

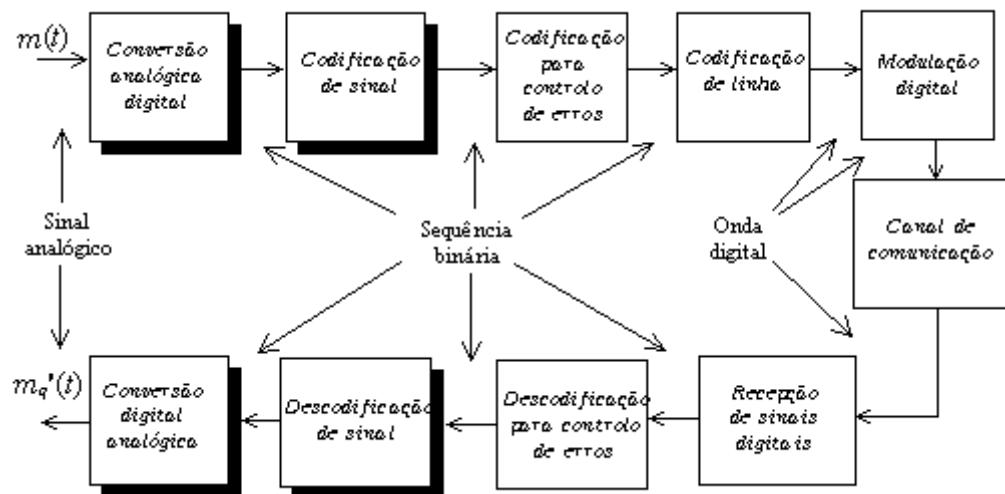
INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

ÁREA DEPARTAMENTAL DE ENGENHARIA DE ELETRÓNICA E
TELECOMUNICAÇÕES E DE COMPUTADORES

GRUPO DISCIPLINAR DE TELECOMUNICAÇÕES

MODULAÇÃO DE PULSOS

(Introdução à codificação de sinais)



CARLOS EDUARDO DE MENESES RIBEIRO

Outubro de 2012

Em muitos sistemas de transmissão de dados, os sinais analógicos são primeiro convertidos para a forma digital pelo transmissor, transmitidos na forma digital e finalmente reconstruídos no receptor em sinais analógicos. O sinal resultante segue, normalmente, o sinal de entrada mas não é exatamente o mesmo, uma vez que o quantificador, no transmissor, produz os mesmos dígitos (código) para todos os valores que caem num mesmo intervalo, de um número finito de intervalos.

O receptor deve fornecer, a cada combinação de dígitos, o mesmo valor correspondente ao valor do sinal reconstruído, para todas os valores do sinal de entrada que caiam dentro de um mesmo intervalo de quantificação.

A diferença entre o sinal de entrada e de saída, assumindo que não existe erro na transmissão dos dígitos, é o ruído de quantificação. Uma vez que o débito de qualquer sistema de transmissão digital é finito, deve-se utilizar um quantificador que mapeia a entrada num número finito de intervalos.

Joel Max

Quantizing for Minimum Distortion, 1960

ÍNDICE

| | |
|--|------------|
| 1 INTRODUÇÃO..... | 1 |
| 1.1 MÉTODOS E ATRIBUTOS DOS CODIFICADORES DE SINAIS | 2 |
| 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO | 3 |
| 2 CONVERSÃO ANALÓGICO-DIGITAL..... | 5 |
| 2.1 AMOSTRAGEM..... | 6 |
| 2.2 REPRESENTAÇÃO DISCRETA | 10 |
| 2.3 QUANTIFICAÇÃO | 10 |
| 2.4 CODIFICAÇÃO..... | 13 |
| 2.5 RELAÇÃO SINAL-RUÍDO EM QUANTIFICAÇÃO UNIFORME..... | 14 |
| 2.6 DESEMPENHO E COMPROMISSO ENTRE OS ATRIBUTOS..... | 16 |
| 3 QUANTIFICAÇÃO NÃO UNIFORME | 19 |
| 3.1 RELAÇÃO SINAL-RUÍDO EM QUANTIFICAÇÃO NÃO UNIFORME | 22 |
| 3.2 PCM COMPANDING | 24 |
| 3.3 QUANTIFICAÇÃO ÓTIMA | 28 |
| 3.4 COMPARAÇÃO DOS CODIFICADORES PCM | 31 |
| 4 CODIFICAÇÃO PREDITIVA | 33 |
| 4.1 MODULAÇÃO POR CÓDIGO DE PULSO DIFERENCIAL..... | 34 |
| 4.2 MODULAÇÃO DELTA..... | 49 |
| 5 SOBRE-AMOSTRAGEM..... | 55 |
| 5.1 GANHO DE FILTRAGEM | 55 |
| 5.2 SOBRE-AMOSTRAGEM EM PCM..... | 56 |
| 5.3 SOBRE-AMOSTRAGEM EM DPCM..... | 58 |
| 5.4 SOBRE-AMOSTRAGEM EM DM | 58 |
| 6 MODULAÇÃO DELTA-SIGMA | 61 |
| 6.1 FORMATAÇÃO DO RUÍDO E <i>SNR</i> | 62 |
| 6.2 MODULAÇÃO $\Delta\Sigma$ DE ORDEM N | 65 |
| 6.3 QUANTIFICAÇÃO MULTI-BIT | 66 |
| 6.4 CONVERSORES AD E DA POR MODULAÇÃO $\Delta\Sigma$ | 67 |
| 7 CONCLUSÕES | 71 |
| PRINCIPAIS EQUAÇÕES..... | 73 |
| APÊNDICES | 77 |
| APÊNDICE 1 - ALGORITMO DE QUANTIFICAÇÃO ÓTIMA | 77 |
| APÊNDICE 2 - FUNÇÃO DE AUTOCORRELAÇÃO DE UMA SINUSOIDA | 78 |
| APÊNDICE 3 - SINUSOIDA COM PREDITOR UNITÁRIO | 79 |
| APÊNDICE 4 - <i>SNR</i> PARA A MODULAÇÃO $\Delta\Sigma$ DE ORDEM N | 80 |
| APÊNDICE 5 - <i>SNR</i> PARA A MODULAÇÃO $\Delta\Sigma$ MULTI-BIT | 81 |
| PERGUNTAS TEÓRICAS | 83 |
| EXERCÍCIOS RESOLVIDOS | 85 |
| EXERCÍCIOS PROPOSTOS | 101 |

| | |
|---|------------|
| EXERCÍCIOS PROPOSTOS EM MATLAB | 109 |
| PCM - MODULAÇÃO POR CÓDIGO DE PULSO | 109 |
| DPCM - MODULAÇÃO POR CÓDIGO DE PULSO DIFERENCIAL..... | 115 |
| DM - MODULAÇÃO DELTA E SOBRE-AMOSTRAGEM..... | 119 |
| GLOSSÁRIO..... | 121 |
| BIBLIOGRAFIA..... | 123 |

1 Introdução.

Vivemos cada vez mais num mundo digital, estando a transmissão de modo analógico sinais de fala áudio e vídeo a ser gradualmente substituída por tecnologias digitais, com algumas vantagens, tais como:

- Os sistemas de transmissão digital são menos sensíveis ao ruído do canal de transmissão que os sistemas analógicos. Para canais de maior dimensão os sinais digitais podem ser regenerados em pontos intermédios do canal, virtualmente sem erros;
- Os sistemas de transmissão digital são independentes do tipo de sinal que representam. Os sistemas que transmitem sinais de fala ou vídeo podem ser os mesmos que tramitem por exemplo áudio, texto ou dados de um computador;
- O desenvolvimento das tecnologias digitais tem vindo a criar novos tipos de serviços, utilizando nomeadamente plataformas como a *Internet* e o telefone móvel. Tendo a primeira começado por transmitir apenas texto e a segunda apenas sinais de fala, estas estão a fundir-se. As tecnologias digitais permitem cada vez mais uma maior interatividade com o utilizador e a integração de um modo natural de diversas fontes de informação, ao juntar ao texto e aos sinais de fala outros sinais, tais como os sinais de áudio, imagens e vídeo;
- Utilizando métodos de codificação de fonte eficazes e modulações M -áreas que são espectralmente mais eficientes que as binárias, a utilização de transmissão digital pode ocupar menor largura de banda que a transmissão analógica;
- O acesso, armazenamento e cópia no formato digital é mais fácil e acessível que os mesmos processos em formato analógico.

Quando o sinal a transmitir é analógico, variando continuamente com o tempo, é necessário primeiro convertê-lo para formato digital, ou seja, representa-lo (codificá-lo) digitalmente com um número finito de bits. Ao transmitir estes sinais, o débito binário de codificação da fonte, medido em número de bits de codificação por segundo, é um fator importante na definição da largura de banda requerida para o canal de transmissão. A codificação digital é também utilizada no armazenamento para utilização posterior. Neste contexto o débito binário determina o espaço requerido na unidade de armazenamento. Para determinada quantidade de memória disponível, quanto menor for o débito binário maior duração do sinal pode ser armazenada.

1.1 Métodos e atributos dos codificadores de sinais

A conversão de um sinal de analógico para digital provoca sempre distorção por quantificação, denominada de ruído de quantificação. Uma das medidas de qualidade mais utilizadas é a relação entre a potência do sinal original e a potência do ruído de quantificação (*SNR - signal to noise ratio*). O problema básico da quantificação/codificação é o de obter um mínimo de distorção para determinado débito binário, ou manter a distorção aceitável ao menor débito binário possível.

Existem diversos métodos de codificação de sinais: codificação de forma de onda; codificação paramétrica; e codificação híbrida. Serão apenas discutidos os métodos de codificação de forma de onda utilizando modulação por código de pulso, de débito binário mais elevado. É também dado especial realce à codificação de sinais de fala e áudio, dando origem a aplicações que se encontram bastante difundidas. Embora com estas limitações os conceitos apresentados são no entanto essenciais para uma compreensão posterior dos outros métodos de codificação e para a codificação de outro tipo de sinais, tais como imagens e vídeo.

Para além da qualidade e do débito binário, outros atributos importantes dos codificadores são: a complexidade dos equipamentos transmissores e receptores que influenciam o seu preço; a robustez a erros no canal de transmissão que influenciam a qualidade; e o atraso da codificação que cria latências e incomodidade ao utilizador.

Para aferir e comparar os diversos codificadores em termos de qualidade irá ser utilizada a relação sinal-ruído. Não existe, como se verá, o *melhor* codificador de sinais, uma vez que é impossível produzir um codificador de elevada qualidade, pequeno débito binário, baixa complexidade dos equipamentos transmissores e receptores, grande robustez a erros de canal e pequeno atraso de codificação. Os compromissos entre atributos serão realçados na perspetiva de que terá que ser encontrado o método que melhor se adeque a cada aplicação.

1.2 Organização do texto

Para compreensão deste texto os leitores devem ter conhecimentos a nível introdutório sobre sinais e sistemas, análise de Fourier e sobre estatística e probabilidades. O texto é organizado do modo seguinte:

A secção 2 apresenta a conversão analógico-digital e codificação amostra a amostra (PCM – *Pulse Code Modulation*) com quantificação uniforme, estabelecendo-se um sistema mínimo de codificação de sinais.

A secção 3 descreve a quantificação PCM não uniforme que tira partido da distribuição de amplitudes do sinal, iniciando o estudo de métodos mais eficientes de codificação de forma de onda.

A secção 4 apresenta os conceitos básicos da codificação preditiva, que tira partido da correlação entre amostras consecutivas. De modo a que o codificador se ajuste às características do sinal de entrada, descrevem-se ainda métodos de predição e quantificação adaptada.

A secção 5 apresenta as vantagens da sobre-amostragem e a secção 6 a codificação a 1 bit ($\Delta\Sigma$), paradigmas da codificação de sinais com *muito alta* qualidade, encontrando aplicações essencialmente na conversão analógico-digital de sinais de áudio.

Na secção 7 apresentam-se as conclusões, complementadas com a compilação das principais equações deduzidas ao longo do texto.

São seguidamente apresentados apêndices cuja leitura e compreensão não são essenciais mas que correspondem ao aprofundamento de alguns temas que podem ser do interesse dos leitores.

Para que se possa consolidar os conhecimentos aqui expostos são seguidamente apresentados exercícios com âmbitos distintos: perguntas teóricas; exercícios resolvidos; exercícios propostos com soluções; e exercícios para resolução recorrendo ao ambiente de programação MATLAB. Estes últimos correspondem ao desenvolvimento de simuladores em que é possível verificar experimentalmente os valores obtidos pelas equações deduzidas teoricamente. Está indicado em cada exercício a secção até à qual são necessários conhecimentos para o resolver.

2 Conversão Analógico-Digital

De modo a transmitir um sinal digitalmente é necessário convertê-lo numa sequência binária. Na sua forma mais simples este processo corresponde à conversão analógico-digital, ou seja, converter um sinal analógico¹, de variação contínua no domínio do tempo (representando por exemplo variações de pressão produzidas por um som quando captado através de um microfone) num conjunto finito de bits. A dificuldade encontrada prende-se com o carácter contínuo e portanto com infinitas possibilidades do sinal, quer ao longo do tempo quer em amplitude. Para resolver estes problemas a conversão analógico-digital envolve três etapas que serão objeto de análise no resto desta secção:

- A *amostragem*, que tem como objetivo tornar o sinal discreto no domínio do tempo e não envolve perda de informação desde que alguns pressupostos não sejam quebrados (teorema da amostragem de Nyquist²-Shannon³);
- A *quantificação*, que torna as amostras do sinal discretas na amplitude, transformando uma variável contínua num número finito de valores;
- A *codificação*, que atribui a cada amplitude discreta de cada pulso um código, composto por um conjunto de bits. A esta codificação amostra-a-amostra dá-se o nome de modulação por código de pulso (*PCM – Pulse Code Modulation*).

¹ Sinal elétrico que tem uma variação análoga à variação da grandeza física que se quer representar.

² Harry Nyquist, 1889-1976. Sueco-American, trabalhou na AT&T e nos Laboratórios Bell.

³ Claude Shannon, 1916-2001. Americano, trabalhou nos Laboratórios Bell e foi professor no MIT.

2.1 Amostragem

A amostragem tem como objetivo tornar o sinal discreto no domínio do tempo. Pode ser descrita como a “observação” do valor do sinal analógico de entrada, $m(t)$ (m - *message*), a intervalos regulares. O sinal amostrado, $m_\delta(t)$, é obtido (figura 2.1) pelo produto entre o sinal de entrada e um trem de impulsos de *dirac* com período T_s (*sampling period*). Dado que a amostragem corresponde a uma multiplicação no domínio do tempo, o espetro do sinal amostrado corresponde à convolução do espetro do sinal $m(t)$, que se supõe de banda limitada W , pela Transformada de Fourier do trem de impulsos de *dirac*, que é também um trem de impulsos de *dirac* com período e área $f_s=1/T_s$.

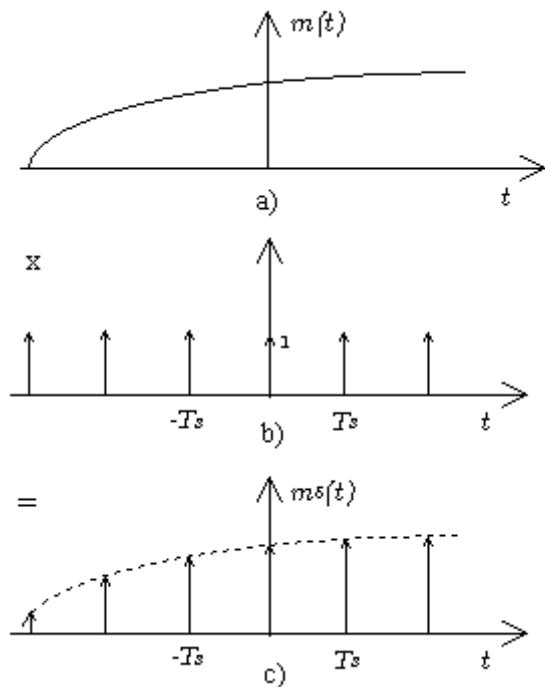


Figura 2.1

Interpretação da amostragem no domínio do tempo

Em a) representa-se um exemplo de um sinal $m(t)$ a amostrar. Em b) representa-se um trem de impulsos de *dirac* de área unitária e período T_s , que multiplicado pelo sinal de entrada produzirá o sinal amostrado representado em c).

A convolução é linear, o que implica que a convolução com um trem de impulsos de *dirac* corresponde à soma das convoluções com cada um dos

impulsos de *dirac*. Convoluir um sinal com um impulso de *dirac* corresponde a colocar esse sinal na posição do impulso de *dirac* e afetá-lo em amplitude pela respectiva área. Este processo é ilustrado na figura 2.2.

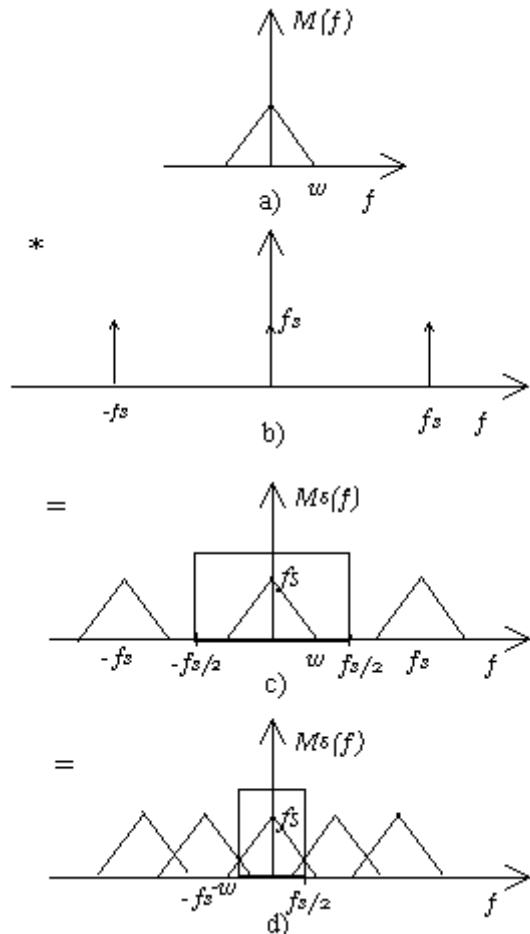


Figura 2.2

Interpretação da amostragem no domínio da frequência.

- a) Espetro de um sinal $m(t)$, com banda limitada W .
- b) Espetro do trem de impulsos de *dirac* (figura 2.1 b) que é também um trem de impulsos de *dirac*. O espetro do sinal amostrado corresponde à convolução dos espetros em a) e b) e é apresentado para dois casos, em c) e d). A reconstrução do sinal é possível sem distorção para o exemplo em c) por filtragem passa-baixo com frequência de corte $f_s/2$, pois $W < f_s/2$. Em d) não é possível recuperar o sinal sem erro uma vez que as repetições espetais se sobrepõem (*aliasing*), pois $W > f_s/2$.

Para reconstruir o sinal amostrado é necessário filtrá-lo passa-baixo (filtro reconstrutor) com frequência de corte $f_s/2$, com ganho T_s para manter a amplitude original do sinal. Para evitar a sobreposição espetal e a correspondente distorção a que se dá o nome de *aliasing*, a frequência de

amostragem tem que ser igual ou superior a duas vezes o valor W da frequência máxima do sinal (teorema da amostragem ou teorema de Nyquist-Shannon):

$$f_s \geq 2W. \quad (2.1)$$

Teorema da Amostragem de Nyquist-Shannon

É possível amostrar e reconstruir, sem erro, um sinal com banda limitada W , desde que a frequência de amostragem f_s seja superior ao ritmo de Nyquist $2W$. A reconstrução sem distorção do sinal amostrado é obtida por filtragem passa-baixo à frequência de Nyquist $f_s/2$. Se f_s for inferior a $2W$ o sinal reconstruído sofrerá uma distorção por sobreposição dos espelhos, a que se dá o nome de *aliasing*.

Quando não há certeza de se evitar o *aliasing*, antes da amostragem o sinal deve ser previamente limitado à frequência $f_s/2$, com um filtro passa-baixo (filtro anti-aliasing). Na figura 2.3 é apresentado o diagrama de blocos de toda a cadeia amostragem-reconstrução.

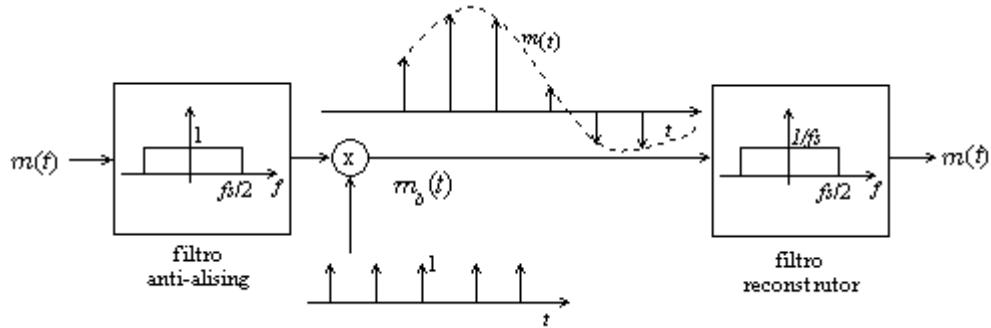


Figura 2.3
Cadeia amostragem-reconstrução.
Filtro anti-aliasing - amostragem - filtro reconstrutor.

À frequência mínima de amostragem, $2W$, denomina-se ritmo de Nyquist (*Nyquist rate*). À metade da frequência de amostragem, $f_s/2$, denomina-se frequência de Nyquist.

Uma vez que o filtro reconstrutor é linear, a reconstrução pode ser interpretada como a sobreposição de funções $sinc(x)$ (figura 2.4) devidas à resposta em frequência do filtro, pesadas pelo valor da amostra correspondente e deslocadas para a respetiva posição no tempo.

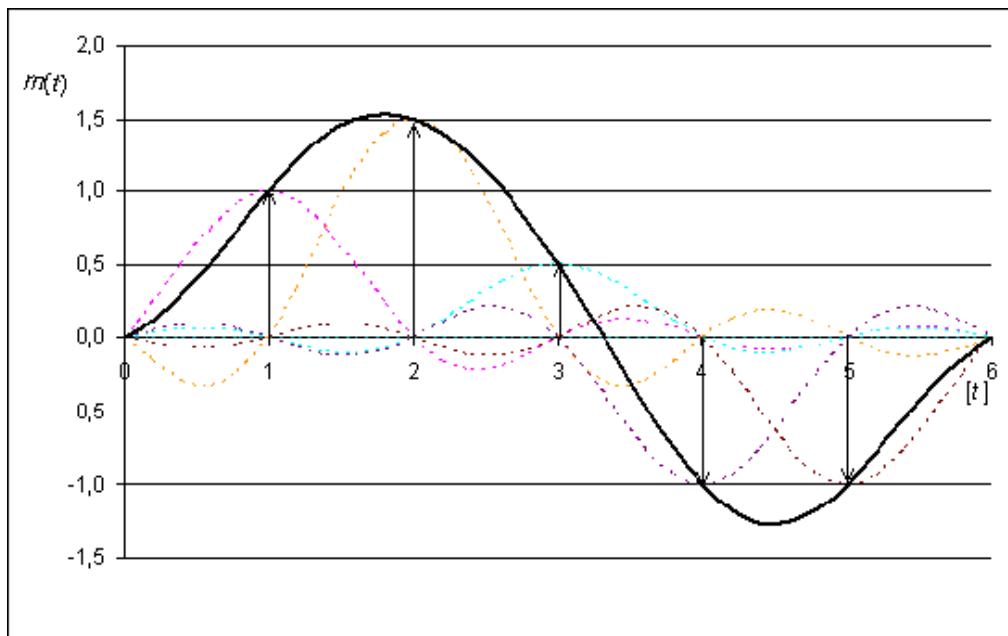


Figura 2.4

Interpretação da reconstrução do sinal no domínio do tempo.

O sinal é reconstruído por sobreposição de funções $sinc$ (resposta impulsiva do filtro de reconstrução), pesadas pelos valores da amostra correspondente e deslocadas para a sua posição. As funções tomam o valor zero na posição de todas as outras amostras.

Para sinais de fala com qualidade telefónica está normalizada (POTS - *plain old telephone service*, GSM - *Group special mobile*) uma frequência de amostragem de 8 kHz e uma filtragem passa-banda da entre os 300 Hz e os 3300 Hz, denominada *banda telefónica*. A frequência de amostragem superior à mínima exigida pelo teorema da Nyquist-Shannon é justificada pela necessidade de uma banda de guarda, devida à característica não ideal dos filtros realizáveis.

2.2 Representação discreta

Como os sinais resultantes da amostragem tem valores não nulos apenas em múltiplos do período de amostragem T_s , estes podem ser representados com vantagens na sua versão discreta (utilizada em processamento digital de sinais) $m[n]$, em que a variável independente n toma apenas valores discretos inteiros. A amostra $m[n]$ é interpretada como a amostra n correspondente ao tempo nT_s . Note-se que poderá haver sinais discretos cuja origem não é um sinal amostrado, interpretando-se neste apenas como a amostra n .

2.3 Quantificação

Quantificação de um sinal é o processo que converte um sinal amostrado (discreto no tempo), num sinal com valores também discretos em amplitude. Considerando a gama dos sinais a quantificar entre o intervalo $-V$ e V , (figura 2.5) dividida em L intervalos de quantificação iguais e de dimensão Δ_q , a quantificação dá-se pela aproximação do valor de uma amostra que pertença a determinado intervalo pelo seu representante, denominado valor de quantificação v_j do intervalo.

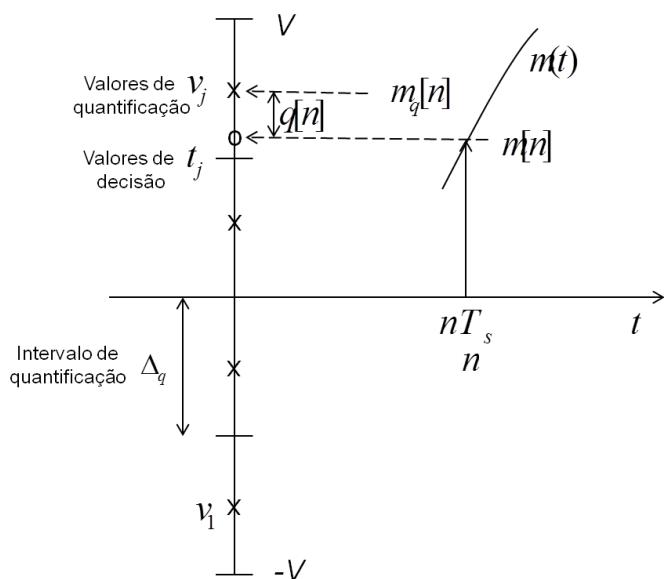


Figura 2.5
Quantificação de sinais.

Cada amostra do sinal amostrado $m[n]$ é quantificada em um de L intervalos, por aproximação a um seu representante, denominado valor de quantificação.

De modo a ser escolhido o valor mais próximo do valor do sinal de entrada (menor ruído de quantificação), os valores de decisão t_j que definem os intervalos de quantificação devem estar equidistantes dos valores de quantificação v_j :

$$t_j = \frac{v_j + v_{j-1}}{2}. \quad (2.4)$$

Devido à aproximação que se dá na quantificação, esta, ao invés da amostragem quando dentro dos limites impostos pelo teorema da amostragem, introduz sempre distorção. A quantificação é um processo irreversível, pois é impossível determinar, dentro do intervalo de quantificação, qual o valor de entrada $m[n]$ que produziu o valor quantificado $m_q[n]$. A esta distorção dá-se o nome de ruído (ou erro de) de quantificação, definido como a diferença entre o valor da amostra de entrada e o valor de quantificação:

$$q[n] = m[n] - m_q[n]. \quad (2.5)$$

Quando os intervalos de quantificação são todos iguais, os quantificadores denominam-se de *uniformes*. A dimensão de cada intervalo de quantificação vem, neste caso:

$$\Delta_q = \frac{2V}{L}, \quad (2.6)$$

e o valor máximo do ruído de quantificação corresponde a metade do valor do intervalo de quantificação Δ_q . Existem dois tipos de quantificadores uniformes: *midrise* e *midtread*.

Os quantificadores *midrise*, apresentado um exemplo para 4 intervalos na figura 2.6, incluem o valor zero como valor de decisão. Nas zonas de ausência de sinal, devido a pequenas variações causadas por ruído, este quantificador flutuará entre os dois valores de quantificação em torno de 0 volts.

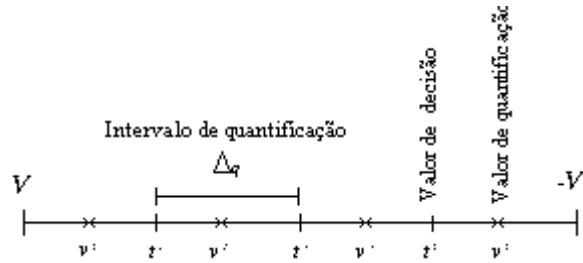


Figura 2.6

Quantificador uniforme midrise (4 intervalos).

O zero corresponde a um valor de decisão, sendo o quantificador simétrico.

Note-se que não existe um valor de quantificação coincidente com os extremos de quantificação, $-V$ e V , requisito vantajoso nalguns tipos de codificadores, nomeadamente os codificadores DPCM (*Differential Pulse Code Modulation*) apresentados na secção 4. Para que isto aconteça os intervalos de quantificação deverão ser ligeiramente maiores:

$$\Delta_q = \frac{2V}{L-1}. \quad (2.7)$$

Os quantificadores *midtread*, apresentado um exemplo para 4 intervalos na figura 2.7, ao incluírem o 0 como valor de quantificação não sofrem da flutuação nas zonas de silêncio característica dos quantificadores *midrise*. Como é regra usar quantificadores com um número par de valores de quantificação, a sua função entrada-saída torna-se não simétrica pela inclusão num dos extremos de mais um valor de quantificação.

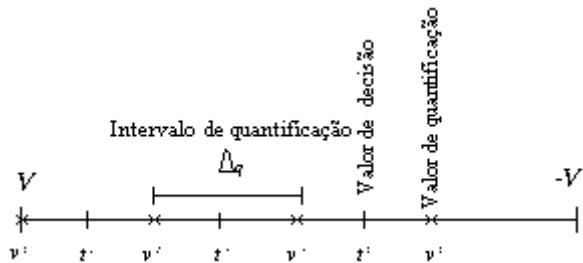


Figura 2.7

Quantificador uniforme midtread (4 intervalos).

O zero corresponde a um valor de quantificação, tornando o quantificador não simétrico, mas não sofrendo de flutuações nas zonas de silêncio.

2.4 Codificação

A codificação é a representação binária da sequência de valores de um sinal, após amostragem e quantificação. Exprime-se pois cada um dos L valores de quantificação possíveis através de um código. A esta codificação amostra-a-amostra denomina-se modulação por código de pulso (PCM - *Pulse Code Modulation*).

Na figura 2.8 é apresentado um código sequencial do valor de quantificação mais pequeno para o mais alto. É ainda apresentada a sequência binária da sucessão de amostras, sendo necessários 3 bits por amostra ($L=8$ níveis diferentes).

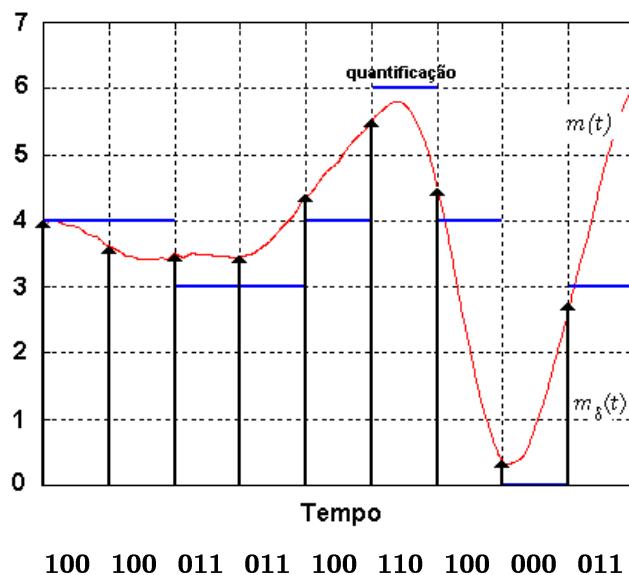


Figura 2.8
Amostragem e quantificação de sinais.

O sinal analógico $m(t)$ é amostrado dando origem ao sinal $m_\delta(t)$. Cada amostra é quantificada, reconhecendo-se na figura $L=8$ valores de quantificação. Cada valor de quantificação é codificado com um código binário sequencial de 3 bits.

Utilizando um número L de valores de quantificação coincidente com uma potência de 2, de modo a otimizar o número R de bits de codificação por amostra, pode-se reescrever a equação 2.6 sendo o intervalo de quantificação

dado por:

$$\Delta_q = \frac{2V}{L} = \frac{2V}{2^R}. \quad (2.8)$$

O débito binário ou número de bits de codificação de cada segundo do sinal, R_b , para uma frequência de amostragem f_s vem:

$$R_b = R \times f_s. \quad (2.9)$$

2.5 Relação sinal-ruído em quantificação uniforme

Uma das medidas mais usadas para aferir a qualidade de codificadores é a relação entre a potência do sinal a quantificar e a potência do ruído (*SNR - signal to noise ratio*) introduzido pela quantificação.

Como ilustrado na figura 2.9, os valores do ruído devido à quantificação podem ser considerados igualmente distribuídos no intervalo de quantificação (distribuição uniforme), aproximação válida quando se utiliza um número suficiente de valores de quantificação, digamos $L \geq 32$ (para melhor visualização o exemplo da figura 2.9 apresenta apenas 4 valores de quantificação).

A função densidade de probabilidade do ruído é, nestas condições, praticamente uniforme à volta de cada valor de quantificação, sendo o valor máximo do ruído de $\Delta_q/2$, uma vez que o valor de quantificação está a meio do respetivo intervalo. O sinal de ruído de quantificação tem média nula e a sua potência (normalizada⁴) pode ser estimada⁵ como a sua variância σ_q^2 :

$$\sigma_q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} q^2 f(q) dq = \frac{1}{\Delta_q} \int_{-\Delta_q/2}^{\Delta_q/2} q^2 dq = \frac{\Delta_q^2}{12} = \frac{V^2}{3 \times 2^{2R}}. \quad (2.10)$$

⁴ Assumindo um sinal de tensão ou corrente sobre uma carga de 1Ω .

⁵ Assumindo quantificação *midrise*, sendo os cálculos aproximados para quantificação *midtread*.

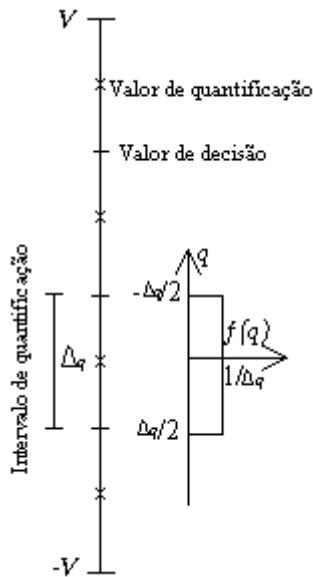


Figura 2.9

Função densidade de probabilidade do ruído de quantificação.

Para um número razoável de intervalos de quantificação a função densidade de probabilidade do ruído de quantificação aproxima-se de uma distribuição uniforme.

A potência do ruído de quantificação aumenta com o aumento do intervalo de quantificação, ou seja com o aumento da gama de quantificação V , ou da diminuição de L ou R . Estes valores são aproximados para quantificação *midtread*, podendo mesmo ser inferior se o sinal contiver zonas de silêncio de grande duração. Nestas zonas os quantificadores *midrise* têm ruído igual a $\Delta q/2$, o que para poucos bits de codificação pode ser audível.

A relação entre a potência (normalizada) P do sinal e a potência (normalizada) σ_q^2 do ruído é estimada através de:

$$SNR = \frac{P}{\sigma_q^2} = 3 \times 2^{2R} \times \frac{P}{V^2}, \quad (2.11)$$

ou em decibéis⁶:

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V^2} \right). \quad (2.12)$$

⁶ **decibel (dB)**, definido como $10 \times \log_{10}$ a relação logarítmica entre duas potências ($10 \log_{10} (P_2/P_1)$).

Cada 3 dB corresponde à duplicação da relação de potências ($10 \log_{10} (2) = 3$ dB).

A diminuição da amplitude para metade equivale a diminuir para metade o intervalo de quantificação, a uma diminuição da potência do ruído para um quarto, a quadruplicar a relação sinal-ruído, ou ao aumento de 6,02 dB da *SNR*. Contudo, a amplitude do sinal, m_{max} , não deve ser superior ao valor máximo de quantificação, V . Caso contrário produz-se ruído por *saturação de amplitude*, deixando as equações 2.10 a 2.12 de ser válidas. Deste modo, a tensão máxima de quantificação terá que respeitar a inequação:

$$V \geq m_{max}. \quad (2.13)$$

Assumindo o caso ideal, ou seja, que a tensão máxima de quantificação, V , corresponde à amplitude m_{max} do sinal de entrada, evitando assim a saturação de amplitude mas minimizando o ruído de quantificação, a equação 2.12 pode ser reescrita como,

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10\log_{10}\left(\frac{3P}{m_{max}^2}\right) = 6,02R + 10\log_{10}(3P_n). \quad (2.14)$$

A *SNR* é função da *potência normalizada* pelo quadrado da amplitude, dada por,

$$P_n = \frac{P}{m_{max}^2}. \quad (2.15)$$

2.6 Desempenho e compromisso entre os atributos

Através da equação 2.12, pode-se verificar que a qualidade depende de dois fatores: da relação entre a potência do sinal de entrada e o quadrado do valor máximo de quantificação; e do número de bits de codificação por amostra. Note-se ainda que a qualidade não depende da frequência de amostragem, que deve por isso ser o ritmo de Nyquist uma vez que minimiza o débito binário.

Na tabela 2.1 apresentam-se os valores da *SNR* para codificação a 8 bits por amostra e diversas potências normalizadas do sinal de entrada. Se para -3

dB de potência normalizada (sinal sinusoidal ($10\log_{10}(1/2)$)) o valor da *SNR* de 50 dB é bastante bom, o valor de apenas 7,9 dB para uma potência normalizada de -45 dB é inaceitável. Muitos sinais, por exemplo sinais de fala, exibem esta gama de variações. A grande dependência da qualidade em relação à potência do sinal de entrada é de facto uma das principais desvantagens deste método.

| P_n dB | Entrada | <i>SNR</i> dB |
|----------|-------------------------------------|---------------|
| -45 | | 7,9 |
| -35 | | 17,9 |
| -25 | | 27,9 |
| -15 | | 37,9 |
| -4,77 | Triangular ou distribuição uniforme | 48,2 |
| -3 | Sinusoidal | 49,9 |
| 0 | Quadrada | 52,9 |

Tabela 2.1
Valores da *SNR* de quantificação, função da potência normalizada do sinal.
 Comparação para 8 bits de codificação por amostra e para diversos valores de potência normalizada do sinal de entrada.

Por cada bit de codificação por amostra a *SNR* varia de 6,02 dB. Na figura 2.10 é apresentado o gráfico da *SNR* em função da potência normalizada do sinal de entrada, para diversos valores de número de bits por amostra.

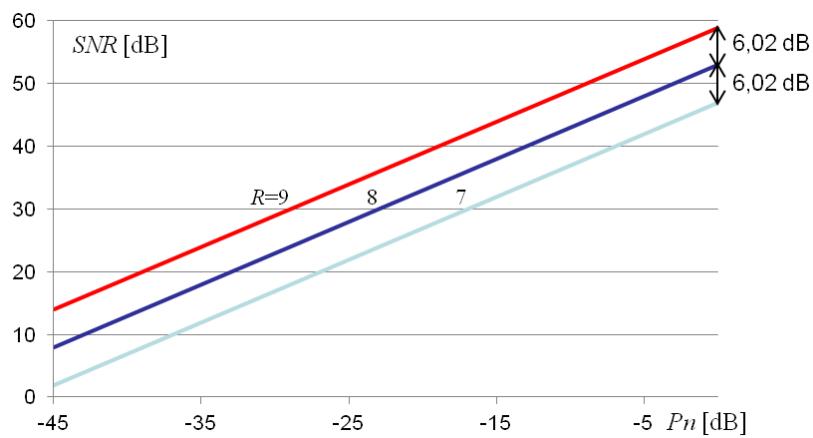


Figura 2.10
Relação sinal-ruído em PCM uniforme.
 Comparação para 7, 8, e 9 bits de codificação por amostra e para diversos valores de potência normalizada (em decibéis) do sinal de entrada.

No exemplo da tabela 2.1, para garantir um valor mínimo da *SNR* de aproximadamente 32 dB para um sinal de entrada com -45 dB de potência normalizada, seria necessário aumentar 24 dB na *SNR*, ou seja utilizar mais 4 bits de codificação por amostra, resultando num aumento eventualmente demasiado elevado do débito binário (de 64 kbit/s para 96 kbit/s assumindo sinais de fala de banda telefónica), evidenciando um compromisso entre o débito binário e a qualidade.

Para além de aumentar o débito binário, a melhoria da qualidade através do aumento do número de bits por amostra tem dois limites:

- A complexidade dos conversores, que duplicam o número de intervalos de quantificação por cada bit de codificação. Por exemplo para 16 bits de codificação por amostra originam-se $2^{16}=65536$ intervalos de quantificação;
- O intervalo muito pequeno a descreminalar. Por exemplo para 16 bits de codificação por amostra e uma tensão máxima de quantificação de 1 V, o intervalo de quantificação vale $\Delta q = 2^{-15} = 30 \mu\text{V}$, que se pode confundir com o ruído térmico nos sistemas eletrónicos. Para valores mais pequenos que estes, os sistemas tornam-se demasiado caros ou mesmo impossíveis de realizar, sendo necessário utilizar outro tipo de paradigma, como por exemplo a modulação delta-sigma ($\Delta\Sigma$) apresentada na secção 6.

Esta secção descreveu o primeiro passo na comunicação digital, com a conversão de sinais analógicos para uma sequência de bits utilizando modulação por código de pulso (PCM), com quantificação uniforme. Este sistema afigura-se o mais simples capaz de representar um sinal digitalmente. Nas próximas secções serão apresentados métodos que levarão em conta a qualidade, tirando partido das características do sinal, tendo sempre em consideração o compromisso com os outros atributos dos codificadores de sinais, particularmente o débito binário produzido.

3 Quantificação não uniforme

Na secção anterior discutiu-se a utilização da modulação por código de pulso (PCM) com quantificação uniforme e a estimativa da respetiva relação sinal-ruído de quantificação, concluindo-se da necessidade de manter uma elevada SNR nomeadamente para potências baixas do sinal de entrada, mas não à custa do aumento do débito binário e à diminuição “excessiva” da dimensão do intervalo de quantificação. Outra característica importante seria a SNR ser independente da tensão máxima de quantificação e das características do sinal de entrada, nomeadamente da sua potência. Estas características podem ser observadas com a utilização de *quantificação não uniforme*, ou seja, com um quantificador em que os intervalos de quantificação não sejam todos iguais.

O histograma de um sinal de fala não é uniforme, tendendo a ter mais ocorrências para valores menores. Esta constatação levou à utilização de intervalos de quantificação menores nas zonas de maior ocorrência, como mostrado na figura 3.1, à custa do aumento do intervalo de quantificação nas zonas de menor ocorrência. O ruído de quantificação torna-se mais pequeno na maioria das amostras, à custa de, em algumas amostras menos prováveis, o ruído de quantificação aumentar. Sendo a potência um valor médio quadrático este procedimento faz diminuir a potência do ruído de quantificação e, consequentemente, faz aumentar a SNR .

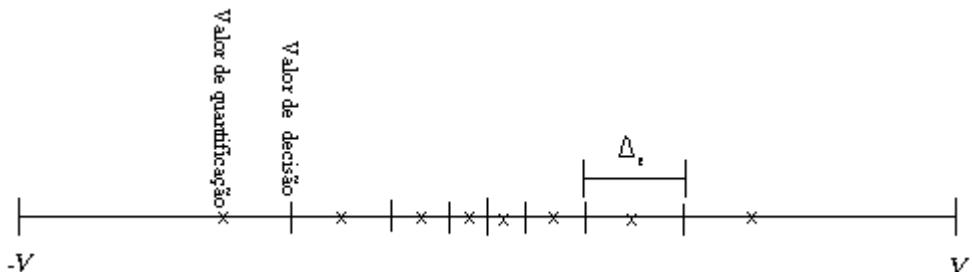


Figura 3.1
Exemplo de um quantificador não uniforme.
 São melhor quantificados os valores menores (em módulo) do que os valores maiores.

Se o sinal de entrada apresentar uma função densidade de probabilidade das amplitudes em que os valores mais altos forem os que tiverem maior ocorrência, então devem ser estes a ser quantificados com intervalos menores, à custa do aumento dos intervalos para valores mais pequenos. Na utilização destes quantificadores pressupõem-se conhecida pelo menos uma percepção da função densidade de probabilidade das amplitudes do sinal de entrada, sob pena de se obter desempenhos inferiores do que utilizando quantificadores uniformes.

Alternativamente, previamente à quantificação, pode-se aplicar ao sinal analógico de entrada uma não linearidade $g(m)$, como a mostrada na figura 3.2, seguido de um quantificador uniforme.

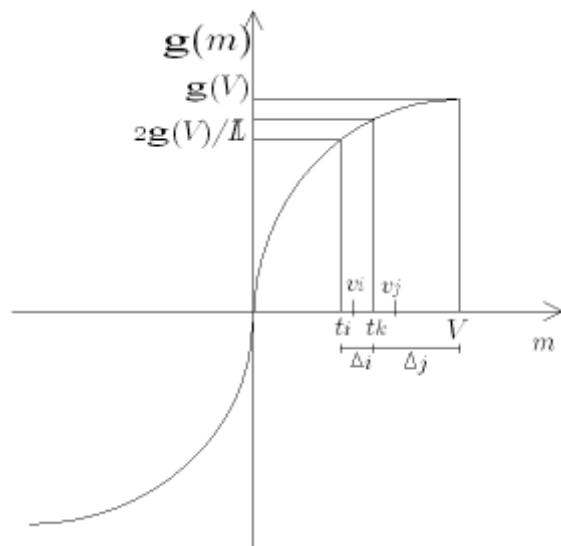


Figura 3.2

Exemplo de não linearidade utilizada em quantificação não uniforme.

A não linearidade seguida de quantificação uniforme é equivalente à quantificação não uniforme.

A figura 3.3 apresenta o esquema de blocos equivalente à cadeia de quantificação não uniforme, implementada através da aplicação da não linearidade ao sinal de entrada, seguida da quantificação uniforme. O tipo de não uniformidade é dependente desta não linearidade. Comparando as distribuições de amplitudes antes e após a não linearidade, pode-se verificar que

o efeito da não linearidade é tornar a distribuição mais uniforme e mais adequada a um quantificador uniforme.

No receptor, após descodificação, aplica-se a característica inversa para regenerar o sinal. A diferença entre o sinal original e o sinal descodificado é causada pela quantificação.

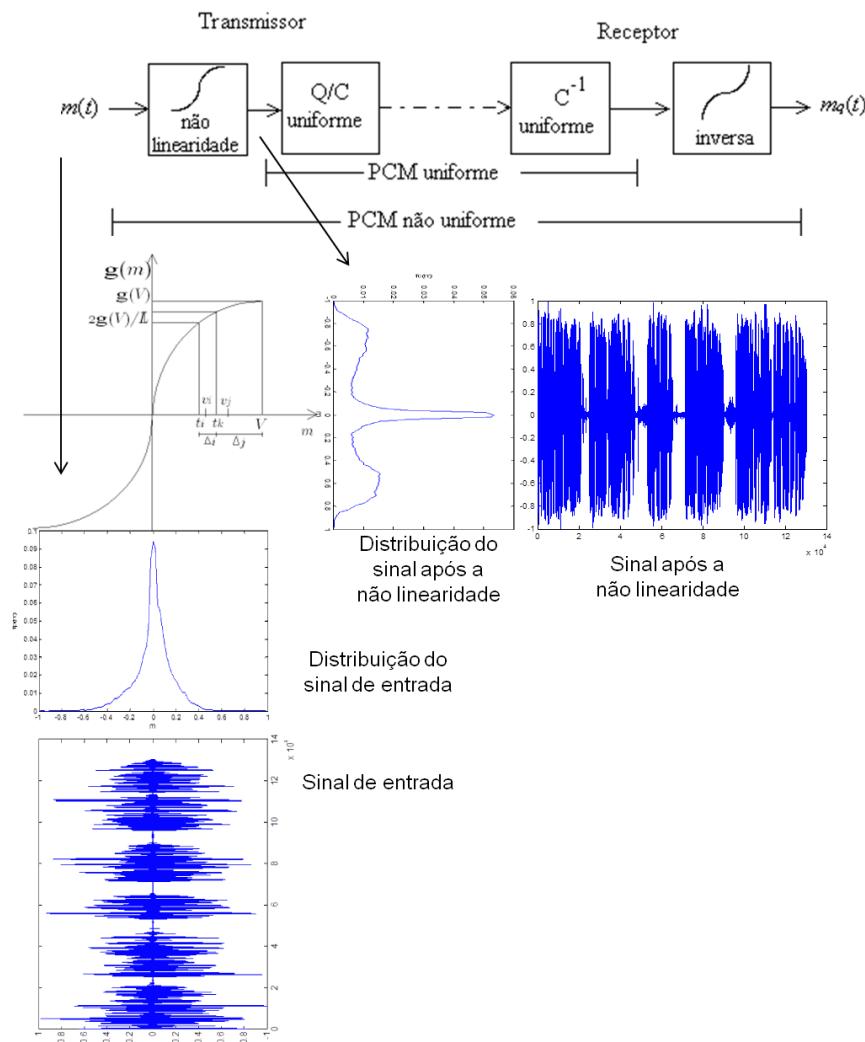


Figura 3.3
Implementação alternativa da codificação PCM não uniforme.

No transmissor o sinal é aplicado a uma não linearidade seguida de quantificação uniforme. A não linearidade torna a distribuição mais uniforme (exemplo para um sinal de fala) e portanto mais adequada a um quantificador uniforme.

No receptor utiliza-se um descodificador uniforme seguido função inversa da não linearidade, de modo a regenerar o sinal original. A diferença entre o sinal original e o sinal descodificado é causada pela quantificação.

Note-se que, numa realização prática, a utilização direta do quantificador não uniforme é menos complexa em relação à implementação do esquema apresentado na figura 3.3. Quer os valores de decisão, necessários no transmissor, quer os valores de quantificação, necessário no receptor, são obtidos por aplicação da função inversa da não linearidade, dos respetivos valores do quantificador uniforme.

3.1 Relação sinal-ruído em quantificação não uniforme

Para se analisar o efeito da não linearidade $g(m)$ e calcular a relação sinal ruído de quantificação, verifique-se pela figura 3.2 que a relação entre a entrada e a saída da não linearidade é dada aproximadamente por:

$$\Delta_j \approx \frac{2g(v)}{Lg'(v_j)}, \quad (3.1)$$

em que $g'(v_j)$ é o valor da derivada da não linearidade à volta do j -ésimo valor de quantificação v_j . Se o sinal de entrada for aleatório mas com função densidade de probabilidade $f(m)$ conhecida, a potência do ruído de quantificação para o j -ésimo intervalo é dada pela variância centrada no valor de quantificação v_j :

$$N_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (m - v_j)^2 f(m) dm, \quad (3.2)$$

sendo t_j a t_{j+1} o intervalo de quantificação correspondente ao valor v_j . Assumindo um número elevado de valores, $f(m)$ é aproximadamente constante no intervalo de quantificação, ou seja todos os valores de m do j -ésimo intervalo de quantificação têm aproximadamente a mesma probabilidade que $f(v_j)$. Igualmente, se os intervalos de quantificação adjacentes não tiverem dimensões muito diferentes, o valor de quantificação encontra-se aproximadamente a meio

do intervalo e o ruído está limitado ao intervalo $[-\Delta_j/2, \Delta_j/2]$. Nestas condições, a equação 3.2 pode ser reescrita como:

$$N_j \approx f(v_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} (m - v_j)^2 dm \approx f(v_j) \int_{-\Delta_j/2}^{\Delta_j/2} m^2 dm \approx f(v_j) \frac{m^3}{3} \Big|_{-\Delta_j/2}^{\Delta_j/2} = f(v_j) \frac{\Delta_j^3}{12}. \quad (3.3)$$

Incluindo nesta equação a aproximação dada pela equação 3.1 vem:

$$N_j \approx \frac{g(V)^2}{3L^2} \frac{f(v_j)}{g'(v_j)^2} \Delta_j. \quad (3.4)$$

A potência total do ruído é a soma do ruído em cada j -ésimo intervalo de quantificação, que se aproxima de uma função contínua desde que seja utilizado um número elevado de valores de quantificação, pelo que:

$$\sigma_q^2 \approx \sum_{j=1}^L N_j = \frac{g(V)^2}{3L^2} \sum_{j=1}^L \frac{f(v_j)}{g'(v_j)^2} \Delta_j \approx \frac{g(V)^2}{3L^2} \int_{-m_{\max}}^{m_{\max}} \frac{f(m)}{g'(m)^2} dm, \quad (3.5)$$

e a relação sinal-ruído de quantificação (não em decibéis) vem:

$$SNR_q = \frac{P}{\sigma_q^2} = \frac{3L^2 P}{g(V)^2 \int_{-m_{\max}}^{m_{\max}} \frac{f(m)}{g'(m)^2} dm}. \quad (3.6)$$

Para calcular a SNR é necessário ser conhecida a derivada da não linearidade e a função densidade de probabilidade do sinal de entrada.

Se $g(m)=m$, a quantificação transforma-se na quantificação uniforme. A derivada da função vale 1 e a equação 3.6 reduz-se à equação 2.11. Esta conclusão é válida mesmo para uma amplificação do sinal de entrada, $g(m)=Km$, pois valendo a derivada $K=g(V)/V$ e assumindo $V=m_{\max}$, tem-se para o denominador da equação 3.6:

$$g(V)^2 \int_{-m_{\max}}^{m_{\max}} \frac{f(m)}{g'(m)^2} dm = \frac{K^2}{K^2} m_{\max}^2 \int_{-m_{\max}}^{m_{\max}} f(m) dm = m_{\max}^2 \int_{-m_{\max}}^{m_{\max}} f(m) dm = m_{\max}^2. \quad (3.7)$$

Conclui-se que um fator de escala (amplificação) aplicado ao sinal de entrada, ao alterar simultaneamente a potência do sinal e a dimensão dos intervalos de quantificação, não altera a relação sinal-ruído de quantificação.

3.2 PCM companding

Se a não linearidade for do tipo logarítmica, *i.e.*, $g(m)=\ln(|m|)$, cuja derivada é $1/|m|$ e sabendo que o integral de $m^2 f(m) dm$, calculado no intervalo entre $-m_{max}$ e m_{max} , é igual à potência, o valor da *SNR* deixa de ser dependente da potência do sinal de entrada para ser dependente apenas do número de intervalos de quantificação:

$$SNR_q = \frac{3L^2 P}{2g(V)^2 \int_0^{m_{max}} m^2 f(m) dm} = \frac{3L^2}{g(m_{max})^2}. \quad (3.8)$$

A função logarítmica não pode no entanto ser realizada, pois converte o intervalo entre 0 e 1 no intervalo entre $-\infty$ e 0. Estão no entanto normalizadas pelo ITU-T duas funções pseudo logarítmicas, que convertem o intervalo entre 0 e 1 no mesmo intervalo, tendo a função uma característica ímpar: A lei-*A* utilizada na Europa e a Lei- μ utilizada nos EUA e Japão, descritas na recomendação ITU-T G.711, que data de 1972. Ambas utilizam 8 bits de codificação por amostra e, como normalizado para sinais de fala em qualidade telefónica, uma frequência de amostragem de 8 kHz, resultando num débito binário de 64 kbit/s. Se os valores de entrada estiverem normalizados em relação à amplitude do sinal de entrada, ou seja $V=1$, a Lei-*A* é descrita por:

$$\begin{aligned} g(m) &= \pm \frac{1 + \ln(A|m|)}{1 + \ln(A)} \quad \frac{1}{A} \leq |m| \leq 1 \\ g(m) &= \frac{A}{1 + \ln(A)} m \quad 0 \leq |m| \leq \frac{1}{A} \end{aligned}, \quad (3.9)$$

cujo gráfico é apresentado na figura 3.4. O parâmetro A governa o grau de compressão, sendo o valor normalizado na recomendação G.711 de 87,56, embora de facto os valores de quantificação e decisão sejam uma aproximação da equação 3.9.

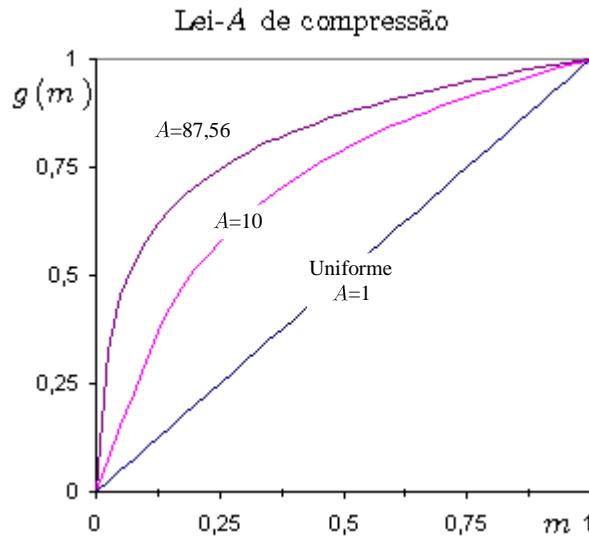


Figura 3.4
Não linearidade da Lei-A

São ilustradas as funções não lineares Lei-A, que dão origem a uma quantificação não uniforme. O valor normalizado pela recomendação ITU-T G.711 é $A=87,56$.

Só são apresentados valores positivos, tendo as curvas características ímpares.

O parâmetro A governa o grau de compressão, sendo o valor normalizado na recomendação G.711 de 87,56, embora de facto os valores de quantificação e decisão sejam uma aproximação da equação 3.9.

Para valores pequenos ($m < A$) a Lei-A tem um comportamento linear ($g(m) = 16m$ para $A=87,56$), enquanto para valores médios e altos tem um comportamento quase logarítmico. Esta não linearidade corresponde a comprimir o sinal de entrada. No recetor, após descodificação, tem que se incluir a não linearidade inversa (figura 3.3) a que corresponderá uma expansão. A esta técnica dá-se o nome de *companding* (*compressing-expanding*). Como se verá adiante, a utilização do *companding* produz uma relação sinal ruído de quantificação quase constante para uma larga gama de potências do sinal de

entrada, não tendo a dependência com esta grandeza do PCM uniforme, muito bom para potências elevadas, mas insuficiente para médias e baixas potências.

Para o desenvolvimento da equação 3.6, a derivada da equação correspondente à Lei-*A* é dada por,

$$\begin{aligned} g'(m) &= \frac{1}{(1+\ln(A))m} \quad \frac{1}{A} \leq |m| \leq 1 \\ g'(m) &= \frac{A}{1+\ln(A)} \quad 0 \leq |m| \leq \frac{1}{A}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Para potências médias e altas, ou seja, quando a potência normalizada do sinal de entrada for razoavelmente superior a $1/A^2$, o termo superior da equação 3.9 é o termo dominante, pelo que se pode desprezar o efeito da zona linear. Nestas circunstâncias a *SNR* vem, usando o valor normalizado para *A* de 87,56 e utilizando a equação 3.6:

$$SNR_q \approx \frac{3L^2 P}{(1+\ln(A))^2 \int_{-1}^1 m^2 f_m(m) dm} = \frac{3L^2}{(1+\ln(A))^2} = 0,1L^2, \quad (3.11)$$

ou, em decibéis:

$$SNR_{dB} = 6,02R - 10. \quad (3.12)$$

A *SNR* só depende do número de bits de codificação por amostra, deixando de depender da potência do sinal de entrada. Para o codificador normalizado G.711, de 8 bits/amostra (64 kbit/s), o valor máximo da *SNR* é de 38,16 dB e mantém-se praticamente constante para uma variação apreciável de potência do sinal de entrada. É esta característica quase constante do *companding* que o faz ter um desempenho médio superior ao PCM uniforme. Contudo, para sinais de baixa potência, ou seja quando a potência normalizada do sinal de entrada é inferior a $1/A^2$, o termo dominante é o inferior da equação 3.9, com um comportamento linear, pelo que a *SNR* é dada pela equação 2.10.

Para a Lei- μ :

$$g(m) = \pm \frac{\ln(1 + \mu|m|)}{\ln(1 + \mu)} \quad 0 \leq |m| \leq 1 . \quad (3.13)$$

O parâmetro μ governa o grau de compressão, sendo o valor normalizado de 255. Para valores pequenos esta lei tem também um comportamento linear, dado que $\ln(1 + \mu|m|) \approx \mu|m|$ e para valores elevados um comportamento logarítmico, dado que para $\mu|m| >> 1$, então $\ln(1 + \mu|m|) \approx \ln(\mu|m|)$. A derivada desta função vale:

$$g'(m) = \frac{\mu}{\ln(1 + \mu)(1 + \mu|m|)} . \quad (3.14)$$

A SNR vem, com o valor normalizado $\mu=255$, aplicando a equação 3.6 e após alguma manipulação algébrica:

$$SNR_q \approx \frac{3L^2}{(\ln(1 + \mu))^2} \approx 0,1L^2 . \quad (3.15)$$

Para baixas potências esta aproximação não é válida, correspondendo como na Lei-A à entrada na zona linear, fazendo diminuir a SNR . Das equações 13.12 e 13.15 verifica-se que os desempenhos das duas Leis são idênticos.

A característica quase constante da SNR em *companding* pode ser explicada do modo seguinte: para sinais de baixa potência a probabilidade de amplitudes baixas é maior, sendo melhor quantificadas e baixando a potência do ruído. Para sinais de potência elevada, a probabilidade de amplitudes elevadas é maior, mas também são pior quantificadas. Em ambos os casos a relação entre a potência do sinal e do ruído de quantificação é quase constante.

3.3 Quantificação Ótima

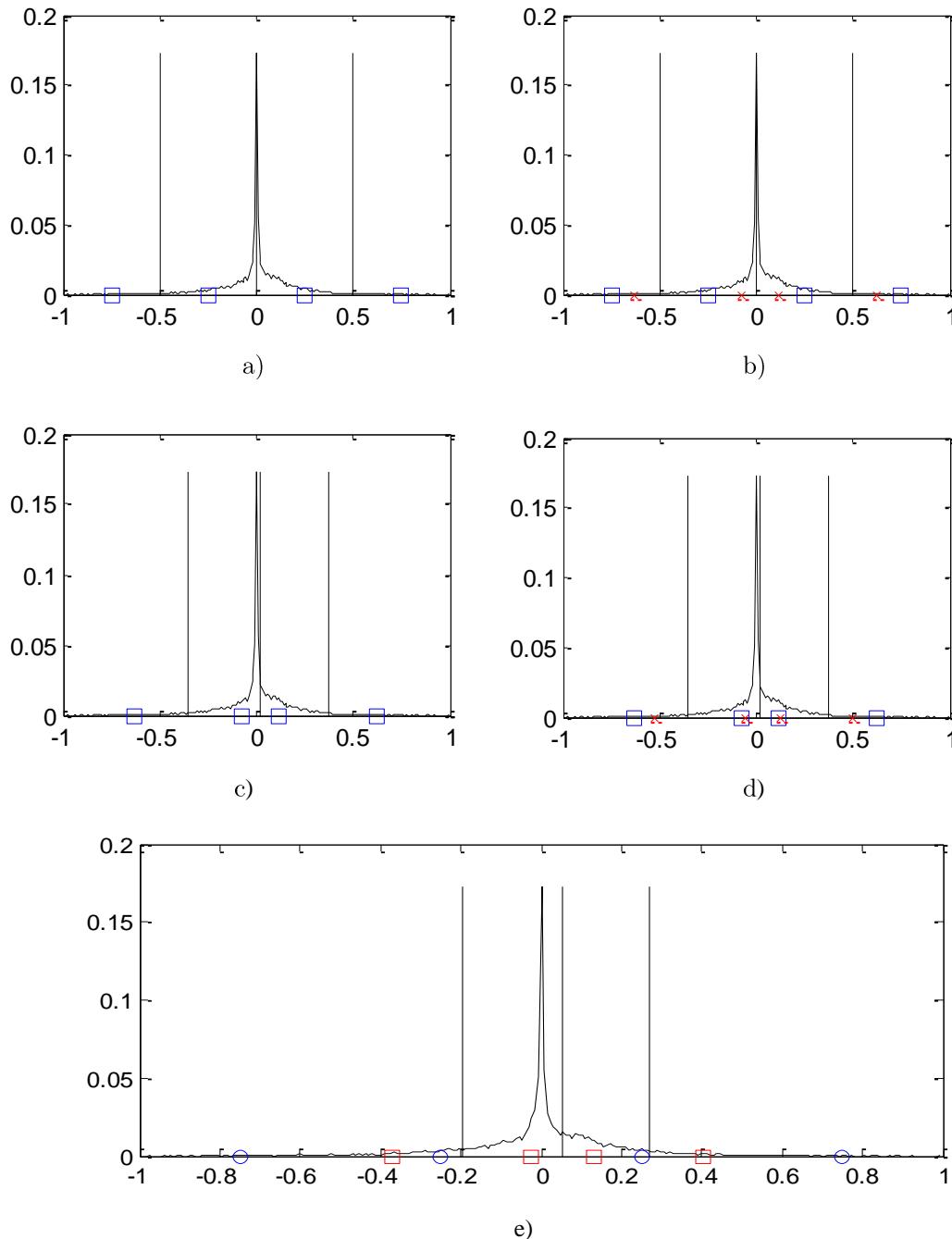
Quando, no sinal a quantificar, existe maior probabilidade de ocorrência de alguns dos valores do que de outros, deve-se diminuir a dimensão dos intervalos de quantificação nas zonas mais prováveis, à custa do aumento da dimensão dos intervalos nas zonas menos prováveis. Por exemplo, os sinais de fala têm uma função densidade de probabilidade das amplitudes com maiores ocorrências para os valores mais pequenos, pelo que o PCM *companding* é uma melhor alternativa em relação ao PCM uniforme. No entanto a principal vantagem do PCM *companding* é a de tornar a *SNR* praticamente independente da potência do sinal de entrada. Para sinais de potência razoável a utilização de PCM *companding* resulta numa diminuição da *SNR* em relação ao PCM uniforme, pelo que deve ser utilizado outro tipo de não linearidade.

Das equações 3.2 e 3.5, a potência do ruído de quantificação vem:

$$\sigma_q^2 = \sum_{j=1}^L N_j = \sum_{j=1}^L \frac{t_{j+1}}{t_j} \int (m - v_j)^2 f(m) dm. \quad (3.16)$$

Os valores ótimos de decisão t_j e de quantificação v_j são estimados por minimização da potência do ruído de quantificação σ_q^2 , ou seja, tomando as derivadas parciais de N_j em ordem a t_j e a v_j . Contudo a resolução deste conjunto de equações não é fácil. Descreve-se a seguir um algoritmo iterativo conhecido por Lloyd-Max (apêndice 1), para estimação dos valores ótimos de quantificação e decisão, que tem como entrada o histograma do sinal a quantificar, estimando a respetiva função densidade de probabilidade. O quantificador resultante só terá o mesmo desempenho quando for utilizado com sinais com a mesma função densidade de probabilidade dos sinais que geraram o histograma de entrada do algoritmo, denominado de *corpus*⁷ de treino.

⁷ *Corpus de sinais de fala*: conjunto de sinais de fala. Termo utilizado em investigação.

**Figura 3.5****Exemplo do algoritmo Lloyd-Max para sinal de fala**

Em a) É ilustrado o quantificador uniforme utilizado para inicializar o algoritmo. Em b) são representados os novos valores de quantificação, obtidos pela média dos valores de cada intervalo de quantificação, pesados pelos respetivos valores do histograma. Em c) e d) é ilustrada a segunda iteração, partindo dos valores obtidos na iteração anterior.

Em e) são apresentados os

○ - Valores de quantificação uniforme ($SNR = -0,2 \text{ dB}$) e os

□ - Valores ótimos ($SNR = 7,5 \text{ dB}$), obtidos após 9 iterações.

É pois necessário ser muito criterioso na escolha deste *corpus*, devendo incluir diversos oradores do género masculino e feminino, dizendo frases balanceadas foneticamente, ou seja, cujas ocorrências dos fonemas que as compõem sejam o mais aproximado possível da respetiva ocorrência na linguagem falada. Este algoritmo, ilustrado na figura 3.5, funciona para quantificar amostras de um sinal de fala ou qualquer outro parâmetro, *e.g.*, áudio, pontos de uma imagem ou letras de um texto.

Como inicialização do algoritmo, assume-se qualquer quantificador com L valores de quantificação. No exemplo ilustrado na figura 3.5-a) assume-se um quantificador uniforme com $L=4$, marcando sobre o histograma do sinal de entrada com um | os valores de decisão e com um □ os valores de quantificação.

Como iteração, calculam-se os valores médios pesados pelo respetivo histograma, como mostrado na figura 3.5-b) marcado a x. Seguidamente substituem-se os valores de quantificação por estes, e calculam-se os respetivos valores de decisão através da equação 2.4, como na figura 3.5-c). Os valores de quantificação deslocam-se para as zonas de maior probabilidade, diminuindo aí o ruído de quantificação, à custa do aumento nas zonas de menor probabilidade.

O procedimento anterior repete-se com estes novos valores (figura 3.5-d), até não haver diferença entre duas iterações ou esta ser menor que determinado critério de estabilidade. Na figura 3.5-e) são mostrados os valores de quantificação iniciais (uniforme) e finais (ótimos). A potência do ruído baixou 5,9 vezes, ou seja, foi produzido um aumento da *SNR* de 7,7 dB. Estes valores foram obtidos após 9 iterações e o aumento da *SNR* após a primeira iteração foi de 1,9 dB.

Para um sinal sinusoidal, com uma função densidade de probabilidade que tenha maiores ocorrências para amplitudes elevadas, por exemplo um sinusoide, como mostra a figura 3.6, os valores de quantificação tenderão a deslocar-se para estas amplitudes.

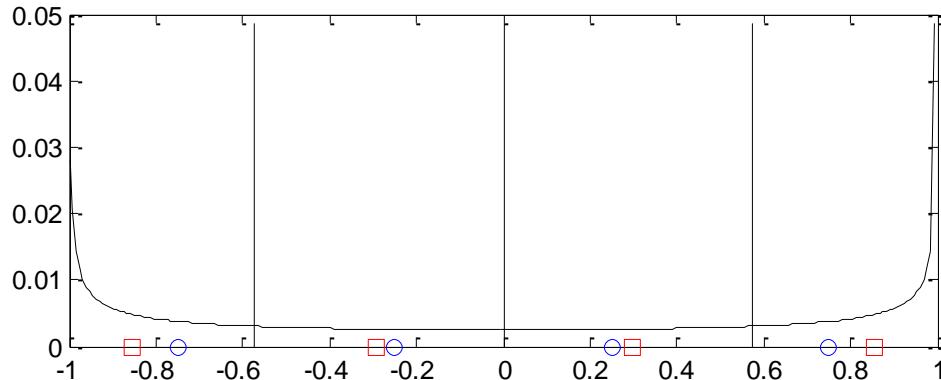


Figura 3.6

Algoritmo Lloyd-Max aplicado a uma sinusoide.

○ - Valores de quantificação uniforme ($SNR=12,8$ dB)

□ - Valores de quantificação ótimos. ($SNR= 13,8$ dB), obtidos após 6 iterações.

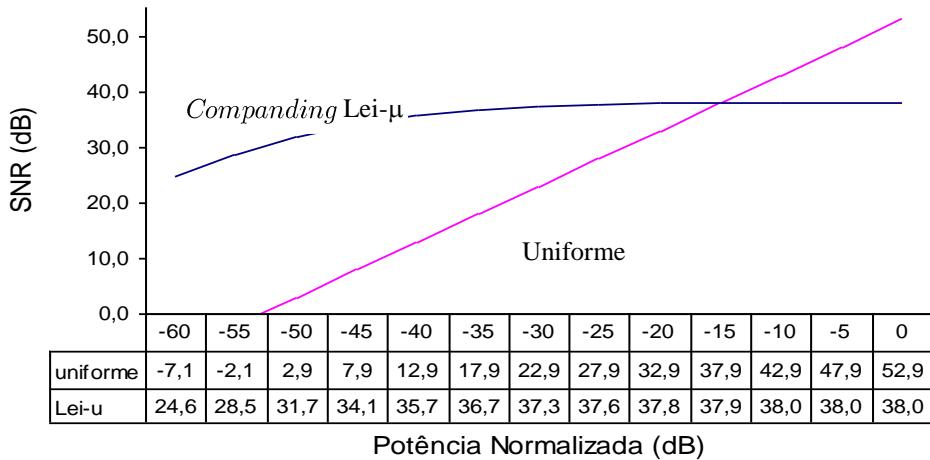
3.4 Comparação dos codificadores PCM

Nesta secção serão comparados os três tipos de PCM estudados nesta e na secção anterior: com quantificador uniforme, *companding* e ótimo.

Quantificador uniforme – A SNR é dependente da potência do sinal de entrada e da tensão máxima de quantificação, sendo esta a sua principal desvantagem. Poderá ser uma boa opção quando não se garanta a distribuição do sinal de entrada. Utilizado por exemplo em CD de áudio;

Quantificador companding – A SNR é independente do sinal de entrada. Também é independente da tensão máxima de quantificação. A SNR tem uma diminuição de apenas 2,5 dB, figura 3.7, para uma variação da potência do sinal até aos -40 dB.

Acima dos -14,77 dB, valor impossível de atingir pelos sinais de fala, o PCM uniforme tem um melhor desempenho. Por exemplo para sinusoides, cuja potência normalizada é de -3 dB (tabela 2.1) e apresenta uma função de probabilidade com maiores ocorrências para valores maiores, a SNR correspondente para 8 bits/amostra em PCM uniforme é de 50 dB, contrariamente aos 38 dB obtidos pelo PCM *companding*.

**Figura 3.7****Relação sinal ruído em PCM companding Lei- μ (255)**

Comparação com PCM com quantificação uniforme, função da potência normalizada do sinal de entrada, para 8 bit/amostra. De realçar a característica quase constante do companding e o seu melhor desempenho em relação ao PCM uniforme para potências normalizadas abaixo dos -14,77 dB.

Um outro fator importante obtido pelo PCM *companding*, particularmente quando aplicado a sinais de fala, é o aumento da qualidade percetiva em relação ao PCM uniforme. O aparelho auditivo, através de um processo de mascaramento auditivo, é menos sensível ao ruído em zonas de maior potência. Também por este facto se quantifica melhor os valores menores em detrimento de valores maiores. Conclui-se do melhor desempenho objetivo (aumento da *SNR*) e subjetivo (melhoria da qualidade percetiva) para sinais de fala do PCM *companding* em relação ao PCM uniforme, sendo utilizado em codificação na transmissão telefónica em rede fixa;

Quantificador ótimo – Tira partido do conhecimento sobre a função densidade de probabilidade das amplitudes dos sinais a quantificar. Os valores de quantificação e decisão são adaptados (treinados) de modo a maximizar a relação sinal-ruído. Como principal desvantagem, caso o sinal de entrada não mantiver a mesma função densidade de probabilidade dos sinais que serviram para o treino dos quantificadores, a *SNR* pode descer para valores intoleráveis.

4 Codificação preditiva

Nas secções anteriores estudou-se o efeito da quantificação individual das amostras do sinal de entrada. Para sinais de fala, esta é possível com qualidade codificando acima dos 8 bits por amostra (64 kbit/s para sinais de fala amostrados a 8 kHz). Abaixo deste débito é necessário tirar partido das redundâncias do sinal, nomeadamente a grande semelhança entre amostras adjacentes existente nos sinais de baixa frequência (quando comparado com a frequência de amostragem), dando origem à codificação preditiva, que vai ser objeto de estudo no resto desta secção. Como exemplo, a figura 4.1 apresenta um gráfico das amostras de um sinal de fala função da respetiva amostra anterior. Estas exibem uma grande parecença, ou seja, apresentam-se à volta de uma reta de declive unitário.

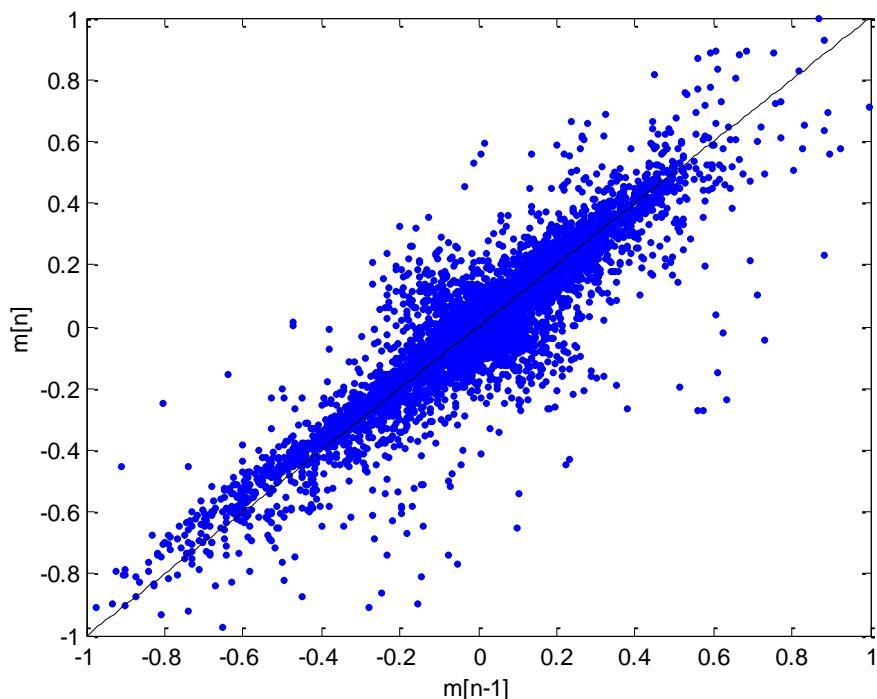


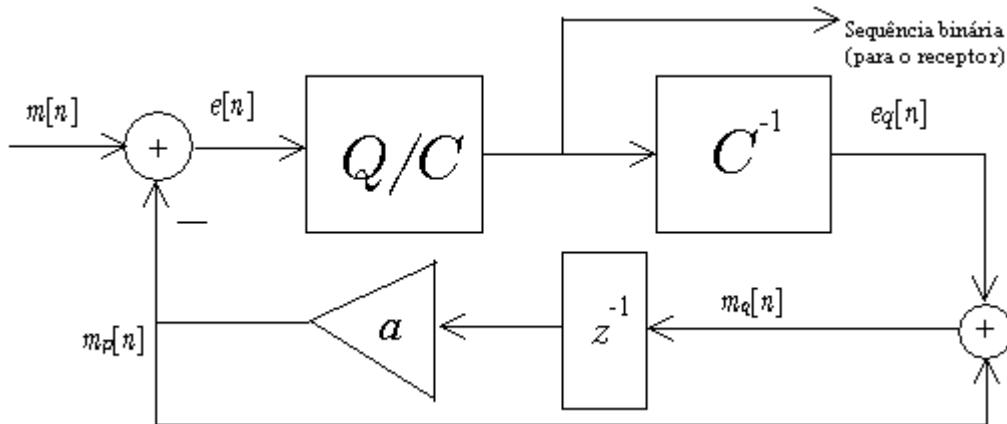
Figura 4.1

Semelhança entre amostras adjacentes em sinais de baixa frequência.

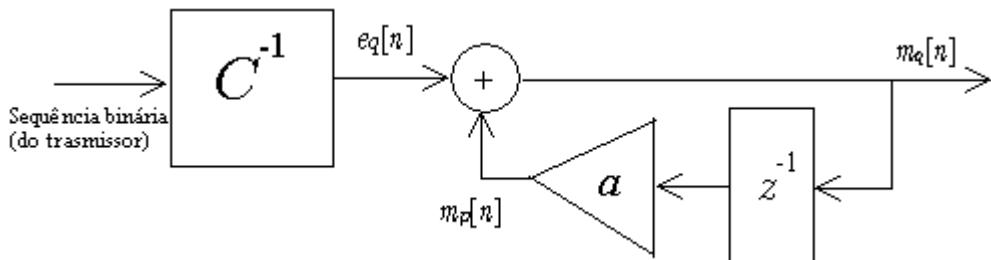
Amostras de um sinal de fala função das respetivas amostras anteriores. A semelhança pode ser verificada pois esta função apresenta-se à volta de uma reta de declive unitário.

4.1 Modulação por código de pulso diferencial

Tirando partido da semelhança entre amostras consecutivas, caraterística dos sinais de baixa frequência (quando comparado com a frequência de amostragem), consegue-se representar uma amostra à custa da amostra anterior, sendo transmitida em PCM, entre o transmissor e o receptor, apenas a diferença entre amostras consecutivas. Dada a necessidade de coerência entre os sinais nestes dois sistemas, a diferença não é realizada sobre o sinal original mas, como mostra a figura 4.2, sobre o sinal de saída quantificado, o único existente no receptor. Para produzir o sinal quantificado existe no transmissor uma réplica do receptor. Este tipo de representação do sinal toma o nome de modulação por código de pulso diferencial (DPCM – *differential pulse code modulation*).



a) Transmissor DPCM



b) Recetor DPCM

Figura 4.2

Modulação por código de pulso diferencial.

- a) Esquema de blocos de um transmissor por modulação por código de pulso diferencial.
- b) Respetivo recetor, correspondendo a parte do transmissor.

O valor da amostra anterior pode ser interpretado como uma previsão ($m_p[n]$) do valor da amostra atual, e a sua diferença interpretada como o resíduo ou erro de previsão. É assim quantificada e codificada a diferença entre a amostra que se quer sintetizar e a amostra de saída anterior, eventualmente multiplicada por um coeficiente de previsão, a . O erro de previsão deve ter uma menor variância (potência) que o sinal original, sendo suscetível de uma melhor quantificação.

4.1.1 Relação sinal-ruído em DPCM

Da análise do esquema de blocos da figura 4.5 conclui-se que o ruído causado por este tipo de codificação é dado por:

$$q[n] = m[n] - m_q[n] = (m_p[n] + e[n]) - (m_p[n] + e_q[n]) = e[n] - e_q[n], \quad (4.1)$$

em que $e[n]$ corresponde ao erro de previsão, ou seja, à diferença entre a amostra atual e a sua previsão $m_p[n]$. O ruído na codificação preditiva resulta unicamente da quantificação, correspondendo ao ruído de quantificação em PCM do erro de previsão, dependendo dos valores dos intervalos de quantificação. Caso a quantificação seja uniforme Δ_q depende apenas do valor máximo de quantificação, que denominaremos de V_1 , e do número de intervalos de quantificação L . Através da equação 2.8, substituindo V por V_1 , obtém-se:

$$\Delta_q = \frac{2V_1}{2^R}. \quad (4.2)$$

A SNR (em linear) do codificador DPCM, correspondente à relação entre a potência do sinal de entrada e deste ruído, vem:

$$SNR_q = \frac{P}{\sigma_q^2} = \frac{12P}{\Delta_q^2}, \quad (4.3)$$

e em decibéis vem, pela equação 2.12, com a mesma alteração de V por V_1 ,

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V_1^2} \right), \quad (4.4)$$

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V^2} \frac{V^2}{V_1^2} \right), \quad (4.5)$$

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V^2} \right) + 10 \log_{10} \left(\frac{V^2}{V_1^2} \right). \quad (4.6)$$

O aumento da SNR em relação à codificação PCM é dado por,

$$10 \log_{10} \frac{V^2}{V_1^2} = 20 \log_{10} \frac{V}{V_1}. \quad (4.7)$$

Para que a SNR aumente em relação aos codificadores PCM, assumindo o mesmo número de bits de codificação, V_1 deve ser menor que a amplitude do sinal de entrada, ou seja, resultar do preditor e do esquema diferencial uma diminuição de amplitude do sinal (erro de previsão) a ser efetivamente quantificado. Se não houver diminuição de V_1 não existe qualquer vantagem em utilizar codificação DPCM. Pelo contrário só há desvantagens, uma vez que a codificação DPCM é mais complexa (mais cara) e como veremos adiante mais sensível a erros no canal de transmissão que a codificação PCM.

4.1.2 Tipos de distorção

Conforme a equação 4.7, V_1 é um parâmetro que atua diretamente no desempenho do quantificador. Se este for demasiado elevado o desempenho diminui, pois aumenta Δ_q e a potência do ruído de quantificação. Se for demasiado pequeno o erro de previsão pode excedê-lo, provocando *saturação de declive* (figura 4.3), o que acontece ($a=1$, preditor de 1ª ordem unitário) quando a variação do sinal de entrada no intervalo entre amostras for superior ao valor máximo de quantificação V_1 , sendo evitada na condição,

$$V_1 \geq |m(t) - m(t - T_s)|_{\max} \approx \left| \frac{\partial m(t)}{\partial t} \right|_{\max} T_s. \quad (4.8)$$

Em zonas de muito pequeno declive um quantificador *midrise* oscila em torno do sinal de entrada com salto Δ_q , provocando ruído denominado de *ruído granular*. Para evitar o ruído granular deve ser minimizado Δ_q , o que pode provocar ruído de saturação de declive. Caso seja utilizado um quantificador *midtread*, o ruído granular é evitado, devido ao 0 como nível de quantificação.

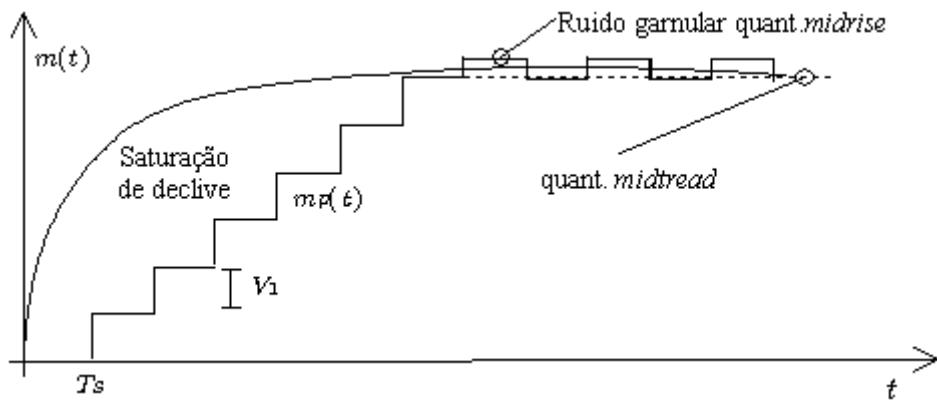


Figura 4.3
Distorção de declive em codificação DPCM.
 Em codificação DPCM não existe saturação de amplitude mas pode existir saturação de declive (*slope overload*) e ruído granular.
 Exemplo para preditor unitário.

A saturação de declive é percetivamente incomodativa, pelo que se deve evitar utilizando a inequação 4.8. Para garantir no mínimo o valor exato de V_1 , deve-se utilizar a equação 2.7 e não a equação 2.6. Por outro lado o ruído granular ocorre essencialmente a metade da frequência de amostragem, sendo facilmente atenuado pelo filtro reconstrutor.

A codificação DPCM não sofre de saturação de amplitude, como em codificação PCM. De facto é possível alcançar qualquer amplitude transmitindo consecutivamente o código correspondente à tensão máxima de quantificação V_1 (ou mínima - V_1).

Uma forma de diminuir todos os tipos de ruído na codificação DPCM é aumentando a frequência de amostragem, embora à custa do aumento no débito binário (equação 2.9). O valor de V_1 para evitar saturação de declive diminui (equação 4.8), diminuindo Δ_q e consequentemente diminuindo o ruído de quantificação (equação 4.6) e o ruído granular. Contudo, é preferível diminuir Δ_q aumentando o número de bits de codificação por amostra, pois a mesma qualidade é obtida com menor débito binário.

4.1.3 Ganho de predição e estimativa do valor máximo de quantificação

Uma das principais dificuldades em DPCM é a estimativa do valor máximo de quantificação do erro de predição V_1 , de modo a evitar a saturação de declive mas minimizando o ruído. Um método aproximado de estimar V_1 , apenas exato para sinais sinusoidais (Apêndice 3), consiste em assumir que a relação entre as potências de pico de $m[n]$ e $e[n]$ é igual à relação das respectivas potências, refletindo-se esta na gama dos quantificadores, ou seja:

$$G_p = \frac{P}{P_e} \approx \frac{m_{\max}^2}{e_{\max}^2} = \frac{V^2}{V_1^2}, \quad (4.9)$$

em que P_e representa a potência do sinal de erro de predição, pelo que G_p , denominado *ganho de predição*, dá informação da redução de variância do sinal de entrada em relação ao erro de predição. O valor máximo de quantificação que evita a saturação de declive vem, aproximadamente:

$$V_1 \approx \sqrt{\frac{V^2}{G_p}}. \quad (4.10)$$

Resulta do esquema diferencial um aumento da SNR introduzido pelo ganho de predição (equações 4.6 e 4.9),

$$SNR_{dB} \approx Gp_{dB} + 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V^2} \right) = Gp_{dB} + SNR_{PCMdB}(m[n]). \quad (4.11)$$

Esta equação só é válida na condição de ser utilizada a equação 4.11, sendo também válida a equação 4.4 em que se obterá o mesmo valor de SNR . Aliás a equação 4.4 é sempre válida desde que não haja saturação de declive.

O aumento do ganho de predição, para determinado sinal de entrada, corresponde à diminuição da potência do erro de predição e consequentemente do seu valor máximo. Se, contudo, não for diminuído em conformidade o valor máximo de quantificação V_1 , por exemplo utilizando a equação 4.10, não há de facto aumento da SNR . Para sinais de fala, a equação 4.10 subestima o valor de V_1 , dando origem a alguma saturação de declive que pode ser percetivamente relevante. Contudo, como a saturação não é frequente, a SNR na verdade aumenta em relação à utilização do valor máximo do erro de predição, pois é utilizado um intervalo de quantificação menor com a consequente diminuição da potência do ruído de quantificação.

Para se calcular o ganho de predição repare-se que, desde que a quantificação se faça com um número razoável de bits, a potência do ruído pode-se desprezar face à potência do sinal, ou seja⁸:

$$P_{mq} = P + \sigma_q^2 \approx P. \quad (4.12)$$

Nestas circunstâncias a potência do erro de predição vem:

$$\begin{aligned} P_e &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N e^2[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N (m[n] - am_q[n-1])^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N m^2[n] + a^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N m_q^2[n-1] - 2a \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N m[n]m_q[n-1], \quad (4.13) \\ &\approx P + a^2 P - 2aR[1] = P(1 + a^2 - 2aR[1]) \end{aligned}$$

sendo $R[k]$ a função de autocorrelação (ver apêndice 2) do sinal de entrada com atraso kT_s aproximadamente igual à correlação cruzada entre o sinal de entrada

⁸ A potência do sinal soma só é igual à soma das potências desde que os sinais sejam ortogonais. Para um número suficiente de bits, pode-se considerar que o ruído de quantificação é ortogonal ao sinal de entrada.

e o sinal quantificado. $r[k]$ corresponde à função de autocorrelação normalizada pela potência $P=R[0]$. O ganho de predição (não em decibéis) vem:

$$Gp = \frac{P}{P_e} = \frac{1}{(1 + a^2 - 2ar[1])}. \quad (4.14)$$

Esta equação vem para o caso particular do coeficiente de predição ser igual a 1 ($a=1$, preditor de 1ª ordem unitário), em decibéis:

$$Gp_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_e} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{2(1 - r[1])} \right). \quad (4.15)$$

Na figura 4.4 é ilustrada a redução de gama dinâmica do erro de predição em relação ao sinal de entrada, correspondendo a um ganho de predição maior que a unidade.

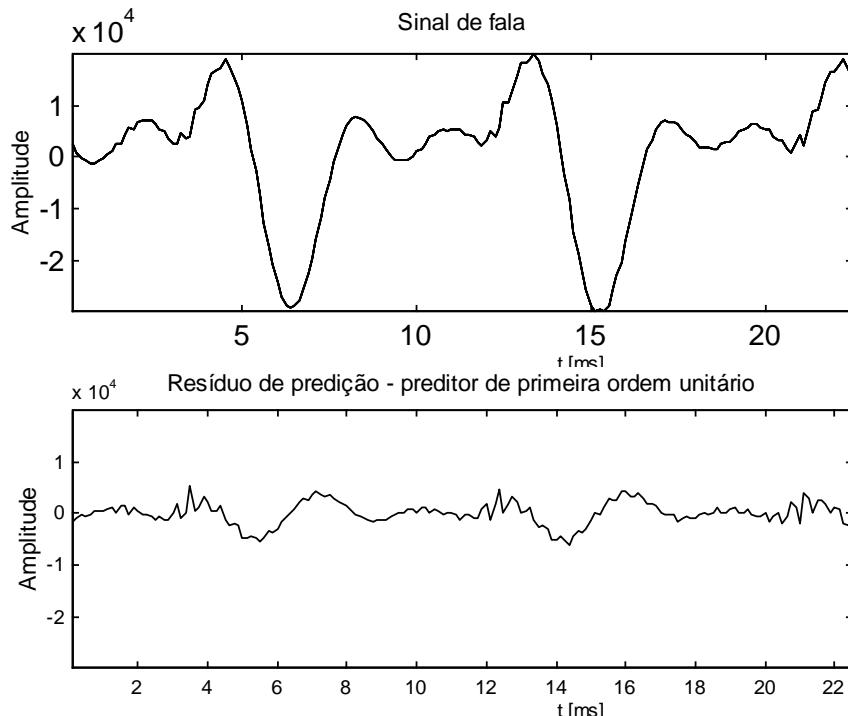


Figura 4.4

Exemplo do desempenho de um preditor de 1ª ordem unitário.
Em cima representa-se 22,5 ms de um sinal de fala. Em baixo o respetivo erro de predição. Estes dois sinais são apresentados na mesma escala, sendo visível a redução na gama dinâmica.

O DPCM unitário não terá nenhuma vantagem em relação ao PCM quando o ganho de predição for igual a 0 dB, ou seja $r[1]=0,5$ (equação 4.15), sendo vantajoso apenas para correlações superiores a 0,5. Para um valor de $r[1]$ de 0,8 o ganho de predição é de 4 dB, chegando aos 12 dB para um valor de 0,97. O DPCM tem então no máximo um ganho de 2 bits de codificação por amostra em relação a um codificador PCM.

4.1.4 Adaptação do preditor - preditor linear de primeira ordem

Supondo o esquema de blocos da figura 4.2 que contém um preditor linear de primeira ordem, o sinal predito⁹ é dado por:

$$m_p[n] = am[n-1]. \quad (4.16)$$

O coeficiente de predição ótimo, a , ou seja aquele que minimiza a potência do erro de predição, corresponde a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_e}{\partial a} &= \frac{\partial \left(\frac{1}{N} \sum_n m^2[n] + a^2 \frac{1}{N} \sum_n m^2[n-1] - 2a \frac{1}{N} \sum_n m[n]m[n-1] \right)}{\partial a}, \quad (4.17) \\ &= 2a \frac{1}{N} \sum_n m^2[n-1] - 2 \frac{1}{N} \sum_n m[n]m[n-1] = 0 \end{aligned}$$

pelo que o valor ótimo do coeficiente de predição é dado por:

$$a = \frac{\sum_n m[n]m[n-1]}{\sum_n m^2[n-1]} = \frac{R[1]}{R[0]} = r[1]. \quad (4.18)$$

O coeficiente de predição é ótimo apenas para sinais com a mesma autocorrelação (de 1^a ordem), pelo que o preditor está adaptado ao sinal de entrada.

⁹ Assume-se a situação ideal da predição baseada na amostra anterior e não na amostra quantificada. No caso genérico da predição com a amostra atrasada de k , substitui-se 1 por k (equações 4.13 a 4.19).

Das equações 4.14 e 4.18 o ganho de predição vem:

$$Gp_{dB} = 10 \times \log_{10} \left(\frac{1}{1 - r[1]^2} \right). \quad (4.19)$$

Como mostra a figura 4.5, o ganho de predição com preditor adaptado é sempre maior ou igual a 0 dB, independentemente do valor da autocorrelação, o que não acontece com preditor unitário de primeira ordem, em que o ganho de predição pode ser negativo.

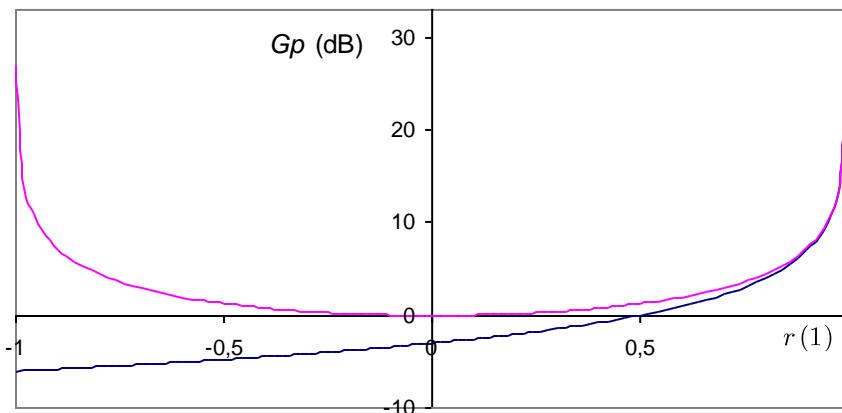


Figura 4.5

Ganho de predição função da autocorrelação normalizada de primeira ordem para preditores de 1^a ordem unitário e adaptado.

O mesmo resultado é obtido por projecção do sinal de entrada sobre a sua versão deslocada de uma amostra, como ilustrado na figura 4.6, assumindo a *melhor* representação do primeiro sobre este último. De facto, a autocorrelação $R[k]$ não é mais do que o produto interno entre um sinal e a sua versão deslocada de k amostras, correspondendo $r[k]$ à respetiva projeção. À esquerda da figura exemplifica-se a predição com coeficiente unitário, para 3 situações distintas. A predição coincide com a amostra (quantificada) anterior, sendo o erro de predição a diferença entre este e o sinal de entrada. O ganho de predição é de 0 dB quando a projecção do sinal de entrada sobre a predição for de 0,5. A mesma conclusão é retirada da equação 4.15. O ganho de predição só é positivo à direita deste ponto.

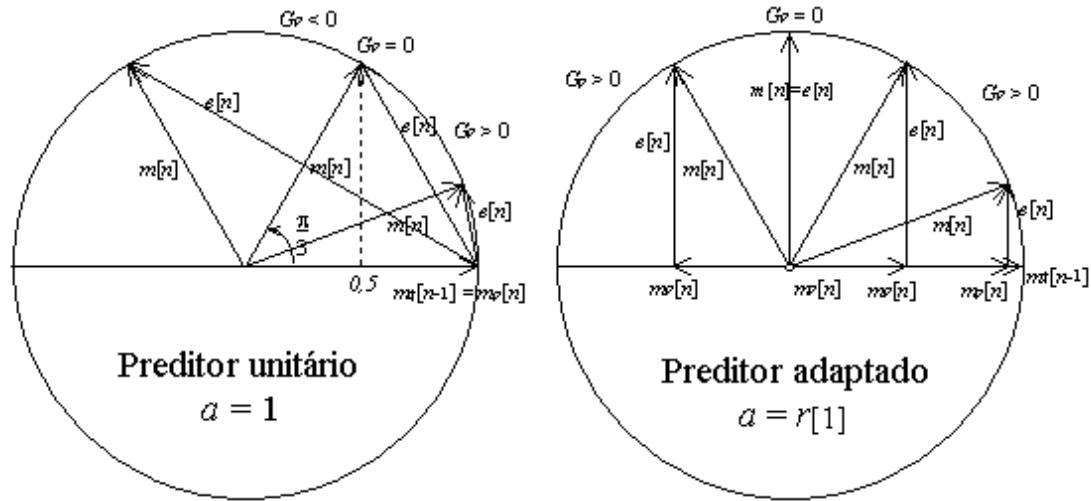


Figura 4.6
Interpretação vetorial da predição.

À esquerda, predição com coeficiente unitário. À direita, predição adaptada.

Para o preditor unitário, $G_p=0$ dB quando a amostra faz um “ângulo” de $\pi/3$ em relação à predição. Para uma sinusoide como sinal de entrada em que $r[1]=\cos(2\pi f/f_s)$ (Apêndice 2), então $2\pi f/f_s=\pi/3$. Para um sinal genérico pode-se assumir uma frequência equivalente à da derivada máxima, que denominaremos f'_max , pelo que o ganho de predição é positivo desde que:

$$\frac{2\pi f'_\text{max}}{f_s} < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow f'_\text{max} < \frac{f_s}{6}. \quad (4.20)$$

Para sinais de fala esta situação é quase sempre verdade quando este é amostrado, como em qualidade telefónica, a 8 kHz ($f'_\text{max} < 1,333$ kHz).

À direita da figura exemplifica-se a predição adaptada, para 4 situações distintas. A predição corresponde à projecção sobre a amostra anterior, minimizando a energia (norma do vetor) do erro de predição, que lhe é ortogonal. O ganho de predição é sempre positivo (equação 4.19, com excepção da situação em que o sinal de entrada e a sua projecção são ortogonais ($a=r[1]=0$), em que o erro de predição coincide com o sinal de entrada e o codificador degenera num codificador PCM.

Note-se que a adaptação do preditor já não tem como objetivo tirar partido da semelhança entre amostras, como no preditor unitário, mas sim tirar partido da correlação entre amostras. Por exemplo se as amostras foram simétricas (muito diferentes) a correlação normalizada é -1 mas, pela equação 4.19, o ganho de predição são 0 dB, o mesmo que se as amostras consecutivas forem todas iguais, a que corresponde uma correlação normalizada de 1.

Os codificadores de fala recentemente normalizados utilizam predição de ordem mais elevada, tipicamente com as 10 últimas amostras, de modo a melhorar o ganho de predição. Os coeficientes são calculados no transmissor e enviados a intervalos regulares. No codificador utilizado em GSM, por exemplo, a cada intervalo de 20 ms são calculados e enviados 10 coeficientes.

4.1.5 Adaptação do quantificador - memória de 1 amostra

A utilização de um quantificador de valores fixos leva, como ilustrado na figura 4.7, a que quando a variância do sinal à sua entrada é grande, se possa exceder o valor máximo de quantificação e, por outro lado, para variâncias baixas, o ruído de quantificação seja elevado.

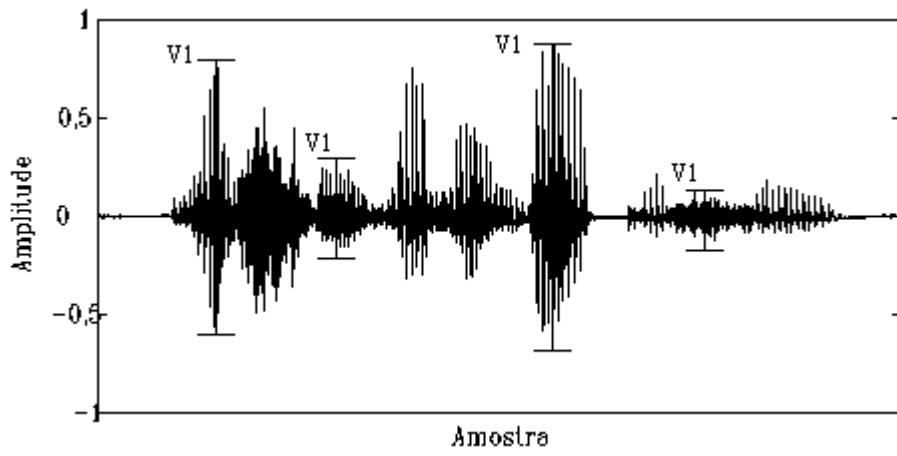


Figura 4.7
Adaptação de valor ótimo de quantificação.

São apresentados os valores ótimos do valor máximo de quantificação em função do tempo, dependentes da potência e da autocorrelação do sinal, para um preditor de 1^a ordem unitário.

A potência do sinal de entrada do quantificador é dependente da potência localizada e da autocorrelação do sinal de entrada e portanto do tempo, sendo possível adaptar localmente a gama do quantificador, tirando partido das zonas quase estacionárias do sinal (em que a potência e a autocorrelação variam lentamente, nomeadamente para sinais de fala), dando origem a uma modulação por código de pulso diferencial adaptativo (ADPCM – *adaptive differential pulse code modulation*).

Os parâmetros de adaptação podem ser obtidos do sinal a quantificar, sendo esta informação enviada para o recetor como informação lateral (AQF – *adaptive quantization with forward estimation*), o que contribui para o aumento do débito binário mas oferece um aumento da qualidade. Através da equação 4.9 e conhecido o ganho de predição através da equação 4.14, pode-se estimar o valor máximo de quantificação do sinal de erro de predição.

Outro método de adaptação, que evita o aumento do débito binário, corresponde a obter os parâmetros de adaptação do índice de quantificação, representado pelos bits de código, existentes no próprio recetor (AQB – *adaptive quantization with backward estimation*). Um exemplo deste método, bastante simples embora de desempenho limitado, é baseado no raciocínio seguinte: se o valor de quantificação numa amostra for próximo (em módulo) do valor máximo de quantificação V_1 , há risco de distorção de saturação de declive e, portanto, deve ser aumentado para quantificar a amostra seguinte; se, por outro lado, o valor de quantificação for pequeno em relação ao valor máximo de quantificação, este último pode ser diminuído de modo a diminuir o intervalo de quantificação e consequentemente o ruído de quantificação. Como mostrado na figura 4.8, o valor de V_1 no instante n depende então do seu valor anterior e do índice de quantificação na amostra anterior ($n-1$), seguindo a regra:

$$V_1[n] = V_1[n-1]M(i[n-1]). \quad (4.21)$$

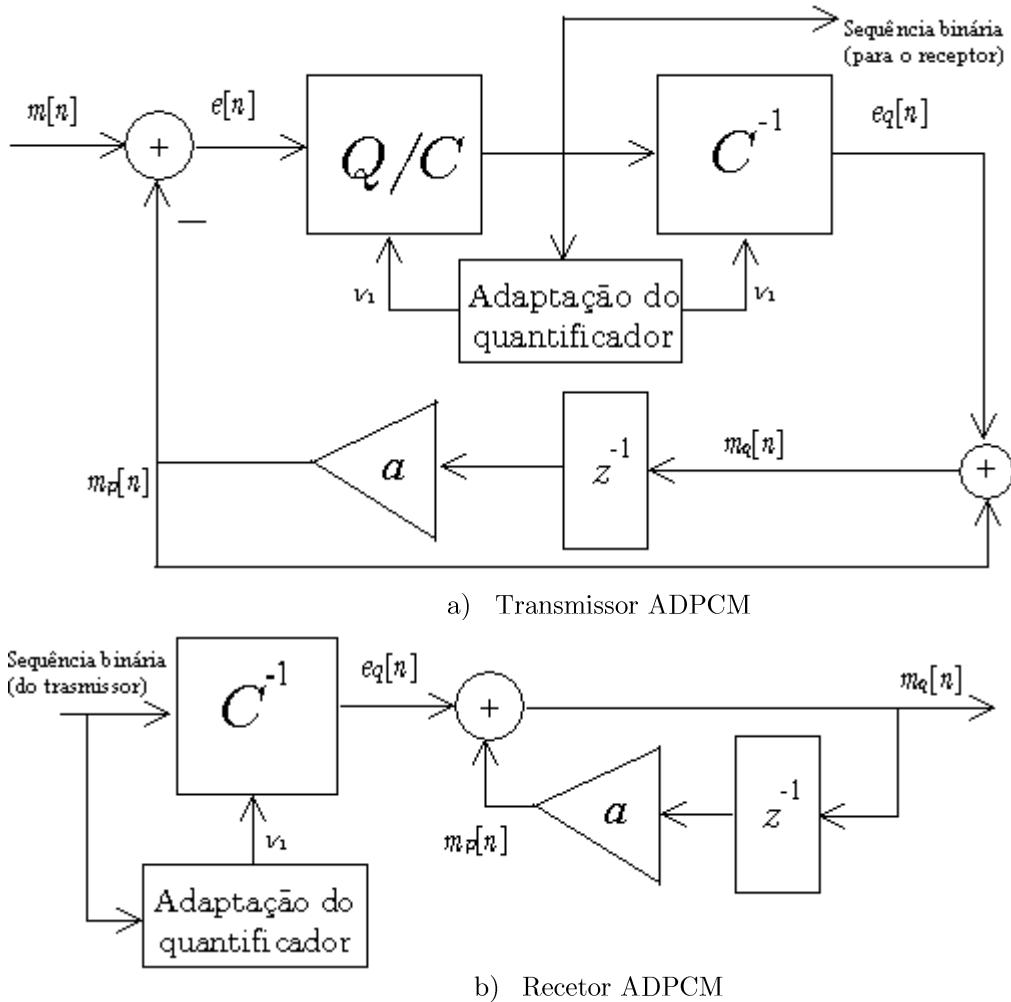


Figura 4.8

Modulação por código de pulso diferencial adaptativo.

Esquema de blocos do codificador ADPCM, com adaptação amostra a amostra dos níveis de quantificação, baseado no índice de quantificação.

Os valores de $M(i[n-1])$, apresentados na tabela 4.1, correspondem aos fatores multiplicativo do índice i do quantificador na amostra anterior.

| R | $M(0)$ | $M(1)$ | $M(2)$ | $M(3)$ | $M(4)$ | $M(5)$ | $M(6)$ | $M(7)$ | $M(8)$ | $M(9)$ | $M(10)$ | $M(11)$ | $M(12)$ | $M(13)$ | $M(14)$ | $M(15)$ |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 2 | 1,6 | 0,9 | 0,9 | 1,6 | | | | | | | | | | | | |
| 3 | 1,7 | 1,25 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 1,25 | 1,7 | | | | | | | | |
| 4 | 2,4 | 2,0 | 1,6 | 1,2 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 0,9 | 1,2 | 1,6 | 2,0 | 2,4 |

Tabela 4.1

Fatores multiplicativos de adaptação de quantificadores.

$M(1)$ corresponde ao valor mais pequeno de quantificação, correspondendo o aumento do índice a um aumento do valor de quantificação.

Para outro número de bits de codificação considera-se que na parte central da tabela o fator multiplicativo é 0,9 e que nas zonas externas este valor é superior a 1. Note-se que com o coeficiente de predição igual a zero o codificador (A)DPCM transforma-se num codificador (A)PCM (PCM adaptativo).

Uma versão mais complexa do codificador ADPCM, com adaptação do preditor e do quantificador foi adotada como recomendação G.726 (1990 unificação das Rec. G.721 (1984) e G.723 (1988)) pelo ITU-T, para codificação de sinais de fala com débitos binários de 16, 24, 32 e 40 kbit/s (2, 3, 4 e 5 bits por amostra). São utilizados 32 kbit/s para duplicar o número de conversações em relação à recomendação G.711 em canais telefónicos e na norma DECT de sistemas telefónicas de curto alcance.

4.1.6 Propagação dos erros de canal de transmissão

Uma desvantagem da codificação DPCM em relação à codificação PCM prende-se com a propagação de erros no canal de transmissão. Em PCM, um erro no canal de transmissão afeta apenas a amostra correspondente, enquanto em DPCM este erro é propagado às amostras posteriores, pois o sinal de saída é calculado através do sistema linear representado por:

$$m_q[n] = m_p[n] + e_q[n] = am_q[n-1] + e_q[n]. \quad (4.22)$$

Se $|a| < 1$, então o erro é atenuado a cada iteração e tende para zero tão mais rapidamente quanto menor for o valor de $|a|$. Se $|a| = 1$, então o erro nunca é atenuado, enquanto para $|a| > 1$ o erro é aumentado a cada iteração. A mesma conclusão é retirada da função de transferência em Z correspondente à equação às diferenças de 4.22, dada por:

$$H(z) = \frac{z}{z - a}. \quad (4.23)$$

A função de transferência tem um pólo em $z = a$. Este sistema é estável desde que este pólo esteja dentro do círculo unitário, ou seja $|a| < 1$, criticamente estável para $|a| = 1$ e instável para $|a| > 1$.

Na presença de erros no canal de transmissão, para além da propagação de erros comum ao DPCM, o ADPCM tem como grande desvantagem uma adaptação mal realizada no receptor, o que conduz a que os quantificadores do receptor e do transmissor sejam diferentes, levando a uma perda significativa de qualidade.

4.2 Modulação Delta

A modulação Delta (DM - *delta modulation*) é um caso particular da modulação DPCM utilizando um codificador de 1 bit por amostra. O esquema de blocos deste codificador é apresentado na figura 4.9. O bit de codificação apenas dá informação do sentido do sinal diferença (se positivo ou se negativo), sendo o sinal de saída incrementado ou decrementado de um passo fixo Δ (quantificador *midrise* de 1 bit por amostra).

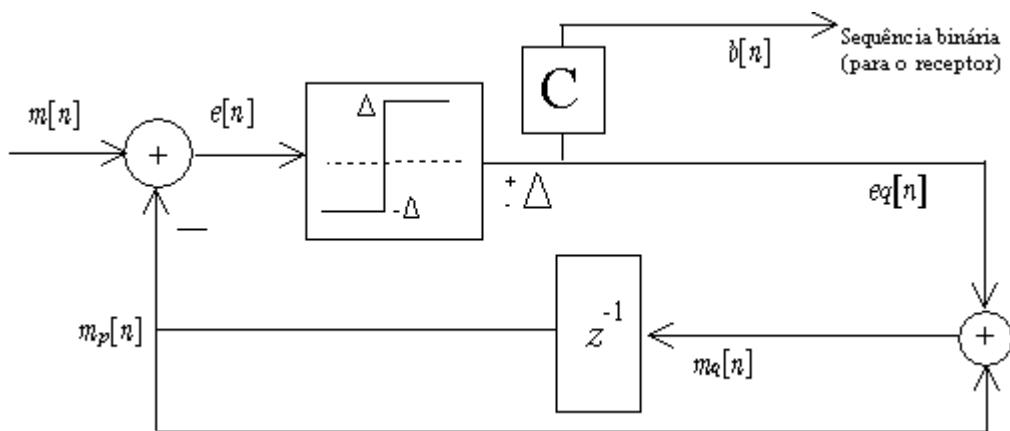


Figura 4.9
Modulação Delta (DM)

Esquema de blocos de um transmissor por Modulação Delta, representando o bit de codificação se a diferença entre o sinal de entrada e a saída anterior é positiva ou negativa. O receptor é igual ao do DPCM (Figura 4.2 b)), mas com um descodificador de 1 bit (2 valores, $\pm\Delta$).

Embora com estas restrições, e não se esperando de um codificador de 1 bit por amostra uma grande qualidade, este tipo de codificação teve a sua época quando a tecnologia digital ainda era de custo elevado, pois pode ser implementado com pequena complexidade tendo como entrada o sinal analógico e utilizando componentes analógicos (comparadores, integradores, S&H), como mostrado na figura 4.10.

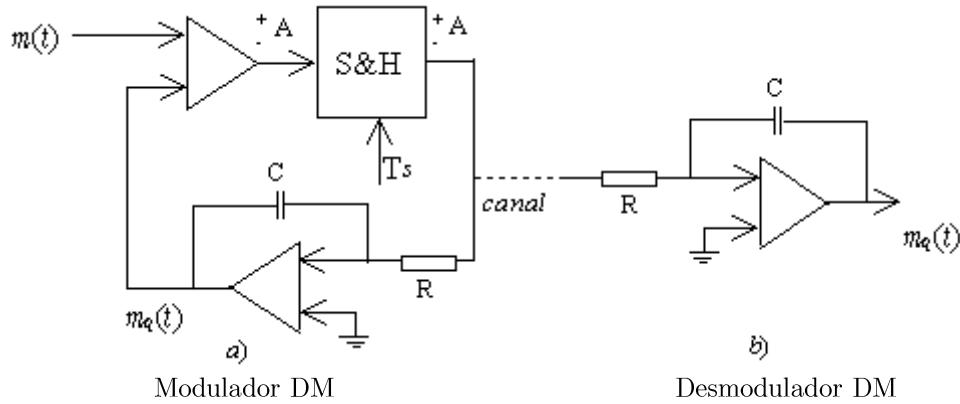


Figura 4.10
Implementação analógica da modulação Delta.
O valor de Δ é dado por ATs/RC .

4.2.1 Tipos de distorção

Existem dois tipos de distorções introduzidas em DM, ilustradas na figura 4.11: a saturação de declive, já possível na codificação DPCM, característica das zonas de transição brusca do sinal, em que o passo Δ do quantificador não é suficiente para o acompanhar; e o ruído granular típico das zonas de silêncio ou de pequena variação do sinal de entrada, quando comparado com o passo Δ de quantificação.

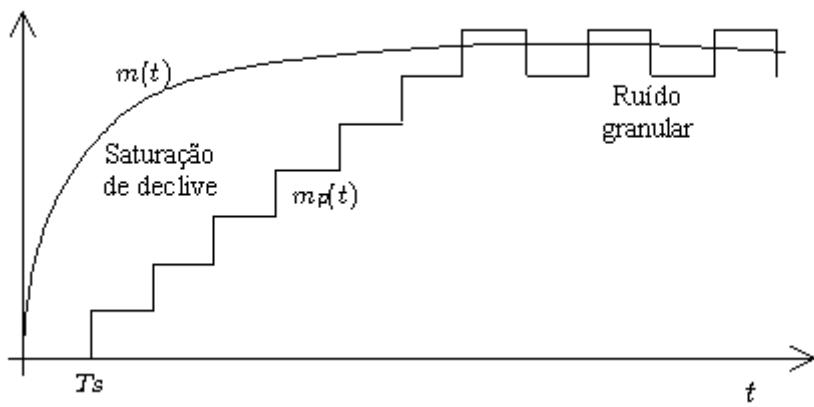


Figura 4.11
Tipos de distorção na Modulação Delta

Há dois tipos de distorção na modulação delta: a distorção de saturação de declive, típico das zonas de variação brusca do sinal em que o passo Δ do quantificador é insuficiente; o ruído granular, típico das zonas de pequena variação do sinal de entrada em que o passo Δ do quantificador é demasiado grande.

Existe um compromisso entre estes dois tipos de ruído: aumentando o passo Δ de quantificação para se evitar a saturação de declive aumenta-se o ruído granular e vice-versa. Em PCM e DPCM o ruído granular pode ser evitado com recurso a um codificador *midtread*, o que não é possível em DM, por ser utilizado 1 bit de codificação.

4.2.2 Relação sinal-ruído em DM

De modo a evitar completamente o ruído de saturação de declive o valor de Δ tem que no mínimo igual à variação máxima do sinal no intervalo entre duas amostras $T_s=1/f_s$:

$$\Delta \geq \left| \frac{\partial m(t)}{\partial t} \right|_{\max} T_s = \frac{m'_{\max}}{f_s}, \quad (4.24)$$

sendo m'_{\max} a derivada máxima do sinal de entrada. Quando o codificador DM funciona sem saturação de declive pode-se assumir que a função densidade de probabilidade do ruído é uniforme entre $-\Delta$ e Δ , e:

$$\sigma_q^2 = \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} e^2 de = \frac{\Delta^2}{3}. \quad (4.25)$$

Repare-se que $2\Delta = \Delta_q$, pelo que a expressão 4.25 coincide com a expressão 2.10. A *SNR* de quantificação vem, com o valor mínimo de Δ imposto pela equação 4.24:

$$SNR_q = \frac{P}{\sigma_q^2} = \frac{3}{\Delta^2} P = 3 \left(\frac{f_s}{m'_{\max}} \right)^2 P. \quad (4.26)$$

Na pior das situações a derivada máxima do sinal de entrada é dada pela frequência máxima do sinal W , correspondendo a $2\pi W m'_{\max}$. Para sinais de fala, contudo, esta dá-se para uma frequência inferior, a frequência equivalente à da derivada máxima. Tendo em consideração a relação (W/f') a equação 4.26 vem,

$$SNR_q = 3 \left(\frac{f_s}{2\pi f' m_{\max}} \right)^2 P = 3 \left(\frac{2W}{2\pi f'} \right)^2 P_n = \frac{3}{\pi^2} \left(\frac{W}{f'} \right)^2 P_n, \quad (4.27)$$

ou em decibéis:

$$SNR_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{W}{f'} \right) + 10 \log_{10} \left(\frac{3P_n}{\pi^2} \right). \quad (4.28)$$

4.2.3 ADM - Modulação Delta adaptada

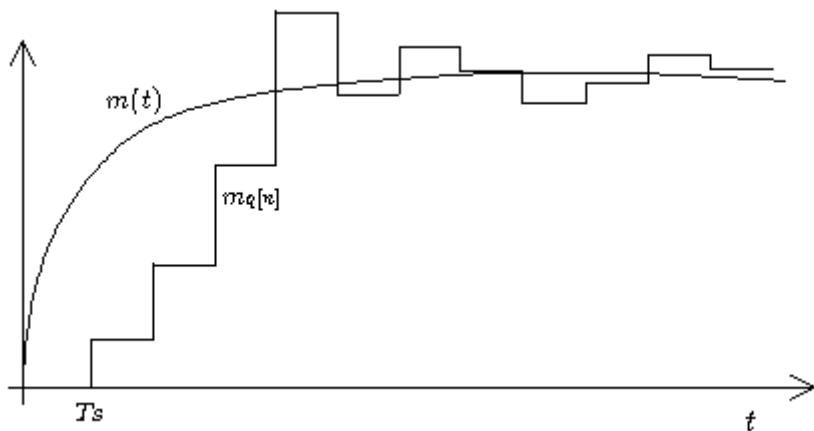
Os codificadores por modulação delta não são competitivos em relação ao PCM ou ao DPCM devido ao forte compromisso entre o ruído granular e de saturação de declive. É no entanto possível aumentar a qualidade adaptando o passo Δ de quantificação, dando origem à modulação delta adaptada (ADM - *adaptive delta modulation*).

O ruído de saturação de declive na modulação delta pode ser detetado através de uma sequência de bits de saída com o mesmo nível lógico. Por outro lado, uma sequência alternada de níveis lógicos indica um sinal com frequência muito baixa e portanto a predominância de ruído granular. A detecção de ambos os tipos de ruído pode ser aproveitada para adaptar o valor do passo Δ de quantificação.

São conhecidos alguns métodos de adaptação, utilizando algoritmos amostra-a-amostra, seguindo o princípio acima referido, devendo este ser aumentado quando se deteta ruído de saturação de declive e diminuído quando se deteta ruído granular. Um método simples, mas eficaz, de adaptação amostra-a-amostra, tem a regra seguinte:

$$\Delta[n] = \Delta[n-1] \left(1 + \alpha \frac{b[n-1]}{b[n]} \right) \quad 0 < \alpha < 1, \quad (4.29)$$

em que $b[n]$ é o valor do nível lógico de saída do quantificador no instante n , neste caso tomando os valores ± 1 e α gere o grau de adaptação. Por exemplo com $\alpha=0,5$ o passo da amostra anterior é multiplicado por 1,5 caso se suspeite de saturação de declive e dividido por 0,5 caso se suspeite de ruído granular. Este método é exemplificado na figura 4.12.



**Figura 4.12
Modulação Delta Adaptada**

O passo Δ do modulador é adaptado de modo a diminuir a distorção, segundo o raciocínio seguinte: uma sequência de bits de saída com o mesmo nível lógico indica distorção de saturação de declive e o passo é aumentado; uma sequência de bits de saída com níveis lógicos alternados indica ruído granular e o passo é diminuído.

O princípio de adaptação ilustrado é utilizado em métodos mais complexos mas também mais eficazes, para implementar codificadores de sinais de fala, tais como o CVSD (*continuous variable slope delta*), com débitos binários entre os 16 kbit/s e os 128 kbit/s. Para além da adaptação o aumento da qualidade é conseguido através do aumento da frequência de amostragem (equação 4.26) e consequente aumento da correlação entre amostras.

Como em ADPCM, devido à adaptação estes codificadores são menos robustos na presença de erros de canal que as respetivas versões sem adaptação, já que a predição está a ser efetuada com amostras descodificadas incorretas.

5 Sobre-amostragem

Todas as análises aos codificadores efetuadas até agora pressupuseram que a frequência de amostragem é o ritmo de Nyquist, $f_s=2W$, a que corresponde o menor débito binário (equação 2.9). Veremos nesta secção o efeito da sobre-amostragem (utilização de uma frequência maior que o ritmo de Nyquist) nos diversos codificadores.

5.1 Ganho de filtragem

O ruído de quantificação tem normalmente, para sinais de entrada aleatórios, uma função densidade espectral plana (ruído branco) entre $-f_s/2$ e $f_s/2$. Por este facto, como mostrado na figura 5.1, a potência do ruído pode ser diminuída por filtragem passa-baixo à frequência máxima do sinal de entrada.

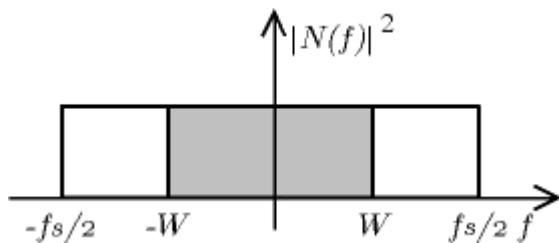


Figura 5.1

Função densidade espectral de potência do ruído de quantificação.

Estendendo-se o espetro de potência do ruído entre $-f_s/2$ e $f_s/2$ é possível diminui-lo por filtragem passa-baixo à máxima frequência W do sinal de entrada.

O ganho de filtragem é a relação entre a área da função densidade espectral de potência do ruído antes e depois da filtragem:

$$G_f = \frac{f_s}{2W} = OSR, \quad (5.1)$$

em que *OSR* (*over-sampling ratio*) é uma medida da sobre-amostragem e corresponde ao número de vezes que a frequência de amostragem excede o ritmo de Nyquist. A duplicação da frequência (1 oitava) leva a um ganho de 3 dB ($10\log_{10}(2)$).

5.2 Sobre-amostragem em PCM

Como já referido no fim da secção 2, o aumento da complexidade dos conversores e um valor muito pequeno (Δ_q) a discriminar, coloca limites ao número de bits de codificação por amostra. Para resolver este problema, a sobre-amostragem pode ser utilizada em PCM, sendo válida a equação 5.1 do ganho de filtragem. A duplicação da frequência de amostragem (1 oitava) levaria a um aumento de 3 dB na SNR e o sinal poderá ser codificado com até mais 0,5 bits (6 dB por bit) por cada oitava de aumento na frequência de amostragem:

$$R_f \leq R_i + 0,5\log_2(OSR), \quad (5.2)$$

em que R_i e R_f correspondem, respetivamente, ao número de bits por amostra antes e depois da filtragem, com $R_i \leq R_f$. A conversão analógico-digital é assim efetuada com menos bits por amostra e portanto com menos resolução (Δ_q maiores), sendo fácil de implementar e evitando que o intervalo de quantificação se confunda com ruído. Após esta conversão é retirado o ruído fora da banda por filtragem já efetuada digitalmente. Para reduzir a frequência de amostragem e, consequentemente, o débito binário, o sinal é posteriormente decimado, ainda digitalmente. Todo este processo é ilustrado na figura 5.2.

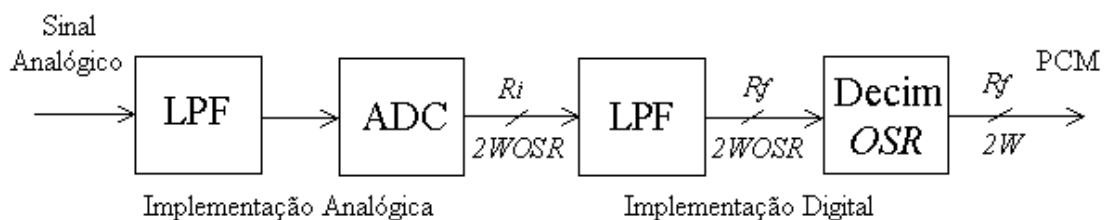


Figura 5.2
Diagrama de blocos de um conversor analógico-digital PCM com sobre-amostragem.

A implementação digital pode ser efetuada com um processador, partilhado com outras tarefas de processamento.

LPF - Filtro passa-baixo; ADC - Conversor analógico-digital PCM tradicional; Decim-OSR - Decimação de OSR amostras;

A melhoria da qualidade é então conseguida utilizando sobre-amostragem e com recurso a algum processamento digital, ou seja, com aumento do custo. Contudo muitos sistemas, *e.g.* telemóveis e processadores de áudio e vídeo, já incluem processadores que podem ser partilhados nesta tarefa.

A vantagem da sobre-amostragem não se resume à melhoria da qualidade utilizando um conversor tradicional de baixa resolução. Também na implementação do filtro anti-aliasing, como mostra a figura 5.3, existem vantagens, pois este pode ter uma zona de transição muito mais suave.

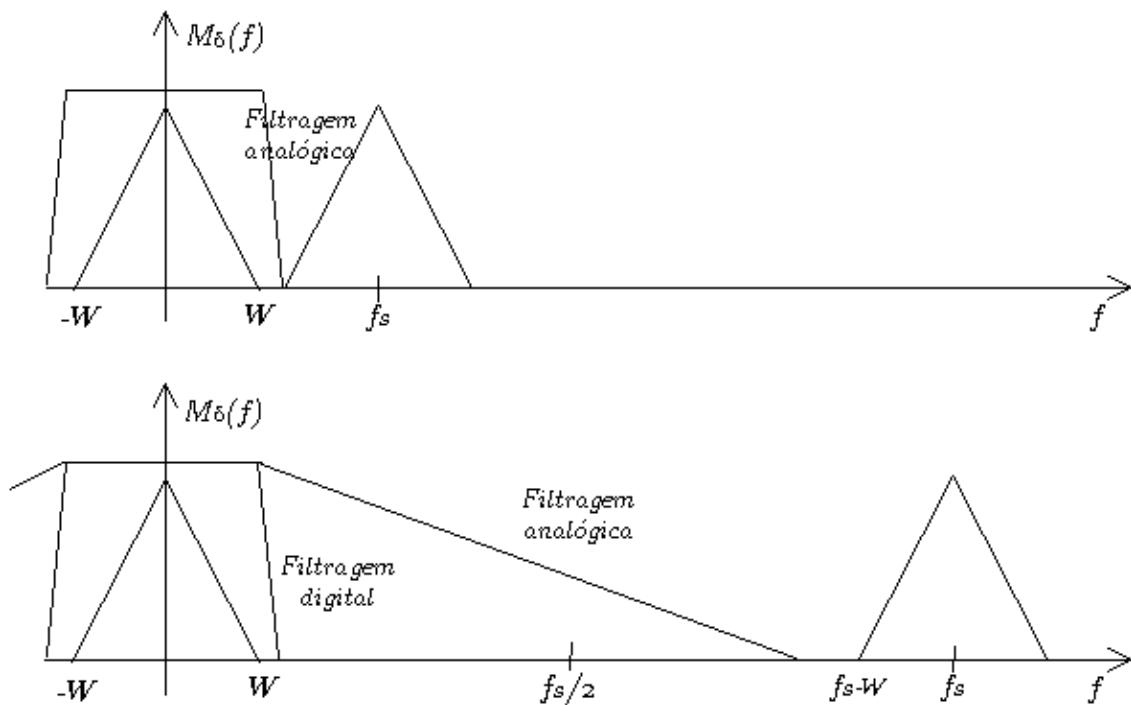


Figura 5.3
Filtragem anti-aliasing em conversores analógico-digital.
 Em cima: Sem sobre-amostragem - Filtro anti-aliasing abrupto.
 Em baixo: Com sobre-amostragem - Filtro anti-aliasing suave.

Por exemplo para converter sinais de fala em banda telefónica, utilizada em telefones digitais, a frequência de amostragem é de 8 kHz e a frequência máxima do sinal de $W=3300$ Hz. Existe assim uma pequena banda de guarda de 700 Hz (de W a $f_s/2$) para colocar a zona de transição do filtro anti-aliasing. Com um *OSR* de 2, a frequência de amostragem é de 16 kHz e o filtro passa a

ter uma zona de transição de $16000-4000-3300=8700$ Hz (de W a $f_s-f_s(\text{final})/2$), pois tem apenas que se evitar o *aliasing* abaixo de metade da frequência de amostragem final, ou seja, 4 kHz.

5.3 Sobre-amostragem em DPCM

A descrição efetuada para PCM também é válida para DPCM. Falta contudo contabilizar o acréscimo no ganho de predição devido à diminuição do tempo entre amostras, com a consequente maior correlação. Por cada oitava de aumento na frequência de amostragem o tempo entre amostras passa para metade, o que leva a metade da máxima variação e, consequentemente, a metade do valor máximo de quantificação V_1 . Como a SNR depende quadraticamente deste valor (equação 4.4) o aumento correspondente é de 6 dB, sendo o aumento final de 9 dB por oitava, ao contar com o ganho de filtragem.

5.4 Sobre-amostragem em DM

A codificação DM é de facto um compromisso entre a fuga à saturação de declive e a minimização do ruído granular. Para resolver este problema, uma alternativa à adaptação do intervalo de quantificação. Outra alternativa é a sobre-amostragem. Esta, como em DPCM, faz aumentar a correlação (parecença) entre amostras adjacentes (equações 4.24 e 4.26), diminuindo o valor do passo Δ do quantificador, embora à custa do aumento do débito binário. Desde que o codificador esteja a funcionar à volta do ponto ótimo (mínimo de ruído granular sem saturação de declive) a função densidade espectral de potência do ruído é plana, como representado na figura 5.1 e pressuposto na equação 5.1. Se pelo contrário o codificador estiver a funcionar numa zona de predominância de ruído granular a função densidade espectral de potência do ruído tem um caráter passa-alto. Numa zona de declive nulo do sinal, por exemplo, o ruído granular produz uma onda quadrada cuja primeira harmónica se situa em $f_s/2$, completamente eliminada pela filtragem

passa-baixo no receptor. Nestas condições a equação 5.1 constitui um limite inferior para o ganho de filtragem.

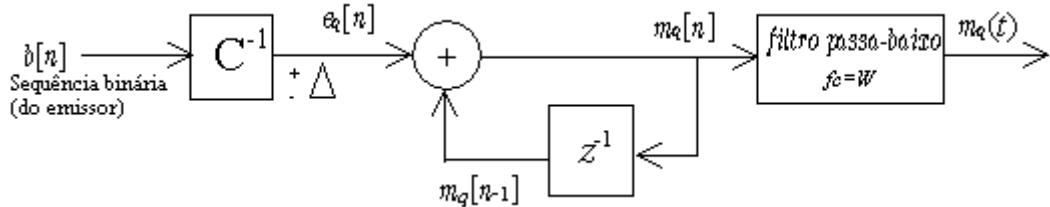


Figura 5.4
Recetor DM com filtragem final passa-baixo (W).

A equação completa da SNR em DM com pós-filtragem, na ausência de saturação de declive, é dada multiplicando a equação 4.26 pela equação 5.1,

$$SNR_q = 3 \left(\frac{f_s}{m_{\max}} \right)^2 PG_f = 3 \frac{f_s^3}{2Wm_{\max}^2} P. \quad (5.3)$$

Introduzindo, como em 4.27, a relação (W/f') entre a frequência máxima do sinal e a frequência da máxima derivada, a equação 5.3 vem:

$$SNR_q = 3 \frac{W^2}{W^2} \frac{f_s^3}{2W(2\pi f' m_{\max})^2} P = \left(\frac{f_s}{2W} \right)^3 \left(\frac{W}{f'} \right)^2 \frac{3}{\pi^2} \frac{P}{m_{\max}^2}, \quad (5.4)$$

ou em decibéis:

$$SNR_{dB} = 30 \log_{10}(OSR) + 20 \log_{10} \left(\frac{W}{f'} \right) + 10 \log_{10} \left(\frac{3}{\pi^2} \frac{P}{m_{\max}^2} \right). \quad (5.5)$$

Verifica-se a dependência da SNR com o cubo da frequência de amostragem. Por cada oitava o ganho é de $10\log_{10}(2^3)=9$ dB de relação sinal-ruído, como em DPCM, mas o débito binário também duplica. A grande vantagem do DM é a sua baixa complexidade e consequentemente o preço, mesmo quando opera a frequências de amostragem elevadas, pois pode ter diretamente na entrada o sinal analógico e utilizar componentes analógicos (figura 4.9). Contudo a diminuição de Δ para valores perto dos do ruído térmico limita esta opção.

6 Modulação delta-sigma

Melhorar a SNR implica nos codificadores estudados a diminuição do intervalo de quantificação, aumentando o número de intervalos do quantificador ou aumentando a correlação entre amostras. Cabe ao ganho de filtragem um papel menor (3 dB por oitava). A diminuição do intervalo de quantificação tem contudo um limite quando este valor se aproxima do ruído térmico nos amplificadores operacionais. Evitar este limite, mantendo a complexidade baixa, mas melhorando o ganho de filtragem, deu origem à modulação delta-sigma ($\Delta\Sigma$), um dos paradigmas na conversão analógico-digital e digital-analógico.

A cadeia de modulação DM tem dois integradores, um na codificação e outro na descodificação, como mostrado na figura 6.1 a).

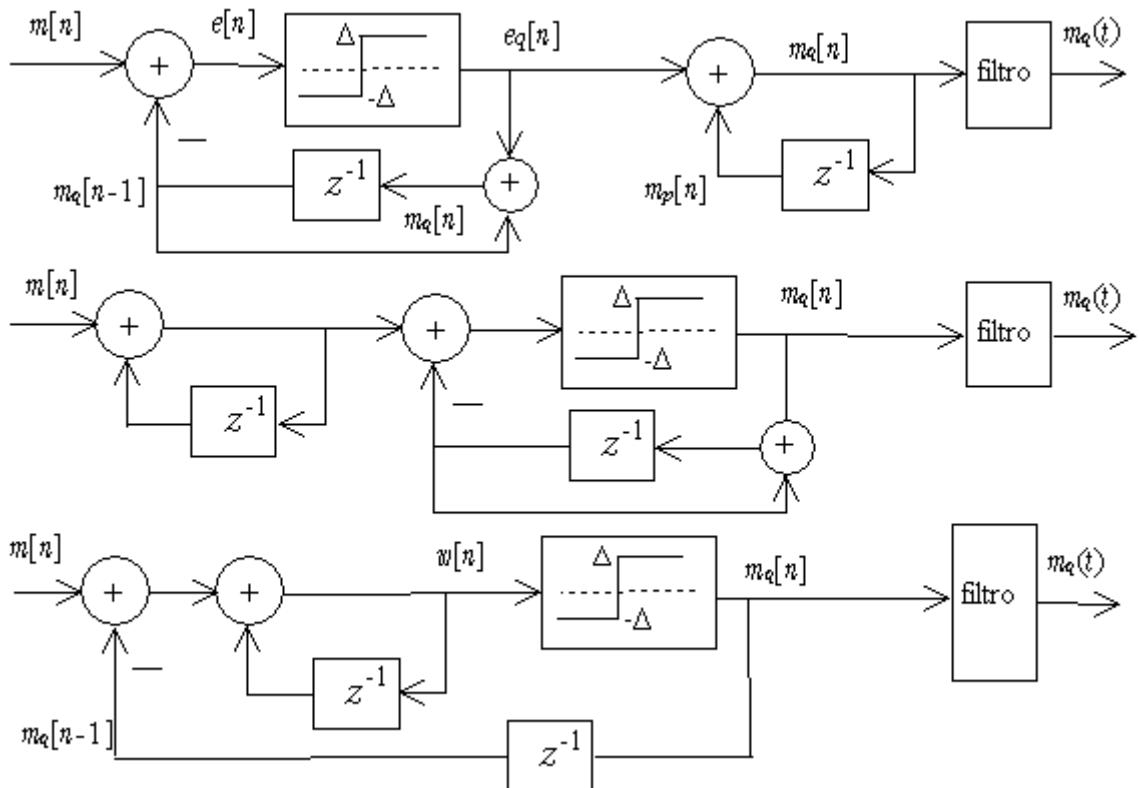


Figura 6.1
Da Modulação Δ à modulação $\Delta\Sigma$
Em cima. Modulação Δ ; No meio: Configuração intermédia Em baixo: Modulação $\Delta\Sigma$.

Como a integração é uma operação linear, o integrador do descodificador pode ser deslocado para antes do codificador, como mostrado na figura 6.1 b), sem alterar a relação entrada-saída. Estes dois integradores podem ainda ser combinados linearmente em apenas um integrador, na posição mostrada na figura 6.1 c), resultando na modulação $\Delta\Sigma$. O nome $\Delta\Sigma$ vem do facto de se colocar um integrador à frente de um derivador.

6.1 Formatação do ruído e SNR

O esquema de blocos do codificador $\Delta\Sigma$ no domínio da frequência (transformada Z) é apresentado na figura 6.2. Este é obtido substituindo o integrador pela sua função de transferência $1/(1-z^{-1})$ e modelando o quantificador como a soma do sinal à sua entrada com o ruído de quantificação.

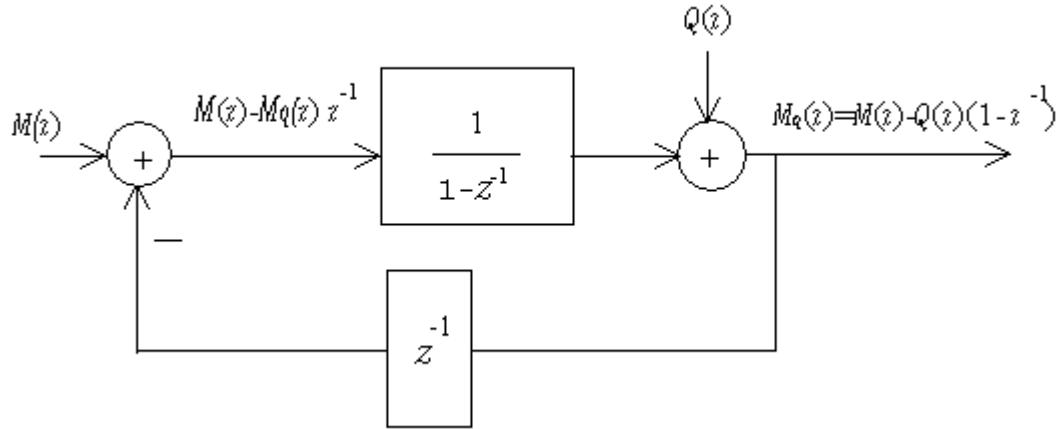


Figura 6.2
Esquema de blocos da modulação $\Delta\Sigma$ no domínio da frequência.

Da análise do esquema de blocos da figura 6.2 facilmente se verifica que,

$$\begin{aligned}
 M_q(z) &= \frac{M(z) - M_q(z)z^{-1}}{1 - z^{-1}} - Q(z) \\
 M_q(z) &= \frac{M(z) - M_q(z)z^{-1} - Q(z)(1 - z^{-1})}{1 - z^{-1}} \\
 M_q(z)(1 - z^{-1}) &= M(z) - M_q(z)z^{-1} - Q(z)(1 - z^{-1}) \\
 M_q(z) &= M(z) - Q(z)(1 - z^{-1}). \tag{6.1}
 \end{aligned}$$

O sinal de saída corresponde ao sinal de entrada subtraído ao ruído de quantificação, sendo este último filtrado pela primeira diferença ($1-z^{-1}$). A função densidade espectral de potência do ruído corresponde ao produto entre a potência do ruído como dado pela equação 4.25 (na banda f_s) e o módulo ao quadrado da resposta da primeira diferença. Analisando no domínio da transformada de *Fourier* (análise em frequência) substituindo z^{-1} pelo atraso de uma amostra, ou seja, por $e^{-j2\pi f/f_s}$,

$$\begin{aligned}
 |N(f)|^2 &= \frac{\Delta^2}{3f_s} \left| 1 - e^{-j2\pi f/f_s} \right|^2 \\
 &= \frac{\Delta^2}{3f_s} \left| 1 - \cos\left(\frac{2\pi f}{f_s}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi f}{f_s}\right) \right|^2 \\
 &= \frac{\Delta^2}{3f_s} \left(\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi f}{f_s}\right) \right)^2 + \sin^2\left(\frac{2\pi f}{f_s}\right) \right) \\
 &= \frac{\Delta^2}{3f_s} \left(1 + \cos^2\left(\frac{2\pi f}{f_s}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_s}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi f}{f_s}\right) \right) \\
 &= \frac{\Delta^2}{3f_s} \left(2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi f}{f_s}\right) \right) = \frac{\Delta^2}{3f_s} \left(4 \sin^2\left(\frac{\pi f}{f_s}\right) \right)
 \end{aligned} \quad (6.2)$$

A função densidade espectral de potência do ruído está esboçada na figura 6.3. Verifica-se que o ruído deixa de ser plano para ser formatado (*noise shaping*) de modo a ter menos potência na banda do sinal.

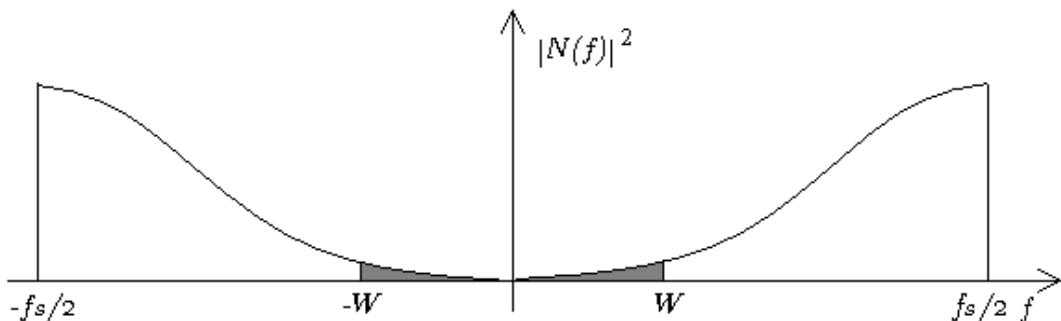


Figura 6.3

Função densidade espectral de potência do ruído de quantificação.
O ruído é formatado de modo a ter maior potência na zona de altas-frequências, não afetando o sinal de entrada.

Ao contrário da modulação diferencial, que sofre da possibilidade de saturação de declive ao quantificar a primeira diferença do sinal de entrada mas mantendo o ruído de quantificação inalterado no recetor, na modulação $\Delta\Sigma$ nunca há saturação de declive e é o ruído que é afetado pela primeira diferença (equação 6.1). Outra vantagem é o aumento da robustez a erros de canal, pois o valor da amostra atual deixa de depender do valor das amostras passadas.

A modulação $\Delta\Sigma$ quantifica o sinal de entrada e para que não haja saturação de amplitude $\Delta=m_{max}$. Impondo esta condição na equação 6.2 e integrando a função densidade espectral do ruído na banda do sinal, a potência do ruído vem:

$$\begin{aligned}
 \sigma_n^2 &= \int_{-W}^W |N(f)|^2 df \\
 &= \frac{4\Delta^2}{3f_s} \int_{-W}^W \sin^2\left(\frac{\pi f}{f_s}\right) df \quad f \ll f_s \\
 &= \frac{4m_{max}^2}{3f_s} \int_{-W}^W \left(\frac{\pi f}{f_s}\right)^2 df \quad \alpha \approx 0 \Rightarrow \sin(\alpha) = \alpha \\
 &= \frac{4\pi^2 m_{max}^2}{9f_s^3} \int_{-W}^W f^3 df \\
 &= \frac{\pi^2 m_{max}^2}{9} \left(\frac{2W}{f_s}\right)^3
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

e a relação sinal-ruído de quantificação,

$$SNR_q = \frac{9}{\pi^2} OSR^3 P_n, \tag{6.4}$$

ou em decibéis:

$$SNR_{dB} = 30 \log_{10}(OSR) + 10 \log_{10}\left(\frac{9P_n}{\pi^2}\right). \tag{6.5}$$

Esta equação é semelhante à equação 5.5 da *SNR* para DM (com $W=f'$), com a diferença que para o mesmo *OSR* obtém um acréscimo de desempenho de $10\log_{10}(3)=4,77$ dB. Contudo, se $f' < W/\sqrt{3}$, característica dos sinais de fala mas não de sinais genéricos, então a codificação DM tem melhor desempenho. Contudo a melhoria da SNR em DM é obtida essencialmente através da diminuição de Δ , o que se pode tornar impraticável para valores muito pequenos, enquanto em $\Delta\Sigma$ é obtida através da formatação do ruído e consequente diminuição deste na banda do sinal.

6.2 Modulação $\Delta\Sigma$ de ordem N

Se a relação sinal-ruído para determinada relação de sobre-amostragem não for suficiente, mas esta já for suficientemente elevada, esta pode-se melhorar a qualidade utilizando um maior número de derivadores-integradores, o que leva a uma modulação de ordem mais elevada (N derivadores-integradores corresponde a um modulador de ordem N), que diminui o ruído na banda, produzindo uma maior filtragem passa-alto, como ilustrado na figura 6.4.

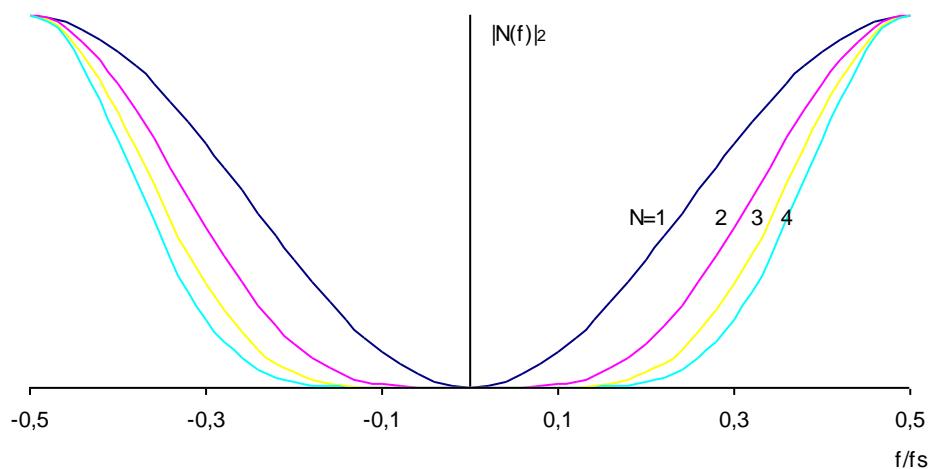


Figura 6.4
Função densidade espectral de potência do ruído de quantificação.
 Quanto maior for a ordem do modulador maior é a filtragem passa-alto, diminuindo o ruído na banda.

A função densidade espectral do ruído para um modulador de ordem N (parte respetiva ao diferenciador da equação 6.2 elevada à potência N) vem:

$$|N(f)|^2 = \frac{\Delta^2}{3f_s} \left(4 \sin^2 \left(\frac{\pi f}{f_s} \right) \right)^N. \quad (6.6)$$

Tomando o ruído na banda (Apêndice 4) a SNR vem:

$$SNR_q = \frac{3(2N+1)}{\pi^{2N}} OSR^{(2N+1)} P_n, \quad (6.7)$$

ou em decibéis:

$$SNR_{dB} = (2N+1) \log_{10}(OSR) + 10 \log_{10} \left(\frac{3(2N+1)P_n}{\pi^{2N}} \right). \quad (6.8)$$

Como se pode verificar a SNR aumenta $3(2N+1)$ decibéis por cada oitava de aumento na sobre-amostragem, correspondendo a $(N+1/2)$ bits, considerando que estes têm um ganho de 6,02 dB por bit.

6.3 Quantificação multi-bit

Para além do aumento da ordem, o que aumenta a complexidade, outro modo de aumentar a SNR sem aumentar a OSR corresponde a utilizar um quantificador de mais de 1 bit por amostra (multi-bit), ilustrado na figura 6.5, à custa do aumento do débito binário.

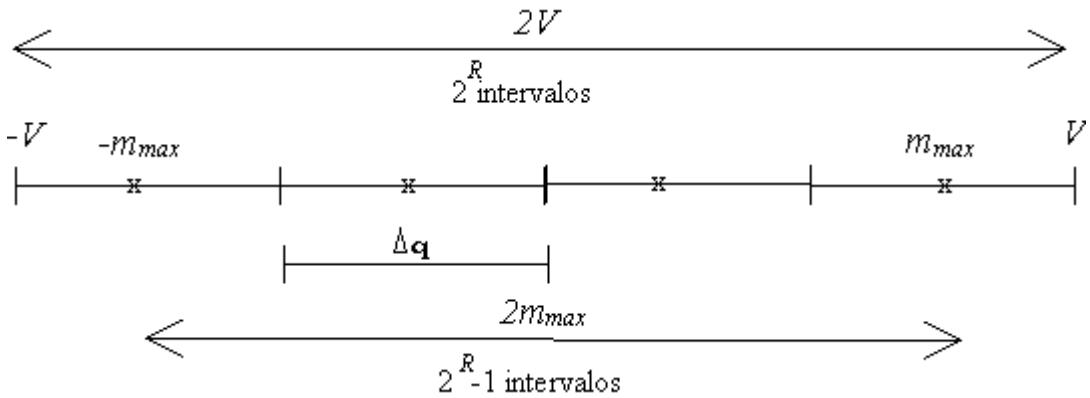


Figura 6.5
Quantificador multi-bit em $\Delta\Sigma$.

Existem 2 valores de quantificação em m_{max} e $-m_{max}$, sendo este intervalo dividido em $2^R - 1$ intervalos de quantificação:

$$\Delta_q = \frac{2m_{\max}}{2^R - 1}. \quad (6.9)$$

A SNR (apêndice 5) vem:

$$SNR_{dB} = (2N+1)10\log_{10}(OSR) + 10\log_{10}\left(\frac{3(2N+1)P_n}{\pi^{2N}}\right) + 20\log_{10}(2^R - 1). \quad (6.10)$$

A SNR tem um ganho de 9,54 dB quando se passa de 1 para 2 bits por amostra, tendendo este ganho para 6,02 dB por bit para um número superior de bits de codificação por amostra.

6.4 Conversores AD e DA por modulação $\Delta\Sigma$

Na conversão analógico-digital o sinal que se pretende obter é tipicamente do tipo PCM uniforme. Como já visto, para uma qualidade razoável (16 bits ou mais) a implementação direta em PCM é extremamente complexa pelo número de intervalos de quantificação a distinguir e pela sua dimensão reduzida. O mesmo se passa na conversão digital-analógico em que se pretende uma versão o mais fiel possível da versão digital em PCM uniforme.

Uma das vantagens da modulação $\Delta\Sigma$ prende-se com o facto do valor de Δ ser igual ao valor máximo do sinal de entrada para um quantificador de 1 bit, não dependendo nem da derivada do sinal nem da relação de sobre-amostragem, minimizando a complexidade para uma SNR elevada. Se para melhorar a qualidade for utilizado um quantificador multi-bit, este não ultrapassa tipicamente os 5 bits, mantendo a complexidade aceitável. Por esta razão duas das principais aplicações da modulação $\Delta\Sigma$ são a conversão analógico-digital e a digital-analógico, nomeadamente de sinais com largura de banda tipicamente inferior a 100 kHz (fala e áudio), que mesmo com valores razoáveis de sobre-amostragem não requer uma frequência de amostragem elevada.

6.4.1 Conversão digital-analógico por modulação $\Delta\Sigma$.

Na conversão digital-analógico o sinal de entrada é um sinal PCM uniforme com R_0 bits de codificação por amostra. Este é interpolado de OSR amostras de modo a converte-lo num sinal sobre-amostrado OSR vezes (figura 6.6). Nesta fase o sinal contém R_1 bits por amostra, em que R_1 é igual ou ligeiramente inferior a R_0 . Este é a seguir aplicado ao modulador $\Delta\Sigma$, convertendo-o num sinal de 1 bit por amostra (ou eventualmente R bits por amostra se o modulador for multi-bit), mas em que a maior parte do ruído está fora da banda do sinal. Este é primeiro convertido num sinal analógico com dois valores (DAC de 1 bit), muito fácil de realizar, e posteriormente filtrado na banda do sinal de modo a reduzir o ruído. Sendo o fator de sobre-amostragem elevado, este filtro não tem que eliminar as réplicas espetais, pelo que poderá não ser um filtro muito seletivo.

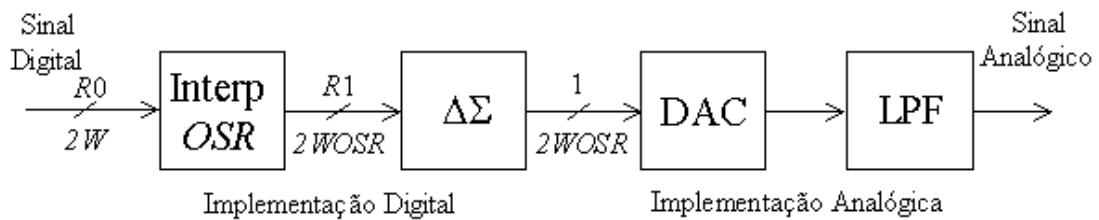


Figura 6.6
Diagrama de blocos de um conversor digital-analógico $\Delta\Sigma$.

LPF - Filtro passa-baixo com frequência de corte W ;
Interp-OSR - Interpolação de OSR amostras;

De modo a manter a qualidade do sinal PCM uniforme original (equação 2.12) na reprodução do sinal analógico, a relação de sobre-amostragem OSR tem que ser tal que a SNR em $\Delta\Sigma$ (equação 6.5 ou 6.8 para $N>1$ e $R>1$) seja pelo menos igual a esse valor:

$$6,02R_0 \leq (2N+1)10\log_{10}(OSR) + 10\log_{10}\left(\frac{(2N+1)}{\pi^{2N}}\right) + 20\log_{10}(2^R - 1). \quad (6.11)$$

6.4.2 Conversão analógico-digital com modulação $\Delta\Sigma$.

O resultado de qualquer conversão analógico-digital é tipicamente um sinal em PCM uniforme. A conversão analógico-digital utilizando modulação $\Delta\Sigma$ começa com a filtragem passa-baixo, de modo a limitar a frequência do sinal de entrada a um valor máximo W . Este sinal é aplicado a um modulador $\Delta\Sigma$ (figura 6.4), que converte o sinal em 1 bit por amostra com uma relação de sobre-amostragem de OSR vezes. Como grande parte do ruído de situa fora da banda do sinal este é seguidamente filtrado digitalmente, convertendo-se o sinal em PCM uniforme com $R0$ bits por amostra, a uma frequência de amostragem de $2WN$ amostras por segundo. Finalmente este sinal é decimado de modo a que a frequência de amostragem seja o ritmo de Nyquist.

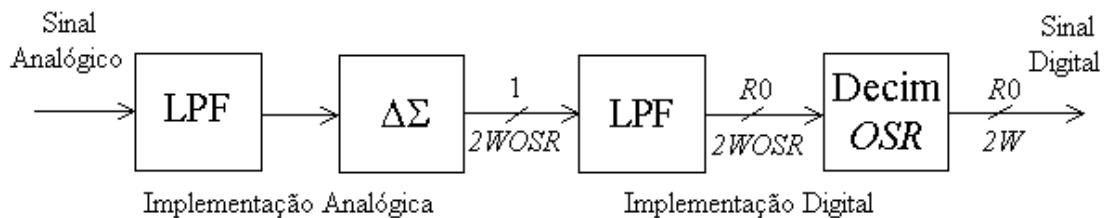


Figura 6.7

Diagrama de blocos de um conversor analógico-digital $\Delta\Sigma$.
LPF - Filtro passa-baixo; Decim-OSR - Decimação de OSR amostras.

Dado o valor da frequência de amostragem do codificador $\Delta\Sigma$ e a filtragem digital , o filtro anti-aliasing inicial não necessita de ter uma zona de corte abrupta (figura 5.3), tendo todas as vantagens já apresentadas na secção dedicada à sobre-amostragem em PCM.

Para uma dada SNR (equação 2.12) correspondente a $R0$ bits por amostra pretendidos em PCM uniforme, a relação de sobre-amostragem OSR deve ser tal que a SNR em $\Delta\Sigma$ (equação 6.5 ou 6.8 para $N>1$) seja pelo menos igual a esse valor, como garantido pela equação 6.11.

6.4.3 DSD - Direct Stream Digital

Um método alternativo, proposto em 1999, para converter um sinal de áudio para digital, utilizado em SACD (*Super Áudio CD*) para guardar sinais de áudio, não utiliza os blocos digitais de filtragem e decimação, guardando diretamente os bits à saída do modulador $\Delta\Sigma$ de 1 bit por amostra (DSD - *direct stream digital*). O fator de sobre-amostragem em SACD é de 64 vezes em relação ao CD de áudio tradicional, cuja frequência de amostragem é de 44,1 kHz. A qualidade corresponde a 120 dB, ou seja, à de um codificador PCM com 20 bits por amostra. O esquema de blocos da conversão de sinais analógicos para DSD e de DSD para analógico é apresentado na figura 6.7.

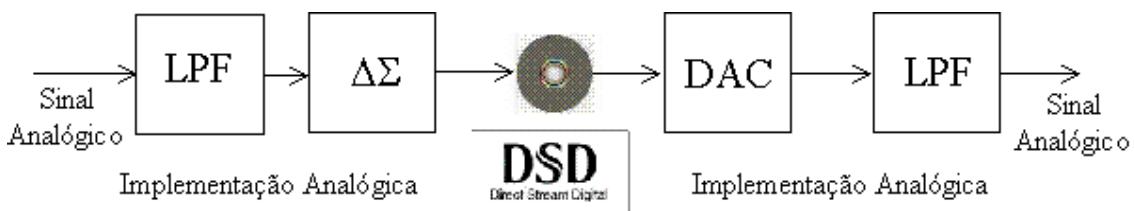


Figura 6.7
Diagrama de blocos de um ADC e DAC DSD.

Uma das vantagens do DSD é tornar a conversão para analógico simples, pois apenas necessita de um DAC de 1 bit e uma filtragem passa-baixo. Ao suprimir os blocos digitais dos conversores ADC e DAC a qualidade final aumenta, porque mesmo implementados digitalmente os filtros necessários para a decimação e para a interpolação introduzem sempre alguma distorção. Outra vantagem, em relação ao CD tradicional, é que o sinal gravado em SACD pode ter uma frequência máxima que se estende até cerca de 100 kHz, dependendo a reprodução destas frequências mais elevadas da frequência de corte do filtro final de reconstrução. Embora o ouvido humano não distinga frequências acima dos 20 kHz, alguns audiófilos clamam que a presença destas frequências ajuda na impressão espacial e temporal dos diversos instrumentos. Diminui ainda a distorção dos sons nas altas frequências que, devido à formatação do ruído, são as mais afetadas. A grande desvantagem é o aumento do débito binário.

7 Conclusões

Este texto descreveu os métodos principais de codificação de forma de onda, com ênfase para a codificação de sinais de fala. Foram deduzidas as expressões da relação sinal-ruído (*SNR*) de quantificação, medida objetiva da qualidade, para os diversos métodos de codificação apresentados, tendo sido realçado o compromisso com o débito binário produzido.

Em PCM uniforme o valor da *SNR* é excessivamente dependente da potência do sinal de entrada, o que o torna pouco atrativo. Na quantificação não uniforme utilizando uma não linearidade pseudo-logarítmica, a *SNR* torna-se quase independente da potência do sinal de entrada e do máximo valor de quantificação, ficando apenas dependente do número de bits de codificação por amostra. Dada uma distribuição de amplitudes é ainda possível construir codificadores que maximizem a *SNR*, desde que os sinais de entrada exibam a mesma distribuição.

As modulações diferenciais, ao predizer o valor de uma amostra tirando partido da correlação entre amostras consecutivas, têm ainda uma melhoria na *SNR* devido à introdução do ganho de predição. No entanto, ao depender das amostras passadas, a modulação diferencial perde robustez na presença de erros no canal de transmissão. Foram ainda apresentados os princípios básicos da predição e da quantificação adaptada, que se ajustam às características dos sinais a codificar. Estes sistemas adaptativos são ainda menos robustos na presença de erros no canal, já que a adaptação pode ser mal efetuada levando a diferenças entre os parâmetros adaptados no transmissor e no receptor.

A sobre-amostragem impele o ruído de quantificação para fora da banda do sinal, sendo este reduzido por filtragem. A modulação $\Delta\Sigma$ emprega sobre-amostragem com a vantagem de formatar passa-alto o ruído de quantificação, diminuindo ainda mais o ruído na banda. Não sendo uma

modulação diferencial tem ainda a vantagem de ser mais robusto a erros de canal.

Nos critérios de escolha de um codificador para determinada aplicação existem alguns atributos que são decisivos, enquanto outros ou não têm influência ou algum compromisso pode ser levado em consideração. Para além do débito binário produzido e da qualidade do sinal de saída, os atributos mais relevantes dos codificadores são a complexidade (preço), o atraso introduzido e a robustez contra erros de canal. Existem claramente compromissos em relação a estes atributos, já que por exemplo a diminuição do débito binário só é possível tirando partido da correlação entre amostras, o que leva a um aumento da complexidade e à diminuição da robustez a erros de canal.

Estes conceitos deverão ser aprofundados noutras unidades curriculares, que abordarão outros métodos de codificação capazes de atingir débitos binários mais pequenos e tirarão partido das características dos sinais a codificar.

Principais Equações

| | |
|--------------|--|
| $m(t)$ | Sinal de entrada (analógico) [V] ou [A] |
| $m[n]$ | Sinal de entrada (amostrado) [V] ou [A] |
| W | Máxima frequência do sinal de entrada [Hz] |
| f_s | Frequência de amostragem [amostras/s] [Hz] |
| R | Número de bits de codificação por amostra [bit/amostra] [] |
| R_b | Débito binário [bit/s] [Hz] |
| P | Potência do sinal de entrada [W] |
| m_{max} | Máxima amplitude do sinal de entrada [V] ou [A] |
| P_n | Potência normalizada do sinal de entrada |
| $R[k]$ | Autocorrelação do sinal de entrada [W] |
| $r[k]$ | Autocorrelação normalizada do sinal de entrada |
| V | Máximo valor de quantificação em PCM [V] ou [A] |
| L | Número de intervalos de quantificação |
| Δ_q | Intervalo de quantificação em quantificação uniforme [V] ou [A] |
| σ_q^2 | Potência do ruído de quantificação [W] |
| SNR_{dB} | SNR de quantificação em decibéis [dB] |
| V_1 | Máximo valor de quantificação do erro de predição em DPCM [V] ou [A] |
| P_e | Potência do erro de predição [W] |
| G_p | Ganho de predição |
| a | Coeficiente de predição |
| R_i | Número de bits iniciais por amostra [bit/amostra] |
| R_f | Número de bits por amostra após filtragem [bit/amostra] |
| f' | Frequência equivalente à da derivada máxima [Hz] |
| OSR | Relação de sobre-amostragem |
| N | Ordem do modulador em $\Delta\Sigma$ |

Teorema de Nyquist-Shannon

$$f_s \geq 2W \quad (2.1)$$

$$R_b = R \times f_s \quad (2.9)$$

$$P_n = \frac{P}{m_{\max}^2} \quad (2.15)$$

$$R[k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N m[n]m[n-k] \quad (A.1)$$

$$r[k] = \frac{R[k]}{R[0]} = \frac{R[k]}{P} \quad (A.1)$$

Sinal sinusoidal

$$m(t) = m_{\max} \cos(2\pi f_0 t + \alpha)$$

$$P = \frac{m_{\max}^2}{2} \quad P_n = \frac{1}{2}$$

$$r(\tau) = \cos(2\pi f_0 \tau) \quad R(\tau) = \frac{m_{\max}^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau) \quad (\text{A.2})$$

$$r[k] = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} k\right) \quad R[k] = \frac{m_{\max}^2}{2} \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} k\right) \quad (\text{A.2})$$

Sinal com distribuição uniforme (com média nula)

$$P = \frac{m_{\max}^2}{3} \quad P_n = \frac{1}{3}$$

PCM uniforme

$$\Delta_q = \frac{2V}{L} = \frac{2V}{2^R}. \quad (2.8)$$

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta_q^2}{12}, \quad (2.10)$$

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10}\left(\frac{3P}{V^2}\right) \quad (2.12)$$

$$V \geq m_{\max}. \quad (2.13)$$

PCM não uniforme, Lei-A/Lei-μ, zona logarítmica:

$$SNR_{dB} = 6,02R - 10 \quad (3.12)$$

DPCM

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V_1^2} \right) \quad (4.4)$$

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V^2} \right) + 10 \log_{10} \left(\frac{V^2}{V_1^2} \right) \quad (4.6)$$

$$10 \log_{10} \frac{V^2}{V_1^2} = 20 \log_{10} \frac{V}{V_1} \quad (4.7)$$

$$G_p = \frac{P}{P_e} \approx \frac{V^2}{V_1^2} \quad (\text{aproximação na situação ótima de } V_1) \quad (4.9)$$

$$SNR_{dB} \approx Gp_{dB} + 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V^2} \right) = Gp_{dB} + SNR_{PCMdB}(m[n]). \quad (4.11)$$

$$G_{p\ dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{P_e} \right) = 10 \log_{10} \left[\frac{1}{(1+a^2 - 2ar[1])} \right] \quad (4.14)$$

Predictor unitário: $a=1$:

$$G_{p\ dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{2(1-r[1])} \right) \quad (4.15)$$

$$\text{Para entrada sinusoidal: } V_1 = 2V \sin \left(\pi \frac{f_0}{f_s} t \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Predictor adaptado de 1ª ordem: } a = r[1] \quad (4.18)$$

$$G_{p\ dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{1-r[1]^2} \right) \quad (4.19)$$

DM

$$\Delta \geq \left| \frac{\partial m(t)}{\partial t} \right|_{\max} T_s = \frac{m'_{\max}}{f_s} \quad (4.24)$$

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{3} \quad (4.25)$$

$$SNR_{dB} = 30 \log_{10}(OSR) + 20 \log_{10}\left(\frac{W}{f_s}\right) + 10 \log_{10}\left(\frac{3}{\pi^2} P_n\right) \quad (5.5)$$

ADM

$$\Delta[n] = \Delta[n-1] \left(1 + \alpha \frac{b[n-1]}{b[n]} \right) \quad 0 < \alpha < 1 \quad (4.29)$$

Ganho de filtragem com sobre-amostragem

$$G_f = OSR = \frac{f_s}{2W}, \quad (5.1)$$

$$R_f \leq R_i + 0,5 \log_2(OSR) \quad (5.2)$$

 $\Delta\Sigma$

$\Delta\Sigma$ $N=1$ $R=1$

$$SNR_{dB} = 30 \log_{10}(OSR) + 10 \log_{10}\left(\frac{9P_n}{\pi^2}\right) = 30 \log_{10}(OSR) + 10 \log_{10}(0,912P_n) \quad (6.5)$$

$\Delta\Sigma$ Ordem N $R>1$ (apêndices 4 e 5)

$$\Delta_q = \frac{2m_{\max}}{2^R - 1}, \quad (6.9)$$

$$SNR_{dB} = (2N+1)10 \log_{10}(OSR) + 10 \log_{10}\left(\frac{3(2N+1)P_n}{\pi^{2N}}\right) + 20 \log_{10}(2^R - 1) \quad (6.10)$$

Apêndices

Apêndice 1 - Algoritmo de quantificação ótima

Entradas:

Número L de valores de quantificação;
 Histograma normalizado dos valores de entrada m_i : $i=1:k$; $k>>L$;
 Histograma normalizado dos valores de entrada $f_M(m_i)$: $i=1:k$;
 Índice de distorção ϵ ;

Inicialização:

- 1) Calculam-se arbitrariamente L níveis de quantificação v_j ; $j=1:L$; (e.g.: quantificação uniforme);
- 2) Potência do ruído de quantificação da iteração -1, $\sigma_q^2(-1)=\infty$;
- 3) Ordem de iteração $n=0$;

Iteração:

- 1) Calculam-se os espaços S_j , $j=1:L$ com $m_i \in S_j$ se,

$$(m_i - v_j)^2 \leq (m_i - v_l)^2, \quad l \neq j, \quad l=1:L; j=1:L;$$
- 2) Calcula-se a potência do ruído de quantificação da iteração n , $\sigma_q^2(n)$,
$$\sigma_q^2(n) = \sum_{j=1}^m \sum_i (m_i - v_j)^2 f_M(m_i), \quad m_i \in S_j;$$
- 3) Se $\epsilon \geq \frac{\sigma_q^2(n-1) - \sigma_q^2(n)}{\sigma_q^2(n)}$ calculam-se as saídas e termina-se o algoritmo;
- 4) Calculam-se novos valores de quantificação como a média normalizada
 dos espaços S_j : $v_j = \frac{\sum_i m_i f_M(m_i)}{\sum_i f_M(m_i)}$ $j=1...L$, $m_i \in S_j$;
- 5) Incrementa-se n e retorna-se ao ponto 1);

Saídas:

Valores de quantificação: v_j , $j=1:L$

Valores de decisão: $(L-1)$ valores equidistantes dos valores de quantificação;

Apêndice 2 - Função de autocorrelação de uma sinusoide.

- i. A função de autocorrelação temporal (e não estatística) para sinais discretos é definida por $R[k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^N m[n]m[n-k]$, correspondendo ao produto interno do sinal e da sua versão deslocada de k amostras.
- ii. Para calcular esta função para uma sinusoide discreta, opta-se por a calcular em tempo contínuo e amostrar seguidamente.
- iii. A função de autocorrelação para sinais em tempo contínuo corresponde ao produto interno do sinal e da sua versão deslocada do tempo τ :

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T m(t)m(t-\tau)dt.$$

- iv. Para uma sinusoide $A \cos(2\pi f_0 t + \alpha)$, com período fundamental T_o ($T_o=2T$)

$$R(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A \cos(2\pi f_0 t + \alpha) A \cos(2\pi f_0 (t-\tau) + \alpha) dt$$

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} [\cos(2\pi f_0 \tau) + \cos(4\pi f_0 t + 2\pi f_0 \tau + 2\alpha)] dt = \frac{A^2 \cos(2\pi f_0 \tau)}{2T_0} t \Big|_{-T_0/2}^{T_0/2}$$

$$R(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_0 \tau)$$

- v. Amostrando esta função com período T_s ($\tau=kT_s$) vem,

$$R[k] = \frac{A^2}{2} \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} k\right)$$

- vi. A autocorrelação de ordem 0 corresponde à potência do sinal. A autocorrelação normalizada vem:

$$r(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)} = \cos(2\pi f_0 \tau) \quad R[k] = \frac{R[k]}{R[0]} = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s} k\right).$$

- vii. A autocorrelação de uma sinusoide não depende da fase inicial e a autocorrelação normalizada também não depende da amplitude. A autocorrelação de uma sinusoide discreta depende da relação f_0/f_s e não dos seus valores absolutos.

Apêndice 3 - Sinusoide com preditor unitário

Prova que equação 4.10, assumindo um preditor unitário, é exata para entrada sinusoidal:

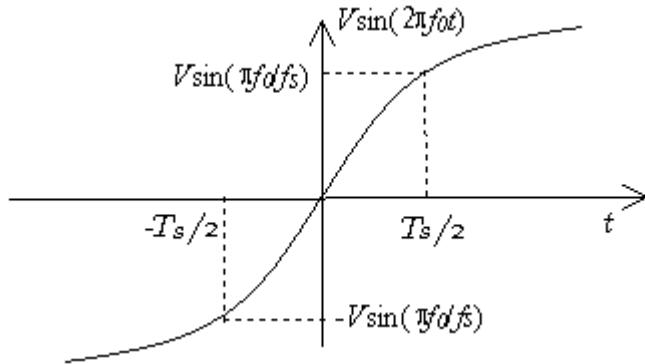
- i. Pela equação 4.15, $G_p = \frac{1}{2(1-r[1])}$
- ii. Para uma sinusoide a autocorrelação normalizada para 1 amostra de atraso vem (apêndice 2) $r[1] = \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s}\right)$, pelo que:

$$G_p = \frac{1}{2\left(1 - \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s}\right)\right)}.$$

- iii. Assumindo a aproximação da equação 4.10,

$$V_1 = \sqrt{\frac{V^2}{G_p}} = \sqrt{V^2 2\left(1 - \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s}\right)\right)} = \sqrt{V^2 4\sin^2\left(\pi \frac{f_0}{f_s}\right)} = 2V \sin\left(\pi \frac{f_0}{f_s}\right),$$

que corresponde de facto, para uma sinusoide, à máxima variação no tempo T_s , que se dá na zona de maior declive, ou seja, à volta de 0, como se pode verificar pela figura seguinte:

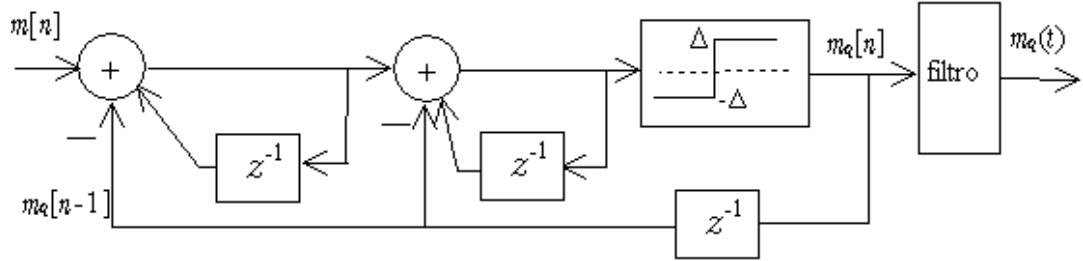


- iv. Para DM e com a certeza que o sinal de entrada é uma sinusoide, $\Delta = 2V \sin\left(\pi \frac{f_0}{f_s}\right)$ é uma melhor (menor) estimativa de Δ do que a produzida por $2V\pi \frac{f_0}{f_s}$. Estas aproximam-se se $f_0 \ll f_s$, pois nestas condições $2V \sin\left(\pi \frac{f_0}{f_s}\right) \approx 2V\pi \frac{f_0}{f_s}$.

Apêndice 4 - SNR para a modulação $\Delta\Sigma$ de ordem N

(com base na equação 6.6 da função densidade espectral do ruído)

- Exemplo de um modulador $\Delta\Sigma$ de 2ª ordem



- A potência do ruído na banda W do sinal é igual ao integral da função densidade espectral do ruído nessa banda:

$$N_q = \int_{-W}^W |N(f)|^2 df = \frac{\Delta^2}{3f_s} \int_{-W}^W \left(4 \sin^2 \left(\frac{\pi f}{f_s} \right) \right)^N df$$

$$N_q = \frac{\Delta^2}{3f_s} 4^N \int_{-W}^W \left(\left(\frac{\pi f}{f_s} \right) \right)^{2N} df \quad f \ll f_s$$

$$N_q = \frac{\Delta^2 \pi^{2N} 4^N}{3f_s^{2N+1}} \int_{-W}^W f^{2N} df = \frac{\Delta^2 \pi^{2N} 4^N}{3(2N+1)f_s^{2N+1}} f^{2N+1} \Big|_{-W}^W = \frac{\Delta^2 \pi^{2N} 2^{2N}}{3(2N+1)f_s^{2N+1}} 2W^{2N+1}$$

$$N_q = \frac{m_{\max}^2 \pi^{2N}}{3(2N+1)} \left(\frac{2W}{f_s} \right)^{2N+1} = \frac{m_{\max}^2 \pi^{2N}}{3(2N+1)} \left(\frac{1}{OSR} \right)^{2N+1} \quad m_{\max} = \Delta$$

- Pelo que a SNR vem

$$SNR_q = \frac{P}{N_q} = \frac{3(2N+1)}{\pi^{2N}} \left(\frac{f_s}{2W} \right)^{2N+1} \frac{P}{m_{\max}^2} = \frac{3(2N+1)}{\pi^{2N}} OSR^{2N+1} P_n$$

- Em decibéis:

$$SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{N_q} \right) = (2N+1) 10 \log_{10} (OSR) + 10 \log_{10} \left(\frac{3(2N+1)P_n}{\pi^{2N}} \right)$$

Apêndice 5 - SNR para a modulação $\Delta\Sigma$ multi-bit

- i. De modo a que o último valor de quantificação coincida com o valor máximo do sinal de entrada (figura 6.5 e equação 6.9):

$$\Delta_q = \frac{2m_{\max}}{2^R - 1},$$

- ii. Pelo que, segundo a equação 6.3 substituindo $\frac{\Delta^2}{3}$ (equação 4.25) por $\frac{\Delta_q^2}{12}$ (equação 2.10),

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \int_{-W}^W |N(f)|^2 df \\ &= \frac{4\Delta_q^2}{12f_s} \int_{-W}^W \sin^2\left(\frac{\pi f}{f_s}\right) df \quad f \ll f_s \\ &= \frac{16m_{\max}^2}{12(2^R - 1)^2 f_s} \int_{-W}^W \left(\frac{\pi f}{f_s}\right)^2 df \quad \alpha \approx 0 \Rightarrow \sin(\alpha) = \alpha \\ &= \frac{16\pi^2 m_{\max}^2}{36(2^R - 1)^2 f_s^3} f^3 \Big|_{-W}^W \\ &= \frac{\pi^2 m_{\max}^2}{9(2^R - 1)^2} \left(\frac{2W}{f_s}\right)^3 \end{aligned}$$

e a relação sinal-ruído de quantificação vem,

$$SNR_q = (2^R - 1)^2 \frac{9}{\pi^2} OSR^3 P_n,$$

ou em decibéis:

$$SNR_{dB} = 30 \log_{10}(OSR) + 10 \log_{10}\left(\frac{9P_n}{\pi^2}\right) + 20 \log_{10}(2^R - 1)$$

E a equação da SNR de ordem N (apêndice 4) e multi-bit vem:

$$SNR_{dB} = (2N+1)10 \log_{10}(OSR) + 10 \log_{10}\left(\frac{3(2N+1)P_n}{\pi^{2N}}\right) + 20 \log_{10}(2^R - 1)$$

Perguntas teóricas

-
1. (secção 4.1) Diga se são verdadeiras ou falsas, explicando porquê, as seguintes afirmações.
 - a) Em PCM *companding*, tira-se partido da correlação entre amostras para aumentar a *SNR*;
 - b) Em DPCM, não é importante que tipo de preditor se está a usar para se calcular a *SNR*. Basta ser conhecido o valor do intervalo de quantificação.

 2. (secção 4.1) Compare, dizendo das vantagens e desvantagens, dos seguintes métodos de codificação de sinais de fala: PCM uniforme; PCM *companding*; DPCM; ADPCM

 3. (secção 4.1) Explique o mecanismo de adaptação do quantificador em ADPCM.

 4. (globais) Das codificações apresentadas, em quais e porquê a potência do ruído depende do sinal de entrada?

 5. (globais) Em codificadores de sinais, de que tipo de conceitos se tira partido para diminuir o débito binário?

 6. (globais) Existe algum compromisso entre o débito binário, a qualidade e a complexidade? Dê exemplos. Quais as unidades para medição de cada um destes atributos?

 7. (secção 4.2) Em DM, que tipos de ruído existem? Existe algum compromisso entre eles? Que tipo de soluções conhece?

 8. (secção 6) Compare em relação ao conteúdo espetral o tipo de ruído produzido pelas codificações DM e $\Delta\Sigma$. Qual a situação mais favorável quando se está em sobre-amostragem?

 9. (secção 6) De que é que o modulador $\Delta\Sigma$ tira partido para melhorar a SNR? Este objetivo é alcançado diminuindo o passo de quantificação? Comente a situação de 1 bit de codificação por amostra e a situação de mais do que 1 bit de codificação por amostra.

Exercícios resolvidos

1. (secção 2.3) Produza quantificadores *midtread* e *midrise* com 8 intervalos de quantificação uniformes, para quantificar sinais até 1 V. Defina um código numérico sequencial do valor mais pequeno para o mais elevado.

Resolução:

- i. Pela equação 2.6, o intervalo de quantificação $\Delta q = 2V/L = 2/8 = 250$ mV.
- ii. Os valores de quantificação em *midtread* incluem o valor 0 V, somando e subtraindo desde aí Δq , não ultrapassando as tensões máximas ± 1 V.
- iii. Os valores de decisão encontram-se a meio dos valores de quantificação, com exceção dos extremos cujos valores são $\pm\infty$.
- iv. Os valores de decisão em *midrise* incluem o 0 V, somando e subtraindo desde aí Δq , nunca ultrapassando as tensões máximas ± 1 V, com exceção dos extremos cujos valores são $\pm\infty$.
- v. Os valores de quantificação encontram-se a meio dos valores de decisão.
- vi. Numera-se cada valor de quantificação, sequencialmente, do valor mais pequeno para o mais elevado.

| Quantificação <i>midtread</i> | |
|-------------------------------|--------------------------|
| Valores de decisão | Valores de quantificação |
| ∞ | 1 |
| 0,875 | 0,75 |
| 0,625 | 0,5 |
| 0,375 | 0,25 |
| 0,125 | 0 |
| -0,125 | -0,25 |
| -0,375 | -0,5 |
| -0,625 | -0,75 |
| $-\infty$ | |

| Quantificação <i>midrise</i> | | Código |
|------------------------------|--------------------------|---------|
| Valores de decisão | Valores de quantificação | dec/bin |
| ∞ | 0,875 | 7 (111) |
| 0,75 | 0,625 | 6 (110) |
| 0,5 | 0,375 | 5 (101) |
| 0,25 | 0,125 | 4 (100) |
| 0 | -0,125 | 3 (011) |
| -0,25 | -0,375 | 2 (010) |
| -0,5 | -0,625 | 1 (001) |
| -0,75 | -0,875 | 0 (000) |
| $-\infty$ | | |

2. (secção 2.3) Utilize o quantificador *midrise* e consequente codificador do exercício nº 1 para quantificar um sinal sinusoidal de amplitude 1 V e frequência de 1300 Hz ($\sin(2\pi 1300t)$), amostrado com 8000 amostras por segundo (8 kHz). Represente as 8 primeiras amostras e a respetiva sequência binária transmitida. Calcule o débito binário.

Resolução:

- i. A amostra de ordem n corresponde a substituir no sinal t por nT_s

$$m[n] = \sin(2\pi 1300t) \Big|_{t=nT_s} = \sin\left(2\pi \frac{1300}{8000} n\right)$$

- ii. Para cada amostra verifica-se em que intervalo do quantificador esta recai (tabela do exercício 1) e o respetivo código.

| Amostra | Amostragem | Quantificação | Codificação | decimal | binário |
|---------|------------|---------------|-------------|---------|---------|
| n | $m[n]$ | $m_q[n]$ | $q[n]$ | | |
| 0 | 0,000 | -0,125 | 0,125 | 3 | 011 |
| 1 | 0,853 | 0,875 | -0,022 | 7 | 111 |
| 2 | 0,891 | 0,875 | 0,016 | 7 | 111 |
| 3 | 0,078 | 0,125 | -0,047 | 4 | 100 |
| 4 | -0,809 | -0,875 | 0,066 | 0 | 000 |
| 5 | -0,924 | -0,875 | -0,049 | 0 | 000 |
| 6 | -0,156 | -0,125 | -0,031 | 3 | 011 |
| 7 | 0,760 | 0,875 | -0,115 | 7 | 111 |

- iii. A sequência binária a ser transmitida corresponde à concatenação por ordem temporal dos códigos em binário: 011 111 111 100 000 000 011 111
- iv. Note-se que para os cálculos do transmissor apenas é necessário conhecer os valores de decisão e respetiva codificação, não sendo necessário conhecer os valores de quantificação. No receptor apenas é necessário conhecer os valores de decisão e respetiva codificação, não sendo necessário conhecer os valores de quantificação.
- v. O Débito binário é de (equação 2.9) $R_b = f_s \times R = 8000 \times 3 = 24$ kbit/s.

3. (secção 2) Suponha um sinal sinusoidal com amplitude 1 V, amostrado a 8000 amostras/s e com um débito binário de 24 kbit/s.
- Calcule a potência do sinal, bem como a sua variância;
 - Determine a *SNR* de um codificador PCM uniforme com este sinal;

Resolução:

- a) A potência de um sinal sinusoidal é dada por $P = \frac{m_{\max}^2}{2} = 0,5$ W. Este valor corresponde à variância pois a média é 0 V.
- b) Pelo teorema da amostragem a frequência mínima de amostragem (produz o débito binário mínimo) é o ritmo de Nyquist $2W=8$ kHz.
- O número de bits por amostra, dado pela equação 2.9, são $24/8=3$ bits/amostra, a que correspondem 8 valores de quantificação.
- Pela equação 2.6, o intervalo de quantificação $\Delta q = 2/8 = 250$ mV.
- Utilizando a equação 2.10 a potência do ruído de quantificação vem $\sigma_q^2 = \frac{\Delta_q^2}{12} = 0,0052$ W, pelo que a $SNR_{dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{P}{\sigma_q^2} \right) = 19,82$ dB.
- O mesmo valor pode ser obtido através da equação 2.12 $SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V^2} \right) = 6,02 \times 3 + 10 \log_{10} \left(\frac{3 \times 0,5}{1^2} \right) = 19,82$ dB.

4. (secção 2) Um CD de áudio contém sinais em estéreo amostrados a 44,1 kHz e codificados em PCM uniforme com 16 bits por amostra.

- Quantos minutos de música podem ser gravados num CD de 700 Mbytes?
- Qual a banda máxima dos sinais contidos no CD?
- Suponha um sinal com uma distribuição de amplitudes uniforme entre -1 e +1 V. Calcule a potência do sinal, bem como a sua variância;
- Determine a SNR com este sinal;
- Determine a SNR com um sinal de potência normalizada de -45 dB;

Resolução:

- a) O débito binário total em estéreo é de $2 \times 16 \times 44,1 = 1,4112$ Mbit/s.
- Um CD com capacidade de 700 Mbytes (valor aproximado) poderá gravar até $8 \times 700 / 1,4112 = 3968$ segundos ou aproximadamente 66 minutos.
- b) A banda máxima, pelo teorema de Nyquist-Shannon, é de metade da frequência de amostragem, ou seja, 22,05 kHz.
- c) A distribuição de amplitudes do sinal de entrada uniforme entre -1 e +1 V, vale 0 fora do intervalo e $\frac{1}{2}$ no intervalo para que a sua área seja 1.
- Sendo a função densidade de probabilidade simétrica à volta do valor 0 é óbvio que a média do sinal é 0, pelo que a potência é igual à variância. A média também pode ser calculada como $\bar{m} = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(m) m dm = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m^2 \Big|_{-1}^1 = 0$.
- e a variância (potência), $P = \sigma_m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_m(m) m^2 dm = \frac{1}{2} \frac{1}{3} m^3 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{6} (1+1) = \frac{1}{3}$ W.
- A equação genérica da potência de um sinal com distribuição uniforme e amplitude m_{max} é dada por $m_{max}^2 / 3$.
- d) A qualidade dos sinais CD áudio é de (equação 2.12).

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V^2} \right) = 6,02 \times 16 + 10 \log_{10} \left(\frac{3}{1^2} \frac{1}{3} \right) = 96,3 \text{ dB.}$$

- e) $SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10}(3) + 10 \log_{10}(P_n) = 96,3 + 10 \log_{10}(3) - 45 = 56,1$ dB, mantendo elevada qualidade para uma larga gama de potência, embora à custa do elevado débito binário;

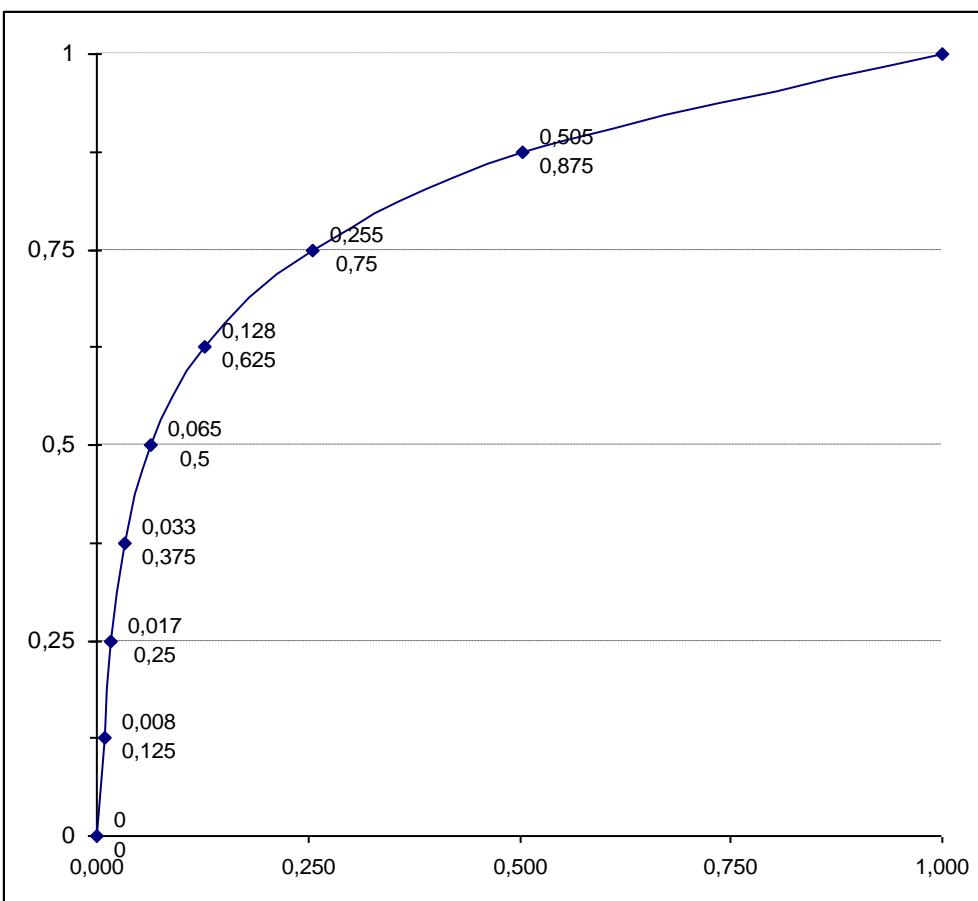
5. (secção 3.2) Produza um quantificador *companding* Lei-A ($A=87,56$) com 8 intervalos de quantificação.

Resolução:

- Gera-se um quantificador uniforme *midrise* (exercício 1).
- Gera-se o quantificador *companding* utilizando os valores do quantificador uniforme como entrada da não linearidade inversa da equação 3.9 (Lei-A).

| Quantificação uniforme | |
|------------------------|--------------------------|
| Valores de decisão | Valores de quantificação |
| ∞ | 0,875 |
| 0,75 | 0,625 |
| 0,5 | 0,375 |
| 0,25 | 0,125 |
| 0 | 0 |

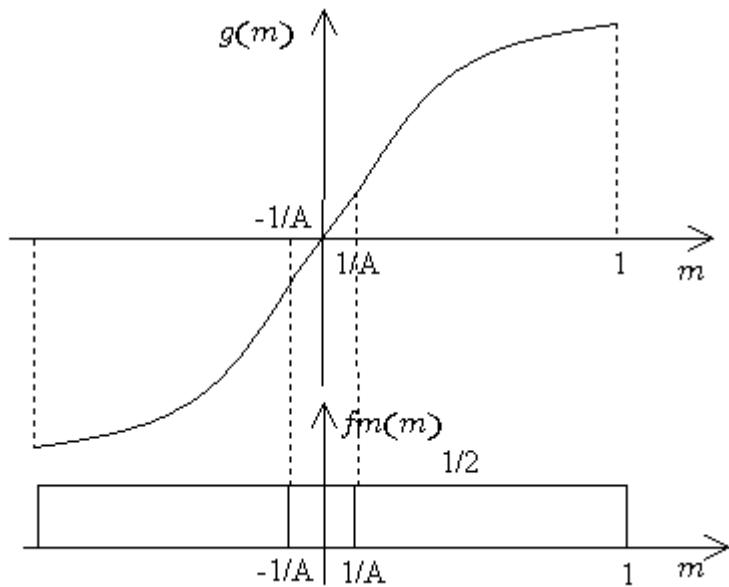
| Companding Lei-A | |
|--------------------|--------------------------|
| Valores de decisão | Valores de quantificação |
| 0,255 | 0,505 |
| 0,065 | 0,128 |
| 0,017 | 0,033 |
| 0 | 0,008 |



6. (secção 3.2) Suponha um sinal com uma distribuição de amplitudes uniforme entre -1 e +1 V. A largura de banda do sinal é de 4 kHz e pretende-se um débito binário máximo de 48 kbit/s.
- Calcule a potência do sinal;
 - Determine a *SNR* de um codificador PCM uniforme com este sinal;
 - Suponha agora que utiliza um codificador PCM com *companding* usando lei-A, sendo $A=87,56$. Calcule as percentagens de tempo em que o sinal está na zona linear e na zona logarítmica;
 - Calcule a *SNR* na situação correspondente à alínea anterior e compare com o resultado obtido com PCM uniforme.
 - Qual a *SNR* com quantificador ótimo para este sinal?

Resolução:

- a) A equação genérica da potência de um sinal com distribuição uniforme e amplitude m_{max} é dada por $m_{max}^2/3$, pelo que a potência é $1/3$ W.
 - b) Pelo teorema da amostragem a frequência mínima de amostragem (produz o débito binário mínimo) é o ritmo de Nyquist $2W=8$ kHz.
 - O número de bits por amostra, dado pela equação 2.9, são $48/8=6$ bits/amostra.
 - A *SNR* em PCM uniforme é dada pela equação 2.12
- $$SNR_{dB} = 6,02R + 10\log_{10}\left(\frac{3P}{V^2}\right) = 6,02 \times 6 + 10\log_{10}\left(\frac{3}{1^2} \frac{1}{3}\right) = 36,12 \text{ dB.}$$
- c) A percentagem de tempo que o sinal se encontra na zona linear, $|m| < \frac{1}{A}$, corresponde à área da função densidade de probabilidade nesta condição, ou seja, à área do retângulo de lados $1/2$ e $2/A$. Esta área vale $1/A$. Como $A=87,56$, a percentagem de tempo é de 1,14%.

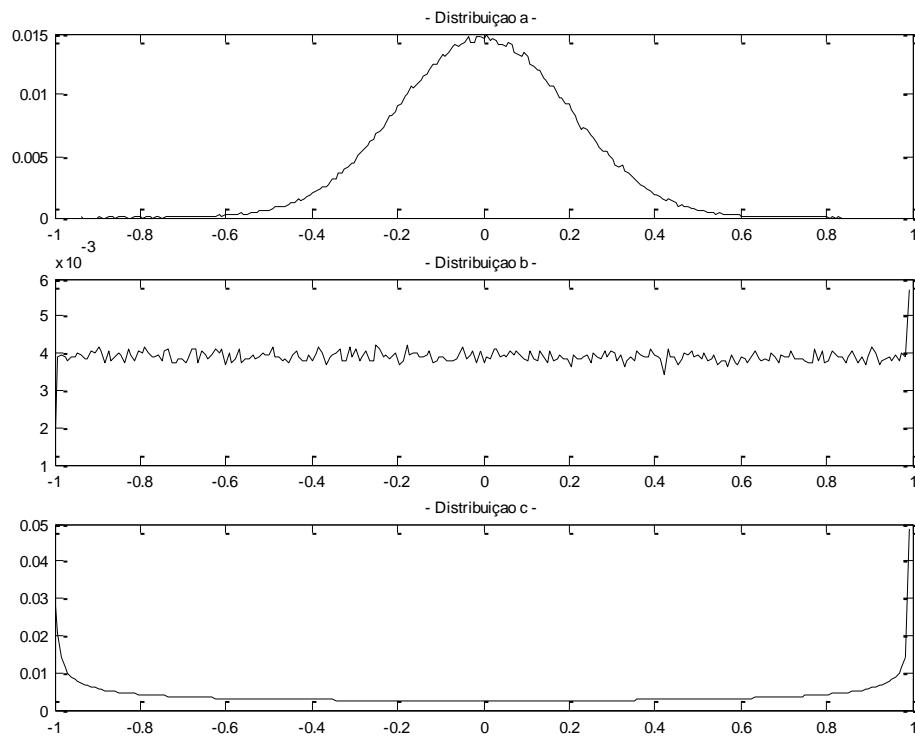


- vi. A percentagem de tempo na zona logarítmica é a restante, ou seja,
 $100 - 1,14 = 98,86\%$.
- vii. O sinal está praticamente sempre na zona logarítmica, pelo que a aproximação correspondente à equação 3.12 é válida.
- viii. d) A SNR é de $SNR_{dB} = 6,02R - 10 = 6,02 \times 6 - 10 = 26,12$ dB.
- ix. Este valor é menor que o obtido através de um PCM uniforme porque a potência normalizada do sinal de entrada é bastante grande (-4,77 dB). Como se verifica pela figura 3.7 a SNR em PCM uniforme é melhor que em *companding* quando a potência normalizada está acima dos -14,77 dB.
- x. e) O quantificador ótimo para um sinal com distribuição uniforme é de facto um quantificador uniforme. 36,12 dB é assim a melhor SNR em PCM.

7. (secção 3.3) Suponha três quantificadores, cada um com 4 valores de quantificação, cujos valores de quantificação são apresentados em cada linha da tabela seguinte. A última linha corresponde ao código binário de codificação de cada valor de quantificação.

| | Valores de quantificação | | | |
|-----------------|--------------------------|---------|--------|--------|
| Quantificador 1 | -0,8536 | -0,2945 | 0,2983 | 0,8529 |
| Quantificador 2 | -0,7485 | -0,2463 | 0,2535 | 0,7525 |
| Quantificador 3 | -0,3057 | -0,0910 | 0,0948 | 0,3061 |
| Código | 00 | 01 | 10 | 11 |

Estes quantificadores são resultado do algoritmo de quantificação ótima Max-Lloyd, tendo como entrada as três funções densidade de probabilidade ilustradas na figura seguinte, referenciadas por a, b, e c.



- Identifique qual das funções densidade de probabilidade (a, b, c) corresponde a cada um dos quantificadores (1, 2, 3). Explique.
- Para o quantificador 1, calcule os valores de decisão.
- Suponha amostras consecutivas com valores 0,5 -0,1 e 2. Qual a sequência binária transmitida supondo o quantificador 1?
- Descodifique qual os valores representados pela sequência 110100.

Resolução:

- i. a) As 3 funções densidade de probabilidade distinguem-se por a (a) estar mais concentrada na origem, a (b) ser praticamente uniforme, e a (c) estar mais concentrada nos valores maiores em módulo. Assim, a função (a) corresponde ao quantificador com valores menores, o quantificador (3). A função (c) ao quantificador com valores maiores, o (1). À função (b) corresponde o quantificador que falta atribuir, o quantificador (2), mas esta é de facto aquele que se aproxima de um quantificador uniforme.
- ii. b) Os valores de decisão estão a meio dos valores de quantificação (equação 2.4). Assim:

| | | | | | | | |
|--------------------------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|
| Valores de quantificação | -0,8536 | | -0,2945 | | 0,2983 | | 0,8529 |
| Valores de decisão | | -0,5741 | | 0,0019 | | 0,5756 | |
| Código | 00 | | 01 | | 10 | | 11 |

- iii. c) Para cada amostra verifica-se em que intervalo do quantificador esta recai (quantificação) e o respetivo código (codificação).
 - 0,5 recai no intervalo $[0,0019 : 0,5756]$ a que corresponde o código 10;
 - 0,1 recai no intervalo $[-0,5741 : 0,0019]$ a que corresponde o código 01;
 - 2 recai no intervalo $[0,5756 : \infty]$ a que corresponde o código 11. As distribuições têm o valor máximo de 1, pelo que o quantificador está saturado;
- iv. A sequência binária a ser transmitida corresponde à concatenação por ordem temporal dos códigos em binário: 100111.
- v. d) Divide-se a sequência em conjuntos de $R=2$ bits 11 01 00, correspondendo cada para ao código de cada amostra (3 amostras).
- vi. (Descodificação) Verifica-se para cada código o valor de quantificação respetivo,
 - 11 corresponde ao valor de quantificação 0,8529
 - 01 corresponde ao valor de quantificação -0,2945
 - 00 corresponde ao valor de quantificação -0,8536

8. (secção 4.1) Suponha um sinal sinusoidal de amplitude 1 V e frequência 500 Hz, amostrado a 8000 Hz e codificado em DPCM unitário. O valor máximo do quantificador *midrise* é de 0,4 V. O número de bits de codificação por amostra é de 2. O valor de predição inicial é 0 V. Qual a sequência binária a ser transmitida para as 8 primeiras amostras?

Resolução:

- i. Segue-se a metodologia do problema 1 para projetar o quantificador:

| Valores de decisão | Valores de quantificação | dec/bin |
|--------------------|--------------------------|---------|
| ∞ | 0,3 | 3 (11) |
| 0,2 | 0,1 | 2 (10) |
| 0 | -0,1 | 1 (01) |
| -0,2 | -0,3 | 0 (00) |
| $-\infty$ | | |

- ii. As 8 primeiras amostras correspondem a substituir n por 0 até 7 na expressão $m[n] = \sin(2\pi 500t) \Big|_{t=nT_s} = \sin\left(2\pi \frac{500}{8000}n\right)$
- iii. Assume-se um valor predito inicial de 0 V.
- iv. Calcula-se o erro de predição como a diferença entre a amostra de entrada e a sua predição.
- v. Quantifica-se este valor com o quantificador calculado em i).
- vi. Calcula-se a amostra quantificada como a soma do valor predito com o erro de predição quantificado.
- vii. Este valor corresponde ao valor predito da próxima amostra (unitário).
- viii. Repete-se iv) a vii) até à última amostra (Figura 4.2 a)).

| <i>n</i> | <i>m[n]</i> | <i>mp[n]</i> | <i>e[n]</i> | <i>eq[n]</i> | <i>mq[n]</i> | Código | Ruído |
|-----------------|--------------------|---------------------|--------------------|---------------------|---------------------|---------------|-------|
| 0 | 0,00 | 0 | 0,00 | 0,1 | 0,1 | 10 | -0,1 |
| 1 | 0,38 | 0,1 | 0,28 | 0,3 | 0,4 | 11 | -0,02 |
| 2 | 0,71 | 0,4 | 0,31 | 0,3 | 0,7 | 11 | 0,01 |
| 3 | 0,92 | 0,7 | 0,22 | 0,3 | 1 | 11 | -0,08 |
| 4 | 1,00 | 1 | 0,00 | 0,1 | 1,1 | 10 | -0,1 |
| 5 | 0,92 | 1,1 | -0,18 | -0,1 | 1 | 01 | -0,08 |
| 6 | 0,71 | 1 | -0,29 | -0,3 | 0,7 | 00 | 0,01 |
| 7 | 0,38 | 0,7 | -0,32 | -0,3 | 0,4 | 00 | -0,02 |

9. (secção 4.1) Suponha um sinal com função de autocorrelação dada por:

$$R[k] = 4,5 \cos(2\pi 0,0833k)$$

- a) Que tipo de sinal se trata. Qual a sua potência e amplitude?
- b) Qual a relação entre a frequência deste sinal e a frequência de amostragem?
- c) Qual a relação sinal-ruído obtida por um codificador PCM uniforme que opere com 10 bits por amostra?
- d) Qual a autocorrelação normalizada de 1ª ordem?
- e) Calcule o ganho de predição utilizando um codificador DPCM com preditor adaptado;
- f) Calcule o valor máximo de quantificação do erro de predição, de tal modo que não haja saturação de declive mas se maximize a relação sinal-ruído;
- g) Qual a relação sinal-ruído?
- h) Assumindo que a frequência de amostragem é de 10 kHz, qual o débito binário?
- i) Se codificar com mais 1 bit/amostra qual a nova SNR e débito binário?
- j) Se voltar a utilizar 10 bit/amostra e duplicar a frequência de amostragem, qual a nova SNR e débito binário?
- k) Compare os resultados obtidos em i) e j).

Resolução:

- i. a) Segundo o Apêndice 2, esta função de autocorrelação corresponde à de um sinal sinusoidal.

- ii. Sendo

$$R[k] = \frac{m_{\max}^2}{2} \cos\left(2\pi \frac{f_m}{f_s} k\right) = P \cos\left(2\pi \frac{f_m}{f_s} k\right) = 4,5 \cos(2\pi 0,0833k),$$

então tem-se que $P = R[0] = 4,5$ W e $m_{\max} = 3$ V.

- iii. b) Por analogia das fórmulas a relação entre a frequência do sinal e a frequência de amostragem é $\frac{f_m}{f_s} = 0,0833$.

- iv. c) A SNR em PCM uniforme vem, com $V = m_{\max} = 3$ V, valor que evita a saturação de amplitude e maximiza a SNR ,

$$SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10}\left(\frac{3P}{V^2}\right) = 61,96 \text{ dB.}$$

v. d) A autocorrelação de 1^a ordem vem $R[1] = 4,5 \cos(2\pi 0,0833) = 3,898$ W. A

$$\text{autocorrelação normalizada de 1^a ordem vem } r[1] = \frac{R[1]}{P} = \frac{3,898}{4,5} = 0,867.$$

vi. e) O ganho de predição, com preditor adaptado, vem:

$$G_p = \frac{1}{1 - r[1]^2} = 4 \text{ (linear)} \text{ e } G_{p\ dB} = 10 \log_{10} \left(\frac{1}{1 - r[1]^2} \right) = 6,02 \text{ dB}$$

vii. f) O valor máximo de quantificação do erro de predição, de tal modo que não haja saturação de declive mas se maximize a relação sinal-ruído, vem,

$$V_1 = \sqrt{\frac{V^2}{G_p}} = 1,5 \text{ V.}$$

viii. g) A SNR vem,

$$SNR_{dB} = Gp_{dB} + SNR_{PCMdB}(m[n]) = 67,98 \text{ dB.}$$

$$\text{ou } SNR_{dB} = 6,02R + 10 \log_{10} \left(\frac{3P}{V_1^2} \right) = 67,98 \text{ dB.}$$

ix. h) O débito binário vem,

$$R_b = Rf_s = 10 \times 10000 = 100 \text{ kbit/s}$$

x. i) O débito binário vem,

$R_b = Rf_s = 11 \times 10000 = 110 \text{ kbit/s}$ e existe uma melhoria de 6,02 dB na qualidade, para 74 dB.

xi. j) Se a frequência duplicar,

$$R[k] = 4,5 \cos \left(2\pi \frac{0,0833}{2} k \right) \text{ W, e } r[k] = \cos(\pi \times 0,0833k)$$

$$r[1] = \cos(\pi \times 0,0833) = 0,966, \text{ e } G_{p\ dB} = 11,74 \text{ dB}$$

$$SNR_{dB} = Gp_{dB} + SNR_{PCMdB}(m[n]) = 73,7 \text{ dB.}$$

$$R_b = Rf_s = 10 \times 20k = 200 \text{ kbit/s}$$

xii. j) Aumentar apenas 1 bit de codificação por amostra torna-se mais eficiente, pois tem melhor qualidade e melhor débito binário.

Sempre que possível deve ser utilizado o ritmo de Nyquist 2W e melhorar a qualidade através do número de bits de codificação por amostra.

10. (secção 6) Suponha-se um sinal sinusoidal de amplitude 1 V e frequência 320 Hz, amostrado a 8000 Hz. Calcule a SNR para os diversos codificadores apresentados. Tome como referência 8 bits por amostra.

Resolução:

- i. Como a amplitude da sinusoide é de 1 V a sua potência é de 0,5 W, que coincide com o seu valor normalizado.
- ii. Um codificador PCM uniforme com 8 bits por amostra (64 kbit/s) produz uma SNR de 49,9 dB (equação 2.14).
- iii. Um codificador PCM *companding*, com $A=87,56$, produz uma SNR de 38,2 dB (equação 3.12).
- iv. A função de autocorrelação de um sinal sinusoidal é uma função *co-seno* com a mesma frequência (Apêndice 2), $r[k]=\cos(2\pi 320kT_s)$. $r[1]=0,968$, pelo que o ganho de predição de um codificador DPCM com adaptação do preditor vem $Gp=15,88$ (linear) ou $Gp=12,1$ dB (equação 4.19).
- v. Note-se que para uma autocorrelação normalizada tão elevada praticamente não existe diferença de um preditor adaptado para um preditor unitário, que produz 12 dB de SNR (equação 4.15).
- vi. Um codificador DPCM com 8 bits por amostra produz 62 dB de SNR (equação 4.11, SNR em PCM uniforme + Gp).
- vii. O valor máximo de quantificação é de 0,251 V (equação 4.10)
- viii. Para manter a mesma SNR que em PCM uniforme são necessários apenas 6 bits de codificação por amostra (48 kbit/s), que correspondem à perda de 2x6 dB correspondentes ao ganho de predição.
- ix. Se a frequência da onda sinusoidal subisse para 640 Hz a autocorrelação desceria para $r[1]=0,876$ e $Gp=6,3$ dB, pelo que a melhoria em relação ao codificador PCM seria equivalente a apenas 1 bit por amostra (56,3 dB).
- x. A mesma SNR em DPCM com preditor adaptado e PCM dá-se para a frequência $f_s/4=2000$ Hz (equação 4.19, $a=r[1]=0$). Acima desta frequência o codificador DPCM tem novamente melhor desempenho.

- xi. Com preditor adaptado a SNR é sempre superior à do PCM. Para $a=r[1]=0$ o codificador DPCM degenera num codificador PCM.
- xii. A SNR em PCM não varia com a variação da frequência do sinal.
- xiii. Relembre-se o ponto ix), em DPCM, da perda de 6 dB de SNR quando se aumentou a frequência do sinal de entrada de 320 Hz para 640 Hz. Estes 6 dB poderiam ser recuperados aumentando a f_s de 1 oitava, para os 16 kHz, pois novamente $r[1]=0,968$ (ver ponto iv)).
- xiv. A somar a estes 6 dB, estariam mais 3 dB devido à filtragem, num total de 65 dB. Contudo o débito binário total é de $16000 \times 8 = 128$ kbit/s.
- xv. Obtêm-se melhores resultados mantendo a frequência de amostragem a 8 kHz e aumentando em 2 o número de bits de codificação por amostra para $8+2=10$, ganhando 12 dB e não 9 dB, para um total de 68,3 dB.
- xvi. O débito binário é de apenas 80 kbit/s.
- xvii. A derivada máxima do sinal, $V2\pi W=2010$ V/s.
- xviii. Num codificador DM o valor mínimo de Δ é 251 mV (equação 4.24), o que conjuntamente com a equação 4.25 produz uma potência de ruído de quantificação de 21 mW. Como a amplitude da sinusóide é de 1 V a sua potência é de 0,5 W e a SNR corresponde a 13,76 dB (equação 4.26).
- xix. A SNR é mais baixa mas o débito binário também é de apenas 8 kbit/s.
- xx. Para o mesmo débito binário do PCM (64 kbit/s), a sobre-amostragem é $R_b/(2W)=8$ vezes ($R_b=f_s$ e $W=4$ kHz metade do f_s original e $f'=320$ Hz).
- xxi. A SNR vale (equação 5.5) 40,85 dB.
- xxii. Nestas condições o valor (mínimo) de Δ é de 31 mV (equação 4.24).
- xxiii. Para manter a mesma SNR que em PCM uniforme (50 dB) são necessários mais 9 dB, que corresponde a uma oitava e $f_s=128$ kHz.
- xxiv. Para um modulador $\Delta\Sigma$ de 1^a ordem obter 50 dB (PCM uniforme) de SNR o OSR é de 60 vezes (equação 6.4), pelo que $f_s=60*2*W=480$ kHz.
- xxv. Ao contrário do que acontece em DM, o valor de Δ em $\Delta\Sigma$ é sempre $\Delta=m_{max}=1$ V, qualquer que seja a frequência de amostragem.

11. (secção 4.2) Num codificador ADM o algoritmo de adaptação do passo de quantificação é dado por:

$$\Delta[n] = |\Delta[n-1]| \left(1 + \frac{0,5b[n-1]}{b[n]} \right).$$

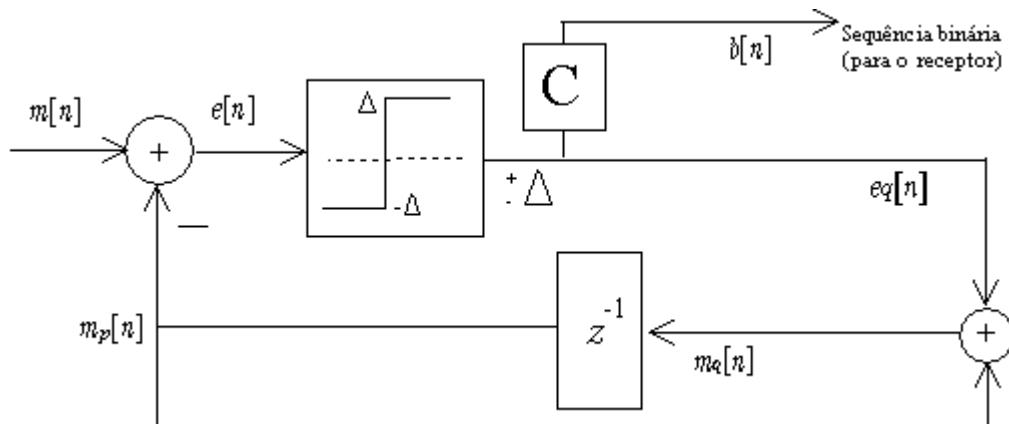
As amostras do sinal de entrada são:

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| $m[n]$ | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | -2 |

No instante $n = -1$ o valor do sinal quantificado $m_q[-1] = 0$, o valor do passo de quantificação $\Delta[-1] = 0,5$ V, e o nível lógico do bit de codificação é “1”. Calcule o sinal quantificado $m_q[n]$.

Resolução:

Tendo em atenção o esquema de blocos do codificador DM,



e as respetivas inicializações para $n = -1$, então:

| n | $m[n]$ | $mp[n]$ | $e[n]$ | $\Delta[n]$ | $b[n]$ | $eq[n]$ | $m_q[n]$ |
|-----|--------|----------|----------|-------------|--------|----------|-----------------|
| -1 | | | | 0,5 | 1 | | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0,75 | 1 | 0,75 | 0,75 |
| 1 | 2 | 0,75 | 1,25 | 1,125 | 1 | 1,125 | 1,875 |
| 2 | 3 | 1,875 | 1,125 | 1,6875 | 1 | 1,6875 | 3,5625 |
| 3 | 3 | 3,5625 | -0,5625 | 0,84375 | -1 | -0,84375 | 2,71875 |
| 4 | 3 | 2,71875 | 0,28125 | 0,421875 | 1 | 0,421875 | 3,140625 |
| 5 | 3 | 3,140625 | -0,14063 | 0,210938 | -1 | -0,21094 | 2,929688 |
| 6 | 2 | 2,929688 | -0,92969 | 0,316406 | -1 | -0,31641 | 2,613281 |
| 7 | 1 | 2,613281 | -1,61328 | 0,474609 | -1 | -0,47461 | 2,138672 |
| 8 | 0 | 2,138672 | -2,13867 | 0,711914 | -1 | -0,71191 | 1,426758 |
| 9 | -1 | 1,426758 | -2,42676 | 1,067871 | -1 | -1,06787 | 0,358887 |
| 10 | -2 | 0,358887 | -2,35889 | 1,601807 | -1 | -1,60181 | -1,24292 |

12. (secção 6) Um CD de áudio contém sinais em estéreo com frequências entre os 20 Hz e os 20 kHz, amostrados a 44,1 kHz e codificados em PCM uniforme com 16 bits por amostra.

- a) Qual o débito binário?
- b) Calcule a *SNR* assumindo um sinal de entrada com distribuição uniforme;
- c) Se implementar o conversor analógico-digital através de uma modulação $\Delta\Sigma$ de 1 bit a uma frequência de amostragem de 2,8224 MHz, qual a ordem mínima para manter a qualidade requerida?
- d) Se baixar a frequência de amostragem uma oitava mas compensar com um quantificador multi-bit, quantos bits são necessários para manter a mesma qualidade?

Resolução:

- i. a) O débito binário total em estéreo é de $2 \times 16 \times 44,1 = 1,4112$ Mbit/s.
- ii. b) A qualidade dos sinais CD áudio é de $6,02 \times 16 = 96,3$ dB (equação 2.14).
- iii. c) A sobre-amostragem é de $2822,4 / 44,1 = 64$ vezes.
- iv. A *SNR* produzida por um modulador $\Delta\Sigma$ de 1^a ordem é de 49 dB (equação 6.5), claramente insuficiente para a qualidade CD áudio.
- v. Para produzir uma *SNR* equivalente a estes 49 dB em PCM uniforme são necessários apenas 8 bits por amostra (48,2 dB).
- vi. Para aumentar a qualidade utiliza-se um modulador de 2^a ordem, a que correspondem 77,4 dB (equação 6.8 com $n=2$), ainda insuficiente.
- vii. Para um modulador de 3^a ordem correspondem 105 dB, valor já superior em 9 dB aos 96 dB requeridos.
- viii. d) Se baixar a frequência de amostragem uma oitava, a perda na *SNR* é de $3(2N+1)$ dB. Para $N=3$ a perda é de 21 dB ($N+1/2$ bits), faltando $21-9=12$ dB (9 dB e excesso da alínea anterior), pelo que são necessários para os compensar um total de $R=3$ bits ($20 \times \log(2^3-1) = 16,9$ dB).

Exercícios propostos

-
1. (secção 3) Suponha um sinal com largura de banda de 10 kHz e amplitude máxima de 10 V.
- Qual a frequência mínima para amostragem deste sinal sem erro?
 - Calcule os valores de quantificação e os valores de decisão para um quantificador uniforme *midtread* que permita codificar o sinal em PCM com um débito binário total de 40 kbit/s;
 - Calcule a *SNR* de quantificação nas condições da alínea anterior, assumindo uma sinusoide como sinal de entrada.
-
2. (secção 3) Suponha um sinal com uma distribuição de amplitudes uniforme entre -1 e +1 V. A largura de banda do sinal é de 5 kHz.
- Qual a frequência mínima para amostragem deste sinal sem erro?
 - Calcule os valores de quantificação e os valores de decisão para um quantificador *midrise* que permita codificar o sinal em PCM uniforme com um débito binário de 20 kbit/s;
 - Calcule a *SNR* de quantificação nas condições da alínea anterior;
 - Qual a *SNR* se a quantificação fosse *companding* Lei-A ($A=87,56$)?
 - Qual a *SNR* se o quantificador for obtido através do algoritmo de quantificação óptima?
-
3. (secção 3) Suponha um sinal com uma distribuição gaussiana de média 1 V e variância 2,25 W, aplicado à entrada de um quantificador uniforme cuja excursão varia entre -3,5 e 5,5 V e cujo intervalo de quantificação é de 35,16 mV.
- Calcule a potência do sinal;
 - Qual é a potência do ruído de quantificação? Está a fazer alguma aproximação?
 - Determine a relação sinal/ruído de quantificação com este sinal;
 - Qual o débito binário deste codificador, sabendo que a largura de banda do sinal é de 2 kHz?

4. (secção 4.1) Num codificador DPCM com preditor unitário, o valor máximo de quantificação do erro de predição é de 0,5 V, sendo utilizado um quantificador *midrise* de 4 intervalos de quantificação. Uma sequência de bits recebidos no receptor é: 00100111.
- Determine o quantificador. Assuma um código numérico binário sequencial do valor de quantificação mais pequeno para o mais alto.
 - A quantas amostras corresponde a sequência de bits recebida?
 - Determine o sinal descodificado para as amostras respetivas.
Assuma que o valor predito na primeira amostra é 0.
5. (secção 4.1) Suponha um sinal sinusoidal, amostrado a 6 kHz com 7 bit/amostra.
- Qual é a *SNR* quando este sinal é codificado com PCM uniforme?
 - Qual a *SNR* de quantificação para PCM *companding* Lei-A?
Porque é que este valor é pior do que o obtido com quantificador uniforme?
 - Qual a frequência do sinal de entrada para que a *SNR* em DPCM com preditor unitário seja igual à do PCM uniforme?
 - Suponha que aumenta a frequência de amostragem para o dobro.
Qual a variação da *SNR*?
 - Qual a característica do qual o DPCM tira partido, que permite a variação da alínea anterior?
 - Qual o aumento do débito binário correspondente à alínea d)?
 - Existiria um processo mais eficiente de melhorar a qualidade?
Qual?
 - Qual o aumento do débito binário correspondente à alínea anterior?
6. (secção 4.1) Suponha um sinal a codificar com 15 kHz de largura de banda, amplitude 1 V e potência de 1/500 W.
- Quantos bits (aproximadamente) são necessários para quantificar este sinal com 38 dB de relação sinal-ruído em PCM uniforme?
 - Qual o débito binário desta codificação?
 - Se a autocorrelação de primeira ordem (não normalizada) for de 1/570 W, qual o ganho de predição e respetiva relação sinal-ruído de quantificação, para um codificador DPCM unitário?
 - Calcule os valores de quantificação e os valores de decisão que permita codificar o sinal em DPCM unitário que não produza ruído granular e com um débito binário total de 60 kbit/s.

7. (secção 4.1) Suponha um sinal com uma distribuição uniforme entre -1 e +1 V. A largura de banda do sinal é de 4 kHz e pretende-se um débito binário máximo de 56 kbit/s. Admita que a autocorrelação normalizada de 1^a ordem é de 0,9.

- a) Calcule a potência do sinal, bem como a sua variância;
- b) Determine a *SNR* de um codificador PCM uniforme com este sinal;
- c) Determine a *SNR* usando um codificador DPCM, em que o preditor é adaptado de 1^a ordem;
- d) Calcule o valor máximo do quantificador;
- e) Determine a *SNR* com o valor máximo do quantificador de 0,8 V.

8. (secção 4.1) Suponha um sinal sinusoidal de amplitude 1 V, amostrado a 10 kHz e codificado com 8 bit/amostra.

- a) Qual a *SNR* quando este sinal é codificado com PCM uniforme?
- b) Qual a frequência do sinal de entrada para que a *SNR* em DPCM unitário seja igual à do PCM uniforme?
- c) Suponha que aumenta a frequência de amostragem para o dobro; Qual a variação da *SNR* usando PCM uniforme?
- d) Repita a alínea anterior para DPCM unitário, mantendo a frequência do sinal calculada na alínea b);
- e) Nas condições da alínea b) (sem o aumento da frequência de amostragem para o dobro da alínea c)), qual o aumento da *SNR* assumindo um preditor de 1^a ordem adaptado ao sinal?
- f) Em relação à alínea e) determine o valor máximo do quantificador;
- g) Repita as alíneas e) e f) usando um coeficiente de predição de 0,8.

9. (secção 4.1) Suponha um sinal com média 0 V e variância 2 W, tendo uma largura de banda de 5 kHz.

- a) Determine o valor do intervalo de quantificação se este sinal for codificado em PCM uniforme com um débito binário de 60 kbit/s, com uma *SNR* de 29,92 dB.
- b) Qual o valor do valor máximo de quantificação?
- c) Determine o valor máximo do quantificador se este sinal for codificado em DPCM com o mesmo débito binário e a mesma *SNR*;
- d) Que tipo de preditor está a assumir na alínea anterior?
- e) Se o valor máximo possível da *SNR* em DPCM unitário for de 36 dB, qual o valor da autocorrelação normalizada de 1^a ordem do sinal de entrada?

10. (secção 4.1) Considere um sinal de entrada, $m(t)$, de média 0 V e variância 2 W e com uma largura de banda 5 kHz.

- Determine o valor do intervalo de quantificação, se este sinal for quantificado em PCM uniforme com uma SNR de 25,84 dB;
- Qual a amplitude do sinal se este for codificado com 50 kbit/s?
- Suponha que o sinal foi codificado em DPCM com um preditor adaptado de 1^a ordem e uma variação máxima do erro de predição de ± 2 V. Qual o ganho de predição?
- Qual o número de bits por amostra para uma SNR de 25,84 dB?

11. (secção 4.1) Considere um sinal de entrada, $m(t)$ com a seguinte autocorrelação:

$$R_m(\tau) = 2 \operatorname{sinc}(10000\tau) = 2 \frac{\sin(10000\pi\tau)}{10000\pi\tau}$$

- Qual a potência do sinal?
- Supondo que o sinal é codificado em DPCM adaptado de 1^a ordem, amostrado a 34,5 kHz, qual o valor do coeficiente de predição?
- Qual o coeficiente de predição para um preditor de 2^a ordem?

12. (secção 4.2) Num descodificador ADM o algoritmo de adaptação do passo de quantificação é dado por:

$$\Delta[n] = |\Delta[n-1]| \left(1 + \frac{0,5b[n-1]}{b[n]} \right).$$

Os níveis lógicos dos bits recebidos são:

| n | 0 | 1 | 2 | 3 |
|-----|---|---|---|---|
| | 1 | 0 | 1 | 1 |

No instante $n = -1$ o valor do sinal quantificado $mq[n] = 0,5$, o valor do passo de quantificação $\Delta[n] = 1$ V, e o nível lógico do bit de codificação é “0”. Calcule o sinal quantificado $mq[n]$.

13. (secção 5) Admita um sinal com potência normalizada de 0,2, excursão entre -1,5 e +1,5 V, autocorrelação de 1^a ordem de 0,36 W e máxima frequência 6 kHz. Suponha que tem de o transmitir com um débito binário de 96 kbit/s.

- a) Determine a SNR se usar um codificador PCM uniforme;
- b) Calcule o valor do intervalo de quantificação;
- c) Determine a SNR se usar um codificador DPCM unitário;
- d) Calcule o valor do intervalo de quantificação;
- e) Determine a SNR se usar um codificador DM;
- f) Calcule o ganho de filtragem;
- g) Calcule o valor do passo do quantificador.

14. (secção 5) Considere um sinal com potência 2 W e variação máxima de 20 kV/s. O sinal é amostrado a 32 kHz e codificado em DM.

- a) Determine o débito binário;
- b) Qual o valor mínimo de Δ de modo a evitar a saturação de declive?;
- c) Calcule a SNR , assumindo que não existe ganho de filtragem;
- d) Assuma uma amplitude do sinal de entrada de 4 V. Qual a frequência equivalente à da derivada máxima?
- e) Supondo que o sinal tem uma largura de banda de 4 kHz, qual a SNR com ganho de filtragem?

15. (secção 6) Pretende-se converter para PCM uniforme (ADC) com uma resolução de 132,44 dB, sinais com distribuição uniforme e frequência máxima de 20 kHz.

- a) Calcule o número de bits por amostra e o débito binário;
- b) Calcule o valor do intervalo de quantificação assumindo que o sinal de entrada tem um valor máximo de 2 V;
- c) Acha que esta conversão é fácil de realizar?
- d) Calcule a frequência de amostragem se pretender realizar esta conversão através da modulação $\Delta\Sigma$ de ordem 1 e com 1 bit por amostra;
- e) Acha que esta conversão é fácil de realizar?
- f) Para uma frequência de amostragem de 20 MHz e um modulador $\Delta\Sigma$ de ordem 2, quantos bits por amostra são necessários?
- g) Acha que esta conversão é fácil de realizar?

16.(secção 6) Pretende-se converter um sinal de potência normalizada de $1/3$, codificado com 24 bits por amostra em PCM uniforme, para um sinal analógico (DAC).

- a) Calcule o valor mínimo do fator de sobre-amostragem se pretender realizar esta conversão através da modulação $\Delta\Sigma$ de ordem 1 e com 1 bit por amostra;
- b) Calcule o valor mínimo do fator de sobre-amostragem se pretender realizar esta conversão através da modulação $\Delta\Sigma$ de ordem 2 e com 2 bit por amostra;
- c) Calcule o valor da SNR para um codificador DM com o mesmo débito binário;
- d) Calcule o valor de Δ , assumindo uma amplitude do sinal de entrada de 1 V.

17.(secção 6) Considere um sinal $m(t)$, com uma distribuição de amplitudes uniforme e com uma largura de banda de 22,05 kHz. Pretende-se converter este sinal em DSD ($\Delta\Sigma$ de 1 bit) com qualidade correspondente à do PCM uniforme codificado com 22 bit/amostra e com um débito de 2,8224 Mbit/s. Calcule a ordem do modulador.

Soluções (não inclui respostas teóricas nem figuras):

1. a) $f_s=20$ kHz;
 b) Valores de quantificação $[-5 \quad 0 \quad 5 \quad 10]$ V
 Valores de decisão $[-2,5 \quad 2,5 \quad 7,5]$ V;
 c) $SNR=13,8$ dB
2. a) $f_s=10$ kHz; b)
 b) Valores de quantificação $[-0,75 \quad -0,25 \quad 0,25 \quad 0,75]$ V
 Valores de decisão $[-0,5 \quad 0 \quad 0,5]$ V;
 c) $SNR=12,04$ dB; d) $SNR=2,04$;
 e) $SNR=12,04$ dB.
3. a) $P=3,25$ W; b) $\sigma_q^2 = 103$ μW . Sim, não se leva em conta “alguma” saturação; c) $SNR=45$ dB; d) $R_b=32$ kbit/s.
4.
 a) Valores de quantificação $[-0,375 \quad -0,125 \quad 0,125 \quad 0,375]$ V
 Valores de decisão $[-0,25 \quad 0 \quad 0,25]$ V
 Código $00 \quad 01 \quad 10 \quad 11$
 b) 4;
 c)

| N | código | $eq[n]$ | $mp[n]$ | $mq[n]$ |
|-----|---------------|---------|---------|---------|
| 0 | 00 | -0,375 | 0 | -0,375 |
| 1 | 10 | 0,125 | -0,375 | -0,25 |
| 2 | 01 | -0,125 | -0,25 | -0,375 |
| 3 | 11 | 0,375 | -0,375 | 0 |
5. a) $SNR=43,9$ dB; b) $SNR=32,14$ dB; c) $f'=1000$ Hz;
 d) Aumento de 5,72 dB;
 e) A correlação entre amostras consecutivas;
 f) Aumento de 42 kbit/s; g) Aumento do número de bit/amostra;
 h) Aumento de 6 kbit/s.
6. a) $R=10$ bit/amostra; b) $R_b=300$ kbit/s;
 c) $G_p=6,1$ dB $SNR=44,1$ dB;
 d) Valores de quantificação $[-0,25 \quad 0 \quad 0,25 \quad 0,5]$ V
 Valores de decisão $[-0,125 \quad 0,125 \quad 0,375]$ V.
7. a) $P=\sigma_m^2 = 0,33(3)$ W; b) $SNR=42,14$ dB; c) $SNR=49,35$ dB;
 d) $V_1=0,44$ V; e) $SNR=44,08$ dB.

8. a) $SNR=49,92$ dB; b) $f=1666,6(6)$ Hz; c) Aumento de 0 dB;
d) Aumento de 5,72 dB; e) 1,25 dB; f) $V1=0,87$ V;
g) Aumento de 0,76 dB e $V1=0,92$ V;
9. a) $\Delta_q=0,156$ V;
b) $V=5$ V;
c) $V1=5$ V; d) Não depende do preditor; e) $r[1]=0,88$.
10. a) $\Delta_q=0,25$ V; b) $m_{max}=4$ V; c) $G_p=6,02$ dB; d) $R=4$ bit/amostra.
11. a) $P=2$ W; b) $a=0,867$; c) $a=0,53$.

12.

| n | $b[n]$ | $\Delta[n]$ | $eq[n]$ | $mp[n]$ | $mq[n]$ |
|-----|--------|-------------|---------|---------|---------------|
| -1 | -1 | 1 | | | 0,5 |
| 0 | 1 | 0,5 | 0,5 | 0,5 | 1 |
| 1 | -1 | 0,25 | -0,25 | 1 | 0,75 |
| 2 | 1 | 0,125 | 0,125 | 0,75 | 0,875 |
| 3 | 1 | 0,1875 | 0,1875 | 0,875 | 1,0625 |

13. a) $SNR=45,94$ dB; b) $\Delta_q=0,012$ V; c) $SNR=49,92$ dB;
d) $\Delta_q=7,4$ mV; e) $SNR=14,93$ dB; f) $G_f=9,03$ dB; g) $\Delta=0,59$ V.
14. a) $R_b=32$ kbit/s; b) $\Delta=0,625$ V; c) $SNR=11,86$ dB;
d) $f=795,8$ Hz; e) $SNR=17,88$ dB.
15. a) $R=22$ bit/amostra; $f_s=880$ kbit/s;
b) $\Delta_q=950$ nV; c) Demasiado pequeno;
d) $f_s=1,55$ GHz; e) Demasiado elevado;
f) $R=3$; g) Valores razoáveis.
16. a) $OSR=97359$; b) $OSR=905$; c) $SNR=87,79$ dB; d) $\Delta=1,74$ mV.
17. N=4.

Exercícios propostos em Matlab

PCM - Modulação por código de pulso

(secção 3)

Funções a desenvolver em *Matlab*:

1. Uma função que crie um sinal sinusoidal, que tenha como entradas:

- A amplitude, frequência e fase inicial do sinal a gerar
- A frequência de amostragem
- O tempo (em segundos) do sinal a gerar

E tenha como saídas:

- Os valores das amostras do sinal gerado
-

2. Uma função que crie as tabelas de quantificação uniforme (o livro de código e a partição), que tenha como entradas:

- O número de bits de codificação por amostra
- O valor máximo do quantificador
- O tipo de quantificador (*midtread* ou *midrise*)

E tenha como saídas:

- Os valores de quantificação e decisão
-

3. Uma função que implemente um codificador (transmissor) PCM e que tenha como entradas:

- Uma amostra do sinal a codificar
- O número de bits de codificação por amostra
- Os valores de decisão do quantificador a utilizar

E tenha como saída:

- O código PCM em binário

.....

4. Uma função que implemente um descodificador (receptor) PCM e que tenha como entradas:

- O código PCM em binário
- Os valores de quantificação do quantificador a utilizar

E tenha como saída:

- A amostra do sinal descodificado

.....

5. Uma função que calcule a SNR e que tenha como entradas:

- O sinal original
- O sinal quantificado

E tenha como saída:

- A relação sinal-ruído entre os sinais de entrada (em decibéis)

Problemas

1. Produza 1 segundo de uma sinusoide com amplitude 1 V, frequência 905 Hz, amostrado a 8 kHz (amostragem da banda telefónica). Codifique e descodifique este sinal em PCM com 3 bits por amostra e com um quantificador uniforme *midrise*.
 - a) Codifique e descodifique uma amostra do sinal. Visualize o código transmitido (bits) e a amostra descodificada. Qual o erro de quantificação?
 - b) Produza os gráficos do sinal original e do sinal descodificado. Determine o valor da SNR_{dB} teórica e compare com o valor real.
 - c) Produza o gráfico do ruído de quantificação. Compare o seu valor máximo com o valor teórico.
 - d) Produza o gráfico do sinal original versus o sinal descodificado (não interligue os pontos). O que é que este gráfico representa?
2. Repita o problema 1 alíneas a) e b), com um quantificador *midrise* e *midtread* e 6 bits por amostra. Utilize um sinal de fala como entrada.
 - a) Em termos do ruído de quantificação, quais são as principais diferenças entre os dois quantificadores?
 - b) Produza o histograma do ruído de quantificação, com o número de intervalos suficientemente elevado para obter uma boa definição. Este gráfico explica a diferença de resultados entre os valores da SNR_{dB} teórica e real?

3. Codifique e descodifique um sinal de fala em PCM uniforme, com um quantificador midrise, e com um número de bits por amostra $R = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Oiça o sinal original e os sinais descodificados. Produza um gráfico com os valores da SNR_{dB} teórica e real em termos do número de bits por amostra (ponha o número de bits no eixo das abscissas e os valores da SNR_{dB} no eixo das ordenadas). Comente os resultados.
4. Comprima um sinal de fala por uma não linearidade *companding* Lei-A, com $A=87, 56$.
 - a) Produza os histogramas do sinal original e do sinal de comprimido e compare as duas distribuições. Quais são as principais diferenças e o que é que estas diferenças significam?
 - b) Produza o gráfico do sinal original em função do sinal de saída (não interligue os pontos). O que é que este gráfico representa?
5. Implemente um sistema PCM companding com 8 bits de codificação por amostra e um quantificador *midrise*, e determine o valor da SNR_{dB} real e teórica. Implemente de 2 formas e compare os resultados:
 - Através do sistema da figura 3.3.
 - Criando tabelas de quantificação não uniformes (expansão de tabelas uniformes).
6. Varie a amplitude de um sinal de fala e calcule a SNR_{dB} com um codificador PCM companding Lei-A com 8 bits por amostra. Produza um gráfico com os valores da SNR_{dB} real em termos da potência do sinal (Potência em decibéis no eixo das abscissas *versus* SNR_{dB} no eixo das ordenadas).

7. Produza o histograma de uma sinusoide com uma resolução de 100 pontos e calcule os valores ótimos de quantificação (algoritmo de Max-Lloyd) para 3 bits por amostra. Tire conclusões. Repita para um sinal de fala.
8. Codifique e descodifique um sinal de fala com um quantificador ótimo, e com um número de bits por amostra $R = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Produza um gráfico com os valores da SNR_{dB} em termos do número de bits por amostra. Compare e comente os resultados obtidos em PCM uniforme e *companding*.

Tenha em atenção as seguintes funções do MATLAB:

`wavread` - lê ficheiros tipo

`wavwrite` - grava ficheiros tipo wav

`sound` - toca um sinal

`soundsc` - normaliza e toca um sinal

`quantiz` - quantifica e codifica um sinal

`compand` - compressão ou descompressão

`dec2bin` - converte de decimal para binário

`de2bi` - converte de decimal para binário

`bin2dec` - converte de binário para decimal

`bi2de` - converte de binário para decimal

`plot` - cria um gráfico com um sinal

`subplot` - define áreas para gráficos

`grid` - desenha grelha no gráfico

`hist` - cria histograma

`lloyds` - cria tabelas de quantificação com o algoritmo Max-Lloyd

DPCM - Modulação por código de pulso diferencial

(secção 4.1)

Problema

1. Para um sinal sinusoidal amostrado a $f_s = 8 \text{ kHz}$ e frequência $f_s/12$,
 - a) Produza o gráfico de cada amostra do sinal em função da respetiva amostra anterior (não interligue os pontos). Existe correlação entre as amostras e a amostra anterior?
 - b) Calcule o erro de predição (preditor unitário) $e[n] = m[n] - m[n-1] = m[n] - m_p[n]$ (note que num codificador DPCM a predição é feita em função das amostras quantificadas). Calcule o seu valor máximo. Quais são as vantagens em codificar o erro de predição em vez do sinal original?
 - c) Calcule a potência do sinal de entrada e do erro de predição, o ganho de predição e o valor máximo de quantificação através de $V_1 = \sqrt{\frac{V^2}{G_p}}$.
 - d) Calcule a autocorrelação normalizada do sinal de entrada para um atraso de 1 amostra. Compare com o valor teórico.
 - e) Calcule o ganho de predição e o valor máximo de quantificação a partir do valor da autocorrelação e compare com os resultados obtidos na alínea b) e c).
 - f) Calcule o valor ótimo, a_{ot} , do coeficiente de predição de 1ª ordem e repita as alíneas b), c) e e) para este preditor. Compare os valores obtidos com os dois tipos de preditores.

Repita o exercício para uma frequência do sinal de entrada de $f_s/6$, $f_s/4$ e $f_s/3$ e um sinal de fala. Compare e tire conclusões.

Funções a desenvolver em Matlab:

1. Uma função que implemente um codificador (transmissor) DPCM, que tenha como entradas:

- Uma amostra do sinal a codificar
- O número de bits de codificação por amostra
- Os valores de quantificação e decisão (o livro de código e a partição)
- O valor predito da amostra

E tenha como saídas:

- O código binário em DPCM
 - A amostra descodificada
-

2. Uma função que implemente um descodificador (receptor) DPCM, que tenha como entradas:

- O código binário em DPCM
- Os valores de quantificação
- O valor predito da amostra

E tenha como saídas:

- A amostra descodificada
-

3. Uma função que adapte um quantificador segundo o método proposto por Jayant, que tenha como entradas:

- O código binário em DPCM
- A tabela de adaptação
- Os valores de quantificação e decisão

E tenha como saídas:

- Os valores de quantificação e decisão adaptados

.....

4. Uma função que simule um canal digital gerando erros numa sequência binária e que tenha como entradas:

- A sequência binária sujeita a erros.
 - A probabilidade de erro de bit.
-

Problemas

2. Codifique e descodifique um sinal sinusoidal em DPCM, com $V1$ calculado automaticamente a partir da autocorrelação. Utilize um quantificador uniforme *midrise*, com 2 a 6 bits de codificação por amostra. Calcule as SNR reais e teóricas nas seguintes situações:

- a) Com preditor unitário.
- b) Com preditor adaptado.
- c) Com coeficiente de predição 0. Qual método de codificação está a utilizar nesta situação?
- d) Com preditor adaptado e quantificador adaptado (Jayant).
- e) Com coeficiente de predição 0 e quantificador adaptado (Jayant). Que método de codificação está a utilizar nesta situação?

3. Repita o problema anterior apenas para 1 valor de número de bits por amostra, introduzindo 0,1 % de erros de bit no canal de transmissão (entre o transmissor e o receptor). Liste por ordem os métodos de codificação em relação ao impacto dos erros no canal e explique a causa deste impacto.

DM - Modulação Delta e sobre-amostragem

(secção 5)

Funções a desenvolver em Matlab:

1. Uma função que implemente um codificador (transmissor) DM, que tenha como entradas:

- Uma amostra do sinal a codificar
- O passo Δ de quantificação
- O valor predito da amostra

E tenha como saídas:

- O bit de codificação
 - A amostra descodificada
-

2. Uma função que implemente um descodificador (receptor) DM, que tenha como entradas:

- O bit de codificação
- O passo Δ de quantificação
- O valor predito da amostra

E tenha como saídas:

- A amostra descodificada
-

Problemas

1. Implemente um codificador DM tendo como entrada um sinal sinusoidal.

Considere o passo de quantificação Δ igual à máxima variação entre amostras consecutivas. Calcule a SNR .

2. Altere as funções que implementam o DM de modo a implementar um codificador ADM, tendo como algoritmo de adaptação o correspondente à equação:

$$\Delta[n] = \Delta[n-1] \left(1 + \alpha \frac{b[n-1]}{b[n]} \right) \quad 0 < \alpha < 1.$$

3. Sobre-amostre (função *interp1*) o sinal de entrada com uma *OSR* de 32. Oiça o sinal original e sobre-amostrado.
4. Decime o sinal sobre-amostrado com a mesma *OSR* (função *decimate* com o filtro por omissão). Calcule a *SNR* entre o sinal original e o sinal decimado. Porque é que este sinal não é igual ao sinal original?
5. Utilize na decimação um filtro FIR de ordem 100. Melhora a *SNR*?
6. Utilize o sinal sobre-amostrado como entrada do modulador ADM.
7. Calcule a *SNR* entre o sinal sobre amostrado e o respetivo sinal quantificado. Compare com o respetivo valor teórico.
8. Decime o sinal quantificado e calcule a *SNR*. Considere como sinal original o sinal obtido após a sequência interpolação-decimação do ponto 5 (porquê?).
9. Qual a diferença entre as *SNRs* calculadas antes e depois da decimação? A que é que corresponde este valor? Compare com o valor teórico.
10. Teste várias *OSR* e vários valores de α . Produza os gráficos respetivos.

Tenha em atenção as seguintes funções do MATLAB:

`interp1` - interpolação

`decimate` - decimação

Glossário

ADM – *Adaptive Delta Modulation* (DM Adaptativa)

ADPCM – *Adaptive Differential Pulse Code Modulation* (DPCM Adaptativo)

APCM – *Adaptive Pulse Code Modulation* (PCM Adaptativo)

AQB – *Adaptive quantization with backward estimation* (quantificação adaptativa com estimação sobre o sinal quantificado)

AQF – *Adaptive quantization with forward estimation* (quantificação adaptativa com estimação sobre o sinal original)

bit – *binary digit* (dígito binário)

CD – Compact Disc

DECT – *Digital Enhanced Cordless Telecommunications*

DM – *Delta Modulation* (Modulação Delta)

DPCM – *Differential Pulse Code Modulation* (Modulação por Código de pulso Diferencial)

$\Delta\Sigma$ – *Delta-Sigma*

DSD – *Direct Stream Digital*

GSM – *Group special mobile*

ITU-T – *International Telecommunication Union-Telecommunication* (União Internacional de Telecomunicações - Telecomunicações)

PCM – *Pulse Code Modulation* (Modulação por código de pulso)

POTS – *Plain old telephone service*

RDIS – Rede Digital Integrada de Serviços (ISDN - *Integrated Services Digital Network*)

S&H – *Sampling & Hold* (Amostragem e Retenção)

SACD – Super Áudio CD

SNR – *Signal to Noise Ratio* (Relação Sinal-Ruído)

UMTS – *Universal Mobile Telecommunications System*

Bibliografia

- A. Bruce Carlson, Paul B. Crilly, Janet C. Rutledge, “Communications and Systems”, 4th Ed., *McGrawHill*, 2001.
- S. Haykin, Michel Moher, “Communication Systems”, 5th Ed., *Willey*, 2009.
- N. S. Jayant, “Digital Coding of Waveforms: PCM, DPCM, and DM Quantizers”, *Proc. IEEE*, pp. 611-632, 1974.
- N. S. Jayant, P. Noll, “Digital Coding of Waveforms, Principles and Applications to Speech and Video”, *Prentice-Hall Signal Processing Series*, 1970.
- Y. Lai, “Implementation of Adaptive Differential Pulse-Code Modulation (ADPCM) Transcoder with the DSP16 Digital Signal Processor”, *AT&T Application Note*, 1988.
- J. Max, “Quantizing for Minimum Distortion”, *IRE Trans. Inform. Theory*, vol IT-6, pp. 7-12, Março de 1960.
- S. P. Lloyd, ”Least squares quantization in PCM”, Bell Telephone Laboratories Paper, 1957, republicado em *IEEE Transactions on Information Theory* 28 (2): 129-136, 1982.
- Steven R. Norsworthy, R. Schreier, G. C. Temes, Delta-Sigma data converters: theory, design, and simulation, *IEEE*, 1997.
- M. Schwartz – “Information Transmission Modulation and Noise”, 4th Ed., *Mc Graw Hill*, 1990.