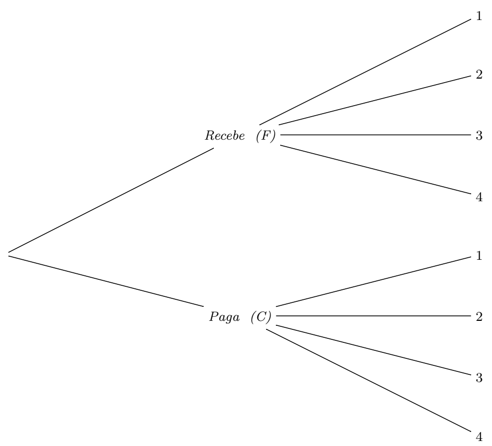
Técnicas de contagem

1 Introdução

Muitos problemas em Probabilidades e Estatística consistem em estimar a incerteza associada a um evento ou acontecimento, o que implica frequentemente determinar o número de elementos associados a esse evento. Assim, é oportuno introduzir um conjunto de métodos que nos permitem fazê-lo rapidamente e sem enumerar exaustivamente todos os elementos. Um bom princípio para resolver um problema difícil, é dividi-lo em problemas mais simples. Este princípio também é usado nos processos de contagem, em que se decompõe um problema complexo, numa sequência de problemas elementares e independentes. O número de resultados do problema original, será o produto do número de resultados dos problemas elementares. Atente-se no seguinte exemplo.

Exemplo 1.1. *Um dado tetraédrico tem quatro lados numerados (de 1 a 4) e o resultado do seu lançamento é o número da face que assentar na mesa. Considere o jogo que consiste em lançar sucessivamente uma moeda e um dado tetraédrico. A moeda determina se o jogador recebe (saída de face) ou paga (saída de coroa) à banca e o dado estabelece a importância em euros. Qual é o cardinal do espaço amostral associado a este jogo?*



O lançamento da moeda tem 2 resultados e o do dado tetraédrico tem 4. Então, o lançamento sequencial da moeda e do dado origina $2 \times 4 = 8$ *resultados diferentes. O diagrama em árvore mostra todos os resultados possíveis do jogo.*

Teorema 1.1 (Princípio fundamental de contagem)**.** *Se um evento pode ocorrer de* n_1 *maneiras distintas e se, independente deste, um segundo evento pode ocorrer de* n_2 *maneiras distintas, então os dois eventos seguidos podem ocorrer de* $n_1 \times n_2$ *maneiras distintas. Para* r *eventos, tem-se* $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r$.

O problema de contagem apresentado envolve um número reduzido de elementos, o que de certa forma facilita a contagem. Quando o número de elementos é elevado, a contagem pelo processo descrito é praticamente impossível e, nestes casos, recorre-se à análise combinatória. Assim, a análise combinatória pode ser entendida como um conjunto de processos alternativos e simplificados de contagem.

Partimos sempre de um conjunto com um número finito de elementos (números, pessoas, objectos, letras, etc). Com os elementos desse conjunto formam-se sequências ou subconjuntos. O processo de cálculo do número de sequências que é possível formar vai depender de dois factores: a ordem dos seus elementos e a sua repetição, que pode ou não existir. Na formação de subconjuntos não interessa a ordem e a repetição dos elementos pode existir ou não. Em primeiro lugar, vamos considerar os casos em que na contagem interessa a ordem (arranjos e permutações, com e sem repetição) e, em segundo, os casos em que não interessa a ordem (combinações, com e sem repetição).

Antes do estudo de qualquer uma destas formas de contar vamos aprender o significado de factorial de um número natural n.

Definição 1.1. *Sendo* $n \in \mathbb{N}$*, dá-se o nome de factorial de* n *ou* n*-factorial e representa-se simbolicamente por* $n!$*, ao produto dos* n *números naturais que são menores ou iguais a* n*, isto é:*

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1.$$

Convenciona-se que: $0! = 1$.

2 Sequências

Designamos por sequências de p elementos os grupos de p elementos de um conjunto aos quais se pode atribuir uma ordem e que diferem conforme essa ordem varia.

2.1 Arranjos com repetição

Definição 2.1. *Designamos por arranjo com repetição ou arranjo completo uma qualquer sequência formada por elementos de um dado conjunto, sendo possível a repetição de elementos. Se o conjunto tiver n elementos, designaremos por ${}^nA'_p$ o número total de arranjos com repetição que é possível formar com p elementos escolhidos de entre os n dados.*

${}^nA'_p$ lê-se arranjos com repetição de n, p a p. Temos:

$$ {}^nA'_p = n^p. $$

Exemplo 2.1. *Pretendem-se formar palavras-chave com três letras, com ou sem sentido, com as habituais 23 letras. Quantas palavras-chave distintas se podem formar?*

Trata-se de um exemplo clássico de arranjos com repetição pois podem existir palavras-chave com as três letras iguais. Assim temos arranjos com repetição de 23 letras, 3 a 3:

$$ {}^{23}A'_3 = 23^3 = 12167. $$

2.2 Arranjos sem repetição

Definição 2.2. *Designamos por arranjo sem repetição ou simplesmente arranjo uma qualquer sequência formada por elementos, todos diferentes, de um dado conjunto. Se o conjunto tiver n elementos, designaremos por ${}^nA_p$ o número total de arranjos sem repetição que é possível formar com p elementos escolhidos de entre os n dados.*

${}^nA_p$ lê-se arranjos de n, p a p. É evidente que $p \leqslant n$.

Seja $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ um dos arranjos de p elementos, todos distintos, escolhidos de entre n elementos de um dado conjunto. Existem então n maneiras de escolher x_1, que depois de este escolhido, existem $n-1$ maneiras de escolher x_2, e assim sucessivamente até x_p. Logo temos:

$$ {}^nA_p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}. $$

Exemplo 2.2. *Suponham-se dez atletas. De quantas maneiras diferentes pode vir a ser feita a distribuição de três medalhas?*

Existem dez possibilidades para o 1º lugar, nove para o 2º lugar e oito para o 3º lugar. Formalizando a resposta temos ${}^{10}A_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$ possibilidades ou

$$ {}^{10}A_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = 720. $$

Exemplo 2.3. *Suponham-se três atletas. De quantas maneiras diferentes pode vir a ser feita a distribuição das três medalhas?*

Existem três possibilidades para o 1º lugar, duas para o 2º lugar e uma para o 3º lugar. Formalizando a resposta temos ${}^3A_3 = 3 \times 2 \times 1$ possibilidades. Este exemplo é então um caso muito particular de arranjos, pois todos os elementos do conjunto em causa figuram em cada um dos arranjos considerados, isto é, trata-se de calcular ${}^nA_p$ quando temos $p = n$, o que nos conduz à expressão,

$$ {}^nA_n = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1. $$

No entanto esta situação embora seja um caso particular da definição anterior, tem no contexto do cálculo combinatório, um tratamento especial, que motiva a próxima definição.

2.3 Permutações

Definição 2.3. *Chama-se permutação de elementos de um conjunto a um qualquer arranjo em que todos os elementos desse conjunto figurem, não havendo elementos repetidos. Designaremos por P_n o número total de permutações de n elementos, lendo-se permutações de n:*

$$ P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n!. $$

Exemplo 2.4. *Suponham-se três atletas. De quantas maneiras diferentes pode vir a ser feita a distribuição das três medalhas?*

$$ P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1. $$

2.4 Permutações completas

Definição 2.4. *Chama-se permutação completa de elementos de um conjunto a um qualquer arranjo em que todos os elementos desse conjunto podem figurar, podendo haver elementos repetidos. Designaremos por P'_n o número total de permutações completas de n elementos, lendo-se permutações completas de n:*

$$ P'_n = n^n. $$

Exemplo 2.5. *Considere-se o conjunto formado pelos elementos $(1, 2, 3, 4, 5)$. Quantas sequências formadas por 5 elementos se podem ter?*

$$ P'_5 = 5^5 = 3125. $$

2.5 Arranjos circulares

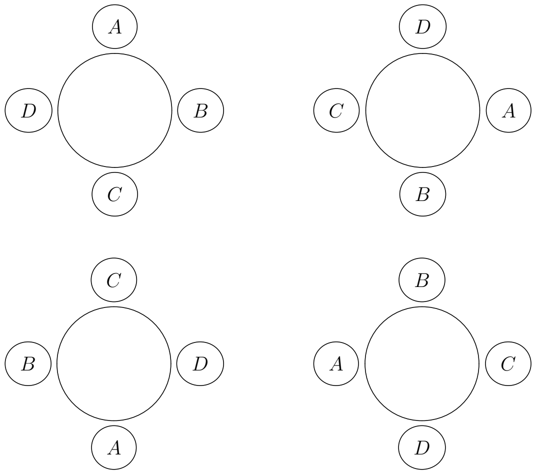
Designamos por arranjo circular uma qualquer sequência formada por elementos em círculo, todos diferentes, de um dado conjunto. Se o conjunto tiver n elementos, o número total de arranjos circulares que é possível formar com p elementos escolhidos de entre os n dados é dado por:

$$\frac{{}^{n}A_{p}}{p} = \frac{n!}{p\,(n-p)!}.$$

Por outro lado, dados n elementos, o número de formas diferentes de os dispor em círculo, tendo em conta as posições relativas que ocupam entre si, é dado por:

$$P_{n-1} = (n-1)!$$

Para mais facilmente se entenderem as duas fórmulas apresentadas, consideremos um exemplo com $n = 4$ elementos, que pretendemos sentar numa mesa redonda com 4 lugares. Consideremos ainda as seguintes figuras:



Como se pode verificar, os arranjos $ABCD$, $DABC$, $CDAB$ e $BCDA$, representam o mesmo caso, havendo apenas uma rotação nos lugares ocupados pelas diferentes pessoas em volta da mesa, ou seja, mantendo sempre as mesmas posições relativas entre si. Assim, neste caso, a cada arranjo circular

diferente corresponde um grupo de $n = 4$ arranjos, que não deverão ser tidos em conta por corresponderem à mesma situação. É por esta razão que a primeira fórmula surge dividida por p, obtendo-se:

$$\frac{{}^{n}A_{p}}{p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p} = \frac{n!}{p\,(n-p)!}$$

e a segunda fórmula simplificada, dividindo por n, obtendo-se:

$$\frac{P_n}{n} = \frac{n!}{n} = (n-1)! = P_{n-1}.$$

Exemplo 2.6. *De quantas maneiras diferentes é possível dispor* 5 *pessoas à volta de uma mesa circular que só dispõe de* 3 *lugares?*

$$\frac{{}^{5}A_{3}}{3} = \frac{\frac{5!}{(5-3)!}}{3} = \frac{5!}{3\times 2!} = 20.$$

Exemplo 2.7. *De quantas maneiras diferentes é possível dispor* 5 *pessoas à volta de uma mesa circular?*

$$P_{5-1} = P_4 = 4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24.$$

3 Subconjuntos

Considere-se um conjunto universo com n elementos, a partir do qual pretende formar-se um subconjunto com p elementos. Supõe-se que um possível subconjunto é considerado diferente de um outro somente pela natureza dos elementos que o constituem e não pela sua ordem.

3.1 Combinações sem repetição

Definição 3.1. *Chamamos combinação a um qualquer subconjunto formado por elementos diferentes escolhidos de entre os elementos de um dado conjunto. Se o conjunto tem n elementos, designamos por combinações de n elementos, p a p, e representamos simbolicamente por ${}^{n}C_{p}$ ou $\binom{n}{p}$. Temos:*

$${}^{n}C_{p} = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}.$$

Evidentemente, n e p são, como habitualmente, números naturais. Além disso, deve ser $p \leqslant n$. Note que ${}^{n}C_{p}$ é o número de subconjuntos com p

elementos de um conjunto de cardinal n. Este resultado também pode ser obtido fazendo

$$^{n}C_p = \frac{^{n}A_p}{P_p}.$$

Exemplo 3.1. *Oito jogadores disputam um torneio de xadrez, pelo que cada um deles deve jogar com todos os outros, mas apenas uma vez. Quantos jogos haverão neste torneio?*

Este exemplo ilustra a definição anterior porque cada dois jogadores só se encontra uma única vez. Assim, este torneio terá:

$$^{8}C_2 = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8\times 7\times 6!}{2!6!} = \frac{8\times 7}{2} = 28$$

jogos.

3.2 Combinações completas

Definição 3.2. *Chamamos combinações completas de n elementos tomados p a p ao número de grupos que se podem constituir com p dos n elementos de um conjunto, podendo haver elementos repetidos, sendo arbitrário o número de vezes que se repete cada elemento. Temos:*

$$^{n}C'_p = \frac{(n+p-1)!}{p!\,(n-1)!}.$$

Observe-se que é possível determinar o valor de $^{n}C'_p$ usando a fórmula das combinações sem repetição, uma vez que

$$^{n}C'_p = {}^{n+p-1}C_p.$$

Exemplo 3.2. *Suponha-se o seguinte conjunto* $\{1,2,3,8,10\}$. *Quantos grupos de três elementos se podem formar?*

$$^{5}C'_3 = \frac{(5+3-1)!}{3!\,(5-1)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7\times 6\times 5\times 4!}{3!4!} = \frac{210}{6} = 35.$$

4 Casos especiais

O número de sequências diferentes de n elementos, dos quais n_1 são de um tipo, n_2 de um segundo tipo, …, e n_k de um k-ésimo tipo, e em que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, é:

$$P\,(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

Observe-se ainda que:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} = {}^{n}C_{n_1} \times {}^{n-n_1}C_{n_2} \times {}^{n-n_1-n_2}C_{n_3} \times \cdots \times {}^{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}C_{n_k},$$

com $n - n_1 - \cdots - n_{k-1} = n_k$.

Exemplo 4.1. *Quantos números distintos de nove algarismos se podem escrever com três algarismos* 1*, quatro algarismos* 2 *e dois algarismos* 3*?*

$$P\,(3,4,2) = \frac{9!}{3!4!2!} = {}^{9}C_3 \times {}^{6}C_4 \times {}^{2}C_2 = 1260.$$

O número de maneiras diferentes de dividir n elementos em k grupos, com n_1 no primeiro grupo, n_2 no segundo grupo, …, e n_k no k-ésimo grupo, e em que $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, é:

$$P\,(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

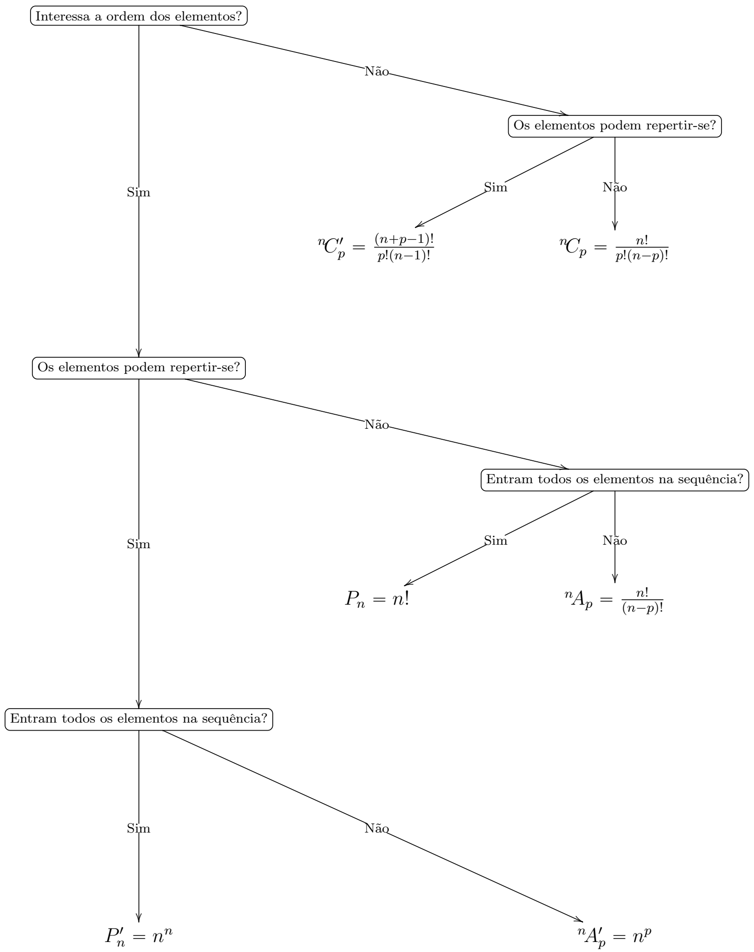
Observe-se que a ordem dos elementos do mesmo tipo ou dos que estão dentro do mesmo grupo não interessa.

Exemplo 4.2. *Uma empresa resolveu contratar dez pessoas para executarem três tarefas não qualificadas. Uma das tarefas necessita de quatro trabalhadores e cada uma das restantes de três trabalhadores. De quantas maneiras diferentes podem ser seleccionados os trabalhadores para as tarefas?*

$$P\,(4,3,3) = \frac{10!}{4!3!3!} = {}^{10}C_4 \times {}^{6}C_3 \times {}^{3}C_3 = 4200.$$

5 Quadro e esquema resumo

Objectivo	**Em que**	**Com repetição**	**Sem repetição**
Grupos de n elementos	Interessa a ordem	Permutações completas $P'_n = n^n$	Permutações $P_n = n!$
Grupos de p elementos de n	Interessa a ordem	Arranjos completos $^{n}A'_p = n^p$	Arranjos $^{n}A_p = \frac{n!}{(n-p)!}$
	Não interessa a ordem	Combinações completas $^{n}C'_p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$	Combinações $^{n}C_p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$



6 Triângulo de Pascal

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
\textbf{Linha 0} \longrightarrow & & & & & & 1 & & & & & \\
\textbf{Linha 1} \longrightarrow & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
\textbf{Linha 2} \longrightarrow & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
\textbf{Linha 3} \longrightarrow & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
\textbf{Linha 4} \longrightarrow & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\textbf{Linha 5} \longrightarrow & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\textbf{Linha}\cdots \longrightarrow & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \quad \cdots
\end{array}
$$

6.1 Propriedades do triângulo de Pascal

No triângulo de Pascal verifica-se que:

- Os números dos lados oblíquos são sempre iguais a 1;
- Cada termo de uma linha (excepto os dos extremos) é igual à soma dos que estão acima;
- Em cada linha os termos equidistantes dos extremos são iguais.

6.2 Propriedades das combinações sem repetição

O triângulo de Pascal pode ser escrito usando combinações.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
 & \downarrow & & & & & \downarrow & & & & & \downarrow & \\
 & & & & & & {}^0C_0 & & & & & & \\
 & & & & & {}^1C_0 & & {}^1C_1 & & & & & \\
 & & & & {}^2C_0 & & {}^2C_1 & & {}^2C_2 & & & & \\
 & & & {}^3C_0 & & {}^3C_1 & & {}^3C_2 & & {}^3C_3 & & & \\
 & & {}^4C_0 & & {}^4C_1 & & {}^4C_2 & & {}^4C_3 & & {}^4C_4 & & \\
 & {}^5C_0 & & {}^5C_1 & & {}^5C_2 & & {}^5C_3 & & {}^5C_4 & & {}^5C_5 & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

As propriedades do triângulo de Pascal podem ser transportadas para as combinações.

Assim:

- em cada linha, o primeiro e o último termo são iguais a 1: ${}^{n}C_0 = {}^{n}C_n = 1$, com $n \in \mathbb{N}_0$;
- em cada linha, os termos equidistantes dos extremos são iguais: ${}^{n}C_p = {}^{n}C_{n-p}$, com $n, p \in \mathbb{N}_0$;
- cada termo de uma linha (excepto os dos extremos) é igual à soma dos que estão acima: ${}^{n}C_p + {}^{n}C_{p+1} = {}^{n+1}C_{p+1}$, com $n, p \in \mathbb{N}_0$;
- a soma de todos os termos da linha n é 2^n: ${}^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 + \ldots + {}^{n}C_n = 2^n$, com $n \in \mathbb{N}_0$;
- o número de termos da linha n é $n+1$, com $n \in \mathbb{N}_0$.

7 Binómio de Newton

Observemos a seguinte figura:

$$
\begin{array}{llccccccccc}
(a+b)^0 & \longrightarrow & & & & & \mathbf{1} & & & & \\
(a+b)^1 & \longrightarrow & & & & \mathbf{1}a & + & \mathbf{1}b & & & \\
(a+b)^2 & \longrightarrow & & & \mathbf{1}a^2 & + & \mathbf{2}ab & + & \mathbf{1}b^2 & & \\
(a+b)^3 & \longrightarrow & & \mathbf{1}a^3 & + & \mathbf{3}a^2b & + & \mathbf{3}ab^2 & + & \mathbf{1}b^3 & \\
(a+b)^4 & \longrightarrow & \mathbf{1}a^4 \; + & \mathbf{4}a^3b & + & \mathbf{6}a^2b^2 & + & \mathbf{4}ab^3 & + & \mathbf{1}b^4 & \\
\cdots & \longrightarrow & \cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots &
\end{array}
$$

Notemos que no desenvolvimento de $(a+b)^n$ tem-se:

- O grau do polinómio do desenvolvimento de $(a+b)^n$ é n;
- Os coeficientes são os números do triângulo de Pascal.

Temos a fórmula do binómio de Newton:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= {}^{n}C_0 a^n + {}^{n}C_1 a^{n-1} b + {}^{n}C_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}^{n}C_{n-1} a b^{n-1} + {}^{n}C_n b^n = \\
&= \sum_{p=0}^{n} {}^{n}C_p a^{n-p} b^p.
\end{aligned}
$$

Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
Departamento de Matemática
Resumos sobre Probabilidades e Estatística

7.1 Propriedades do Binómio de Newton

Observando a fórmula e atendendo às propriedades das combinações estudadas poderíamos concluir que:

- O desenvolvimento de $(a+b)^n$ tem $n+1$ termos;
- No desenvolvimento de $(a+b)^n$ os coeficientes dos termos igualmente afastados dos extremos são iguais. Se n é par haverá um termo médio e portanto terão de se calcular os coeficientes até esse termo, inclusive;
- O termo de ordem $p+1$ é T_{p+1}, sendo:

  $$T_{p+1} = {}^{n}C_p a^{n-p} b^p$$

  ou

  $$T_p = {}^{n}C_{p-1} a^{n-p+1} b^{p-1}.$$

As últimas expressões permitem calcular qualquer termo, conhecida a sua ordem, sem que seja necessário escrever todo o desenvolvimento.