SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS DE ORDEM SUPERIOR

Arnaldo Abrantes

Paulo Vieira

2019

AUTÓMATOS CELULARES

- Sistema dinâmico no qual um grande número de variáveis discretas estão dispostas num *array* ou grelha
  - Actualizado a cada passo temporal através de uma regra determinística
  - Evolução depende de interacções locais

- ACs são modelos discretos, no espaço e no tempo

- Cada célula é uma máquina de estados (implementando um conjunto de regras de transição) que produz o próximo estado da célula, tendo como entradas os estados das células numa dada vizinhança local

EVOLUÇÃO NO TEMPO DOS ACS

- Nos ACs o estado actual determina completamente o próximo estado
  - não é necessário ter memória de nenhum estado anterior ao actual
- Uma vez que as regras e os estados são locais, qualquer padrão global que eventualmente apareça, é necessariamente emergente

AUTÓMATOS CELULARES: BREVE HISTÓRIA

- 1940s – Modelos inventados por John von Neumann por sugestão de Stanislaw Ulam (o objectivo inicial era estudar o processo de reprodução)
- 1969 – Konrad Zuse publica um artigo onde defende que "As leis físicas do Universo são discretas"
- 1970s – Os ACs ganham popularidade com o Jogo da Vida de Conway
- 1983 – Stephen Wolfram publica o primeiro de um conjunto de artigos em que investiga de forma sistemática as propriedades dos ACs
- 2002 – É publicado o livro de Wolfram, "A New Kind of Science"

APLICAÇÕES: CIÊNCIA, TECNOLOGIA, ARTE

- Autómatos celulares podem ser usados para modelar sistemas complexos usando regras simples
- Características principais:
  - Divide o espaço do problema em células
  - Cada célula pode estar num dos vários possíveis estados
  - As células são afectadas pelas vizinhas de acordo com regras;
  - Em cada geração, todas as células são afectadas simultaneamente
  - As regras são reaplicadas repetidamente em cada uma das muitas gerações

UTILIDADE

- Modelar fenómenos físicos e biológicos, e.g.:
  - Sistemas mecânicos estatísticos
  - Conjuntos químicos autocatalíticos – *hodgepodge machine*
  - Regulação genética
  - Organismos multicelulares
  - Colónias e superorganismos
  - Bandos e rebanhos – optimização da segurança
  - Ecossistemas
  - Economias e sociedade – competição VS cooperação

[Flake, 1998 pp. 251-255]

NOTAÇÃO – CASO 1D E 2D

- Cada célula possui um conjunto de propriedades que podem variar ao longo do tempo (variáveis)
- Aos valores das variáveis duma célula dá-se a designação de estado da célula
- O estado global (ou configuração) do AC é definido pelo conjunto dos estados de todas as células e representa-se usualmente na forma de um vector ou de uma matriz

Símbolo	**Significado**
t	Tempo
Δt	Passo temporal, normalmente 1
$a_i(t)$	Estado da célula i no instante t (caso 1D)
$a_{ij(}t)$	Estado da célula na posição (i,j) no instante t (caso 2D)
$A(t)$	Estado global do AC no instante t

CÉLULA E ESTADO

- Célula
  - Uma célula é o elemento básico do AC;
  - Uma célula funciona como um elemento de memória que armaneza um estado.
- Estado
  - A célula i no instante t está num dos k estados do conjunto S
    - Frequentemente o conjunto é binário, $S = \{0,1\}$
    - Por vezes é ternário, $S = \{0,1,2\}$
    - etc.

GRELHA E VIZINHANÇA

- Uma grelha é um array de células (1D, 2D, 3D) que define a organização espacial das mesmas
  - 1D

célula

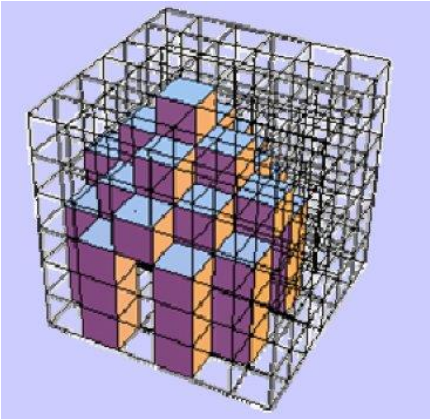
0	0	2	1	2	0	1	0

  - 2D (Autómatos de Pixels)

0	0	2	0	0
0	1	1	1	2
1	0	1	1	0
0	2	2	0	2
1	0	2	1	2

A “vermelho” está a **vizinhança** da célula “verde”

  - 3D (Autómatos de Voxels)



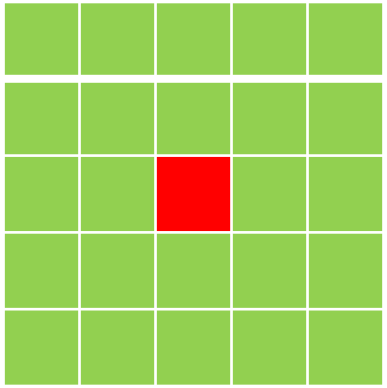
VIZINHANÇA

- A vizinhança de uma célula consiste nas células em seu redor
  - A vizinhança de uma célula é constituída por n células
    - ela própria mais as células adjacentes a que está ligada
  - Exemplos (vizinhança de Moore):
    - Numa grelha 1D, $n = 2r + 1$, r = “raio”
    - Em 2D, $n = (2r + 1)^2$
    - Em 3D, $n = (2r + 1)^3$
- A interacção é local! Significa que não é permitida qualquer acção-à-distância;
- Podem existir várias definições para vizinhança.

VIZINHANÇAS MAIS USUAIS – CASO 2D

- Moore

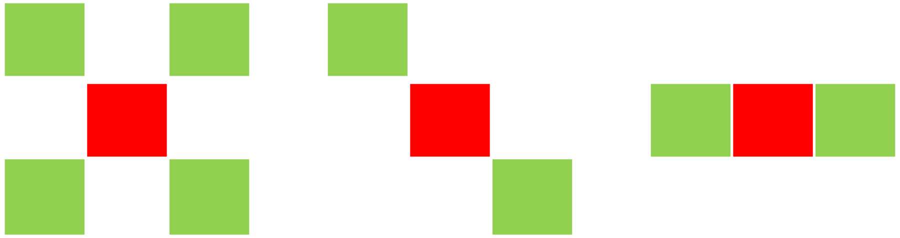
r=1



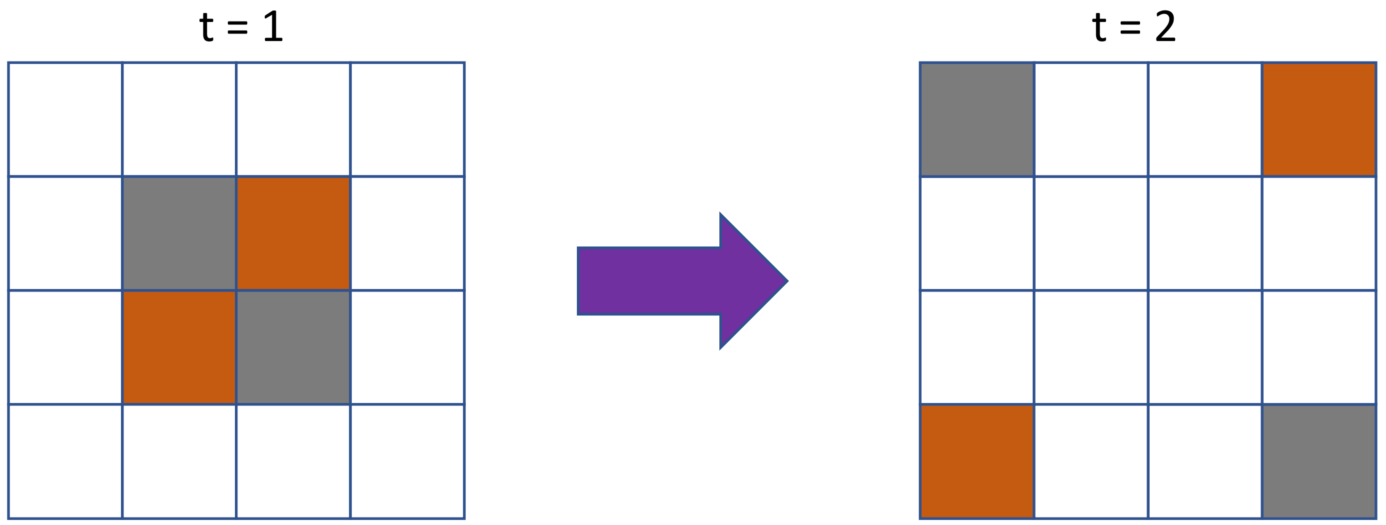
r=2

- von Neumann

- Outras



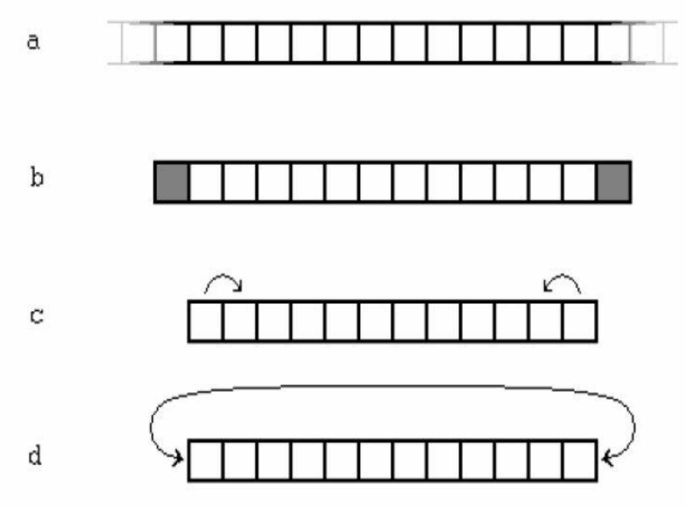
ACTUALIZAÇÃO SÍNCRONA EM TEMPO DISCRETO



- Os estados das células são actualizados, em simultâneo, em instantes discretos de tempo

CONDIÇÕES FRONTEIRA

- Grelha infinita/adaptativa
  - A grelha cresce à medida que o padrão se propaga;
- Grelha finita
  - Fronteira rígida (hard) – as células nas extremidades da grelha têm um estado fixo (usualmente 0);
  - Fronteira suave (soft) – condições fronteira periódicas (*wrap*)
    - Caso 1D – forma-se um anel;
    - Caso 2D – forma-se um toróide;
- Caso 1D – 4 hipóteses:
  - a) array infinito;
  - b) array finito, fronteira FIXA;
  - c) array finito, fronteira REFLECTIVA;
  - d) array finito, fronteira PERIÓDICA.



REGRAS DE TRANSIÇÃO

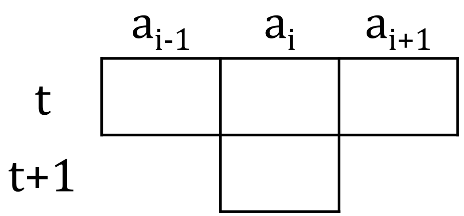
- As regras de transição determinam qual o próximo estado das células (essencialmente, definem máquinas de estados);
- As regras de transição dependem da geometria da grelha, da vizinhança e do estado;
- Tipicamente as regras são uniformes (i.e., são iguais em toda a parte da grelha) – ACs homogéneos;
- As regras podem ser representadas de diferentes formas.

REPRESENTAÇÃO EM TABELA

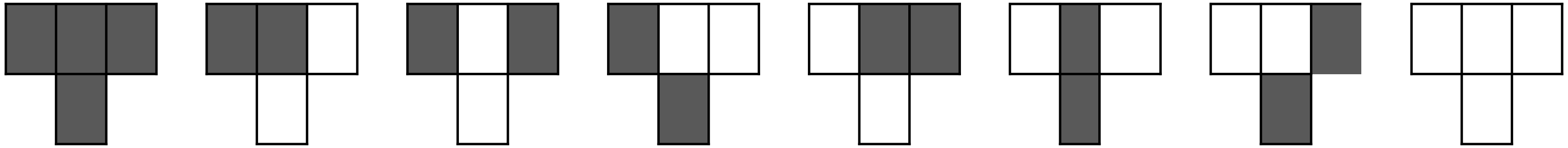
$a_{i-1}(t)$	$a_i(t)$	$a_{i+1}(t)$	$a_i(t+1)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$a_i(t+1) = a_{i-1}(t) \oplus a_i(t) \oplus a_{i+1}(t)$$

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA



n = 3 (raio unitário)



k = 2 (binário)

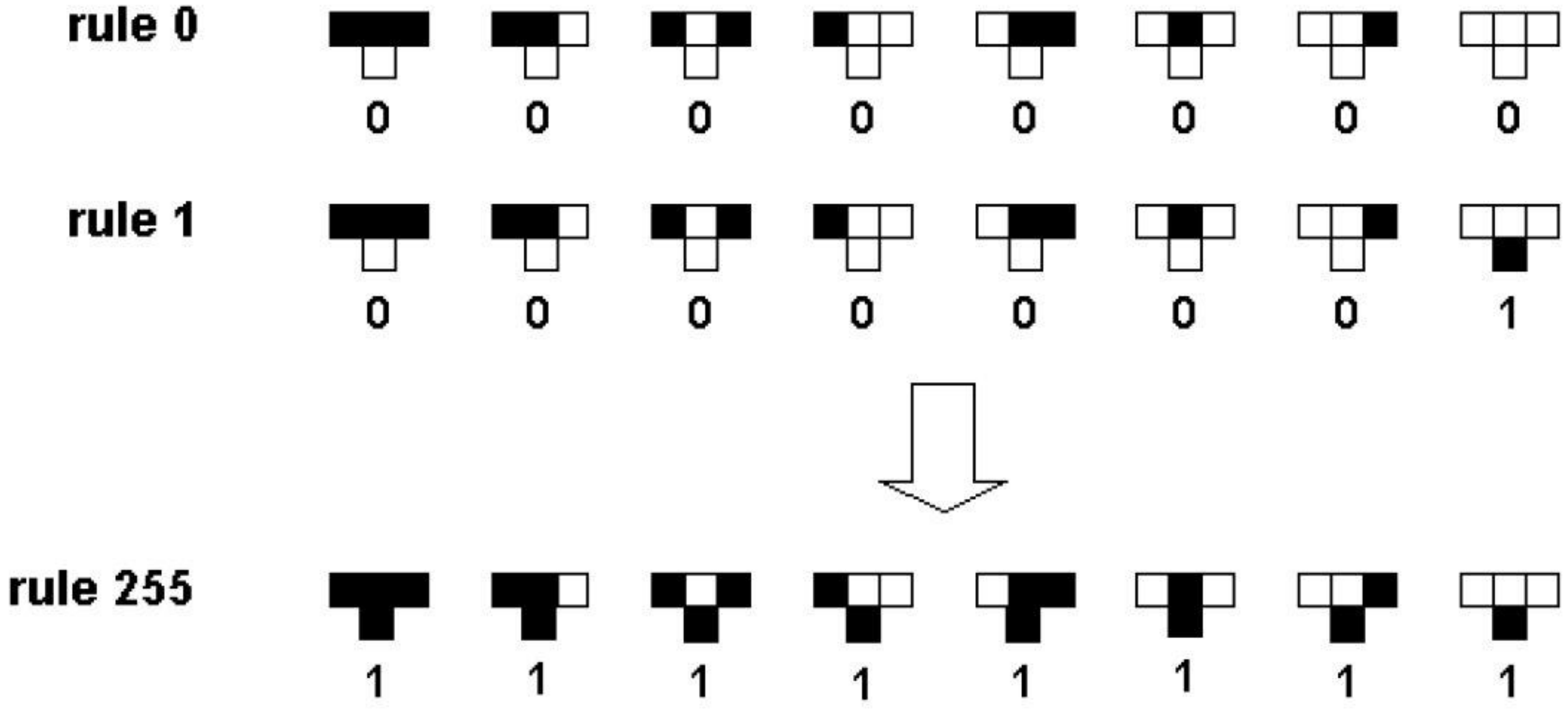
- Exemplo (igual ao da tabela anterior):
  - Dimensão da regra: 2^3=8
  - Número possível de regras: 2^8=256

EXEMPLO: CASO 1D

- Questão:
  - Para um autómato celular com k estados e vizinhança de von Neumann com raio r ($n = 2r + 1$), quantas regras diferentes são possiveis?
- Resposta:
  - O número de configurações possíveis para a vizinhança é igual a $\#V = k^{(2r + 1)}$
    - No caso em que $k = 2$, $r = 1$, tem-se $\#V = 8$ possíveis configurações.
  - O número de regras diferentes que se podem definir é dado por $k^{\#V}$
    - Para o caso anterior, tem-se portanto um total de $2^8 = 256$ diferentes regras.

ENUMERAÇÃO DAS 256 REGRAS

- Neste caso é possível enumerar as regras de forma exaustiva



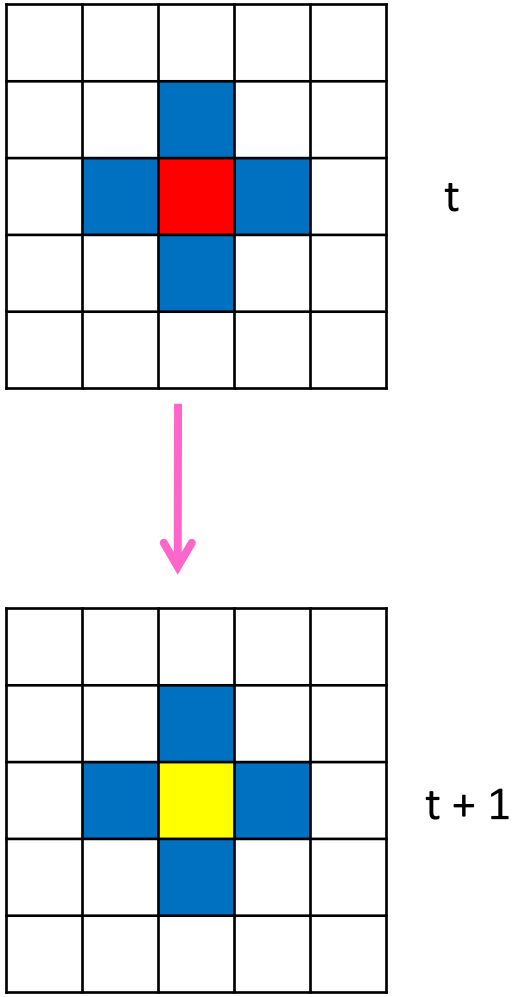
OUTRO EXEMPLO 1D: CASO INTRACTÁVEL

- k = 10 (cada célula pode tomar um de 10 estados)
- r = 2 (a vizinhança é constituída por 5, $2r + 1$, células)
- Existem pois 10^5 diferentes configurações para a vizinhança (ou seja, uma regra pode ser representada por uma tabela com 100.000 entradas)
- Ou seja, neste caso podem ser definidas 10^{100000} regras diferentes!

ILUSTRAÇÃO: CASO 2D

- Tabela com regra de transição:

Centro	Cima	Direita	Baixo	Esq.	Estado (t + 1)
...	...	...	...	...	...



EXEMPLO: CASO 2D

- Questão:
  - Para um AC binário ($k = 2$) e vizinhança de Moore, com raio 1(ou seja, $n = (2r + 1)^2 = 9$), quantas regras diferentes podem ser definidas?

- Resposta:
  - Existem $2^9 = 512$ diferentes configurações para a vizinhança e portanto uma tabela com uma regra específica de transição terá 512 entradas;
  - O número de regras diferentes que se podem definir é portanto 2^{512}, um número verdadeiramente gigantesco!

CONFIGURAÇÃO INICIAL

- A configuração inicial estabelece o estado inicial de todas as células do autómato celular;

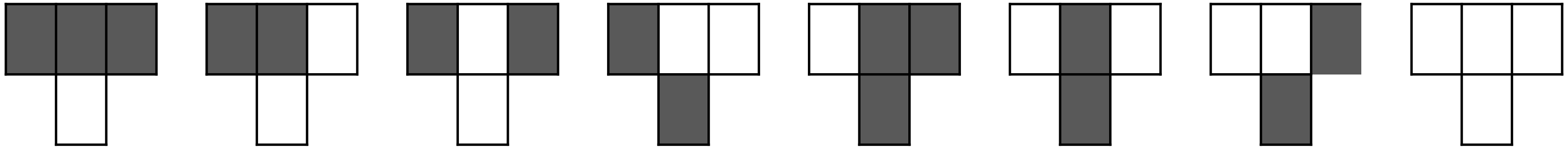
- É muito importante especificar claramente a configuração inicial para se proceder à correcta definição do autómato celular.

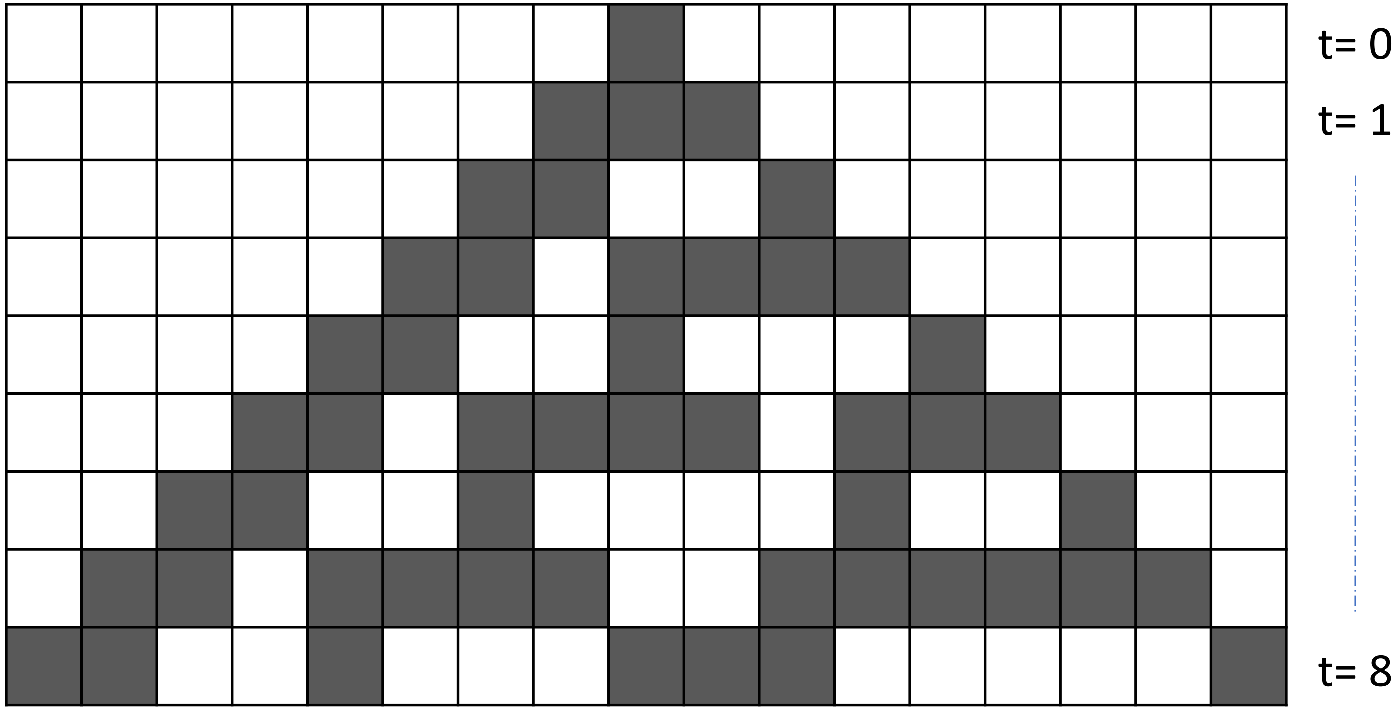
AUTÓMATOS CELULARES ELEMENTARES

- Dois estados possíveis por célula (k = 2) e vizinhança da célula definida pelas duas células adjacentes (r = 1);
- A célula e as suas vizinhas formam uma vizinhança de 3 células e portanto existem 8 possíveis padrões para a vizinhança e um total de 256 regras possíveis;
- Estes 256 ACs são geralmente referidos usando a notação de Wolfram: um número que expresso em binário nos dá directamente a tabela da regra.
  - Exemplo: regra 30 ($2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1$)

111	0	011	1
110	0	010	1
101	0	001	1
100	1	000	0

EXEMPLO: REGRA 30

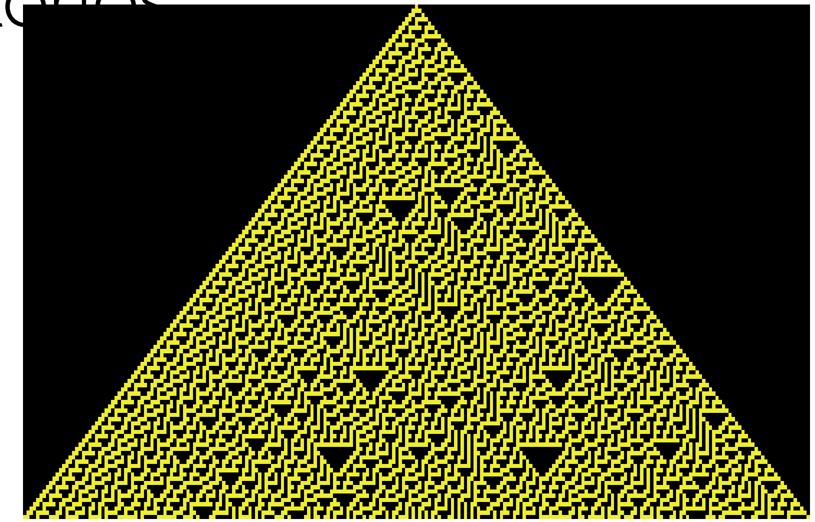




EXEMPLOS: ACS ELEMENTARES

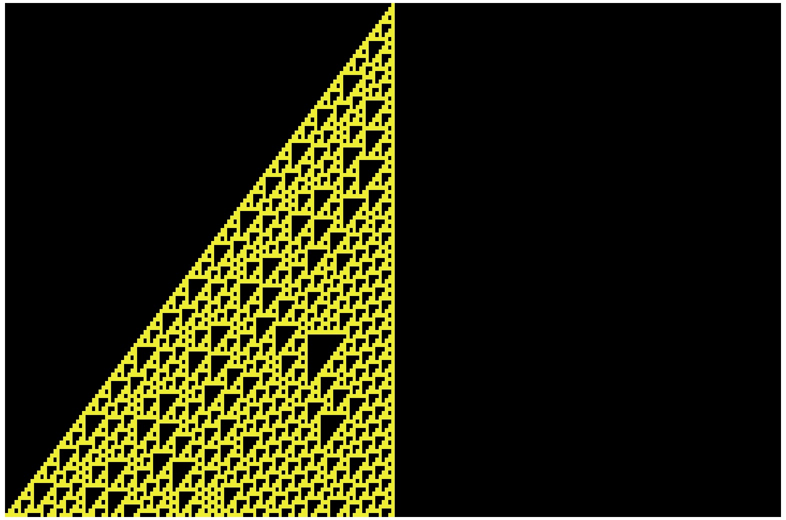
Regra 30

- Regra determinística capaz de produzir padrões aleatórios

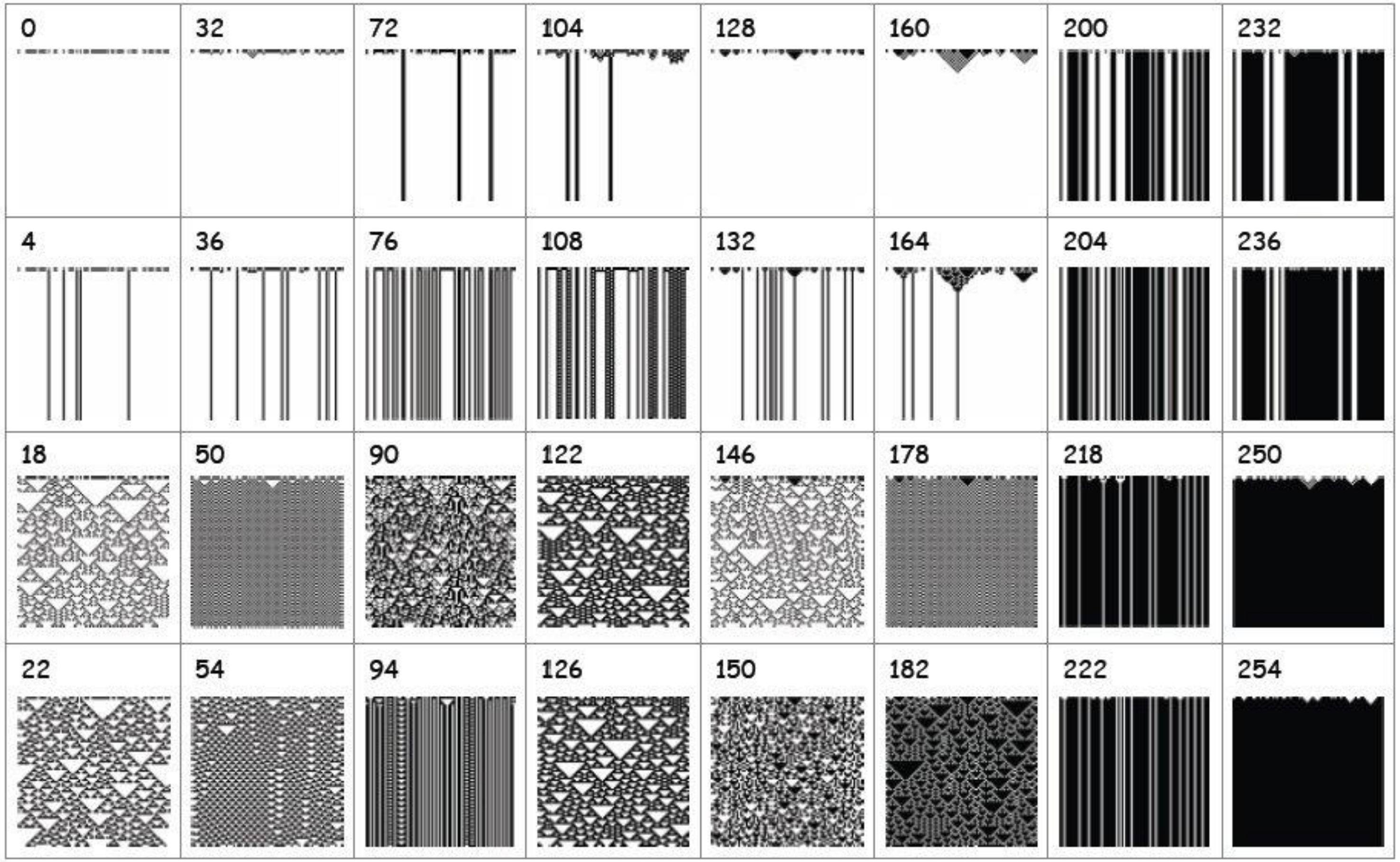


Regra 110

- Nem totalmente periódico nem totalmente aleatório



DIAGRAMAS ESPAÇO-TEMPO DE 32 ACS ELEMENTARES



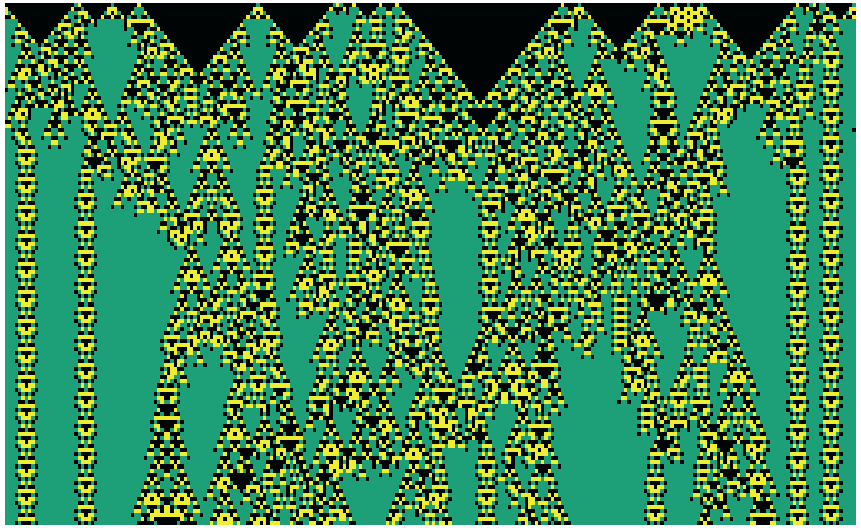
TAXONOMIA DOS ACS ELEMENTARES

- Classe I – Ponto fixo (Constante)
  - Tende a ficar num único estado
  - Exemplos: Regra 250
- Classe II – Ciclo limite (Repetições)
  - Formam-se estruturas periódicas
  - Exemplos: Regra 90
- Classe III – Caótico (Pseudo-aleatório)
  - Formam-se padrões aperiódicos (caóticos)
  - Exemplos: Regra 30
- Classe IV – Estruturados (Complexos)
  - Formam-se padrões complexos (movem-se no espaço-tempo)
  - Exemplo: Regra 110

AUTÓMATOS CELULARES TOTALÍSTICOS

- Num autómato celular totalístico, o estado seguinte de uma célula é função da soma dos valor da célula em questão com os valores das suas células vizinhas;
- Exemplo: (AC 1D, r=1, k=3)
  - Tabela com regra de transição:

$a_{i-1}(t)+a_i(t)+a_{i+1}(t)$	$a_i(t+1)$
0	0
1	2
2	1
3	0
4	2
5	0
6	2



ACS TOTALÍSTICOS – REGRAS DE TRANSIÇÃO

- Questão:
  - Qual a dimensão da tabela de regra para um AC 1D totalístico?
  - E quantas regras diferentes (ACs) podem ser definidos?
- Resposta:
  - A soma pode tomar todos os valores de 0 até n(k-1), ou seja tem-se n(k-1)+1 diferentes valores para a soma que é a dimensão da tabela que define a regra;
  - O número de regras diferentes é dado portanto por $k^{n(k-1)+1}$

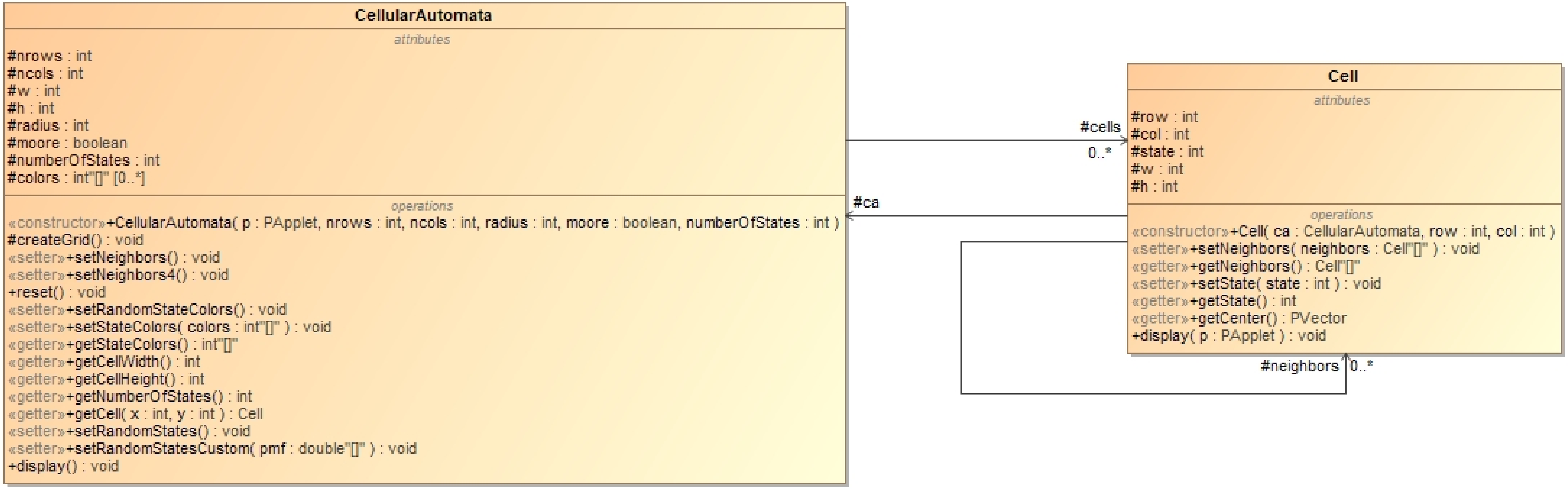
AC TOTALÍSTICO: EXEMPLO

- Questão:
  - Comparar as dimensões das tabelas de regras e o número possível de regras um AC totalístico e um AC elementar, tratando-se em ambos os casos de um AC 1D, ternário (k=3) e com raio unitário (n=3).
- Resposta:
  - No caso do AC totalístico, tem-se que as tabelas de regras têm 7 entradas, havendo 3^7=2187 possíveis regras;
  - No caso do AC elementar tem-se que as tabelas de regras têm 3^3=27 entradas, havendo 327 possíveis regras (cerca de 8 milhões de milhões).

AUTÓMATOS CELULARES TOTALÍSTICOS EXTERNOS

- Num autómato celular totalístico externo, o estado seguinte de uma célula depende do seu estado actual e da soma dos valores das células vizinhas.
- Questão:
  - Qual a dimensão da tabela de regra de um AC totalístico externo 2D, binário, com r=1?
  - Quantas regras diferentes se podem construir?
- Resposta:
  - A soma externa pode variar entre 0 e 8 (ou seja, 9 valores). Podemos ter pois 18 configurações diferentes
  - Tem-se 218 diferentes regras (Nota: o Jogo da Vida é uma destas 262144 regras)

EXERCÍCIO PRÁTICO

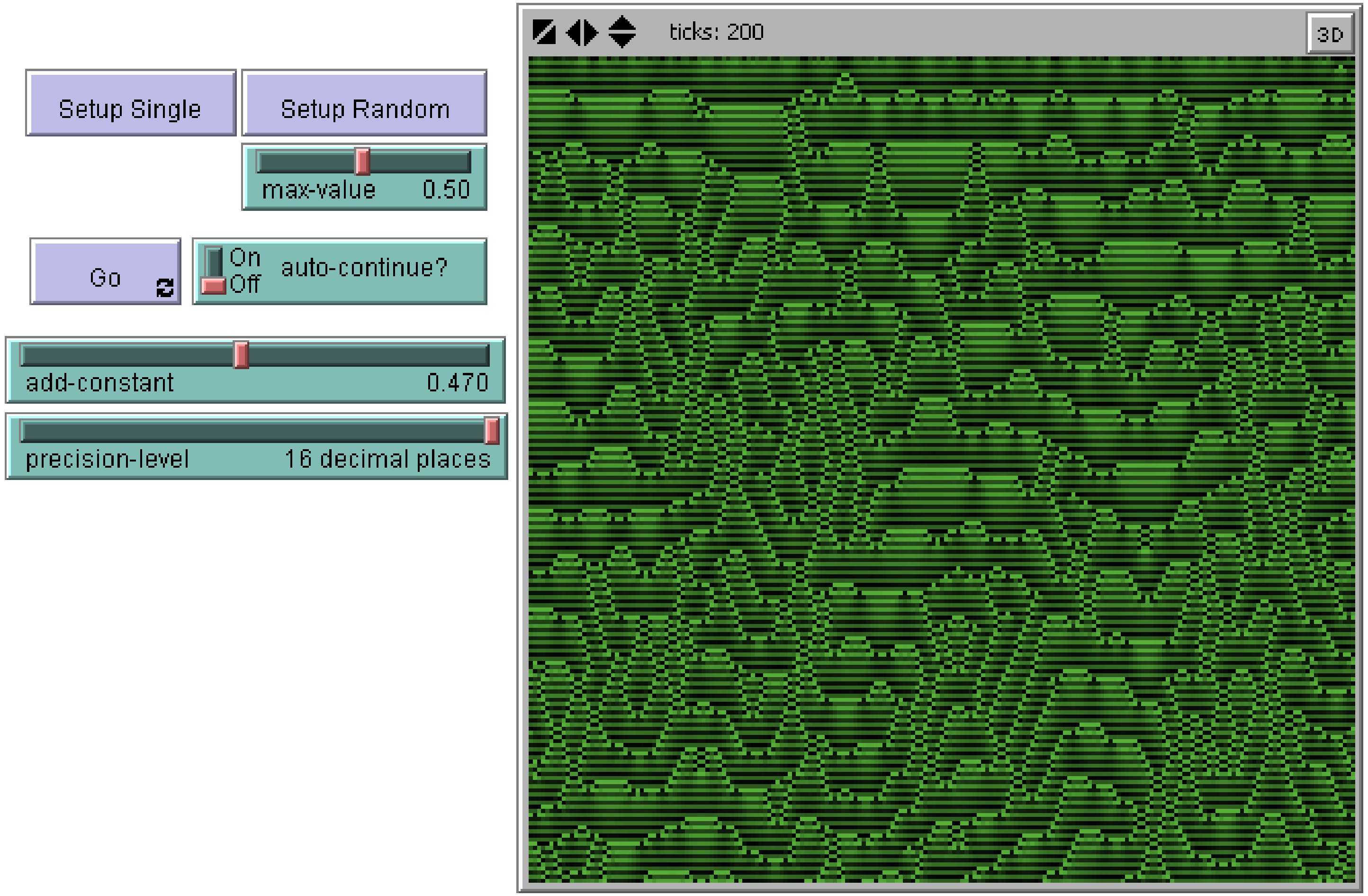


AUTÓMATOS CELULARES CONTÍNUOS

- Um AC contínuo é totalmente análogo aos ACs que temos vindo a estudar, excepto no facto dos estados não serem valores discretos mas sim valores contínuos;
- Ao contrário dos ACs binários, ternários, etc., cada célula num AC contínuo pode, idealmente, estar num número infinito de estados – na prática, o número de estados é limitado pela precisão numérica usada pelo computador.
- Exemplo (AC totalístico, contínuo, 1D, raio unitário):
  - O estado seguinte é calculado extraindo a parte fraccionária do valor que se obtém somando os estados da vizinhança com uma dada constante

$$a_i(t+1) = \mathrm{frac}\left(\sum_{n=i-1}^{\mathrm{i+1}} \mathrm{a}_{\mathrm{n}}(t) + \mathrm{Const.} \right)$$

EXEMPLO



Setup Single
Setup Random
max-value 0.50
Go
On
Off
auto-continue?
add-constant 0.470
precision-level 16 decimal places
ticks: 200
3D

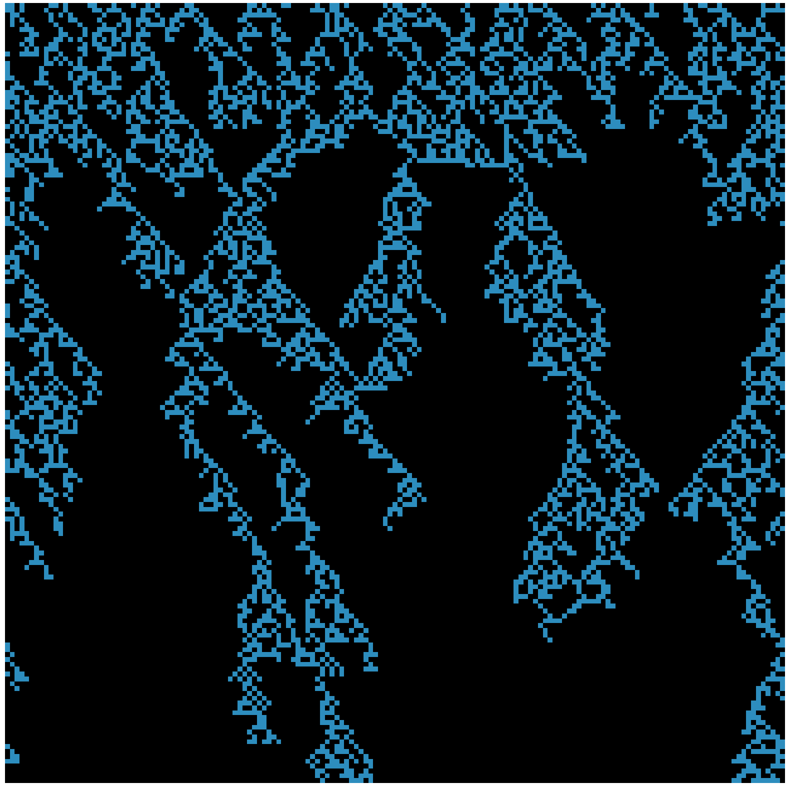
AUTÓMATOS CELULARES ESTOCÁSTICOS

- Ao contrário dos autómatos celulares determinísticos, o comportamento de um AC estocástico é regido por regras probabilísticas;
- Os ACs estocásticos são modelos de sistemas "com ruído" nos quais os processos não funcionam exactamente sempre da mesma forma, que é o que acontece frequentemente em sistemas naturais;
- O comportamento destes ACs tende a ser muito rico e complexo, formando-se frequentemente estruturas exibindo auto-semelhança e comportamento caótico;
- Têm capacidade de imitar muitos fenómenos encontrados na natureza (crescimento de cristais, turbulência, etc.)

EXEMPLO

- AC 1D, estocástico, binário (k=2) e r = 1
  - Tabela de transição:

$a_{i-1}(t)$	$a_i(t)$	$a_{i+1}(t)$	$P(a_i(t+1)=1)$
0	0	0	0.00
0	0	1	0.50
0	1	0	0.50
0	1	1	0.50
1	0	0	0.66
1	0	1	0.50
1	1	0	0.50
1	1	1	0.00



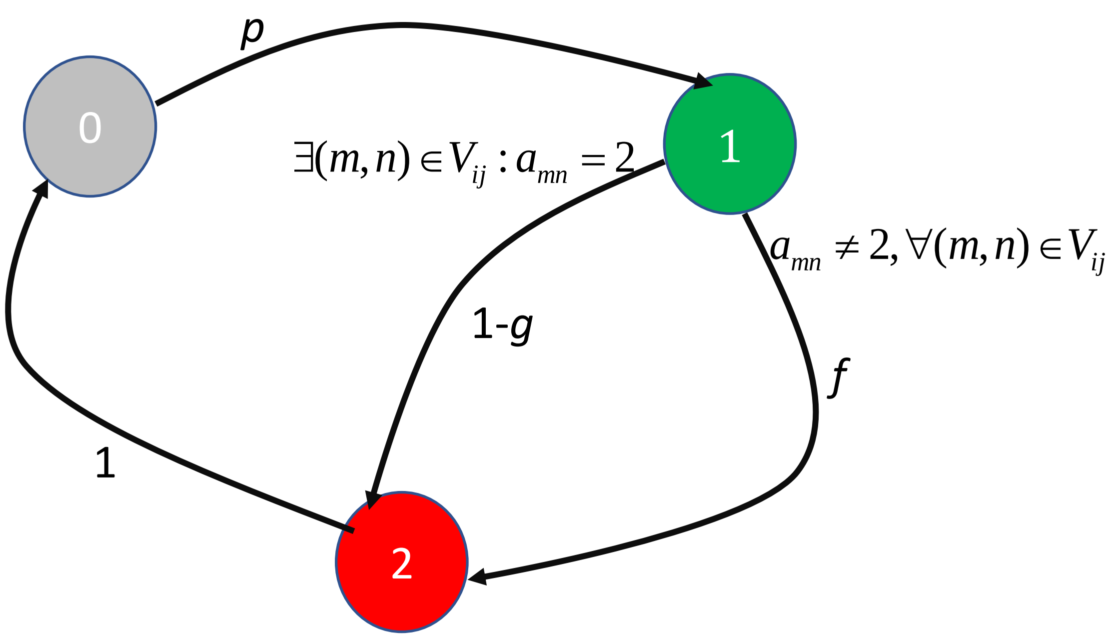
AC ESTOCÁSTICO: FOGO NA FLORESTA

MODELO DE INCÊNDIO NA FLORESTA

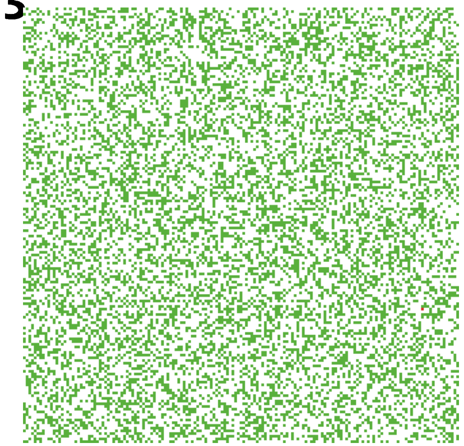
- O modelo é um AC estocástico, 2D, onde cada célula pode estar num dos seguintes 3 estados:
  - Estado 0 – Clareira;
  - Estado 1 – Árvore;
  - Estado 2 – Árvore a arder.
- O estado de cada célula evolui de acordo com as seguintes regras:
  - Uma clareira (estado 0) passa a árvore (estado 1) com probabilidade p;
  - Uma árvore (estado 1) passa a árvore a arder (estado 2):
    - Com probabilidade f se não tiver na vizinhança árvores a arder (f representa a probabilidade de um relâmpago);
    - Com probabilidade 1-g se tiver na vizinhança uma ou mais árvores a arder (g representa a probabilidade da árvore resistir ao fogo);
  - Uma árvore a arder (estado 2) passa a clareira (estado 0) com probabilidade 1

REPRESENTAÇÃO EM MÁQUINA DE ESTADOS

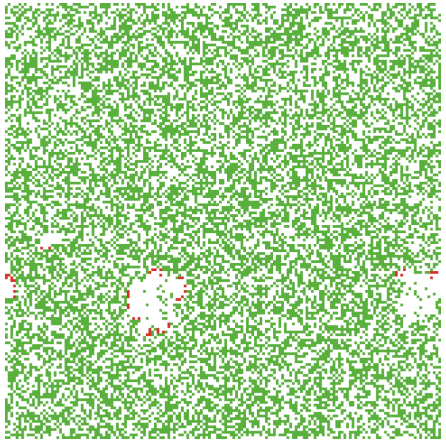
- Parâmetros do modelo:
  - p – probabilidade de crescer uma árvore numa clareira;
  - f – probabilidade de cair um raio numa árvore e incendiá-la;
  - g – probabilidade de uma árvore não arder, tendo árvore(s) vizinha(s) a arder.



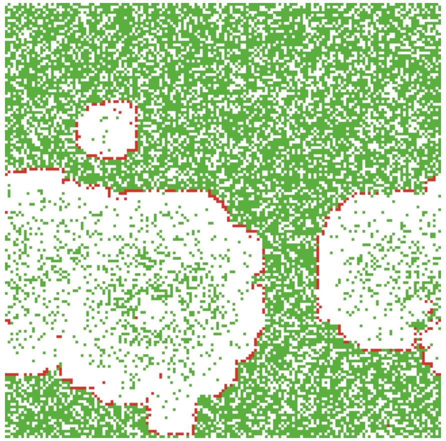
SIMULAÇÃO - NETLOGO



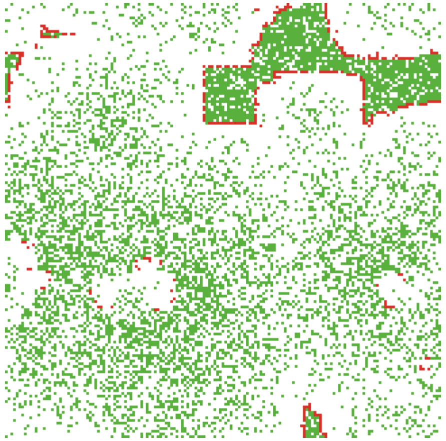
Início



Os primeiros focos de incêndio



O fogo alastra



A florestação e o incêndio

OS FOGOS E A DENSIDADE DA FLORESTA

- Densidade inicial: 5%
- Taxa de crescimento da floresta (p): 1.5%
- Probabilidade de relâmpago (f): 0.001%
- Probabilidade de imunidade (g): 2%