Lista de exercícios das aulas n.º 04: Variáveis aleatórias bidimensionais

Exercício 1.
Uma máquina produz determinado tipo de componentes electrónicos. Cada componente ou não tem defeitos ou tem um defeito do tipo A ou tem um defeito do tipo B, com probabilidades de 0,9, 0,07 e 0,03, respectivamente. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso, de forma independente, dois componentes da produção da máquina. Seja X a variável aleatória que representa o número de defeitos do tipo A e Y a variável aleatória que representa o número de defeitos do tipo B, no conjunto dos dois componentes.

(a) *Determine a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y);*

(b) *Determine a função de distribuição conjunta do par aleatório (X, Y);*

(c) *Determine as funções de probabilidade marginais de X e de Y;*

(d) *Determine a função de distribuição marginal de X e a função de distribuição marginal de Y;*

(e) *Determine a função de probabilidade condicionada conjunta de X por Y;*

(f) *Indique a função de probabilidade de X condicionada por $Y = 1$;*

(g) *Determine a função de distribuição de X condicionada por $Y = 1$;*

(h) *Determine a função de probabilidade condicionada conjunta de Y por X;*

(i) *Indique a função de probabilidade de Y condicionada por $X = 0$;*

(j) *Determine a função de distribuição de Y condicionada por $X = 0$;*

(k) *Calcule a probabilidade de se encontrar, no conjunto dos dois componentes, um defeito do tipo B, sabendo que nenhum dos componentes apresenta defeito do tipo A;*

(l) *Analise a independência das variáveis aleatórias X e Y;*

(m) *Determine $E[X]$, $E[Y]$, $E[XY]$, $Cov[X,Y]$ e ρ_{XY}.*

Exercício 2.
Numa secção de fabrico de motores para automóveis, existem duas linhas de montagem que funcionam independentemente. As variáveis aleatórias X e Y representam, respectivamente, o número de peças produzidas por dia nas linhas A e B. Sabe-se que X toma os valores 0, 1 e 2 com probabilidades de 0,2, 0,5 e 0,3 e Y toma os valores 0, 1, 2 e 3 com probabilidades 0,1, 0,4, 0,3 e 0,2.

(a) *Determine a função de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y);*

(b) *Sabendo que, num certo dia, são produzidas duas peças na linha B, determine a probabilidade de que o número de peças produzidas na linha A seja no máximo uma.*

Exercício 3.
De um saco com chips, contendo 3 do tipo A, 2 do tipo B e 3 do tipo C, tirou-se ao acaso e simultaneamente uma amostra de 2 chips. Seja X a variável aleatória que representa o número de chips do tipo A e Y a que representa o número de chips do tipo B. Determine a função de probabilidade conjunta de (X, Y).

Exercício 4.
Numa dada loja de componentes para computadores, as vendas diárias de discos rígidos das marcas X e Y têm a seguinte função de probabilidade conjunta:

X \ Y	0	1	2
0	a	$0,05$	c
1	b	$0,15$	$0,1$

Considere que $F(0,1) = 0,3$ e que $P[Y \geqslant 1 \mid X = 0] = 0,5$.

(a) *Determine o valor de a, de b e de c;*

(b) *Analise a independência das variáveis aleatórias X e Y;*

(c) *Determine, justificando convenientemente, $E[4X - 2Y]$, $Var[4X - 2Y]$ e $Cov[4X + 2, -3Y - 1]$.*

Exercício 5.
Considere a seguinte função densidade de probabilidade conjunta do par aleatório (X,Y):

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy & , \ se\ 0\leqslant x\leqslant 2\wedge 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0 & , \ para\ outros\ valores \end{cases}.$$

(a) Determine k de forma que $f(x,y)$ seja uma função densidade de probabilidade conjunta;

(b) Obtenha a função distribuição conjunta do par aleatório (X,Y);

(c) Determine as funções densidade de probabilidade marginais de X e de Y;

(d) Calcule $P\left[1<X\leqslant\frac{3}{2}\right]$ e $P\left[\frac{1}{4}<Y<\frac{3}{4}\right]$;

(e) Determine as funções de distribuição de probabilidade marginais de X e de Y;

(f) Calcule $P\left[\frac{1}{2}\leqslant X\leqslant 1,\frac{1}{2}<Y<\frac{3}{4}\right]$ através de $f(x,y)$ e de $F(x,y)$;

(g) Determine a função densidade de probabilidade de X condicionada por Y e a função densidade de probabilidade de Y condicionada por X;

(h) Determine a função de distribuição de X condicionada por Y e a função de distribuição de Y condicionada por X;

(i) Verifique se as variáveis X e Y são independentes;

(j) Determine $E[X]$, $E[Y]$, $E[XY]$, $Cov[X,Y]$ e ρ_{XY}.

(k) Determine, justificando, $E[3X+15Y]$ e $Var[9X-3Y]$.

Exercício 6.
Num estudo em que se pretende analisar a relação entre o nível de precipitação anual, em mm, em determinada zona do país, X, e a quantidade de iodeto de prata, em mm, que é pulverizada nas nuvens dessa zona do país, Y, recorreu-se à função densidade de probabilidade conjunta associada a estas variáveis, a qual é descrita pela seguinte expressão analítica:

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy+y & , \ se\ 0<x<1\wedge 0<y<1 \\ 0 & , \ para\ outros\ valores \end{cases}.$$

Determine k de forma que $f(x,y)$ seja uma função densidade de probabilidade conjunta.

Exercício 7.
Sejam X e Y duas variáveis aleatórias que representam o tempo até ocorrerem falhas, medido em anos, dos subsistemas A e B, respectivamente; por exemplo, o tempo até ocorrerem falhas em dois computadores de bordo. Considere que as variáveis X e Y admitem a seguinte função densidade de probabilidade conjunta:

$$f(x,y)=\begin{cases} ke^{-(x+2y)} & , \ se\ x\geqslant 0\wedge y\geqslant 0 \\ 0 & , \ para\ outros\ valores \end{cases}.$$

(a) Determine o valor do parâmetro k;

(b) Determine as funções densidade de probabilidade marginais de X e de Y;

(c) Determine a probabilidade dos dois subsistemas estarem a funcionar, sem quaisquer falhas, após um ano;

(d) Determine a probabilidade do subsistema A funcionar mais tempo, sem ocorrerem falhas, do que o subsistema B.