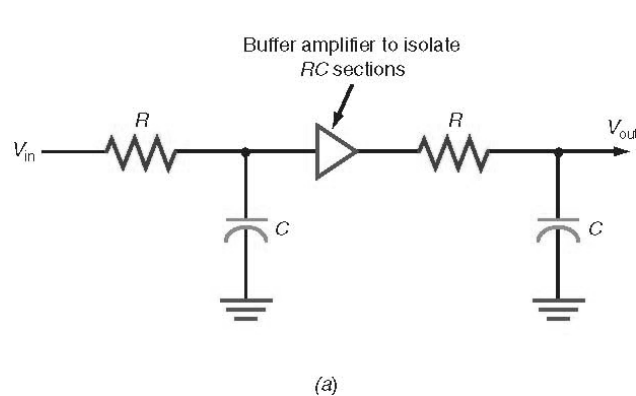


Abb. 2.6.1c: Einfacher 2-stufigestufiger Tiefpass aus Blöcken 1. Ordnung

Für den Betrag der Übertragungsfunktion, d.h. für das Amplitudenverhältnis bei sinusförmigem Eingangssignal erhalten wir daraus

$$|\underline{A}(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^2}. \quad (2.6.6)$$

Für  $\Omega \gg 1$ , d.h. für  $f \gg f_g$ , wird  $|\underline{A}| = 1/\Omega$ ; das entspricht einer Verstärkungsabnahme von 20 dB je Frequenzdekade.

Benötigt man einen steileren Verstärkungsabfall, kann man n Tiefpässe in Reihe schalten. Für die Übertragungsfunktion ergibt sich dann ein Ausdruck der Form

$$A(P) = \frac{1}{(1 + \alpha_1 P)(1 + \alpha_2 P) \dots (1 + \alpha_n P)} \quad (2.6.7)$$

mit den reellen, positiven Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ . Für  $\Omega \gg 1$  wird  $|\underline{A}| \sim 1/\Omega^n$ ; die Verstärkung nimmt also mit  $n \cdot 20$  dB je Dekade ab.

Man erkennt, dass die Übertragungsfunktion n reelle negative Pole besitzt. Dies ist das Kennzeichen der passiven RC-Tiefpässe n-ter Ordnung. Schaltet man entkoppelte Tiefpässe (Fig. 2.6.1c) mit gleicher Grenzfrequenz in Reihe, wird

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha = \sqrt[n]{2} - 1. \quad (2.6.8)$$

Dies ist der Fall der kritischen Dämpfung. Die einzelnen Tiefpässe besitzen dann eine um den Faktor  $1/\alpha$  höhere Grenzfrequenz als das ganze Filter.

Die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses hat allgemein die Form, z.B. entstanden durch ausmultiplizieren von Gl.(2.6.7)

$$A(P) = \frac{A_0}{1 + c_1 P + c_2 P^2 + \dots + c_n P^n}. \quad (2.6.9)$$

Darin sind  $c_1, c_2, \dots, c_n$  positive reelle Koeffizienten. Die Ordnung des Filters ist gleich der höchsten Potenz von P. Für die Realisierung der Filter ist es günstig, wenn das Nennerpolynom in Faktoren zerlegt ist. Aus der Laplace Theorie ist bekannt, dass Netzwerke mit Polen in der linken Halbebene stabil sind und sich daher auch für Filter eignen. Wenn man allgemein konjugiert komplexe Polpaare zulässt ( $c_n$  komplex), ist eine Zerlegung in Linearfaktoren wie in Gl. (2.6.7) nicht mehr möglich, sondern man erhält ein Produkt aus quadratischen Ausdrücken:

$$A(P) = \frac{A_0}{(1 + a_1 P + b_1 P^2)(1 + a_2 P + b_2 P^2) \dots}. \quad (2.6.10)$$

Darin sind  $a_i$  und  $b_i$  positive reelle Koeffizienten. Bei ungerader Ordnung ist der Koeffizient  $b_1$  gleich Null. Die Koeffizienten hängen von der Filterapproximation und der Ordnung ab, siehe Anhang 2. Wir beschränken uns hier auf Ordnung 1 und 2.

Höhere Ordnungen können durch Reihenschaltung von Systemen 1. und 2. Ordnung gebildet werden können. Es ändern sich aber dabei die Koeffizienten!

Der Frequenzgang lässt sich nach verschiedenen theoretischen Gesichtspunkten optimieren. Aus solchen Optimierungsüberlegungen folgen ganz bestimmte Werte für die Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$ . Es entstehen dabei konjugiert komplexe Pole, die man nicht mit passiven RC-Schaltungen realisieren kann, wie der Vergleich mit Gl. (2.6.7) zeigt. Eine Möglichkeit, konjugiert komplexe Pole zu erzeugen, besteht in der Verwendung von LRC-Schaltungen. Im Hochfrequenzbereich macht die Realisierung der benötigten Induktivitäten meist keine Schwierigkeiten. Im Niederfrequenzbereich sind jedoch meist große Induktivitäten notwendig, die unhandlich sind und schlechte elektrische Eigenschaften besitzen. Die Verwendung von Induktivitäten lässt sich im Niederfrequenzbereich jedoch umgehen, wenn man zu den RC-Schaltungen aktive Bauelemente (z.B. Operationsverstärker) hinzufügt. Solche Schaltungen werden dann als aktive Filter bezeichnet.

## Bekannteste Approximationen

### *Butterworth-Tiefpassfilter*

Butterworth-Tiefpassfilter besitzen einen Amplituden-Frequenzgang, der möglichst lang horizontal verläuft und erst kurz vor der Grenzfrequenz scharf abknickt. Ihre Sprungantwort zeigt ein beträchtliches Überschwingen, das mit zunehmender Ordnung größer wird.

### *Tschebyscheff-Tiefpassfilter*

Tschebyscheff-Tiefpassfilter (auch Chebishev) besitzen oberhalb der Grenzfrequenz einen noch steileren Abfall der Verstärkung. Im Durchlassbereich verläuft die Verstärkung jedoch nicht monoton, sondern besitzt eine Welligkeit konstanter Amplitude. Bei gegebener Ordnung ist der Abfall oberhalb der Grenzfrequenz um so steiler, je größer die zugelassene Welligkeit ist. Das Überschwingen der Sprungantwort ist noch stärker als bei den Butterworth-Filtern.

### *Bessel-Tiefpassfilter*

Bessel-Tiefpassfilter besitzen ein optimales Rechteckübertragungsverhalten. Die Voraussetzung hierfür ist, dass die Gruppenlaufzeit über einen möglichst großen Frequenzbereich konstant ist, d.h. dass die Phasenverschiebung in diesem Frequenzbereich proportional zur Frequenz ist. Allerdings knickt der Amplituden-Frequenzgang der Bessel-Filter nicht so scharf ab wie bei den Butterworth- und Tschebyscheff-Filtern.

### Koeffizienten für Ordnung $n = 1$

$n = 1$  :  $a_1 = 1$   $b_1 = 0$  unabhängig von Approximation

### Tabelle Koeffizienten für Ordnung $n=2$ :

Butterworth	$a_1 = 1.4142$	$b_1 = 1$
Tschebyscheff 0.5 dB	$a_1 = 1.3614$	$b_1 = 1.3827$
Tschebyscheff 1 dB	$a_1 = 1.3022$	$b_1 = 1.5515$
Tschebyscheff 2 dB	$a_1 = 1.1813$	$b_1 = 1.7775$
Tschebyscheff 3 dB	$a_1 = 1.0650$	$b_1 = 1.9305$
Bessel	$a_1 = 1.3617$	$b_1 = 0.6180$

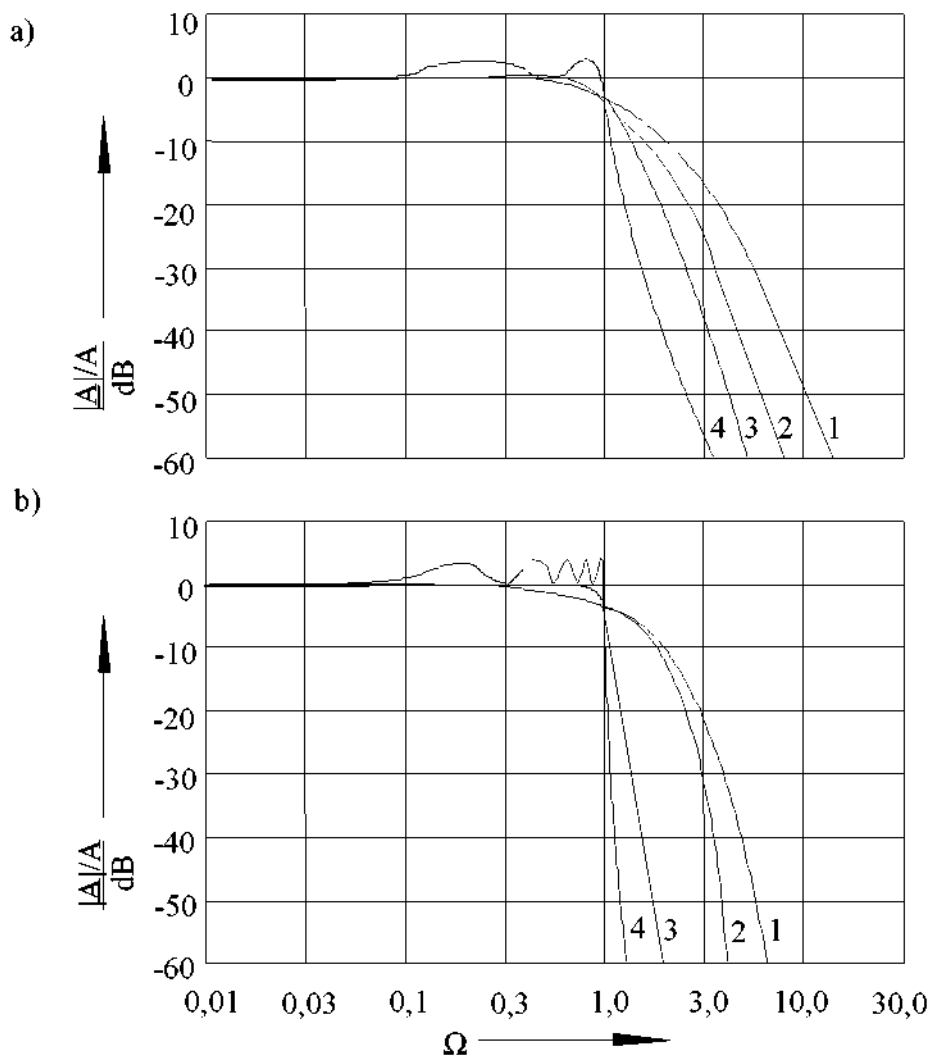


Abb. 2.6.2 Vergleich des Amplituden-Frequenzganges der verschiedenen Filtertypen  
a) 4. Ordnung  
b) 10. Ordnung

Kurve 1: Tiefpass mit kritischer Dämpfung. Kurve 2: Bessel-Tiefpass. Kurve 3: Butterworth-Tiefpass. Kurve 4: Tschebyscheff-Tiefpass mit 3 dB Welligkeit

Abbildung 2.6.2 zeigt eine Gegenüberstellung der vier beschriebenen Amplituden-Frequenzgänge in 4. und 10. Ordnung. Man erkennt, dass der Tschebyscheff-Tiefpass am steilsten vom Durchlass- in den Sperrbereich übergeht. Dies erkaufte man sich durch die Welligkeit des Frequenzganges im Durchlassbereich. Macht man die Welligkeit immer kleiner, geht das Tschebyscheff-Filter kontinuierlich in das Butterworth-Filter über. Beide Filter zeigen ein beachtliches Überschwingen in der Sprungantwort. Dies ist in Abb. 2.6.3 zu erkennen. Bessel-Filter besitzen nur ein sehr geringes Überschwingen.

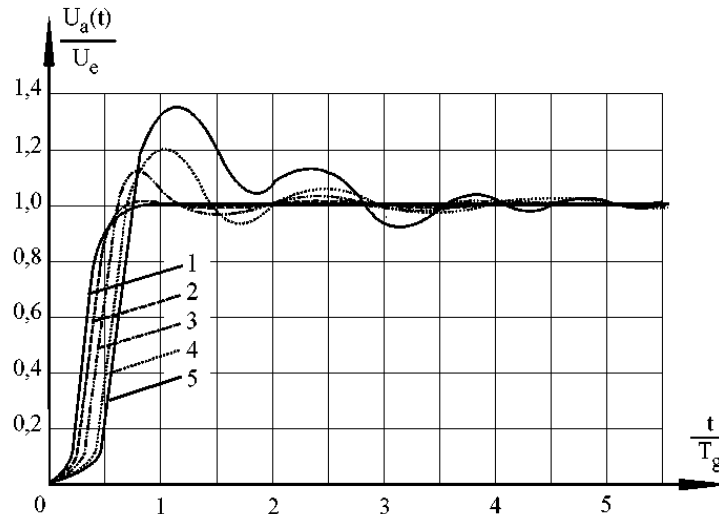


Abb. 2.6.3 Sprungantwort bei Tiefpassfiltern 4. Ordnung

Kurve 1: Tiefpass mit kritischer Dämpfung. Kurve 2: Bessel-Tiefpass. Kurve 3: Butterworth-Tiefpass. Kurve 4: Tschebyscheff-Tiefpass mit 0,5 dB Welligkeit. Kurve 5: Tschebyscheff-Tiefpass mit 3 dB Welligkeit

## Zusammenfassung der Theorie

Wir haben gesehen, dass sich die Übertragungsfunktion aller Tiefpassfilter in der Form

$$A(P) = \frac{A_0}{\prod_i (1 + a_i P + b_i P^2)} \quad (2.6.11)$$

darstellen lässt. Die Ordnung  $n$  des Filters ist gegeben durch die höchste Potenz von  $P$  in Gl. (2.6.11), wenn man den Nenner ausmultipliziert. Sie legt die Asymptotensteigerung des Frequenzganges der Verstärkung auf den Wert  $-n \cdot 20 \text{ dB/Dekade}$  fest. Der übrige Verlauf der Verstärkung wird für die jeweilige Ordnung durch den Filtertyp bestimmt. Von besonderer Bedeutung sind Butterworth-, Tschebyscheff- und Bessel-Filter, die sich durch die Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$  in Gl. (2.6.11) unterscheiden.

Mit den Koeffizienten  $a_i$  und  $b_i$  der faktorisierten Übertragungsfunktion lässt sich der Frequenzgang der Verstärkung, der Phasenverschiebung und der Gruppenlaufzeit berechnen:

$$|A|^2 = \frac{A_0^2}{\prod_i [1 + (a_i^2 - 2b_i)\Omega^2 + b_i^2\Omega^4]}, \quad (2.6.11a)$$

$$\varphi = -\sum_i \arctan \frac{a_i \Omega}{1 - b_i \Omega^2}, \quad (2.6.11b)$$

$$T_{\text{Gr}} = \frac{1}{2\pi} \sum_i \frac{a_i (1 + b_i \Omega^2)}{1 + (a_i^2 - 2b_i)\Omega^2 + b_i^2\Omega^4}. \quad (2.6.11c)$$



### 3 Tiefpass-Hochpass-Transformation

In der logarithmischen Darstellung kommt man vom Tiefpass zum analogen Hochpass, indem man die Frequenzgangkurve der Verstärkung an der Grenzfrequenz spiegelt, d.h.  $\Omega$  durch  $1/\Omega$  bzw.  $P$  durch  $1/P$  ersetzt. Die Grenzfrequenz bleibt dabei erhalten und  $A_0$  geht in  $A_\infty$  über. Die Gl. (2.6.11) lautet dann

$$A(P) = \frac{A_\infty}{\prod_i \left( 1 + \frac{a_i}{P} + \frac{b_i}{P^2} \right)} \quad (2.6.12)$$

Die Überlegungen über das Verhalten im Zeitbereich können allerdings nicht übernommen werden, da die Sprungantwort ein prinzipiell anderes Verhalten aufweist. Wie man in Abb. 2.6.15 erkennt, ergibt sich selbst bei Hochpassfiltern mit kritischer Dämpfung eine Schwingung um den stationären Wert.

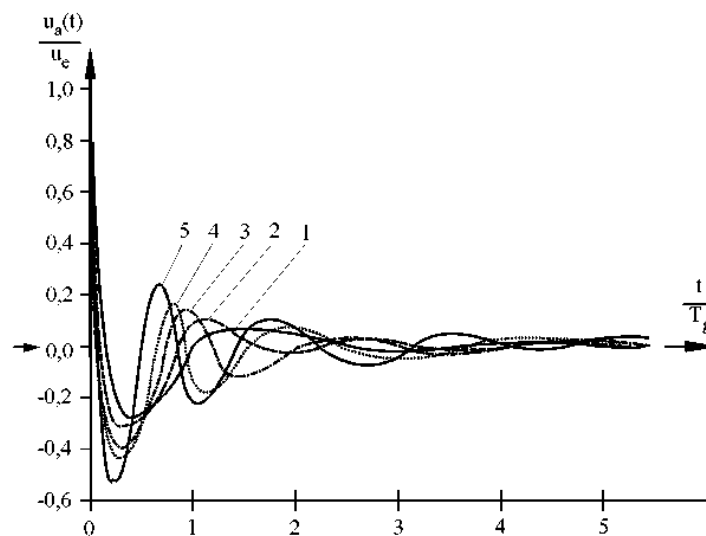


Abb. 2.6.4 Sprungantwort von Hochpassfilter 4. Ordnung

Kurve 1: Hochpass mit kritischer Dämpfung. Kurve 2: Bessel-Hochpass. Kurve 3: Butterworth-Hochpass. Kurve 4: Tschebyscheff-Hochpass mit 0,5 dB Welligkeit. Kurve 5: Tschebyscheff-Hochpass mit 3 dB Welligkeit

### 4 Realisierung von Tief- und Hochpassfiltern 1. Ordnung

Nach Gl. (2.6.11) lautet die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses erster Ordnung allgemein

$$A(P) = \frac{A_0}{1 + a_1 P} \quad (2.6.13)$$

Sie lässt sich mit einem einfachen RC-Glied wie in Abb. 2.6.1 realisieren. Nach Abschnitt 2.6.2 gilt für diese Schaltung:

$$A(P) = \frac{1}{1 + pRC} = \frac{1}{1 + \omega_g RC P} \quad (2.6.14)$$

Die Gleichspannungsverstärkung ist auf den Wert  $A_0 = 1$  festgelegt. Der Parameter  $a_1$  lässt sich jedoch frei wählen. Der Koeffizientenvergleich liefert die Dimensionierung:

$$RC = \frac{a_1}{2\pi f_g} \quad (2.6.15)$$

Das einfache RC-Glied in Abb. 2.6.1 besitzt den Nachteil, dass sich seine Eigenschaften bei Belastung ändern. Daher muss man in der Regel einen Impedanzwandler nachschalten. Gibt man ihm die Spannungsverstärkung  $A_0$ , erhält man gleichzeitig die Möglichkeit, die Gleichspannungsverstärkung frei zu wählen. Die entsprechende Schaltung ist in Abb. 2.6.5 dargestellt.

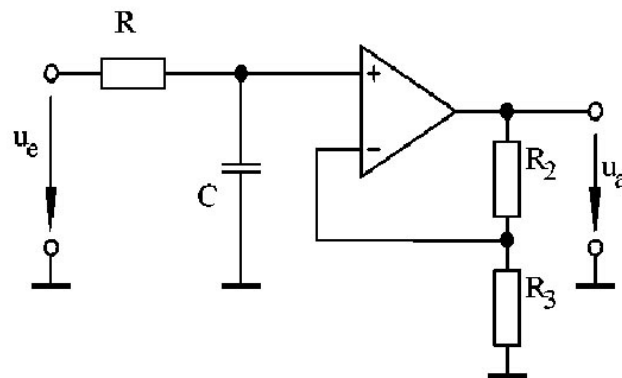


Abb. 2.6.5 Tiefpass erster Ordnung mit Impedanzwandler

Gleichspannungsverstärkung:  $A_0 = 1 + \frac{R_2}{R_3}$

Um den analogen Hochpass zu erhalten, muss man in Gl. (2.6.13)  $P$  durch  $1/P$  ersetzen. In der Schaltung lässt sich dies ganz einfach dadurch realisieren, dass man  $R$  mit  $C$  vertauscht (Fig. 2.6.5b).

Zu etwas einfacheren Tief- und Hochpässen 1. Ordnung gelangt man, wenn man das Filter mit in die Gegenkopplung des Operationsverstärkers einbezieht. Das entsprechende Tiefpassfilter zeigt Abb. 2.6.6a. Seine Übertragungsfunktion lautet:

$$A(P) = -\frac{R_2 / R_1}{1 + \omega_g R_2 C_1 P} \quad (2.6.16)$$

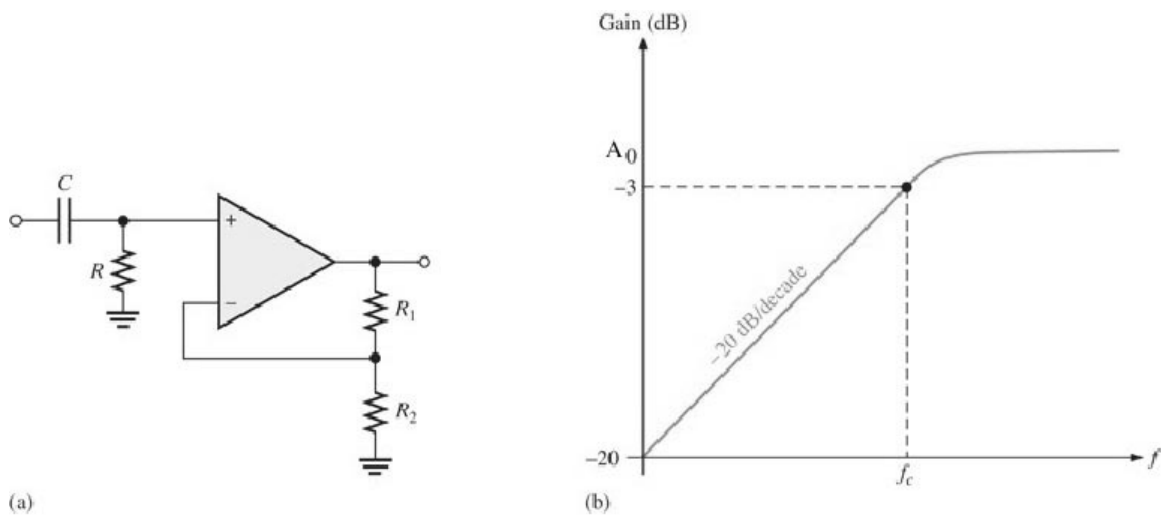


Abb. 2.6.5b: Hochpass erster Ordnung mit Impedanzwandler

Zur Dimensionierung gibt man die Grenzfrequenz, die hier negative Gleichspannungsverstärkung  $A_0$  und die Kapazität  $C_1$  vor. Dann folgt durch Koeffizientenvergleich mit Gl. (2.6.13)

$$R_2 = \frac{a_1}{2\pi f_g C_1} \quad \text{und} \quad R_1 = -\frac{R_2}{A_0} \quad (2.6.17)$$

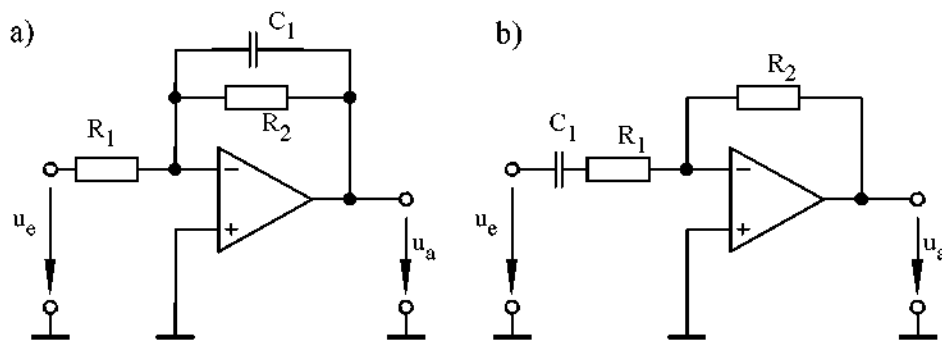


Abb. 2.6.6 Realisierung von Filterschaltungen erster Ordnung  
a) Tiefpass erster Ordnung  
b) Hochpass erster Ordnung mit Umkehrverstärkung

Abbildung 2.6.6 zeigt den analogen Hochpass. Seine Übertragungsfunktion lautet:

$$A(p) = -\frac{R_2 / R_1}{1 + \frac{1}{\omega_g R_1 C_1} \cdot \frac{1}{p}} \quad (2.6.18)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit Gl. (2.6.12) folgt die Dimensionierung

$$R_1 = \frac{1}{2\pi f_g a_1 C_1} \quad \text{und} \quad R_2 = -R_2 A_\infty \quad (2.6.19a/b)$$

Die bei den vorhergehenden Schaltungen angegebenen Übertragungsfunktionen besitzen nur in dem Frequenzbereich Gültigkeit, in dem der Betrag der Differenzverstärkung des Operationsverstärkers groß ist gegenüber dem Betrag von  $\underline{A}$ . Diese Bedingung ist bei höheren Frequenzen nur schwer zu erfüllen, da der Betrag der Differenzverstärkung wegen der notwendigen Frequenzgangkorrektur mit 6 dB/Oktave abnimmt und bei einem Standardverstärker bei 10 kHz nur noch etwa 100 beträgt (Stichwort Gain Bandwidth Product).

## 5 Realisierung von Tief- und Hochpassfiltern 2. Ordnung

Nach Gl. (2.6.11) lautet die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses 2. Ordnung allgemein

$$A(P) = \frac{A_0}{1 + a_1 P + b_1 P^2}. \quad (2.6.24)$$

Optimierte Übertragungsfunktionen zweiter und höherer Ordnung besitzen konjugiert komplexe Pole. Solche Übertragungsfunktionen sind mit passiven RC-Schaltungen nicht realisierbar. Eine Realisierungsmöglichkeit besteht in der Verwendung von Induktivitäten.

### LRC-Filter

Die Übertragungsfunktion der Schaltung in Abb. 2.6.8 lautet

$$A(P) = \frac{1}{1 + \omega_g R C P + \omega_g^2 L C P^2}. \quad (2.6.25)$$

Der Koeffizientenvergleich mit Gl. (2.6.24) liefert die Dimensionierung

$$R = \frac{a_1}{2\pi f_g C} \quad L = \frac{b_1}{4\pi^2 f_g^2 C}. \quad (2.6.26a/b)$$

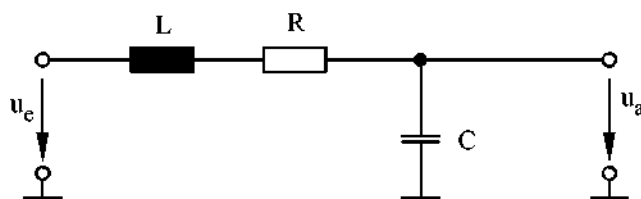


Abb. 2.6.8 Passiver Tiefpass zweiter Ordnung

Bei einer angenommenen Grenzfrequenz von  $f_g = 1,0 \text{ MHz}$  und einer Kapazität  $C = 100 \text{ pF}$  folgt mit  $a_1 = 1,414$  und  $b_1 = 1,000$  für  $R = 2,25 \text{ k}\Omega$  und  $L = 0,253 \text{ mH}$ . Eine derartige Induktivität lässt sich nur schwer in einem integrierten Filter einsetzen. Die gewünschten Übertragungsfunktionen lassen sich wesentlich einfacher durch geeignete RC-Beschaltung von Operationsverstärkern realisieren.

### Filter mit Mehrfachgegenkopplung

Die Übertragungsfunktion des aktiven Tiefpassfilters in Abb. 2.6.9 lautet

$$A(P) = - \frac{R_2 / R_1}{1 + \omega_g C_1 \left( R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \right) P + \omega_g^2 C_1 C_2 R_2 R_3 P^2}. \quad (2.6.27)$$

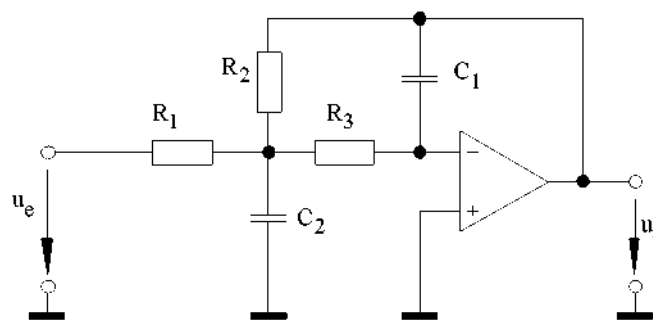


Abb. 2.6.9 Aktiver Tiefpassfilter zweiter Ordnung mit Mehrfachkopplung

:Durch Koeffizientenvergleich mit Gl. (2.6.24) erhalten wir die Beziehungen:

$$A_0 = -R_2 / R_1, \quad (2.6.28a)$$

$$a_1 = \omega_g C_1 \left( R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \right), \quad (2.6.28b)$$

$$b_1 = \omega_g^2 C_1 C_2 R_2 R_3. \quad (2.6.28c)$$

Zur Dimensionierung kann man z.B. die Widerstände  $R_1$  und  $R_3$  vorgeben und aus den Dimensionierungsgleichungen  $R_2$ ,  $C_1$  und  $C_2$  berechnen. Wie man sieht, ist eine Dimensionierung für alle positiven Werte von  $a_1$  und  $b_1$  möglich. Man kann also jeden gewünschten Filtertyp realisieren. Die Gleichspannungsverstärkung  $A_0$  ist negativ. Das Filter bewirkt bei tiefen Frequenzen demnach eine Signalinvertierung.

Es ist vorteilhaft die Kondensatoren vorzugeben und die Widerstände zu berechnen, denn bei den Kondensatoren sind oft nur wenige Werte mit geringer Toleranz vorhanden. Dazu werden die Dimensionierungsgleichungen nach den Widerständen aufgelöst:

$$R_2 = \frac{a_1 C_2 - \sqrt{a_1^2 C_2^2 - 4C_1 C_2 b_1 (1 - A_0)}}{4\pi f_g C_1 C_2}, \quad (2.6.29a)$$

$$R_1 = \frac{R_2}{-A_0}, \quad (2.6.29b)$$

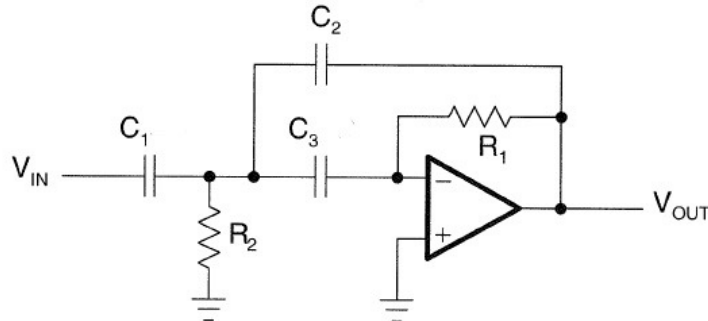
$$R_3 = \frac{b_1}{4\pi^2 f_g^2 C_1 C_2 R_2}. \quad (2.6.29c)$$

Damit sich für  $R_2$  ein reeller Wert ergibt, muss die Bedingung

$$\frac{C_2}{C_1} \geq \frac{4b_1(1 - A_0)}{a_1^2} \quad (2.6.30)$$

erfüllt sein. Die günstigste Dimensionierung ergibt sich, wenn man  $C_2/C_1$  nicht viel größer wählt, als es die obige Bedingung vorschreibt. Die Daten des Filters sind relativ unempfindlich gegenüber Bauteiltoleranzen. Daher ist die Schaltung besonders geeignet zur Realisierung von Filtern mit höherer Güte.

Analog kann eine Hochpassschaltung mit Mehrfachrückführung (MLF) entwickelt werden.



$$A(P) = -\frac{C_1}{C_2} \cdot \frac{R_1 R_2 C_2 C_3 \omega_g^2 P^2}{1 + R_2 (C_1 + C_2 + C_3) \omega_g P + R_1 R_2 C_2 C_3 \omega_g^2 P^2}$$

$$A_\infty = -C_1 / C_2 \quad R_2 = \frac{a_1}{b_1 \omega_g (C_1 + C_2 + C_3)} \quad R_1 = \frac{1}{b_1 \omega_g^2 R_2 C_2 C_3}$$

Abb. 2.6.9b: Hochpass 2. Ordnung mit Mehrfachrückführung (MLF)

Die Schaltung für den Hochpass hat dieselbe Struktur wie die des Tiefpasses, es sind aber alle Widerstände durch Kapazitäten ersetzt worden und umgekehrt (Dualität). Die Kapazitätswerte können beliebig vorgewählt werden. Etwas unschön ist, dass die Verstärkung  $A_\infty$  durch das Verhältnis zweier Kapazitäten bestimmt ist. Diese Elemente sind bekanntlich mit grösserer Toleranz behaftet als Widerstände. Häufig wird deshalb die Verstärkung 1 oder 10 gewählt und mit einer anderen Stufe auf den Wunschwert eingestellt.

## Filter mit Einfachmitkopplung

Aktive Filter lassen sich auch durch mitgekoppelte Verstärker realisieren. Sie werden in der Literatur nach ihren Entdeckern als Sallen&Key Filter (S&K) genannt.

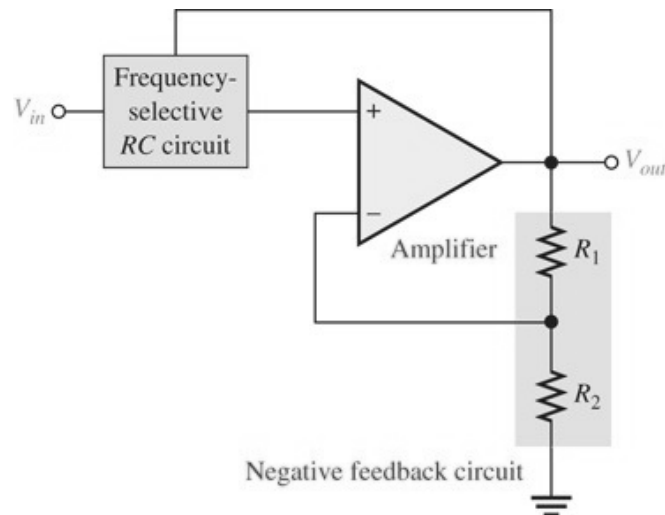


Abb. 2.6.10a: Allg. Mitgekoppelte Filterstruktur

Allerdings muss die Verstärkung durch eine interne Gegenkopplung auf einen genau definierten Wert festgelegt werden („controlled source“). Der Spannungsteiler  $R_3$ ,  $(\alpha - 1)R_3$  in Abb. 2.6.10 bewirkt diese Gegenkopplung und stellt die innere Verstärkung auf den Wert  $\alpha$  ein. Die Mitkopplung erfolgt über den Kondensator  $C_2$ . Für die Übertragungsfunktion ergibt sich:

$$A(P) = \frac{\alpha}{1 + \omega_s [C_1(R_1 + R_2) + (1 - \alpha)R_1 C_2]P + \omega_s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 P^2}. \quad (2.6.31)$$

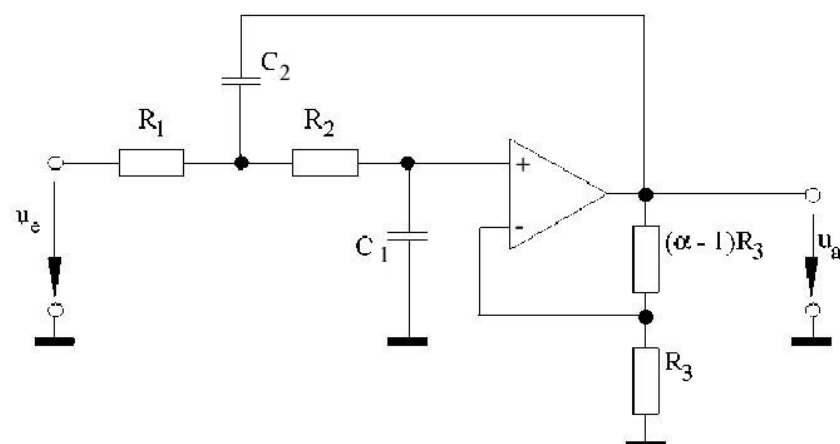


Abb. 2.6.10 Aktives Tiefpassfilter zweiter Ordnung mit Einfachmitkopplung

Die Dimensionierung lässt sich wesentlich vereinfachen, wenn man von vornherein gewisse Spezialisierungen vornimmt. Eine mögliche Spezialisierung ist, die innere Verstärkung  $\alpha = 1$  zu wählen. Dann wird  $(\alpha - 1) R_3 = 0$  und die beiden Widerstände  $R_3$  können entfallen. Solche voll gekoppelten Operationsverstärker sind als Spannungsfolger integriert erhältlich. Oft genügt auch ein einfacher Impedanzwandler, z.B. in Form einer Darlington-Schaltung. Damit lassen sich auch Filter im MHz-Bereich realisieren. Für den Sonderfall  $\alpha = 1$  lautet die Übertragungsfunktion:

$$A(P) = \frac{1}{1 + \omega_g C_1 (R_1 + R_2) P + \omega_g^2 R_1 R_2 C_1 C_2 P^2}. \quad (2.6.32)$$

Gibt man  $C_1$  und  $C_2$  vor, erhält man durch Koeffizientenvergleich mit Gl. (2.6.24):

$$A_0 = 1$$

$$R_{1/2} = \frac{a_1 C_2 \pm \sqrt{a_1^2 C_2^2 - 4b_1 C_1 C_2}}{4\pi \cdot f_g C_1 C_2} \quad (2.6.33)$$

Damit sich reelle Werte ergeben, muss die Bedingung:

$$\frac{C_2}{C_1} \geq \frac{4b_1}{a_1^2} \quad (2.6.34)$$

erfüllt sein. Wie bei Filter mit Mehrfachgegenkopplung ergibt sich die günstigste Dimensionierung, wenn man das Verhältnis  $C_2/C_1$  nicht viel größer wählt, als es die obige Bedingung vorschreibt.

Zu einer anderen interessanten Spezialisierung gelangt man, wenn man gleiche Widerstände und gleiche Kondensatoren einsetzt, d.h.  $R_1 = R_2 = R$  und  $C_1 = C_2 = C$  wählt. Um die verschiedenen Filtertypen realisieren zu können, muss man in diesem Fall die innere Verstärkung  $\alpha$  variieren. Übertragungsfunktion lautet dann

$$A(P) = \frac{\alpha}{1 + \omega_g RC(3 - \alpha)P + (\omega_g RC)^2 P^2} \quad (2.6.35)$$

Durch Koeffizientenvergleich mit Gl. (2.6.24) erhalten wir die Dimensionierung

$$RC = \frac{\sqrt{b_1}}{2\pi f_g}, \quad (2.6.36a) \quad (2.6.36b)$$

$$\alpha = A_0 = 3 - \frac{a_1}{\sqrt{b_1}} = 3 - \frac{1}{Q_1}.$$



		Kritisch	Bessel	Butterworth	3dB Tschebyscheff	ungedämpft
$\alpha$		1,000	1,268	1,586	2,234	3,000

Abb. 2.6.11 Innere Verstärkung bei Einfachmitkopplung

Wie man sieht, hängt die innere Verstärkung  $\alpha$  nur von der Polgüte und nicht von der Grenzfrequenz  $f_g$  ab. Die Größe  $\alpha$  bestimmt daher den Filtertyp. Setzt man die in Anhang 2 angegebenen Koeffizienten der Filter zweiter Ordnung ein, erhält man die in Abb. 2.6.11 angegebenen Werte für  $\alpha$ . Bei  $\alpha = 3$  schwingt die Schaltung selbständig auf der Frequenz  $f = 1/2 \pi RC$ . Man erkennt, dass die Einstellung der inneren Verstärkung umso schwieriger wird, je näher sie dem Wert  $\alpha = 3$  kommt. Daher ist besonders beim Tschebyscheff-Filter eine sehr genaue Einstellung notwendig. Dies ist ein gewisser Nachteil gegenüber den vorhergehenden Filtern. Ein bedeutender Vorteil ist jedoch, dass der Filtertyp ausschließlich durch  $\alpha$  bestimmt wird und nicht von  $R$  und  $C$  abhängt. Dadurch lässt sich die Grenzfrequenz bei diesem Filter besonders einfach verändern, indem man nur  $R_1$  und  $R_2$  in Abb. 2.6.10 zu verändern braucht.

Vertauscht man die Widerstände mit den Kondensatoren, erhält man das Hochpassfilter in Abb. 2.6.12. Seine Übertragungsfunktion lautet

$$A(P) = \frac{\alpha}{1 + \frac{R_2(C_1 + C_2) + R_1 C_2(1 - \alpha)}{R_1 R_2 C_1 C_2 \omega_g} \cdot \frac{1}{P} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 \omega_g^2} \cdot \frac{1}{P^2}} \quad (2.6.37)$$

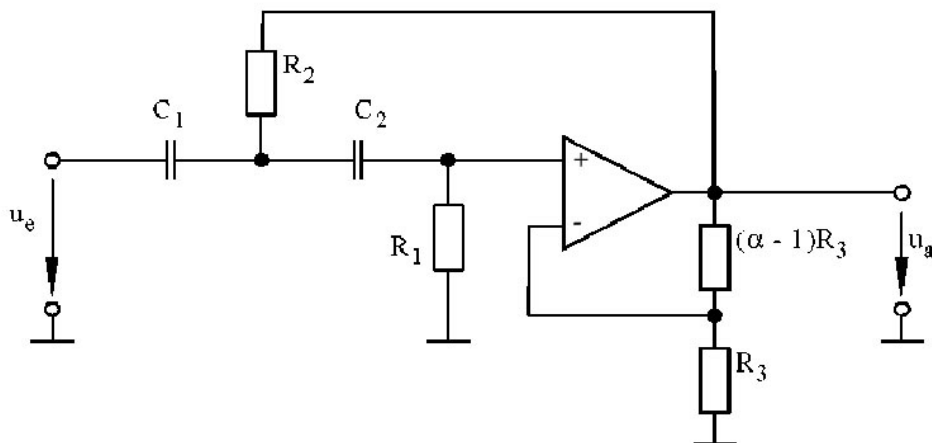


Abb. 2.6.12 Aktives Hochpassfilter zweiter Ordnung mit Einfachkopplung

Zur Erleichterung der Dimensionierung wählen wir die Spezialisierung  $\alpha = 1$  und  $C_1 = C_2 = C$ . Der Koeffizientenvergleich mit Gl. (2.6.12) liefert dann

$$A_{\infty} = 1, \quad (2.6.38a)$$

$$R_1 = \frac{1}{\pi f_g C a_1}, \quad (2.6.38b)$$

$$R_2 = \frac{a_1}{4\pi f_g C b_1}. \quad (2.6.38c)$$

## 6 Realisierung von Tief- und Hochpassfiltern höherer Ordnung

Wenn die Filtercharakteristik nicht scharf genug ist, muss man Filter höherer Ordnung verwenden. Dazu schaltet man Filter erster und zweiter Ordnung in Reihe. Dabei multiplizieren sich die Frequenzgänge der einzelnen Filter. Die Koeffizienten, die für  $a_1$  und  $b_1$  zu wählen sind, um die Grenzfrequenz  $f_g$  zu erzielen, sind für jede Stufe verschieden und in der Literatur tabelliert, z.B. in Tietze Schenk. Entsprechend können dann die Bauelemente der verschiedenen Stufen für die gemeinsame Grenzfrequenz  $f_g$  bestimmt werden. An dieser Stelle wird aber nicht darauf eingegangen.

Im Prinzip ist es gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die einzelnen Filterstufen anordnet, da der resultierende Frequenzgang immer derselbe bleibt. In der Praxis gibt es jedoch verschiedene Gesichtspunkte für die Reihenfolge der Filterstufen, z.B. die Aussteuerbarkeit. Nach diesem Gesichtspunkt ist es günstig, die Teilfilter der Grenzfrequenz nach zu ordnen und das mit der niedrigsten Grenzfrequenz an den Eingang zu schalten. Sonst kann die erste Stufe bereits übersteuert werden, wenn am Ausgang der zweiten noch keine Vollaussteuerung auftritt. Das kommt daher, dass die Filterstufen mit der höheren Grenzfrequenz durchweg eine höhere Polgüte besitzen und damit auch einen Anstieg der Verstärkung in der Nähe ihrer Grenzfrequenz aufweisen. Dies erkennt man in Abb. 2.6.13, in der wir den Frequenzgang der Verstärkung eines 0,5 dB-Tschebyscheff-Tiefpasses 10. Ordnung und seiner fünf Teilfilter eingezeichnet haben. Man sieht, dass man die größte Aussteuerbarkeit dann erhält, wenn man die Filterstufen mit niedriger Grenzfrequenz an den Anfang der Filterkette setzt.

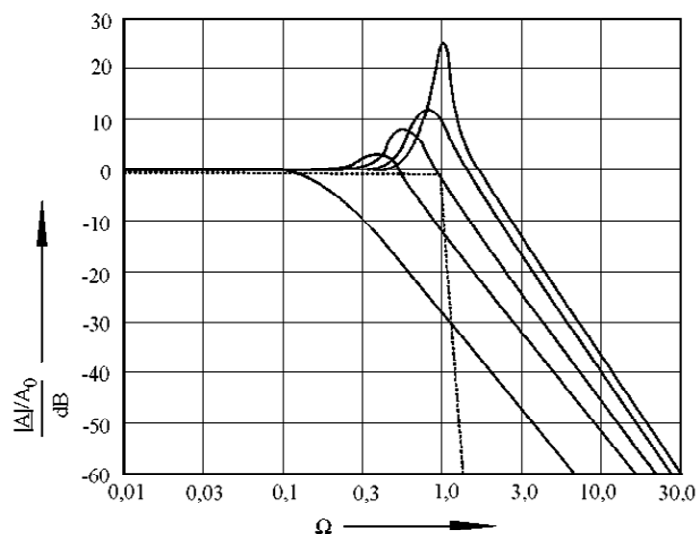


Abb. 2.6.13 Frequenz der Verstärkung eines Tschebyscheff-Filters 10. Ordnung mit 0,5 dB Welligkeit sowie die fünf zugehörigen Teilfilter

Ein anderer Gesichtspunkt für die Anordnung der Filterstufen kann das Rauschen sein. Diesbezüglich ist gerade die umgekehrte Reihenfolge günstig, weil dann die Teilfilter mit der niedrigen Grenzfrequenz am Ende der Filterkette das Rauschen der Eingangsstufe wieder abschwächen.

## 7 Bandpassfilter

Bandpässe lassen sich durch Serieschaltung von Tiefpass und Hochpass erzielen, wenn die untere und obere Grenzfrequenz nicht zu nahe beieinander liegen. Als Kriterium kann das Verhältnis Bandmittenfrequenz  $f_r$  zu Bandbreite  $f_{\max} - f_{\min}$  genommen werden: Ist es kleiner 5 so ist die Methode erfolgreich.

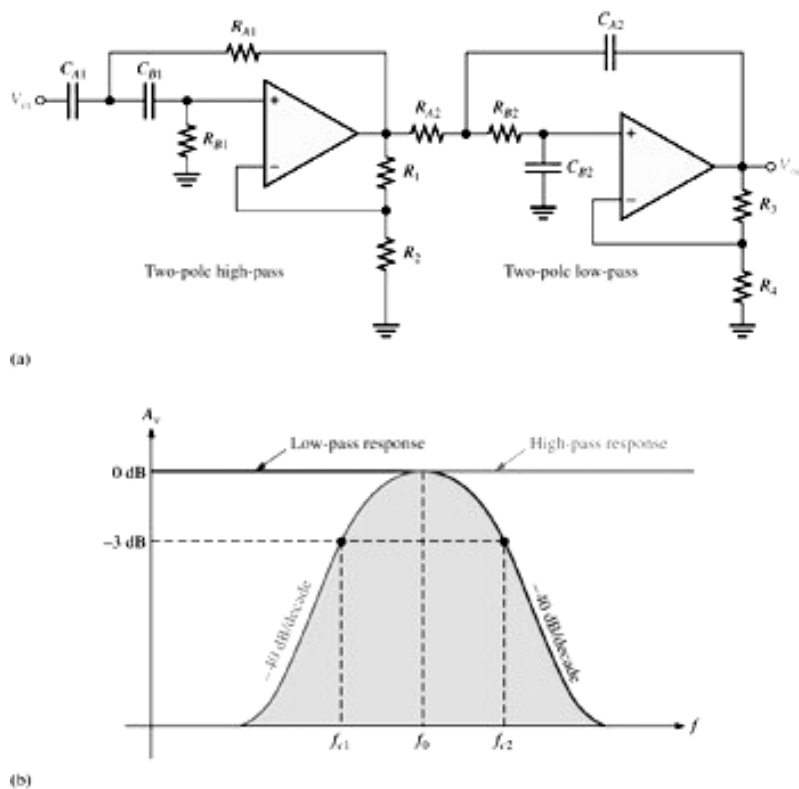


Abb. 2.6.13b: Bandpass aus Tiefpass und Hochpass zusammengesetzt

### Bandpassfilter 2. Ordnung

Bei Bandpässen interessiert man sich für die Verstärkung  $A_r$  bei der Resonanzfrequenz  $f_r$  und die Güte  $Q$ . Wir beschränken uns hier im folgenden auf Bandpässe 2. Ordnung.

In Analogie zum Schwingkreis definiert man die Güte als das Verhältnis von Resonanzfrequenz  $f_r$  zu Bandbreite  $B$ . Es gilt also

$$Q = \frac{f_r}{B} = \frac{f_r}{f_{\max} - f_{\min}} = \frac{1}{\Omega_{\max} - \Omega_{\min}} = \frac{1}{\Delta\Omega}. \quad (2.6.42)$$

Man kann die Übertragungsfunktion mathematisch herleiten und erhält für die auf die Mittenfrequenz  $f_r$  normierte Darstellung:

$$A(P) = \frac{(A_r/Q)P}{1 + \frac{1}{Q}P + P^2} \quad (2.6.43)$$

Diese Gleichung ermöglicht es, direkt aus der Übertragungsfunktion eines Bandpasses 2. Ordnung alle interessierenden Größen abzulesen.

Aus Gl. (2.6.43) erhalten wir mit  $P = j\Omega$  den Frequenzgang der Amplitude und der Phasenverschiebung

$$|A| = \frac{(A_r/Q) \Omega}{\sqrt{1 + \Omega^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 2 \right) + \Omega^4}},$$

$$\varphi = \arctan \frac{Q(1 - \Omega^2)}{\Omega}.$$

Die beiden Funktionen sind in Abb. 2.6.15 für die Güten 1 und 10 aufgezeichnet.

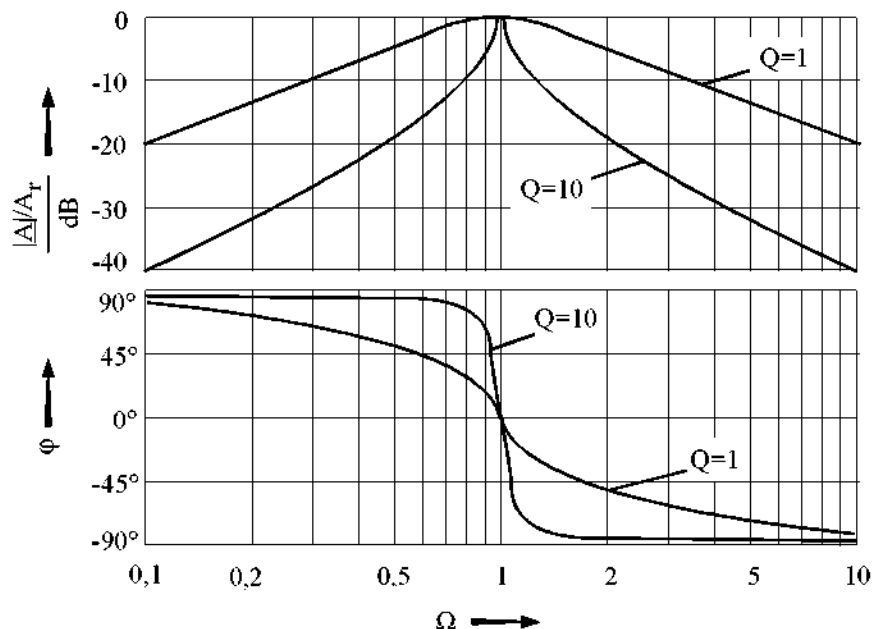


Abb. 2.6.15 Frequenzgang der Amplitude und Phasenverschiebung für Bandpassfilter 2. Ordnung mit der Güte  $Q = 1$  und  $Q = 10$

## 8 Realisierung von Bandpassfiltern 2. Ordnung

### Bandpass mit Mehrfachgegenkopplung

(2.6.44a)

Das Prinzip der Mehrfachgegenkopplung lässt sich auch auf Bandpässe anwenden.

Die entsprechende Schaltung ist in Abb. 2.6.18 dargestellt. Ihre

Übertragungsfunktion  $A(P)$  lautet:

$$A(P) = \frac{-\frac{R_2 R_3}{R_1 + R_3} C \omega_r P}{1 + \frac{2 R_1 R_3}{R_1 + R_3} C \omega_r P + \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_3} C^2 \omega_r^2 P^2}. \quad (2.6.44b)$$

(2.6.51)

(2.6.52a)

$$\text{Resonanzfrequenz: } f_r = \frac{1}{2\pi C} \sqrt{\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3}} \quad (2.6.52b)$$

$$\text{Verstärkung bei } f_r: -A_r = \frac{R_2}{2R_1} \quad (2.6.52c)$$

$$\text{Güte: } Q = \pi R_2 C f_r \quad (2.6.52d)$$

$$\text{Bandbreite: } B = \frac{1}{\pi R_2 C}$$

Wie man durch Vergleich mit Gl. (2.6.43) erkennt, muss der Koeffizient von  $P^2$  gleich 1 sein. Daraus folgt die Resonanzfrequenz

$$f_r = \frac{1}{2\pi C} \sqrt{\frac{R_1 + R_3}{R_1 R_2 R_3}} \quad (2.6.53)$$

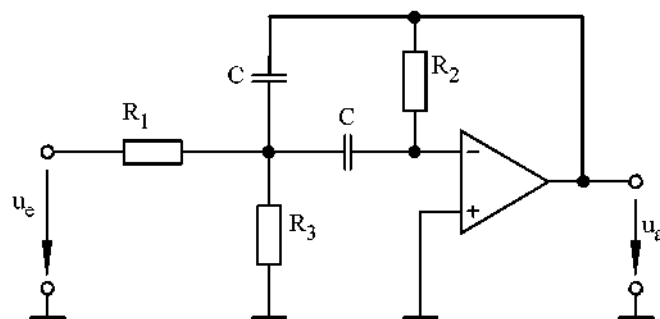


Abb. 2.6.18 Bandpassfilter mit Mehrfachgegenkopplung

Setzt man diese Beziehung in die Übertragungsfunktion ein und vergleicht die übrigen Koeffizienten mit Gl. (2.6.43) erhält man die weiteren Ergebnisse:

$$-A_r = \frac{R_2}{2R_1}, \quad (2.6.54)$$

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 R_3}} = \pi R_2 C f_r. \quad (2.6.55)$$

Man sieht, dass sich die Verstärkung, Güte und Resonanzfrequenz frei wählen lassen. Für die Bandbreite des Filters erhalten wir aus Gl. (2.6.55):

$$B = \frac{f_r}{Q} = \frac{1}{\pi R_2 C}. \quad (2.6.56)$$

Sie ist also von  $R_1$  und  $R_3$  unabhängig. Andererseits erkennt man in Gl. (2.6.54), dass  $A_r$  nicht von  $R_3$  abhängt. Daher hat man die Möglichkeit mit  $R_3$  die Resonanzfrequenz zu variieren ohne dabei die Bandbreite und die Verstärkung  $A_r$  zu beeinflussen.

Lässt man den Widerstand  $R_3$  weg, bleibt das Filter funktionsfähig aber die Güte wird von  $A_r$  abhängig. Aus Gl. (2.6.55) folgt nämlich für  $R_3 \rightarrow \infty$ :

$$(2.6.57)$$

$$-A_r = 2Q^2.$$

Damit die Schleifenverstärkung der Schaltung groß gegenüber 1 ist, muss die Differenzverstärkung des Operationsverstärkers groß gegenüber  $2Q^2$  sein. Mit dem Widerstand  $R_3$  lassen sich auch bei niedriger Verstärkung  $A_r$  hohe Güten erzielen. Wie man in Abb. 2.6.18 erkennt, kommt die niedrigere Verstärkung jedoch lediglich dadurch zustande, dass das Eingangssignal im Spannungsteiler  $R_1, R_3$  abgeschwächt wird. Daher muss der Operationsverstärker auch in diesem Fall eine Leerlaufverstärkung besitzen, die groß gegenüber  $2Q^2$  ist. Diese Forderung ist deshalb besonders hart, weil sie auch bei der Resonanzfrequenz noch erfüllt sein muss. Darauf ist bei der Auswahl des Operationsverstärkers insbesondere bei höheren Frequenzen zu achten.

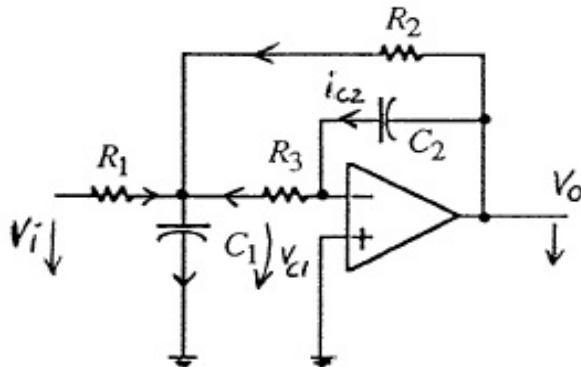
Für die Dimensionierung gibt man  $C$  vor und berechnet die Widerstände:

$$R_1 = \frac{-Q}{2\pi A_r f_r C} \quad R_2 = \frac{Q}{\pi f_r C} \quad R_3 = \frac{1}{4\pi Q f_r C \left(1 + \frac{A_r}{2Q^2}\right)} \quad (2-6-58)$$

$A_r$  ist immer negativ!

Es gibt natürlich auch eine S&K Bandpassfilterschaltungen (Einfach-Mitkopplung).

## Anhang 1: Berechnung der Übertragungsfunktion



*Schnell-Check:*

Übertragungswert für  
 $f = 0$  mit  $C =$  offen  
 und  
 $f = \infty$  mit  $C =$  kurz  
 bestimmen

*Rechenvorgang:*

1. Beginne an einem  
 Ende

2. Bezeichne Ströme und  
 Spannungen mit den  
 Bauelementen als Indizes

3. Zeichne  
 Bezugsrichtungen im  
 Schema ein

4. Setze fortwährend  
 bereits berechnete Terme  
 ein

5. Op-Amp  
 Goldene Regeln:  
 $V_+ - V_- = 0$   
 $I_+ = I_- = 0$

6. Bilde am Ende  
 $T = v_o/v_i$

$$i_{C2} = v_o s C_2 \quad \dots \quad v_{C1} = -i_{C2} R_3 = -R_3 v_o s C_2$$

$$i_{C1} = v_{C1} s C_1 = -R_3 s C_2 v_o s C_1$$

$$i_{R1} = \frac{v_i - v_{C1}}{R_1} = \frac{v_i + R_3 v_o s C_2}{R_1}$$

$$i_{R2} = i_{C1} - i_{R1} - i_{R3} = -R_3 s^2 C_1 C_2 v_o - v_o s C_2 - \frac{v_i}{R_1} - \frac{R_3 v_o s C_2}{R_1}$$

$$i_{R2} = \frac{v_o - v_{C1}}{R_2} = \frac{v_o + R_3 v_o s C_2}{R_2}$$

$$\frac{v_o}{R_2} + \frac{v_o s R_3 C_2}{R_2} + v_o R_3 s^2 C_1 C_2 + v_o s C_2 + \frac{v_o s C_2 R_3}{R_1} = -\frac{v_i}{R_1}$$

$$\frac{v_o}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + s(R_3 C_2 + R_2 C_2 + \frac{C_2 R_2 R_3}{R_1}) + s^2 C_1 C_2 R_2 R_3}$$

7. Identifizieren der Filtertype am Zähler: Tiefpass

8. Ermitteln der Dimensionierungsgleichungen durch Vergleich mit der Normalform:

$$T(s) = \frac{-A_0}{1 + 2 \frac{D}{\omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}} = \frac{-A_0}{1 + \frac{1}{Q \omega_0} s + \frac{s^2}{\omega_0^2}}$$

9.  $D$  und  $\omega_0$  Werte kommen aus der Filtersynthese (entnormierte Tabellenwerte)

## Anhang 2: Koeffizienten für Filter Stufen 2. Ordnung mit Verhalten

Butterworth	$a_1 = 1.4142$	$b_1 = 1$
Tschebyscheff 0.5 dB	$a_1 = 1.3614$	$b_1 = 1.3827$
Tschebyscheff 1 dB	$a_1 = 1.3022$	$b_1 = 1.5515$
Tschebyscheff 2 dB	$a_1 = 1.1813$	$b_1 = 1.7775$
Tschebyscheff 3 dB	$a_1 = 1.0650$	$b_1 = 1.9305$
Bessel	$a_1 = 1.3617$	$b_1 = 0.6180$

(Tabelle aus Tietze Schenk)

Vorsicht: Tabellen für Filter und die Filtertheorie müssen zueinander passend sein!, da die Dämpfung nicht einheitlich definiert wird und die Normierung verschieden gelöst werden kann. Hier ist  $\omega_g$  die Grenzkreisfrequenz des gesamten Filters.

Es gilt zwischen bekannten Grössen Dämpfungsmass  $D$ , Polgüte  $Q$  und Eigenfrequenz  $\omega_0$  eines VZ-Gliedes 2. Ordnung folgender Zusammenhang:

$$b_1 = \frac{\omega_g^2}{\omega_0^2}$$

$$a_1 = \frac{2D\omega_g}{\omega_0}$$

$$2D = \frac{1}{Q}$$

$$A_0 = \frac{a_0}{\omega_0^2}$$

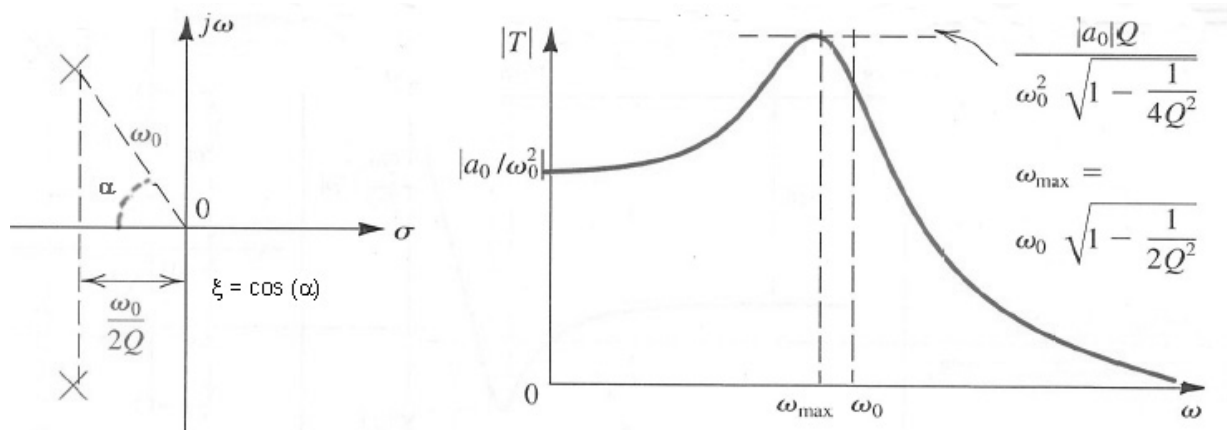


Abb: VZ-2 Glied Pollage und Übertragungsfunktion