SISTEMAS DINÂMICOS CONTÍNUOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Arnaldo Abrantes

Paulo Vieira

2019

TEORIA DE SISTEMAS DINÂMICOS

- O ramo da matemática que estuda como os sistemas evoluem ao longo do tempo
  - Cálculo
  - Equações diferenciais
  - Mapas iterados
  - Topologia algébrica

- A dinâmica de um sistema: a forma como o sistema evolui

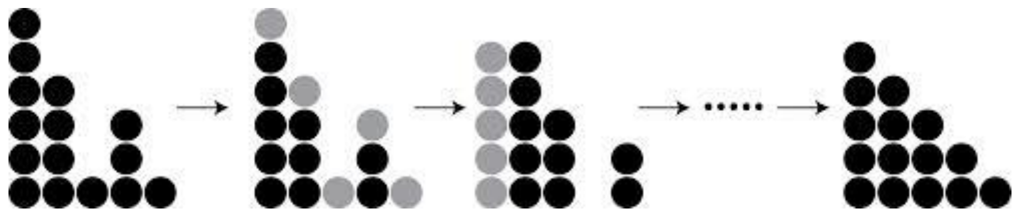
- A Teoria de Sistemas Dinâmicos dá-nos um vocabulário e um conjunto de ferramentas para descrever as dinâmicas dos sistemas

EXEMPLOS DE SISTEMAS DINÂMICOS

- A atmosfera (o tempo, alterações climáticas)
- A economia (o mercado de acções)
- O corpo humano (coração, cérebro, pulmões)
- Ecologia (populações de animais e plantas)
- Tráfego rodoviário
- Reacções químicas
- O alastramento de epidemias
- Evolução de ideias na sociedade
- A Internet

SOLITÁRIO BÚLGARO

- Um jogo que se inicia com N objectos iguais distribuídos por n montes
- Em cada jogada, de cada um destes montes é retirado um elemento, formando-se uma nova pilha com os objectos seleccionados.



http://mancala.wikia.com/wiki/Bulgarian_Solitaire

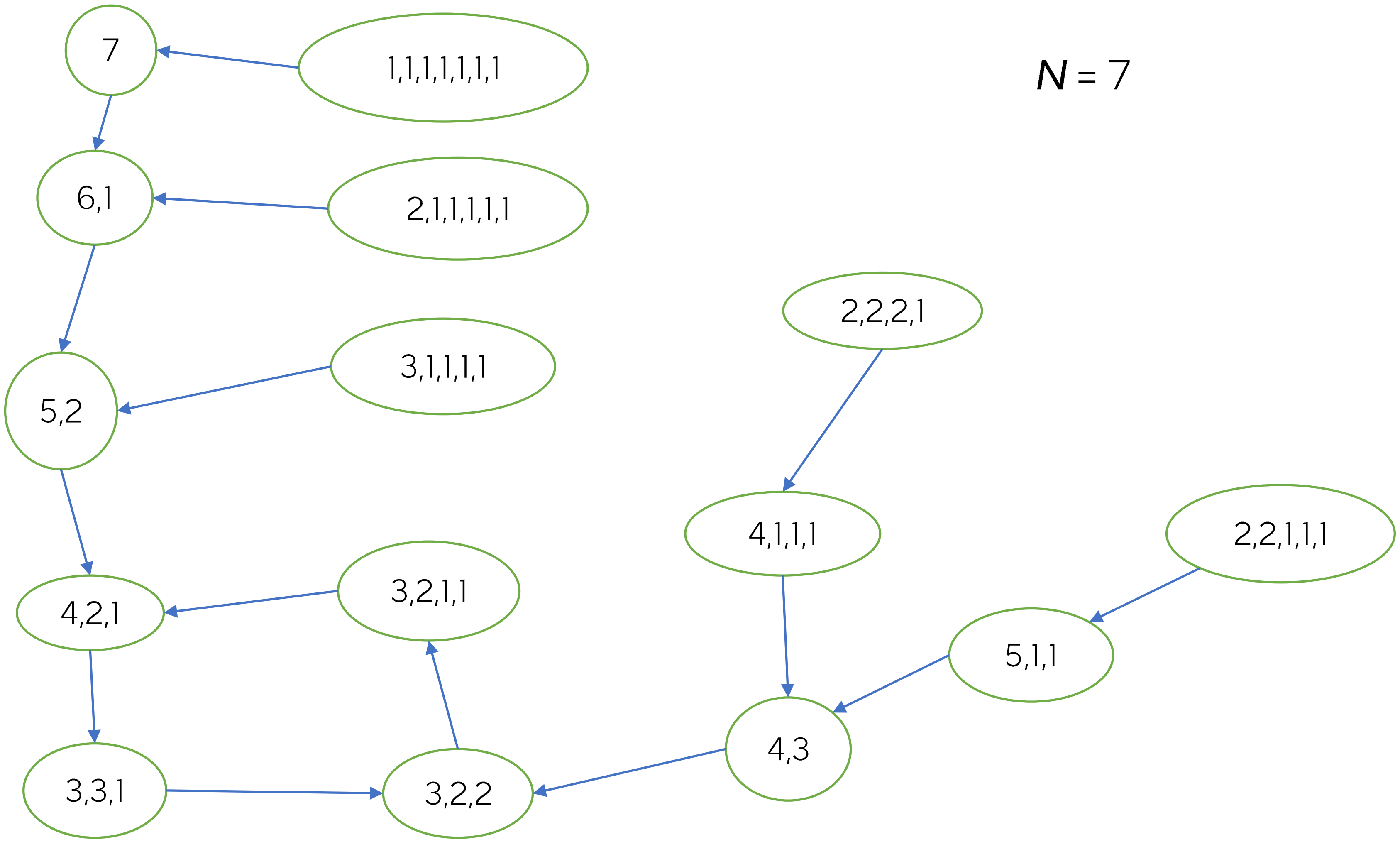
SOLITÁRIO BÚLGARO (CONT.)

- Trata-se portanto de uma forma de obter uma partição do natural N a partir de outra.

- Uma vez que o número de partições de um qualquer natural é finito, o jogo conduz necessariamente a um ciclo.

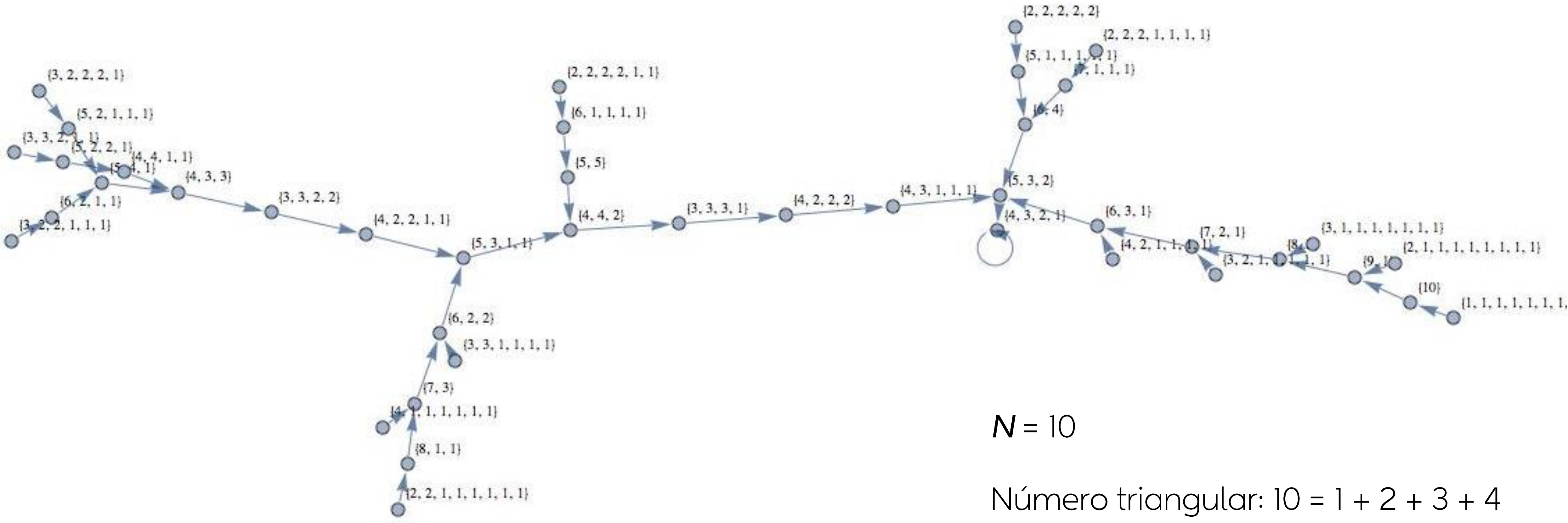
http://en.wikipedia.org/wiki/Partition_(number_theory)

EXEMPLO: CICLO LIMITE



$N = 7$

EXEMPLO: PONTO FIXO (CICLO DE PERÍODO 1)



$N = 10$

Número triangular: 10 = 1 + 2 + 3 + 4

MODELOS DE POPULAÇÃO

- Como varia a população mundial?
  - Usa-se uma regra de três simples como modelo?
  - Será que o modelo está bem calibrado para 1993?
  - Quantas pessoas existirão em 2020?

	1950	1960	1993	2020
População	2560	3040	?	?

MODELOS DE POPULAÇÃO

- Modelo Maltusiano (crescimento sem restrições
  - Equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = rP$$

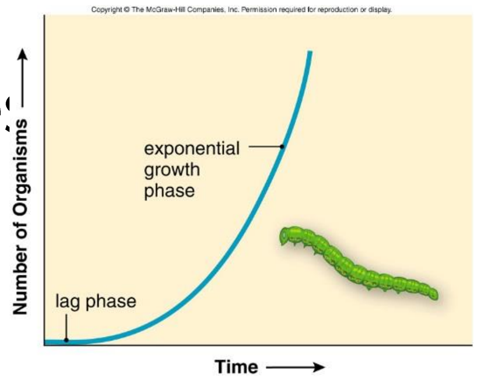
  - Solução analítica (crescimento exponencial)

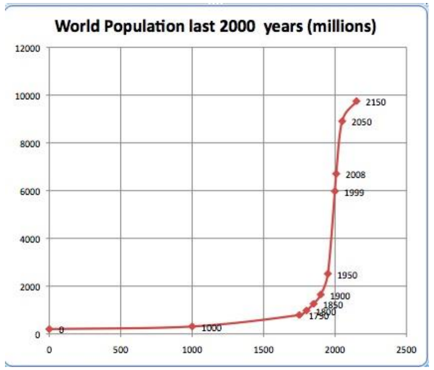
$$P(t) = P(0)e^{rt}$$

Modelo linear

  - Aproximação de Euler

$$P(t) = P(t - \Delta t) + r\Delta t P(t - \Delta t)$$





MODELOS DE POPULAÇÃO

	1950	1960	1993	2020
População	2560	3040	?	?

- Solução:
  - Determinar o r usando P(10)
    - r = 0,017185
  - Determinar P(43)
    - Número real de pessoas em 1993 é 5522 milhões.
    - O modelo permitiu obter um valor aceitável?
  - Determinar P(70)

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

- Sistemas dinâmicos que mudam continuamente, nos quais a variável de interesse tem um valor a cada instante
  - e.g., temperatura de uma chávena de café ou posição de uma bola

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

- Uma equação diferencial é uma relação entre uma função e a sua taxa de variação
  - Pode ser utilizada para determinar o valor dessa função

- Cálculo diferencial é uma plataforma matemática poderosa que relaciona funções com as suas taxas de variação
  - Apesar disso, a maioria das equações não pode ser analiticamente – resolução através de métodos por aproximação feitos em computador

EXEMPLO

- Lei de Newton sobre o arrefecimento
  - Uma sala está a 20° C
  - Se uma chávena de café estiver 40° C mais quente que a sala, arrefece duas vezes mais rápido que se estiver apenas 20° C

$$\frac{dT}{dt} = 0.2(T(t) - 20)$$

$$T(0) = 80$$

$$\frac{dT}{dt} = -12º\ C/min$$

$$T(1) = ?$$

MÉTODO DE EULER

Transformar a taxa de variação numa sequência de valores aproximados da função

1. Para t = 0
   Condição inicial f(0)
   Tamanho do passo Δt

2. Avaliar a variação colocando do lado direito da equação

$$\frac{df}{dt} = F(f(t))$$

3. Determinar o próximo valor da função usando

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \left(\frac{df(t)}{dt} \times \Delta t\right)$$

4. Aumentar o t de Δt
5. Voltar ao ponto 2.)

STABILIZING LOOPS – BALANCING FEEDBACK

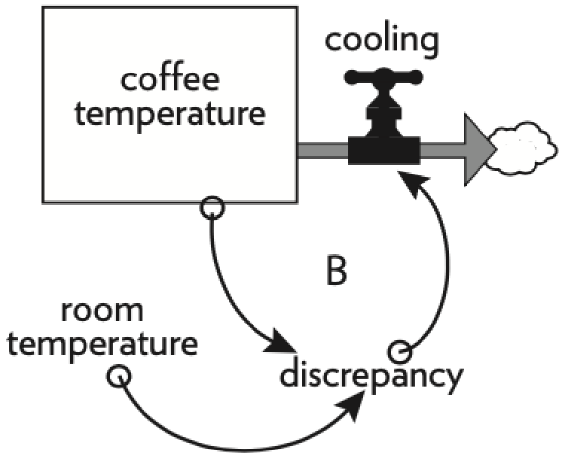


Figure 10. A cup of coffee cooling (*left*) or

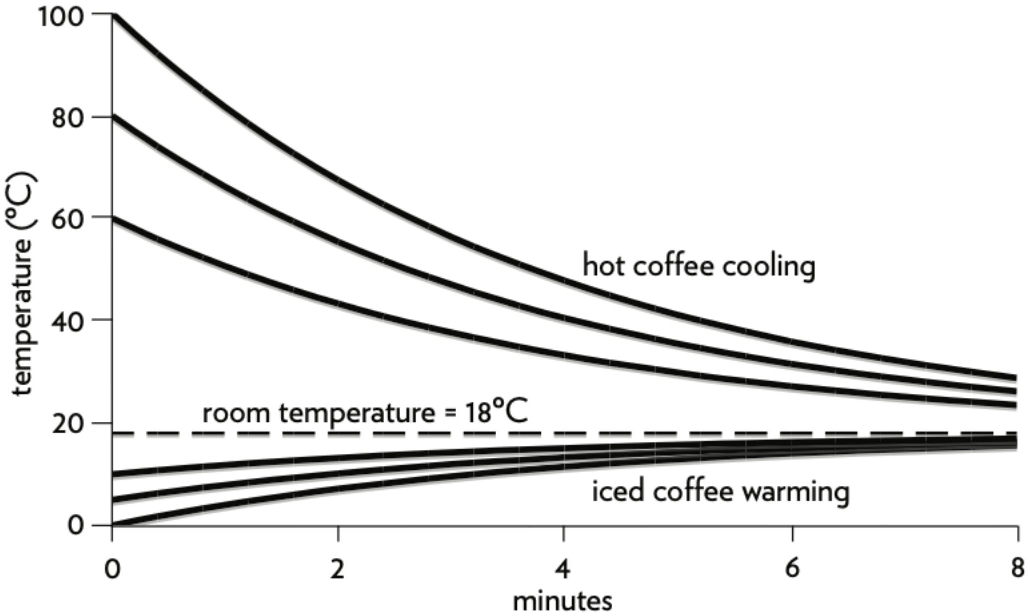
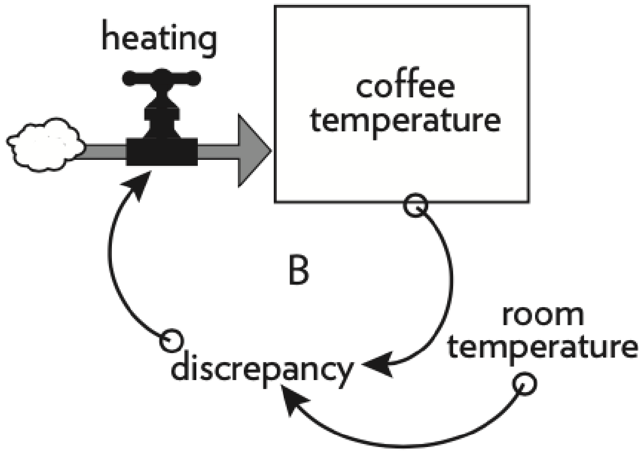


Figure 11. Coffee temperature as it approaches a room temperature of 18 °C.

STABILIZING LOOPS – BALANCING FEEDBACK



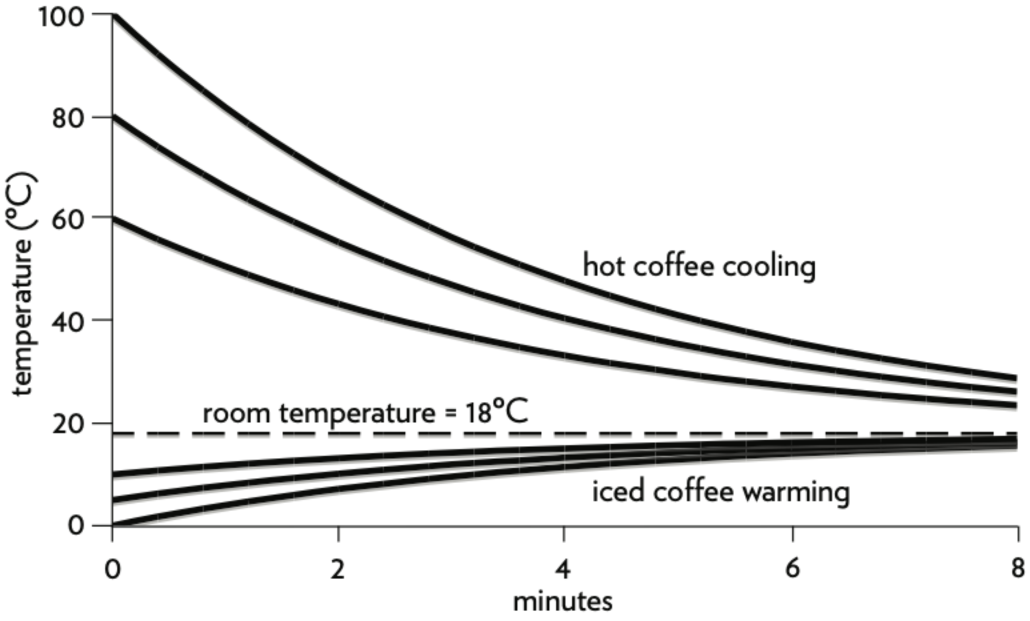


Figure 11. Coffee temperature as it approaches a room temperature of 18 °C.

A STOCK WITH TWO COMPETING BALANCING LOOPS—A THERMOSTAT

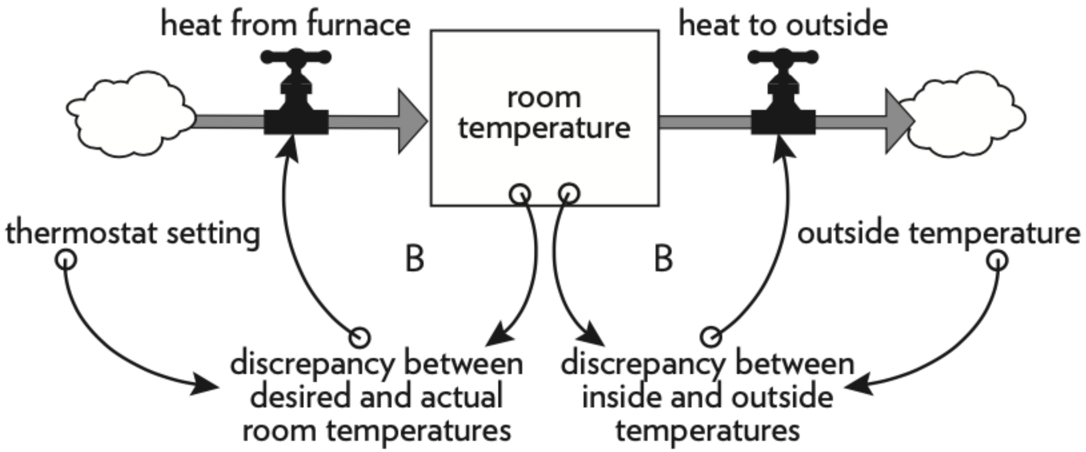


Figure 15. Room temperature regulated by a thermostat and furnace.

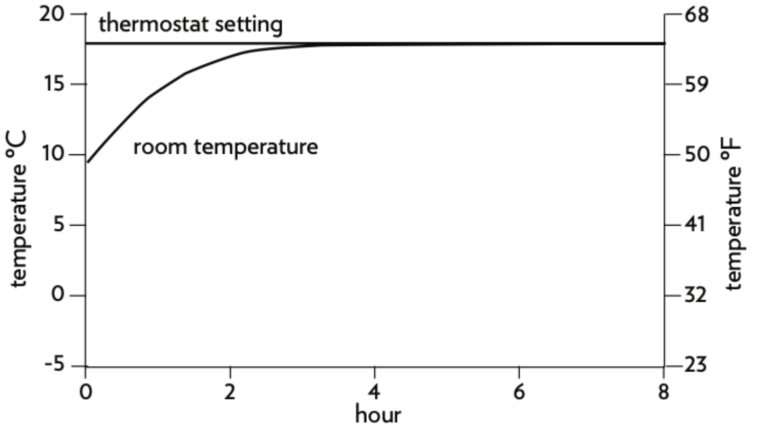


Figure 16. A cold room warms quickly to the thermostat setting.

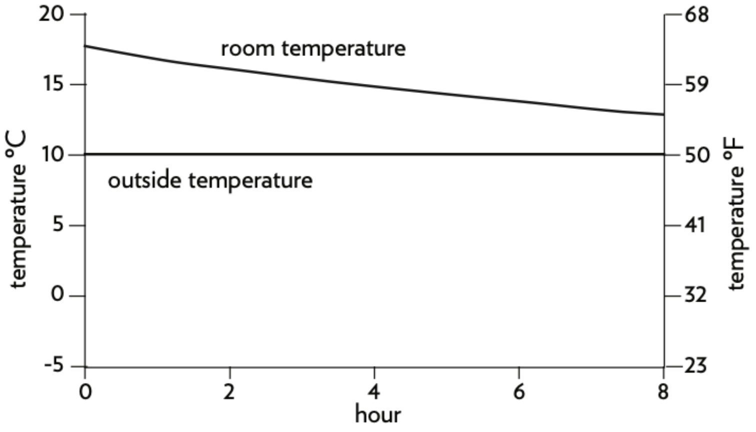


Figure 17. A warm room cools very slowly to the outside temperature of 10°C.

A STOCK WITH ONE REINFORCING LOOP AND ONE BALANCING LOOP—POPULATION

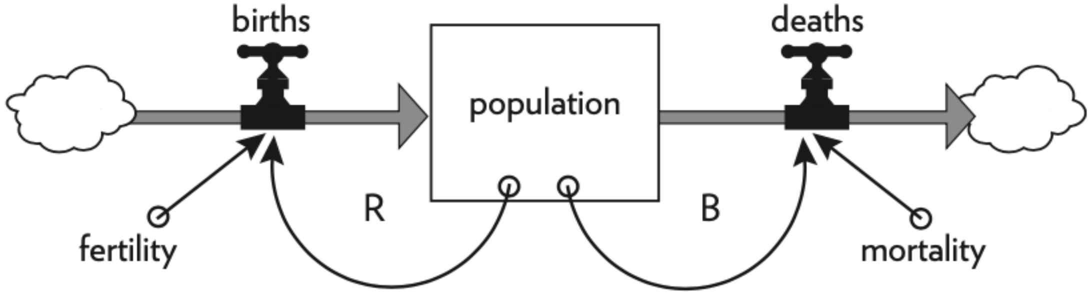


Figure 21. Population governed by a reinforcing loop of births and a balancing loop of deaths.

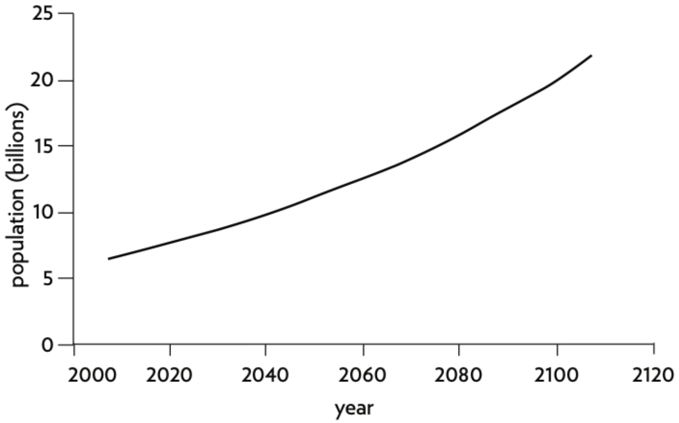


Figure 22. Population growth if fertility and mortality maintain their 2007 levels of 21 births and nine deaths per 1,000 people.

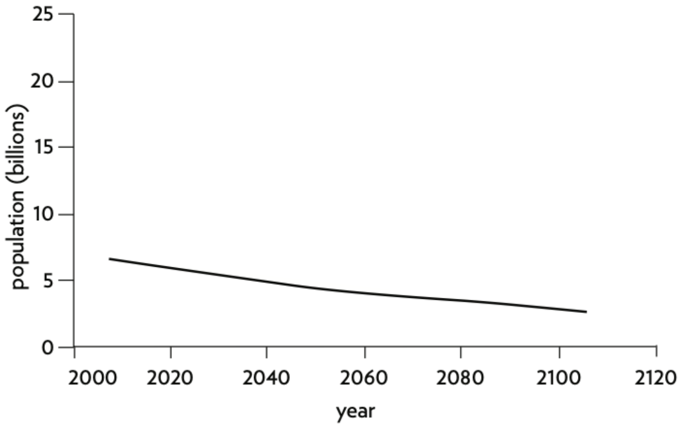


Figure 23. Population decline if fertility remains at 2007 level (21 births per 1,000) but mortality is much higher, 30 deaths per 1,000.

A SYSTEM WITH DELAYS—BUSINESS INVENTORY

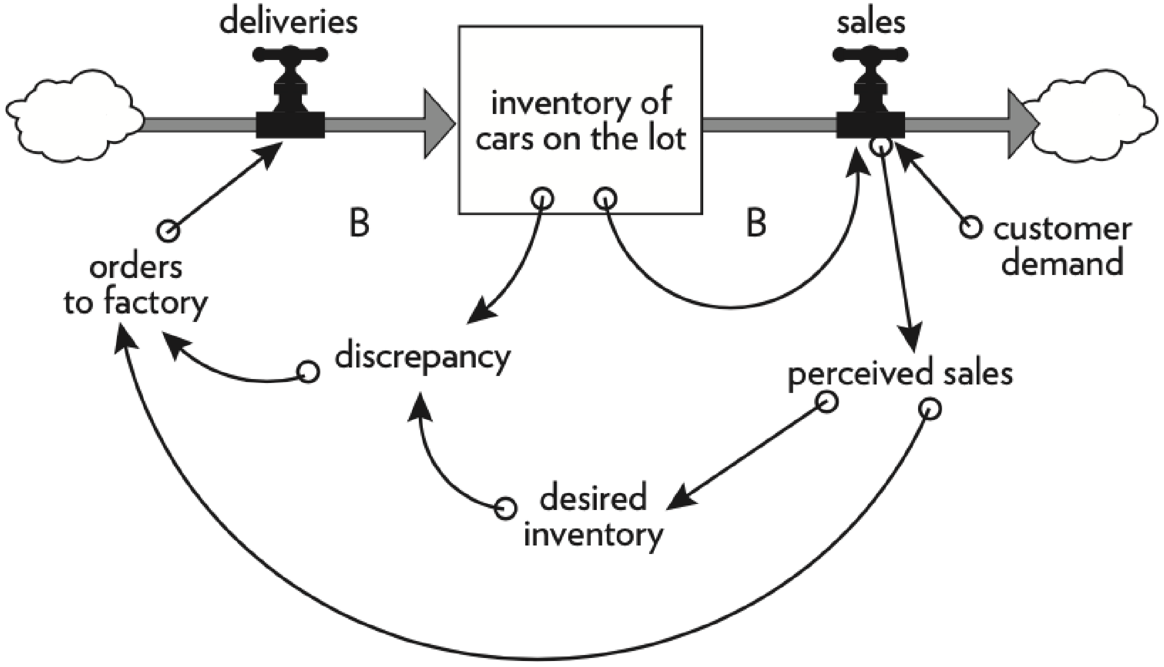


Figure 29. Inventory at a car dealership is kept steady by two competing balancing loops, one through sales and one through deliveries.

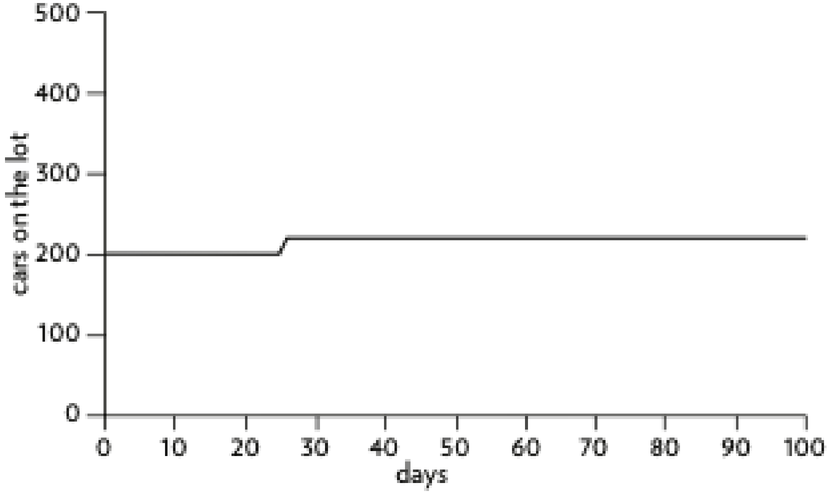


Figure 30. Inventory on the car dealership's lot with a permanent 10-percent increase in consumer demand starting on day 25.

A SYSTEM WITH DELAYS—BUSINESS INVENTORY

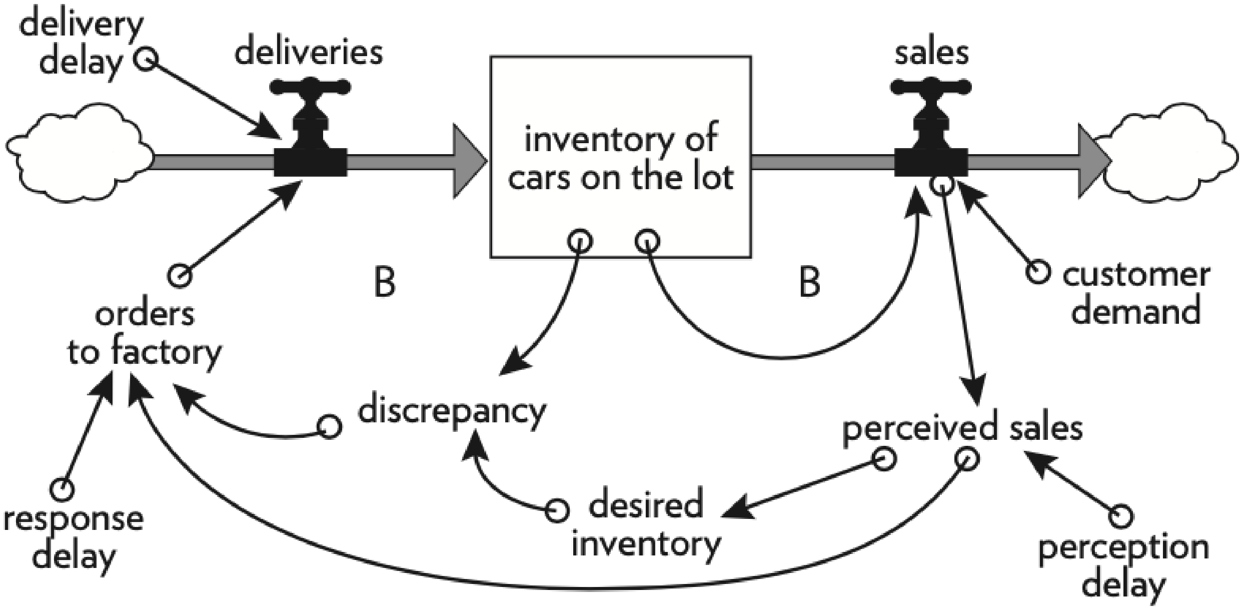


Figure 31. Inventory at a car dealership with three common delays now included in the picture—a perception delay, a response delay, and a delivery delay.

- **Perception delay** – médias das vendas dos últimos cinco dias
- **Response delay** – ajustes aos pedidos são feitos um terço por cada instante de tempo
- **Delivery delay** – A fábrica demora cinco dias a preparar e entregar uma encomenda

A SYSTEM WITH DELAYS—BUSINESS INVENTORY

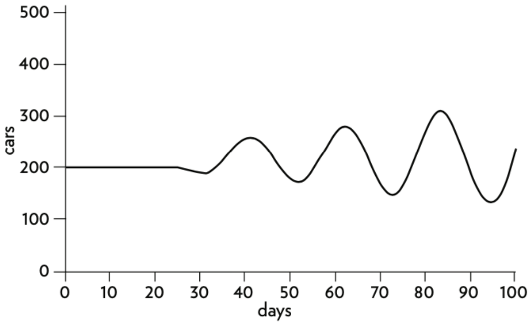


Figure 34. The response of inventory to the same increase in demand with a shortened perception delay.

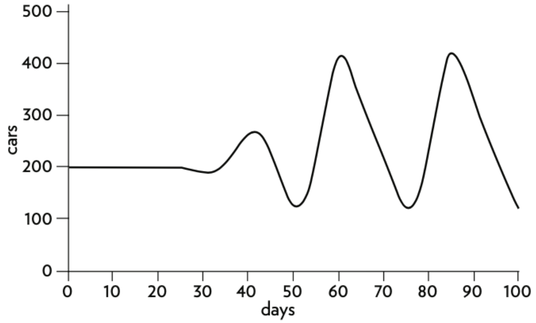


Figure 35. The response of inventory to the same increase in demand with a shortened reaction time. Acting faster makes the oscillations worse!

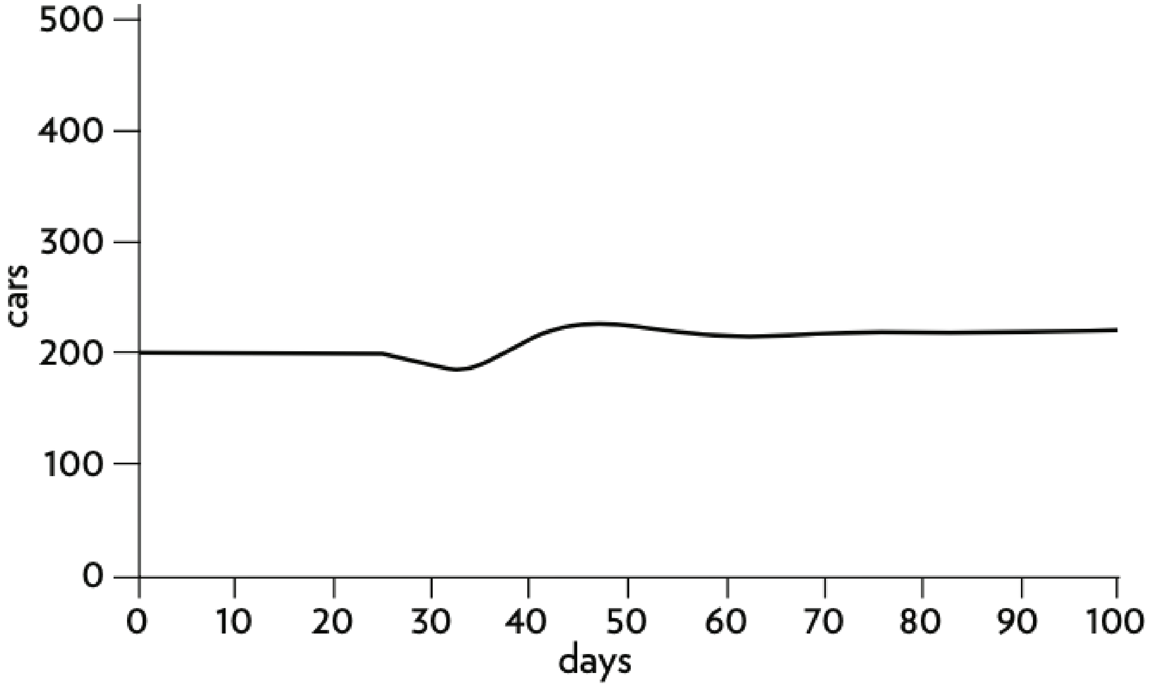


Figure 36. The response of inventory to the same increase in demand with a slowed reaction time.

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS 2D

- População de coelhos (R) e raposas (F) em ecossistema
- Como evolui ao longo do tempo?
- Modelo de Lotka-Volterra

$$\frac{dR}{dt} = aR - bRF$$

$$\frac{dF}{dt} = cRF - dF$$

a	Taxa de natalidade dos coelhos
b	Eficácia da caça das raposas aos coelhos
c	Valor nutritivo dos coelhos
d	Taxa de Mortalidade das raposas

ECOSSISTEMAS – PRESAS E PREDADORES

- Formas de interação: competição e cooperação.
  - Exemplo clássico: ecossistemas com múltiplas espécies (predadores podem também ser presas)
- Cadeia alimentar complexa (*food web*) – redes sociais
- Dois tipos de modelos:
  - Sistemas de equações diferenciais
    - Cada população é representada por um número (não se distinguem os indivíduos de uma mesma espécie – mesmo local, idade, saúde, etc..
    - Três espécies (ou seja, três equações) são suficientes para produzir um sistema caótico
  - Modelo baseado em agentes
    - Cada individuo é modelado separadamente
    - Em vez de 3 equações, tem-se centenas ou milhares (uma por indivíduo).

CONSUMIDORES E PRODUTORES

- Neste contexto, consumidor significa “comer” e produtor significa produzir uma refeição (“ser comido”)
- Animais são consumidores porque comem alimentos fornecidos por plantas ou por outros animais, podendo ser também produtores de uma “refeição” para um outro animal
- Plantas são produtores porque fabricam o seu próprio alimento, no seu interior (não comem outras plantas ou animais)
- Em resumo:
  - Consumidores são os predadores
  - Produtores são as presas

INTERDEPENDÊNCIAS

- Um ser vivo tem que ser capaz de se adaptar a mudanças no ambiente
  - Quando ocorrem alterações externas (no estado do ambiente) o organismo responde com alterações internas (no seu estado);
  - Exemplo: baixa-se a temperatura ambiente e os mamíferos começam logo a produzir mais calor.
  - Tendência para o equilíbrio (observámos o mesmo no exemplo da oferta-procura, em economia etc.)
- Questão: no caso dos ecossistemas, assumindo que os recursos se mantêm constantes, porque não se observa a **estabilização** das suas populações?
- A temperatura só estabiliza porque a variação da temperatura interna do indivíduo não afecta a temperatura do ambiente (o que acontecerá se estiverem muitas pessoas fechadas numa sala?)
- Conclusão:
  - É fácil estabilizar um sistema quando o estado do ambiente não depender do estado do(s) indivíduo(s).
  - Ocorre o contrário quando há acoplamento entre os estados – feedback – cada estado depende recursivamente do outro (como no caso das presas e predadores)

EQUAÇÕES DE LOTKA-VOLTERRA

- **Observação**: Durante a WW1, pescadores refrearam a pesca de peixes pequeninos (tipo plâncton) para que estes pudessem aumentar.
  - Resultado: Não funcionou! Ficou praticamente na mesma. Porquê?
- Equações de Lotka-Volterra (sistema simples, com 2 espécies)

$$\frac{dF}{dt} = F(a - bS) \qquad \frac{dS}{dt} = S(cF - d)$$

F - fish

S - shark

- Interpretação dos 4 parâmetros do sistema:
  - a representa a taxa de natalidade dos peixes;
  - b é proporcional aos peixes que o tubarão consegue comer (quando os encontra – o produto FS mede a probabilidade de os encontrar);
  - c representa o valor nutricional (a energia) do peixe que é fornecida ao tubarão quando este o come;
  - d representa a taxa de mortalidade dos tubarões.

RESOLUÇÃO

- Ponto fixo (estável ou instável?)

$$S = \frac{a}{b} \qquad F = \frac{d}{c}$$

- Exemplo: O que devemos fazer se quisermos aumentar F?
  - Aumentar a taxa de natalidade (afrodisíaco para peixes)? Não resulta (ver equações do ponto fixo)!
  - A solução passaria por diminuir o valor nutritivo dos peixes
  - Pouco intuitivo!
- Integração numérica das equações (método de Euler)

$$S_{n+1} = S_n + cF_nS_n - dS_n \qquad F_{n+1} = F_n + aF_n - bS_nF_n$$

EXISTÊNCIA DE CICLOS LIMITE

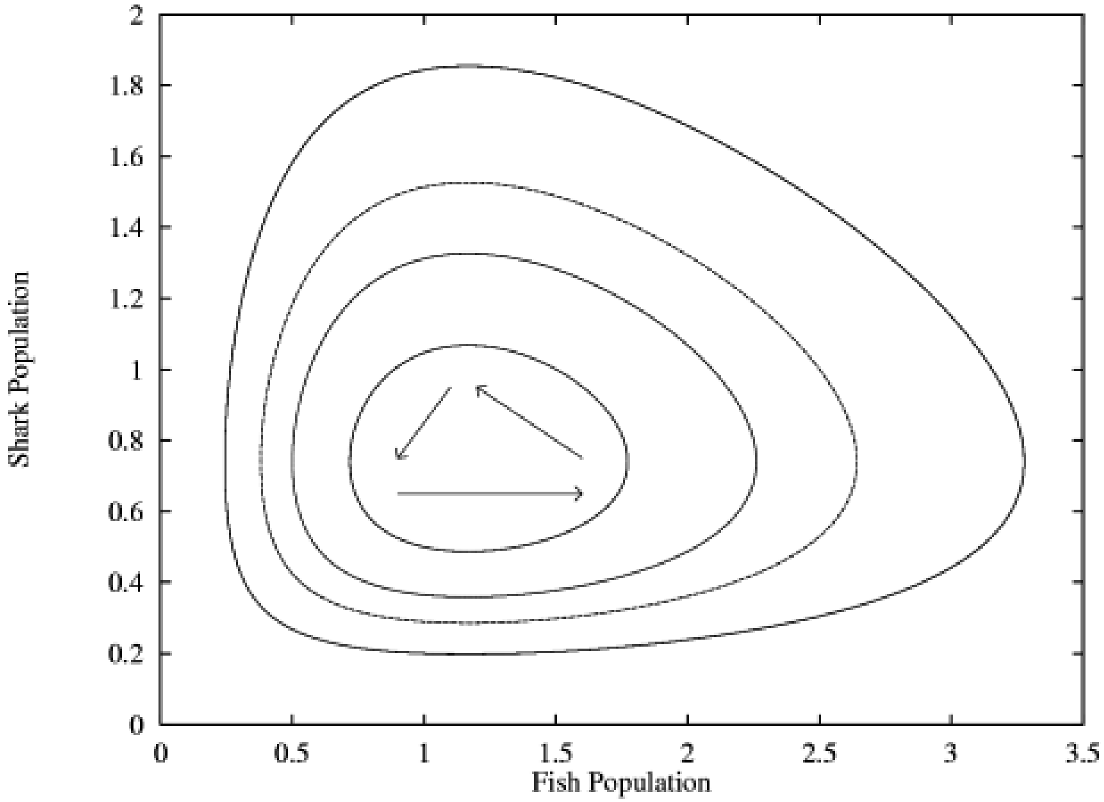


Figure 12.1 A simple Lotka-Volterra attractor which shows four (out of an infinite number of possible) limit cycles. The value of the four parameters are equal to 3.029850, 4.094132, 1.967217, and 2.295942, which yields a fixed point at 1.1671, 0.740047.

A RENEWABLE STOCK CONSTRAINED BY A NONRENEWABLE STOCK

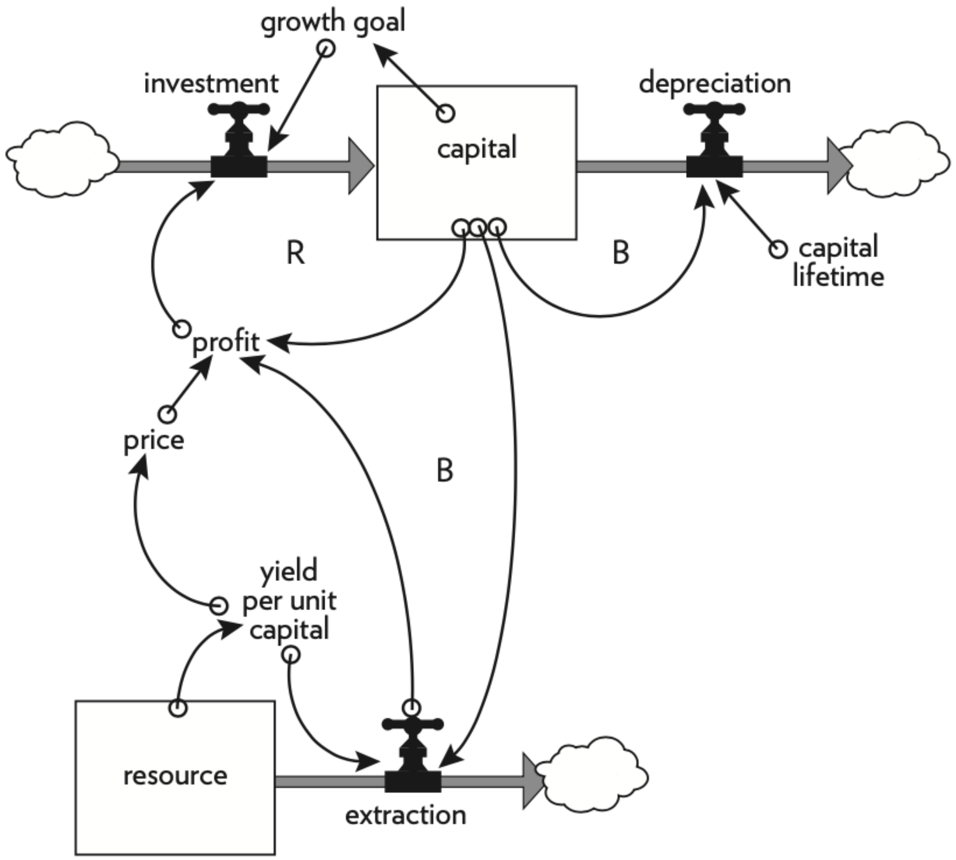


Figure 37. Economic capital, with its reinforcing growth loop constrained by a nonrenewable resource.

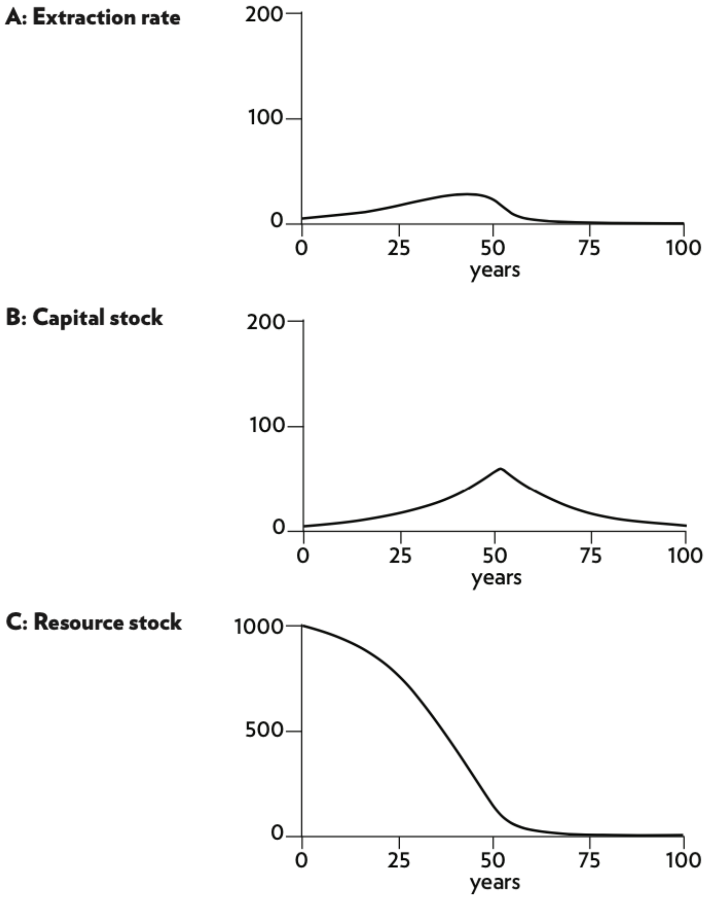


Figure 38. Extraction (A) creates profits that allow for growth of capital (B) while depleting the nonrenewable resource (C). The greater the accumulation of capital, the faster the resource is depleted.

A RENEWABLE STOCK CONSTRAINED BY A NONRENEWABLE STOCK

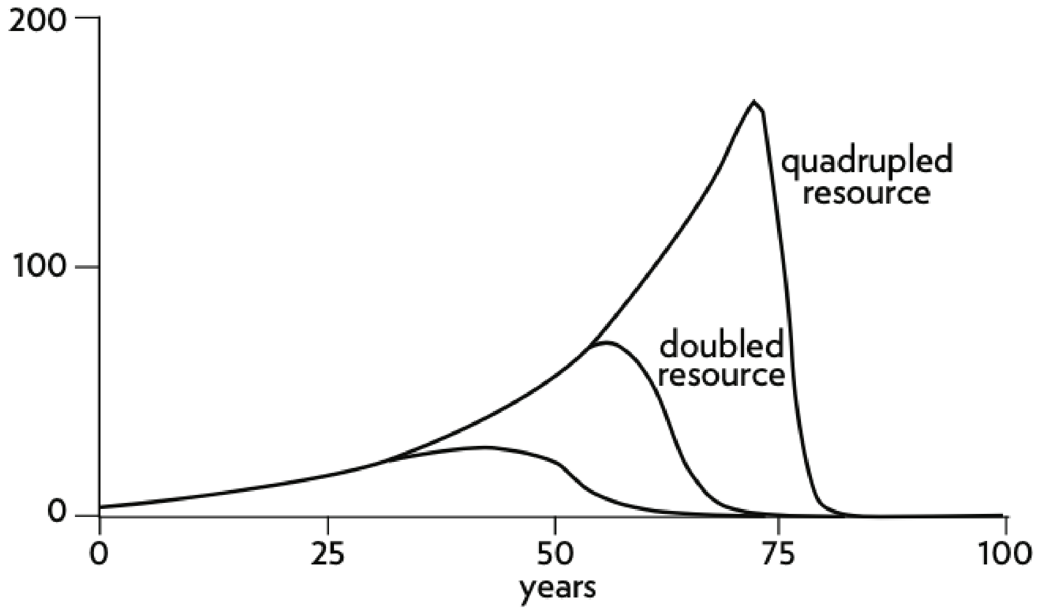


Figure 39. Extraction with two times or four times as large a resource to draw on. Each doubling of the resource makes a difference of only about fourteen years in the peak of extraction.

A RENEWABLE STOCK CONSTRAINED BY A RENEWABLE STOCK

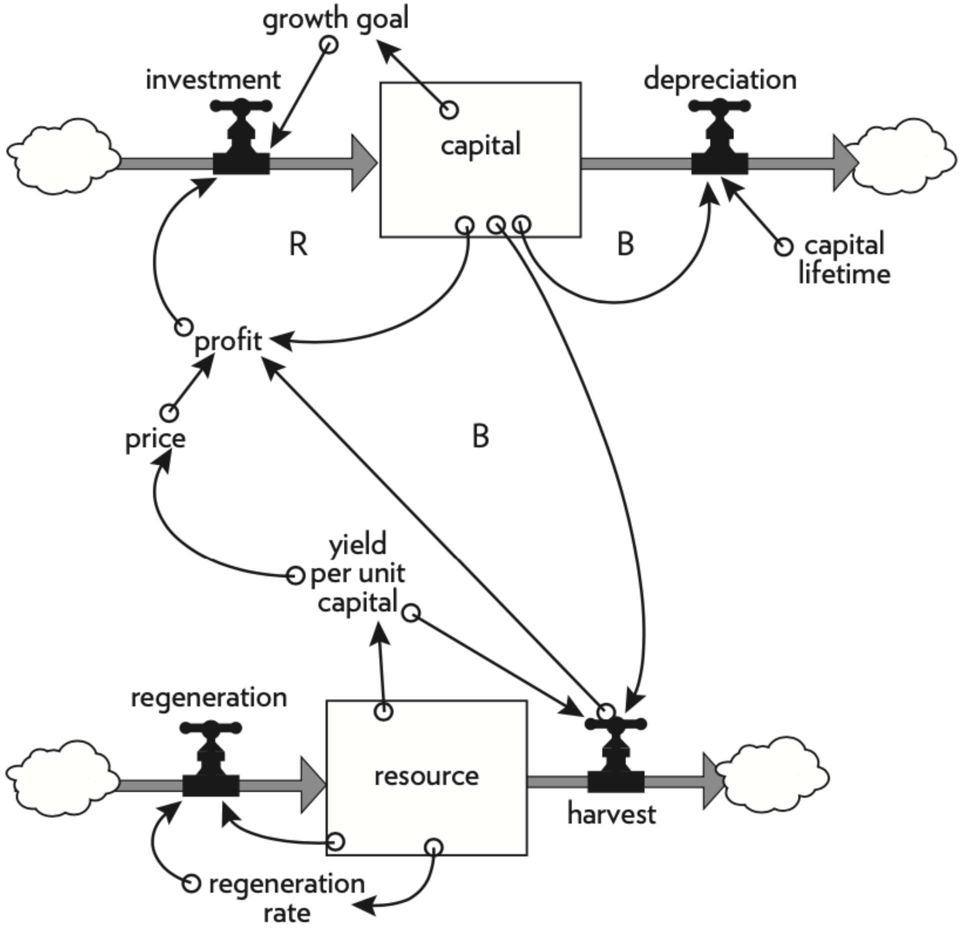


Figure 42. Economic capital with its reinforcing growth loop constrained by a renewable resource.

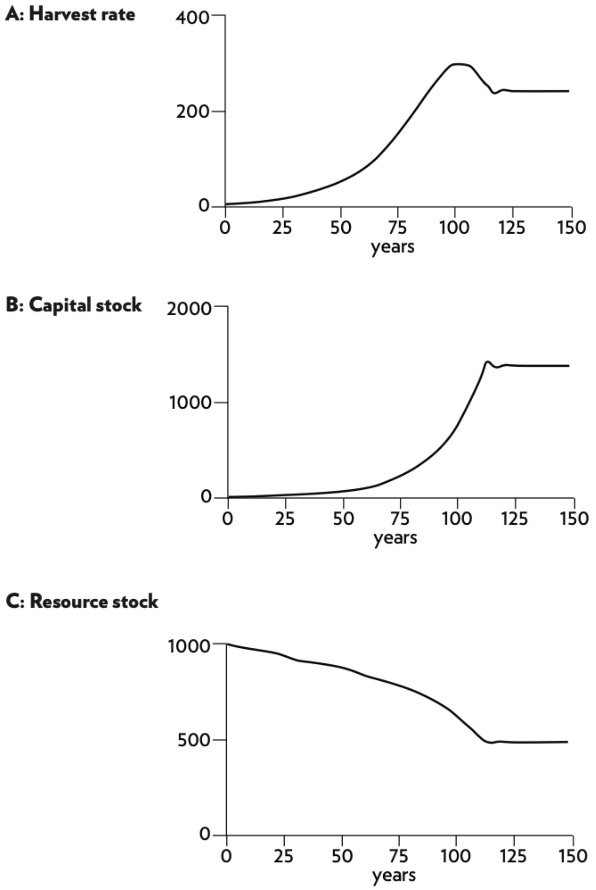


Figure 43. Annual harvest (A) creates profits that allow for growth of capital stock (B), but the harvest levels off, after a small overshoot in this case. The result of leveling harvest is that the resource stock (C) also stabilizes.