Lista de exercícios das aulas n.º 03: Variáveis aleatórias e modelos teóricos unidimensionais

Exercício 1.
Considere a experiência aleatória que consiste no lançamento de dois dados com as faces numeradas. Cada dado tem três faces com o número 1*, duas faces com o número* 2 *e uma face com o número* 3*. Seja* X *a variável aleatória que representa a soma dos valores das faces que ficam viradas para cima num lançamento.*

(a) *Indique o espaço de resultados,* S*, da experiência aleatória.*

(b) *Qual é o conjunto de valores que a variável aleatória* X *pode tomar?*

(c) *Determine a função de probabilidade da variável aleatória* X.

(d) *Determine a função de distribuição da variável aleatória* X.

(e) *Calcule* $P[X \leqslant 3]$, $P[X > 4]$, $P[3 \leqslant X < 5]$ *e* $P[X \leqslant 5 \mid X > 2]$.

(f) *Determine o valor médio, a variância, o desvio padrão e o coeficiente de variação da variável aleatória* X.

(g) *Admitindo que variável aleatória* Y *é dada por* $Y = 3X - 2$*, calcule o valor esperado e a variância desta variável aleatória.*

Exercício 2. *O número de bolas de gelado, vendidas por cliente, numa loja de gelados artesanais é uma variável aleatória* X *com a seguinte função massa de probabilidade:*

x	1	2	3	4
$f(x)$	$0,3$	a	b	c

Determine o valor de a*,* b *e* c*, sabendo que* $F[2] = 0,7$ *e que* $E[X] = 2,1$.

Exercício 3.
A procura diária de uma determinada peça é uma variável aleatória X*, com a seguinte função de probabilidade:*

$$f(x) = k\frac{2^x}{x!}, x = 1, 2, 3, 4.$$

(a) *Determine o valor de* k.

(b) *Suponha que cada peça é vendida a* 500 € *e custa* 300 € *a produzir e que o fabricante produz diariamente* 3 *peças. Considere que uma peça só pode ser vendida no dia em que é fabricada.*

(b_1) *Determine a função de probabilidade da variável aleatória* L *- "lucro diário".*

(b_2) *Quanto espera o fabricante ganhar em cada dia?*

(c) *Determine a probabilidade de, num determinado dia, haver uma procura máxima de* 3 *peças, sabendo que a procura foi superior a uma peça nesse dia.*

(d) *Considere que a procura das peças é independente de dia para dia. Qual é a probabilidade de em* 5 *dias, haver no máximo* 2 *em que a procura é superior a uma peça?*

(e) *Determine a função de distribuição.*

(f) *Determine o desvio padrão da variável aleatória* X.

(g) *Determine o coeficiente de variação da variável aleatória* X.

Exercício 4.
Uma caixa contém duas peças perfeitas e três defeituosas. Considere uma experiência aleatória que consiste em retirar ao acaso, duas peças, sucessivamente e com reposição. Considere ainda definida a variável aleatória X *- "número de peças perfeitas extraídas".*

(a) *Identifique a distribuição da variável aleatória* X *e determine a respectiva função probabilidade.*

(b) *Calcule o valor esperado e o desvio padrão da variável aleatória* X.

Exercício 5.
Na transmissão de um bit através de um canal de transmissão digital existe a possibilidade de ocorrer transmissão com erro. Seja X a variável aleatória que representa o número de bits com erro quando se tentam transmitir 4 bits. Considere que a probabilidade de transmitir um bit sem erro é o triplo da probabilidade de o transmitir com erro.

(a) *Identifique a distribuição da variável aleatória X e indique a respectiva função probabilidade.*

(b) *Sabendo que se transmitiu mais do que um bit com erro, qual é a probabilidade de ter transmitido com erro 3 bits ou menos?*

(c) *Determine o valor médio e o desvio padrão para a variável aleatória X e interprete os resultados obtidos.*

Exercício 6.
As placas de circuito impresso são submetidas a um teste funcional depois de serem preenchidas com chips semicondutores. Um lote contém 140 placas das quais se sabe que 20 são defeituosas. Do lote são seleccionadas 5 placas sem reposição para realizar o teste funcional. Considere ainda definida a variável aleatória X - "número de placas defeituosas seleccionadas".

(a) *Identifique a distribuição da variável aleatória X e indique a respectiva função probabilidade.*

(b) *Qual é a probabilidade de que nessa amostra esteja pelo menos uma placa com defeito?*

(c) *Calcule o valor esperado e o desvio padrão da variável aleatória X.*

Exercício 7.
Considere uma população de 100 indivíduos, onde a prevalência de indivíduos diabéticos é de $0,03$. Calcule a probabilidade de que apenas 2 sejam diabéticos, num grupo de 5 seleccionados no âmbito de um programa organizado para rastreio da doença.

Exercício 8.
Sabe-se que 4% das peças produzidas numa fábrica são defeituosas.

(a) *Seleccionadas ao acaso 20 peças da produção da fábrica, calcule a probabilidade do número de peças defeituosas seleccionadas não ultrapassar 2 peças.*

(b) *Dois compradores, A e B, apresentam propostas para adquirir um lote de 1000 peças da fábrica. O comprador A oferece 38 euros por peça sem efectuar qualquer inspecção prévia das peças do lote. O comprador B examina, com reposição, 20 peças, pagando: 50 euros por peça caso o número de peças defeituosas encontradas não ultrapasse 2 peças; 30 euros por peça caso contrário. Qual é a melhor proposta para a fábrica em termos do valor esperado do preço de venda do lote?*

Exercício 9.
O sangue humano foi classificado em 4 tipos A, O, B e AB. Numa determinada população as probabilidades destes tipos de sangue são respectivamente $0,4$; $0,45$; $0,1$ e $0,05$. Qual é a probabilidade de que em 10 indivíduos escolhidos ao acaso haja:

(a) *cinco do tipo A, três do tipo B e um de cada um dos outros tipos;*

(b) *três do tipo A, três do B e dois do AB;*

(c) *no máximo dois do tipo A.*

Exercício 10.
Um estudante tem seis exames para realizar. Para qualquer dos exames em causa sabe-se que: a probabilidade de obter nota inferior a $9,5$ valores é de $0,4$ e de obter nota superior a 16 valores é de $0,2$. Qual é a probabilidade de obter nota inferior a $9,5$ valores em dois dos exames e nota superior a 16 valores em apenas um exame?

Exercício 11.
O número de chamadas que chegam à central telefónica de uma empresa, num período de 5 minutos, é uma variável aleatória com distribuição de Poisson, com uma média de 10 chamadas.

(a) *Qual é a probabilidade de, num período de 5 minutos, chegarem quatro chamadas?*

(b) *Qual é a probabilidade de, num período de 15 minutos, chegarem no mínimo três chamadas?*

(c) *Qual é a probabilidade de, num período de 270 segundos, chegarem no máximo duas chamadas?*

(d) *Considere a selecção aleatória de seis períodos de 5 minutos cada. Qual é a probabilidade de, em pelo menos dois desses períodos, chegarem quatro chamadas?*

Exercício 12.
O número de defeitos num cabo eléctrico fabricado por uma máquina tem distribuição de Poisson. A probabilidade de haver pelo menos um defeito em 50 metros de cabo é $0,8647$.

(a) *Determine a probabilidade de um cabo eléctrico com 80 metros ter mais de dois defeitos.*

(b) *Sabendo que o fabricante destes cabos eléctricos obtém, por 50 metros de cabo, um lucro de 20€ se o cabo não tiver defeitos, 15€ se o cabo tiver um ou dois defeitos, e 10€ se o cabo tiver mais de dois defeitos, qual é o lucro esperado por 50 metros de cabo?*

(c) *Qual é a probabilidade de, nos segundos 50 metros de um cabo, encontrar quatro defeitos, sabendo que nos primeiros 50 metros desse mesmo cabo foram encontrados seis defeitos?*

(d) *Determine a probabilidade de, em 1000 centímetros de cabo eléctrico, encontrar pelo menos um defeito.*

Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
Departamento de Matemática
Raciocínio Probabilístico e Simulação

Exercício 13.
O director de vendas de uma empresa pretende definir a política de vendas, para o próximo ano, em relação ao produto X. A procura diária do produto, em milhares de toneladas, é uma variável aleatória X com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & , \text{ fora do intervalo} \end{cases}.$$

(a) *Verifique que $f(x)$ é efectivamente uma função densidade de probabilidade.*

(b) *Determine a função de distribuição da variável aleatória X.*

(c) *Calcule a $P\left[X \leqslant \frac{1}{5}\right]$, $P\left[X > \frac{1}{3}\right]$, $P\left[\frac{1}{4} \leqslant X < \frac{1}{2}\right]$ e $P\left[X > \frac{1}{2} \mid X < \frac{3}{4}\right]$.*

(d) *Determine o stock mínimo a constituir no início de cada dia de modo a que a probabilidade de rotura de stock seja, no máximo, igual a 5%.*

(e) *Calcule o valor médio, a variância, o desvio padrão e o coeficiente de variação da variável aleatória.*

(f) *Admitindo que variável aleatória Y é dada por $Y = 2 - 2X$, calcule o valor esperado e a variância desta variável aleatória.*

Exercício 14.
Numa experiência laboratorial é utilizado um equipamento, cujo consumo de energia, em unidades apropriadas, pode ser bem modelado por uma variável aleatória X, com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{kx}{2} & , \text{ se } 0 \leqslant x < 1 \\ 6 - \frac{9x}{2} & , \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant \frac{4}{3} \\ 0 & , \text{ fora do intervalo} \end{cases}.$$

(a) *Determine o valor de k;*

(b) *Obtenha a função de distribuição;*

(c) *Determine $P\left[\frac{1}{2} < X \leqslant 2\right]$.*

(d) *Calcule o valor médio e o desvio padrão da variável aleatória.*

Exercício 15.
O tempo de espera, em minutos, entre duas chamadas telefónicas numa certa central telefónica é aleatório, sendo caracterizado pela seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} (k-2)\,\mathrm{e}^{-x} & , \text{ se } x \geqslant 0 \\ 0 & , \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$

(a) *Determine o valor de k;*

(b) *Obtenha a função de distribuição;*

(c) *Qual é a probabilidade do tempo de espera entre duas chamadas ser inferior a 3 minutos?*

Exercício 16.
O número de chegadas de clientes a uma estação de correios, num intervalo de 10 minutos, segue uma lei de Poisson com média igual a $15,6$ chegadas.

(a) *Identifique e caracterize a distribuição seguida pela variável T que representa o intervalo de tempo, em minutos, até chegar o primeiro cliente;*

(b) *Determine o tempo médio, em minutos, até à chegada do primeiro cliente;*

(c) *Qual é a probabilidade de ter de esperar pelo menos 2 minutos até chegar alguém?*

(d) *Qual é a probabilidade do tempo, entre duas chegadas consecutivas de clientes, ser de pelo menos 3 minutos?*

Exercício 17.
O número de avarias de um sistema eléctrico é uma variável aleatória de Poisson com média de duas avarias por ano.

(a) *Qual é a probabilidade de em dois anos existirem pelo menos 3 avarias num destes sistemas?*

(b) *Qual é o intervalo de tempo médio entre avarias consecutivas de um desses sistemas?*

(c) *Qual é a probabilidade de ter de esperar pelo menos 3 meses até à 1 avaria?*

(d) *Qual é a probabilidade de ter que esperar no máximo $1,5$ anos entre duas avarias consecutivas?*

(e) *Qual é a probabilidade de em 4 anos observados, existir pelo menos 1 ano em que há pelo menos duas avarias?*

Exercício 18.
O tempo de funcionamento, sem avarias, de uma determinada máquina de produção contínua, é uma variável aleatória com distribuição exponencial de valor médio $4,5$ horas. Considere que a máquina é colocada em funcionamento no início de cada dia de trabalho.

(a) *Calcule a probabilidade do tempo de funcionamento sem avarias da referida máquina se situar entre as 3 e as 5 horas.*

(b) *Admitindo que a máquina se encontra ainda em funcionamento 4 horas depois do início do dia de trabalho, qual é a probabilidade de não ocorrer qualquer avaria antes das 6 horas de funcionamento?*

(c) *Qual é a probabilidade de se verificarem duas avarias durante as primeiras 6 horas de funcionamento da máquina?*

(d) *Determine o tempo de funcionamento, sem avarias, que não é excedido em 25% dos dias.*

Exercício 19.
Suponha que o tempo de preenchimento electrónico dum impresso através duma uma base de dados é uniformemente distribuído entre $1,5$ e $2,2$ minutos.

(a) *Determine a função de distribuição do tempo de preenchimento electrónico dum impresso com idênticas características.*

(b) *Determine a probabilidade de que esse tempo seja no máximo de $1,8$ minutos.*

(c) *Determine a probabilidade de que esse tempo varie entre $1,7$ e 2 minutos.*

(d) *Determine a probabilidade de que esse tempo seja de pelo menos 2 minutos.*

(e) *Determine a probabilidade de que o tempo seja inferior a 2 minutos, sabendo que esse tempo é pelo menos $1,7$ minutos?*

(f) *Qual é o tempo que é excedido em 90% dos casos?*

(g) *Qual é a média e a variância do tempo de preenchimento electrónico do impresso?*

Exercício 20.
A largura do fio utilizado no processo de fabrico de semicondutores segue uma distribuição que se pode assumir normal com média de $0,5$ micrómetros e desvio padrão de $0,05$ micrómetros.

(a) *Qual é a probabilidade de que a largura do fio seja superior a $0,62$ micrómetros?*

(b) *Qual é a probabilidade de que a largura do fio varie entre $0,47$ e $0,63$ micrómetros?*

(c) *A largura dos 30% de fios mais largos é superior a que valor?*

Exercício 21.
O diâmetro de um cabo eléctrico, em cm, produzido numa companhia segue uma lei normal de valor médio μ e desvio padrão $0,5$ cm. Sabe-se ainda que 50% dos cabos produzidos têm diâmetro superior a 2 cm.

(a) *Determine o diâmetro médio de um cabo produzido na companhia.*

(b) *Considerando defeituoso um cabo cujo diâmetro difira do seu valor médio mais do que 1 cm, qual é a percentagem de cabos defeituosos produzidos na companhia?*

(c) *Qual é o valor máximo do diâmetro que limita os 15% de cabos com menor diâmetro?*

(d) *Sabendo que um cabo tem diâmetro compreendido entre $1,7$ cm e $2,2$ cm, calcule a probabilidade de que o seu diâmetro seja efectivamente inferior a 2 cm.*

(e) *Determine o valor do número real positivo K de modo que*

$$P\left[1,5 - K < X < 2,5 + K\right] = 0,95.$$

Exercício 22.
A dimensão das peças produzidas por um determinado processo de fabrico é uma variável aleatória com distribuição normal. Sabe-se que 15% das peças produzidas têm uma dimensão inferior a $5,5cm$ e 5% têm uma dimensão superior a $6cm$. Determine os parâmetros da distribuição.

Exercício 23.
O diâmetro interior de um tubo cilíndrico é uma variável aleatória X com distribuição normal de valor esperado $3cm$ e desvio padrão $0,02cm$. A espessura Y do mesmo tubo é uma variável aleatória com distribuição normal de valor esperado $0,3cm$ e desvio padrão $0,005cm$, independente de X. Calcule a probabilidade de que o diâmetro exterior do tubo exceda $3,62cm$.

Exercício 24.
Um fabricante de computadores (fabricante A) garante substituir por novos, todos os computadores que se avariem nos dois primeiros anos após a data da compra. Admite-se que o tempo de vida destes computadores são variáveis independentes e identicamente distribuídas com uma distribuição normal com valor esperado de 42 *meses e desvio padrão de* 10 *meses.*

(a) *Qual é a proporção de computadores que o fabricante pode ter que substituir?*

(b) *Qual deve ser a garantia, de maneira a que no máximo,* 1% *dos computadores são substituídos?*

(c) *O tempo de vida do mesmo tipo de computadores noutro fabricante (fabricante B) também segue uma distribuição normal com valor esperado de* 40 *meses e desvio padrão de* 8 *meses. Qual é a probabilidade de, seleccionando ao acaso um computador de cada fabricante, o tempo de vida do computador do fabricante A seja superior ao tempo de vida do computador do fabricante B?*

Exercício 25.
Suponha que o conteúdo, em litros, de garrafas de óleo para motor é uma variável aleatória com distribuição normal de média igual a 1 *litro e desvio padrão* $0,025$ *litros. Considere uma amostra aleatória de* 25 *garrafas de óleo. Determine:*

(a) *a probabilidade do conteúdo médio das garrafas de óleo da amostra ser inferior a* $0,99$ *litros;*

(b) *a probabilidade de uma garrafa de óleo ter mais de* $1,02$ *litros;*

(c) *a probabilidade da quantidade total de óleo contida em* 25 *garrafas ser de pelo menos* $24,8$ *litros;*

(d) *a probabilidade de nas* 25 *garrafas pelo menos duas tenham mais de* 1 *litro.*

Exercício 26.
Numa fábrica de réguas verifica-se que o comprimento destas, em cm, é uma variável aleatória que segue uma distribuição uniforme no intervalo $[10;25]$.

(a) *Determine a probabilidade do comprimento de uma régua escolhida ao acaso da produção total ser de pelo menos* 22*cm.*

(b) *Recolheu-se uma amostra aleatória independente e identicamente distribuída de* 50 *réguas da produção total de um dia.*

   (b_1) *Calcule a probabilidade aproximada do comprimento médio das réguas da amostra ser no máximo* 18*cm?*

   (b_2) *Calcule a probabilidade aproximada do comprimento total das réguas da amostra ser pelo menos* 880*cm?*

Exercício 27.
Suponha que 40 *dispositivos são utilizados da seguinte forma: logo que o 1º falhe entra em funcionamento o 2º; quando este falhar entra em funcionamento o 3º, e assim sucessivamente. Sabe-se que o tempo de funcionamento de cada dispositivo é uma variável aleatória com distribuição exponencial com média de* 10 *horas.*

(a) *Qual é a probabilidade de um dispositivo funcionar entre* 9 *e* $11,5$ *horas?*

(b) *Calcule a probabilidade aproximada de que o tempo total da operação dos* 40 *dispositivos ultrapasse* 420 *horas?*

(c) *Calcule a probabilidade aproximada de que o tempo médio de funcionamento dos* 40 *dispositivos seja no máximo de* 11 *horas?*

Exercício 28.
O tamanho de ficheiros transferidos de um servidor para um computador por FTP é descrito por uma variável X *com função densidade de probabilidade definida do seguinte modo:*

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & , \text{ se } 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ 3-x & , \text{ se } 2 < x \leqslant 3 \\ 0 & , \text{ outros valores de } x \end{cases} .$$

Admita que o valor esperado de X *é igual a* 2 *e que a variância de* X *é igual a* $\frac{1}{6}$. *Considerando que os tamanhos dos ficheiros são independentes entre si, calcule um valor aproximado para a probabilidade de que o tamanho total de* 120 *ficheiros seja maior que* 230.

Exercício 29.
Um indivíduo tem de fazer um teste com 250 *questões. Para cada questão, o indivíduo tem, independentemente, a probabilidade de* $0,05$, $0,8$ *e* $0,15$ *de obter* 0, 1 *e* 2 *pontos, respectivamente. Calcule a probabilidade aproximada do indivíduo atingir uma pontuação total superior a* 290 *pontos.*

Exercício 30.
Com a ingestão de um determinado fármaco para o tratamento da depressão, 20% *dos doentes referem sentir efeitos secundários durante a primeira semana de tratamento. Recolheu-se uma amostra aleatória de* 100 *doentes. Calcule a probabilidade aproximada de:*

(a) pelo menos 15 *terem sentido os efeitos secundários.*

(b) entre 16 *e* 45*, inclusive, terem sentido os efeitos secundários.*

Exercício 31.
O número de automóveis que entram numa auto-estrada num período de 30 *segundos é uma variável aleatória com distribuição de Poisson com desvio padrão igual a* 3*. Num período de* 5 *minutos, calcule a probabilidade aproximada de:*

(a) entrarem mais de 59 *automóveis na auto-estrada?*

(b) entrarem no mínimo 55 *e no máximo* 80 *automóveis na auto-estrada?*

Exercício 32.
Suponha que o número de acessos a um servidor, por minuto, é descrito pela variável aleatória X*, com distribuição Poisson e valor médio igual a* 2*. Calcule um valor aproximado para a probabilidade de o número total de acessos ao servidor em um dia exceder* 3000*. Admita que o número de acessos em minutos distintos são independentes entre si.*

Exercício 33.
Um sistema complexo é constituído por 100 *componentes que funcionam independentemente. A probabilidade de que qualquer das componentes venha a falhar durante o período de operação é igual a* $0,1$*. Sabendo que o funcionamento do sistema exige que estejam operacionais pelo menos* 85 *componentes, calcule aproximadamente a probabilidade de que o sistema funcione.*