Lista de exercícios propostos n.º 02: Teoria das probabilidades

Exercício 1.
Numa caixa há quinze peças, dez das quais são pintadas. Um operário extrai simultaneamente três peças. Calcular a probabilidade de:

(a) *haver uma peça pintada;*

(b) *não haver peças pintadas;*

(c) *haver pelo menos duas peças pintadas.*

Exercício 2.
O clube náutico de uma cidade oferece aos seus sócios a possibilidade de praticarem as seguintes modalidades: vela, canoagem e windsurf. De acordo com os dados disponíveis, 30% *dos sócios praticam vela,* 10% *e* 20% *praticam, respectivamente, canoagem e windsurf. Por outro lado,* 5% *dos sócios praticam vela e windsurf. É seleccionado um sócio ao acaso.*

(a) *Sabendo que esse sócio pratica vela, qual a probabilidade de ele praticar windsurf?*

(b) *Qual a probabilidade de esse sócio não praticar nem windsurf nem vela?*

(c) *Os acontecimentos "um sócio, seleccionado ao acaso, praticar vela" e "um sócio, seleccionado ao acaso, praticar windsurf" são acontecimentos independentes? Justifique.*

Exercício 3.
Considere os acontecimentos A, B e C. Suponha que:

$$P[A] = 0,4; \qquad P[B] = 0,3; \qquad P[C] = 0,7;$$

$$P\left[\overline{A} \cap B\right] = 0,1; \qquad P\left[A \cap B \cap \overline{C}\right] = 0,1.$$

Calcule:

(a) $P\left[A \cap \overline{B} | A\right]$;

(b) $P[C|A \cap B]$.

Exercício 4.
A probabilidade de num computador haver defeito de hardware é $0,008$, *de software é* $0,005$ *e de não ter defeitos é de* $0,99$.

(a) *Calcule a probabilidade do computador ter os dois tipos de defeitos;*

(b) *Calcule a probabilidade de ter só defeito de hardware se sabemos que é defeituoso.*

Exercício 5.
Sejam A, B e C, três acontecimentos de um mesmo espaço de probabilidade, independentes, tais que

$$P[A] = \frac{1}{5}; \qquad P[B] = \frac{2}{5}; \qquad P[C] = \frac{3}{5}.$$

(a) *Qual é a probabilidade de não ocorrer nenhum destes acontecimentos?*

(b) *Qual é a probabilidade de ocorrer C sabendo que não ocorreu A nem B?*

Exercício 6.
Uma fábrica utiliza três máquinas para a produção de um mesmo produto. A máquina M_1 produz 40% *da produção total. As percentagens de peças defeituosas produzidas por cada máquina são,* 4%, 2% *e* 1%, *para M_1, M_2 e M_3, respectivamente. Sabe-se que* 97,45% *do total de peças produzidas são não defeituosas.*

(a) *Escolhida uma peça ao acaso da produção total, qual a probabilidade de ter sido produzida pela máquina M_2?*

(b) *Qual a probabilidade de uma peça escolhida ao acaso da produção total ter sido produzida pela máquina M_1, observando-se que é defeituosa?*

(c) *Se forem retiradas duas peças, sucessivamente e com reposição da produção total, qual a probabilidade de que uma seja defeituosa e outra não?*

Exercício 7.
Num grupo de 40 cães, 20 ladram, 14 não ladram e mordem e 26 mordem. Calcule a probabilidade de ser verdadeira a seguinte frase: "Cão que ladra não morde".

Exercício 8.
Considere os possíveis dias de aniversário de 4 *alunos que se sabe fazerem anos numa dada semana. Qual é a probabilidade de:*

(a) *fazerem anos em dias da semana todos diferentes?*

(b) *pelo menos dois fazerem anos no mesmo dia da semana?*

(c) *exactamente dois fazerem anos no mesmo dia da semana?*

Exercício 9.
Considere os acontecimentos A, B e C. Os acontecimentos A e B têm probabilidade de ocorrência p, enquanto o acontecimento C tem probabilidade de ocorrência $\frac{p}{2}$.

(a) *Suponha que A e B são independentes. Escreva $P[A \cup B \cup C]$ em função de p, admitindo que:*

(a_1) *C é disjunto de B e independente de A;*

(a_2) *A, B e C são mutuamente independentes;*

(b) *Suponha agora que os acontecimentos A, B e C são mutuamente exclusivos. Sabendo que $P[A \cup B \cup C] = 0,9$, calcule o valor de p.*

Exercício 10.
Uma determinada turma tem 30 *alunos, dos quais* 12 *são rapazes e* 18 *são raparigas. O delegado de turma é uma rapariga. Pretende-se formar uma comissão para representar a turma numa reunião com o vereador da Cultura da Câmara Municipal. A comissão de cinco elementos deve ser formada por* 3 *raparigas e* 2 *rapazes. A delegada de turma deve fazer parte da comissão.*

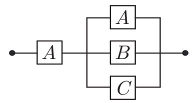
(a) *Quantas comissões diferentes é possível constituir?*

(b) *No final da reunião, os cinco elementos da comissão e o vereador posaram para uma fotografia, colocando-se uns ao lado dos outros. Admitindo que eles se colocaram ao acaso, determine a probabilidade de:*

(b_1) *as raparigas ficarem juntas;*

(b_2) *o vereador ficar entre os dois rapazes.*

Exercício 11.
Calcule a probabilidade do sistema electrónico apresentado funcionar, sabendo que para ligações em série, o sistema só funciona se todas as componentes estiverem em funcionamento, e para as ligações em paralelo basta que uma das componentes funcione para que o sistema esteja operacional. Suponha que a probabilidade de funcionar num determinado instante para uma componente do tipo A é de 99%, para uma do tipo B é de 95% e para uma do tipo C é de 90%. Calcule a probabilidade do sistema global estar em funcionamento.



Exercício 12.
A probabilidade de um atirador acertar num alvo é de $0,6$. Calcule a probabilidade de:

(a) *em cinco tiros acertar três;*

(b) *acertar pela terceira vez ao quinto tiro;*

(c) *serem necessários exactamente dez tiros para acertar um;*

(d) *necessitar de pelo menos quatro tiros para acertar dois.*

Exercício 13.
Numa faculdade os anfiteatros A e B têm como saída comum o átrio C. Sabe-se que o anfiteatro B comporta 3 vezes mais alunos do que o anfiteatro A e que as percentagens de alunos do sexo feminino nos anfiteatros A e B são, respectivamente, 70% e 60%. Após a saída dos alunos dos dois anfiteatros para o átrio C, escolheu-se aleatoriamente um estudante.

(a) *Calcule a probabilidade de ter sido escolhida uma aluna;*

(b) *Tendo-se constatado que o estudante escolhido era do sexo masculino, qual a probabilidade de ter saído do anfiteatro A?*

Exercício 14.
Sabendo que três pessoas sofrem da mesma doença e que têm probabilidades de se curarem, respectivamente iguais a, $0,25$, $0,15$ e $0,10$, determine a probabilidade de:

(a) nenhuma se curar;

(b) pelo menos duas se curarem.

Exercício 15.
Considere os acontecimentos A, B e C tais que:

$P[A] = 0,45;\quad P[C] = 0,5;\quad P[A \cup C] = 0,8;\quad P[A \cap B] = 0,2;$

$P\left[\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right] = 0,25;\quad P[A \cap B \cap C] = 0,05;\quad P\left[\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right] = 0,02.$

Determine a probabilidade de:

(a) ocorrer B e C e não ocorrer A;

(b) ocorrer B e C;

(c) só ocorrer A;

(d) ocorrer A e B e não ocorrer C;

(e) só ocorrer B;

(f) ocorrerem só dois acontecimentos.

Exercício 16.
O Nuno esqueceu-se do número do telemóvel do amigo Rui. Lembra-se apenas que:

- *o número tinha 9 algarismos;*
- *começava por 96;*
- *não tinha zeros;*
- *terminava em 77;*
- *tinha um e um só 3;*
- *tinha dois e só dois oitos.*

O Nuno resolveu marcar o número 968387577. Qual a probabilidade do Nuno acertar no número do telemóvel do Rui?

Exercício 17.
Os trabalhadores da Companhia MLO, Lda. foram classificados em três níveis de acordo com o grau de instrução: formação mínima, formação média e formação superior. Sabe-se que:

- *desses trabalhadores 55% tem salário superior a 500€;*
- *40% dos trabalhadores com formação média têm salário superior a 500€;*
- *70% dos trabalhadores com formação superior têm salário superior a 500€;*
- *nenhum dos trabalhadores com formação mínima tem salário superior a 500€;*
- *a percentagem de trabalhadores com formação mínima é de 10%.*

(a) Calcule a probabilidade de um trabalhador escolhido ao acaso ter formação média;

(b) Calcule a probabilidade de ter formação superior, sabendo que ganha mais de 500€.

Exercício 18.
A probabilidade de um indivíduo de uma determinada cidade ser diabético é $0,02$. O teste utilizado para detectar a doença dá resultado positivo em 90% dos diabéticos e em 5% dos não diabéticos.

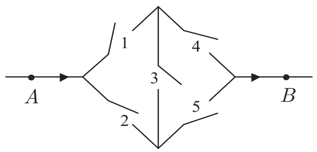
(a) Qual a probabilidade de um teste, realizado a um indivíduo escolhido ao acaso, dar resultado positivo?

(b) Sabendo que um teste dá resultado negativo, qual a probabilidade do indivíduo ser diabético?

(c) Qual é a probabilidade de um teste, realizado a um indivíduo escolhido ao acaso, dar resultado negativo e o indivíduo não ser diabético?

(d) Seleccionam-se 5 indivíduos dessa cidade. Sabendo que apenas dois destes indivíduos têm diabetes, qual a probabilidade de serem o primeiro e o último dos indivíduos seleccionados?

Exercício 19.
A probabilidade de cada relé do circuito estar fechado é p e os relés funcionam independentemente uns dos outros. Qual é a probabilidade de que passe corrente entre A e B?



Exercício 20.
Num laboratório existem três balanças analíticas A, B e C. A taxa de utilização da balança A é de 50%, enquanto que a da balança C é de 20%. As probabilidades destas fornecerem um resultado errado são de $0,0002$, $0,0005$ e $0,0007$, respectivamente.

(a) *Qual a probabilidade de uma determinada pesagem não ter dado um resultado errado?*

(b) *Sabendo que um dado resultado está errado, qual é a probabilidade da pesagem ter sido efectuada na balança A?*

(c) *São efectuadas 4 pesagens independentes. Qual a probabilidade de pelo menos 3 não terem dado um resultado errado?*

Exercício 21.
Do conjunto das empresas que actuam num dado sector industrial, 30% possuem departamento de investigação, 65% realizam lucros e 25% possuem departamento de investigação e realizam lucros. Pretende-se calcular a probabilidade de uma empresa, escolhida ao acaso, estar nas seguintes condições:

(a) *possuir departamento de investigação ou realizar lucros;*

(b) *não realizar lucros;*

(c) *não possuir departamento de investigação nem realizar lucros;*

(d) *não possuir departamento de investigação e realizar lucros;*

(e) *possuir departamento de investigação sabendo que realiza lucros.*

Soluções:

Exercício 1.

(a) *Considerando o acontecimento A - "haver uma peça pintada", tem-se* $P\left[A\right] = \frac{{}^{10}C_1 \times {}^{5}C_2}{{}^{15}C_3} = 0,2198.$

(b) *Considerando o acontecimento B - "não haver peças pintadas", tem-se* $P\left[B\right] = \frac{{}^{10}C_0 \times {}^{5}C_3}{{}^{15}C_3} = 0,022.$

(c) *Considerando o acontecimento C - "haver pelo menos duas peças pintadas", tem-se* $P\left[C\right] = \frac{{}^{10}C_2 \times {}^{5}C_1 + {}^{10}C_3 \times {}^{5}C_0}{{}^{15}C_3} = 0,7582.$

Exercício 2.

(a) *Considerando os acontecimentos:*

- A - *"um sócio, seleccionado ao acaso, praticar vela";*
- B - *"um sócio, seleccionado ao acaso, praticar canoagem";*
- C - *"um sócio, seleccionado ao acaso, praticar windsurf";*

tem-se $P\left[C|A\right] = \frac{P[A\cap C]}{P[A]} = 0,1667.$

(b) $P\left[\overline{A} \cap \overline{C}\right] = P\left[\overline{A \cup C}\right] = 1 - P\left[A \cup C\right] = 0,55.$

(c) *Dado que* $P\left[A \cap C\right] = 0,05 \neq 0,06 = P\left[A\right] \times P\left[C\right]$, *podemos concluir que os acontecimentos não são independentes.*

Exercício 3.

(a) $P\left[A \cap \overline{B}|A\right] = \frac{P\left[A\cap\overline{B}\right]}{P[A]} = \frac{P[A]-P[B]+P\left[\overline{A}\cap B\right]}{P[A]} = 0,5.$

(b) $P\left[C|A \cap B\right] = \frac{P[A\cap B\cap C]}{P[A\cap B]} = \frac{P[B]-P\left[\overline{A}\cap B\right]-P\left[A\cap B\cap\overline{C}\right]}{P[B]-P\left[\overline{A}\cap B\right]} = 0,5.$

Exercício 4.

(a) *Considerando os acontecimentos:*

- D_1 - *"haver defeito de hardware";*
- D_2 - *"haver defeito de software";*

e sabendo que a probabilidade de ter menos um defeito é dada por $P\left[D_1 \cup D_2\right] = 1 - P\left[\overline{D_1 \cup D_2}\right] = 1 - P\left[\overline{D_1} \cap \overline{D_2}\right] = 0,01$, *Assim* $P\left[D_1 \cup D_2\right] = P\left[D_1\right] + P\left[D_2\right] - P\left[D_1 \cap D_2\right] \Leftrightarrow P\left[D_1 \cap D_2\right] = 0,003.$

(b) $P\left[D_1 \cap \overline{D_2} | D_1 \cup D_2\right] = \frac{P\left[\left(D_1 \cap \overline{D_2}\right) \cap (D_1 \cup D_2)\right]}{P[D_1 \cup D_2]} = \frac{P\left[D_1 \cap \overline{D_2}\right]}{P[D_1 \cup D_2]} =$
$= \frac{P[D_1] - P[D_1 \cap D_2]}{P[D_1 \cup D_2]} = 0,5.$

Exercício 5.

(a) $P\left[\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right] = P\left[\overline{A}\right] \times P\left[\overline{B}\right] \times P\left[\overline{C}\right] = \frac{24}{125}.$

(b) $P\left[C | \overline{A} \cap \overline{B}\right] = \frac{P\left[\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right]}{P\left[\overline{A} \cap \overline{B}\right]} = P\left[C\right] = \frac{3}{5}.$

Exercício 6.

(a) *Considerando os acontecimentos:*

- M_i *- "peça produzida pela máquina* i*", com* $i = 1, 2, 3$*;*
- D *- "peça defeituosa";*

tem-se $P\left[M_1\right] + P\left[M_2\right] + P\left[M_3\right] = 1 \Leftrightarrow P\left[M_2\right] + P\left[M_3\right] = 0,6$ *e pelo teorema da probabilidade total tem-se* $P\left[\overline{D}\right] = 0,9745 \Leftrightarrow P\left[M_1 \cap \overline{D}\right] + P\left[M_2 \cap \overline{D}\right] + P\left[M_3 \cap \overline{D}\right] = 0,9745 \Leftrightarrow 0,98 P\left[M_2\right] + 0,99 P\left[M_3\right] = = 0,5905$*. Resolvendo um sistema com as equações anteriores tem-se* $P\left[M_2\right] = 0,35$ *e* $P\left[M_3\right] = 0,25$*.*

(b) *Pelo teorema de Bayes tem-se* $P\left[M_1 | D\right] = \frac{P[M_1 \cap D]}{P[D]} = 0,6275.$

(c) *Considerando os acontecimentos:*

- A *- "a 1ª peça retirada é defeituosa";*
- B *- "a 2ª peça retirada é defeituosa";*

tem-se $P\left[A \cap \overline{B}\right] + P\left[\overline{A} \cap B\right] = P\left[D\right] \times P\left[\overline{D}\right] + P\left[\overline{D}\right] \times P\left[D\right] = = 0,0497.$

Exercício 7.
Considerando os acontecimentos:

- L *- "cão ladrar";*
- M *- "cão morder";*

tem-se $P\left[M\right] = P\left[M \cap \overline{L}\right] + P\left[M \cap L\right] \Leftrightarrow P\left[M \cap L\right] = \frac{6}{20}$ *e* $P\left[L\right] = = P\left[L \cap \overline{M}\right] + P\left[L \cap M\right] \Leftrightarrow P\left[L \cap \overline{M}\right] = \frac{4}{20}$*. Assim tem-se* $P\left[\overline{M} | L\right] = = \frac{P\left[L \cap \overline{M}\right]}{P[L]} = \frac{2}{5}$*. Podemos concluir que 40% dos cães que ladram não mordem.*

Exercício 8.

(a) *Considerando o acontecimento* A *- "todos os alunos fazem anos em dias diferentes", tem-se* $P\left[A\right] = \frac{7}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{4}{7} = \frac{{}^7A_4}{{}^7A'_4} = \frac{120}{343}.$

(b) *Considerando o acontecimento* B *- "pelo menos dois alunos fazem anos no mesmo dia da semana", tem-se* $P\left[B\right] = 1 - P\left[A\right] = \frac{223}{343}.$

(c) *Considerando o acontecimento* C *- "exactamente dois alunos fazem anos no mesmo dia da semana", tem-se* $P\left[C\right] = {}^4C_2 \times \frac{7}{7} \times \frac{1}{7} \times \frac{6}{7} \times \frac{5}{7} = \frac{180}{343}.$

Exercício 9.

(a) (a_1) *Sabendo que* A *e* B *são independentes,* A *e* C *são independentes e que* B *e* C *são mutuamente exclusivos, tem-se* $P\left[A \cup B \cup C\right] = = P\left[A\right] + P\left[B\right] + P\left[C\right] - P\left[A \cap B\right] - P\left[A \cap C\right] = \frac{5}{2}p - \frac{3}{2}p^2.$

(a_2) *Sabendo que* A*,* B *e* C *são mutuamente independentes, tem-se* $P\left[A \cup B \cup C\right] = P\left[A\right] + P\left[B\right] + P\left[C\right] - P\left[A \cap B\right] - P\left[A \cap C\right] + - P\left[B \cap C\right] + P\left[A \cap B \cap C\right] = \frac{5}{2}p - 2p^2 + \frac{1}{2}p^3.$

(b) *Sabendo que* A*,* B *e* C *são mutuamente exclusivos, tem-se*
$P\left[A \cup B \cup C\right] = 0,9 \Leftrightarrow P\left[A\right] + P\left[B\right] + P\left[C\right] = 0,9 \Leftrightarrow p = 0,36.$

Exercício 10.

(a) ${}^{12}C_2 \times {}^{17}C_2 = 8976.$

(b) (b_1) *Considerando o acontecimento* A *- "as raparigas ficam juntas", tem-se* $P\left[A\right] = \frac{4 \times P_3 \times P_3}{P_6} = \frac{1}{5}.$

(b_2) *Considerando o acontecimento* B *- "o vereador fica entre os dois rapazes", tem-se* $P\left[B\right] = \frac{4 \times P_2 \times P_3}{P_6} = \frac{1}{15}.$

Exercício 11.
Considerando o acontecimento D *- "o sistema global está em funcionamento" e assumindo que o comportamento das componentes é independente, tem-se* $P\left[D\right] = P\left[A \cap (A \cup B \cup C)\right] = P\left[A\right] \times \left(1 - P\left[\overline{A \cup B \cup C}\right]\right) = P\left[A\right] \times \times \left(1 - P\left[\overline{A}\right] \times P\left[\overline{B}\right] \times P\left[\overline{C}\right]\right) = 0,9999.$

Exercício 12.

(a) *Considerando os acontecimentos:*

- A - *"acertar no alvo";*
- B - *"em cinco tiros acertar três vezes";*

e assumindo que os resultados dos disparos são independentes tiro a tiro, tem-se $P\left[B\right] = {}^{5}C_3 \left(P\left[A\right]\right)^3 \times \left(P\left[\overline{A}\right]\right)^2 = 0,3456$.

(b) *Considerando o acontecimento* C *- "acertar pela terceira vez ao quinto tiro", tem-se* $P\left[C\right] = {}^{4}C_2 \left(P\left[A\right]\right)^3 \times \left(P\left[\overline{A}\right]\right)^2 = 0,20736$.

(c) *Considerando o acontecimento* D *- "serem necessários exactamente dez tiros para acertar um", tem-se* $P\left[D\right] = \left(P\left[\overline{A}\right]\right)^9 \times P\left[A\right] = 0,00016$.

(d) *Considerando o acontecimento* E *- "necessitar de pelo menos quatro tiros para acertar dois" e o seu acontecimento contrário,* $\overline{E}$ *- "necessitar de dois ou três tiros para acertar dois", tem-se* $P\left[E\right] = 1 - P\left[\overline{E}\right] =$ $= 1 - \left(P\left[A\right] \times P\left[A\right] + {}^{2}C_2 \left(P\left[A\right]\right)^2 P\left[\overline{A}\right]\right) = 0,208$.

Exercício 13.

(a) *Considerando os acontecimentos:*

- A - *"sair do anfiteatro A";*
- B - *"sair do anfiteatro B";*
- F - *"estudante ser do sexo feminino";*

e sabendo que $P\left[B\right] = 3P\left[A\right]$ *e* $P\left[A\right] + P\left[B\right] = 1$ *tem-se* $P\left[A\right] = \frac{1}{4}$ *e* $P\left[B\right] = \frac{3}{4}$. *Assim, pelo teorema da probabilidade total tem-se* $P\left[F\right] =$ $= P\left[A\right] \times P\left[F|A\right] + P\left[B\right] \times P\left[F|B\right] = 0,625$.

(b) *Pelo teorema de Bayes tem-se,* $P\left[A|\overline{F}\right] = \frac{P\left[A\cap\overline{F}\right]}{P\left[\overline{F}\right]} = \frac{P[A]\times P\left[\overline{F}|A\right]}{1-P[F]} =$ $= 0,2$.

Exercício 14.

(a) *Considerando os acontecimentos:*

- A - *"a pessoa A cura-se";*
- B - *"a pessoa B cura-se";*
- C - *"a pessoa C cura-se";*

e assumindo que os acontecimentos A, B *e* C *são mutuamente independentes tem-se,* $P\left[\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right] = P\left[\overline{A}\right] \times P\left[\overline{B}\right] \times P\left[\overline{C}\right] = 0,57375$.

(b) $P\left[A \cap B \cap \overline{C}\right] + P\left[A \cap \overline{B} \cap C\right] \times P\left[\overline{A} \cap B \cap C\right] + P\left[A \cap B \cap C\right] =$ $= P\left[A\right] \times P\left[B\right] \times P\left[\overline{C}\right] + P\left[A\right] \times P\left[\overline{B}\right] \times P\left[C\right] + P\left[\overline{A}\right] \times P\left[B\right] \times$ $\times P\left[C\right] + P\left[A\right] \times P\left[B\right] \times P\left[C\right] = 0,07$.

Exercício 15.

(a) *Como* $P\left[A \cup C\right] = P\left[A\right] + P\left[C\right] - P\left[A \cap C\right] \Leftrightarrow P\left[A \cap C\right] = 0,15$ *e* $P\left[A \cap C\right] = P\left[A \cap \overline{B} \cap C\right] + P\left[A \cap B \cap C\right] \Leftrightarrow P\left[A \cap \overline{B} \cap C\right] = 0,1$ *tem-se* $P\left[C\right] = P\left[\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right] + P\left[\overline{A} \cap B \cap C\right] + P\left[A \cap B \cap C\right] +$ $+ P\left[A \cap \overline{B} \cap C\right] \Leftrightarrow P\left[\overline{A} \cap B \cap C\right] = 0,1$.

(b) $P\left[B \cap C\right] = P\left[A \cap B \cap C\right] + P\left[\overline{A} \cap B \cap C\right] = 0,15$.

(c) $P\left[A\right] = P\left[A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right] + P\left[A \cap \overline{B} \cap C\right] + P\left[A \cap B\right] \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P\left[A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right] = 0,15$.

(d) $P\left[A \cap B\right] = P\left[A \cap B \cap \overline{C}\right] + P\left[A \cap B \cap C\right] \Leftrightarrow P\left[A \cap B \cap \overline{C}\right] =$ $= 0,15$.

(e) *Como* $P\left[A \cup B \cup C\right] = P\left[A\right] + P\left[B\right] + P\left[C\right] - P\left[A \cap B\right] - P\left[A \cap C\right] +$ $- P\left[B \cap C\right] + P\left[A \cap B \cap C\right] \Leftrightarrow 1 - P\left[\overline{A \cup B \cup C}\right] = P\left[B\right] + 0,5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow P\left[B\right] = 0,5 - P\left[\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right] \Leftrightarrow P\left[B\right] = 0,48$ *tem-se* $P\left[B\right] =$ $= P\left[\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right] + P\left[A \cap B\right] + P\left[\overline{A} \cap B \cap C\right] \Leftrightarrow P\left[\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right] =$ $= 0,18$.

(f) $P\left[\overline{A} \cap B \cap C\right] + P\left[A \cap \overline{B} \cap C\right] + P\left[A \cap B \cap \overline{C}\right] = 0,35$.

Exercício 16. *Considerando o acontecimento* A *- "acertar no número do telemóvel", tem-se* $P\left[A\right] = \frac{1}{{}^{5}C_1 \times {}^{4}C_2 \times {}^{7}A'_2} = \frac{1}{{}^{5}A_1 \times {}^{4}C_2 \times {}^{7}A'_2} = 0,00068$.

Exercício 17.

(a) *Considerando os acontecimentos:*

- A - *"o trabalhador tem formação mínima";*
- B - *"o trabalhador tem formação média";*
- C - *"o trabalhador tem formação superior";*
- D - *"o trabalhador recebe um salário superior a 500€";*

tem-se $P[A] + P[B] + P[C] = 1 \Leftrightarrow P[B] + P[C] = 0,9$ *e pelo teorema da probabilidade total tem-se* $P[D] = P[A \cap D] + P[B \cap D] + P[C \cap D] \Leftrightarrow 0,4P[B] + 0,7P[C] = 0,55$. *Resolvendo um sistema com as equações anteriores tem-se* $P[B] = 0,2667$ *e* $P[C] = 0,6333$.

(b) *Pelo teorema de Bayes tem-se* $P[C|D] = \frac{P[C\cap D]}{P[D]} = 0,806$.

Exercício 18.

(a) *Considerando os acontecimentos:*

- A - *"o indivíduo ser diabético";*
- B - *"o teste dá resultado positivo";*

tem-se, pelo teorema da probabilidade total que, $P[B] = P[A \cap B] + P\left[\overline{A} \cap B\right] = 0,067$.

(b) *Pelo teorema de Bayes tem-se* $P\left[A|\overline{B}\right] = \frac{P\left[A\cap\overline{B}\right]}{P\left[\overline{B}\right]} = \frac{P[A]\times P\left[\overline{B}|A\right]}{1-P[B]} = 0,0021$.

(c) $P\left[\overline{B} \cap \overline{A}\right] = P\left[\overline{A} \cap \overline{B}\right] = 0,931$.

(d) *Considerando os acontecimentos:*

- C - *"dois indivíduos em cinco são diabéticos";*
- D - *"o primeiro e o último é que são diabéticos";*

tem-se $P[C] = {}^5C_2 \times (P[A])^2 \times \left(P\left[\overline{A}\right]\right)^3 = 0,0038$ *e* $P[D] = (P[A])^2 \times \left(P\left[\overline{A}\right]\right)^3 = 0,00038$, *pelo que* $P[D|C] = \frac{P[C\cap D]}{P[C]} = \frac{P[D]}{P[C]} = 0,1$.

Exercício 19.
Considerando os acontecimentos R_i - *"o relé* i *está fechado", com* $i = 1, 2, 3, 4, 5$, *tem-se* $P[(R_1 \cap R_4) \cup (R_1 \cap R_3 \cap R_5) \cup (R_2 \cap R_5) \cup (R_2 \cap R_3 \cap R_4)] = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$.

Instituto Superior de Engenharia de Lisboa
Departamento de Matemática
Raciocínio Probabilístico e Simulação

Exercício 20.

(a) *Considerando os acontecimentos:*

- A - *"a pesagem foi efectuada na balança A";*
- B - *"a pesagem foi efectuada na balança B";*
- C - *"a pesagem foi efectuada na balança C";*
- D - *"o resultado da pesagem está errado";*

tem-se, pelo teorema da probabilidade total que, $P\left[\overline{D}\right] = P\left[A \cap \overline{D}\right] + P\left[B \cap \overline{D}\right] + P\left[C \cap \overline{D}\right] = 0,99961$.

(b) *Pelo teorema de Bayes tem-se* $P[A|D] = \frac{P[A\cap D]}{P[D]} = \frac{P[A]\times P[D|A]}{1-P\left[\overline{D}\right]} = 0,25641$.

(c) *Considerando o acontecimento* E - *"pelo menos três pesagens não terem dado um resultado errado", tem-se* $P[E] = {}^4C_3 \times \left(P\left[\overline{D}\right]\right)^3 \times P[D] + \left(P\left[\overline{D}\right]\right)^4 = 0,9999991$.

Exercício 21.

(a) *Considerando os acontecimentos:*

- A - *"a empresa possuir departamento de investigação";*
- B - *"a empresa realizar lucros"*

tem-se $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0,7$.

(b) $P\left[\overline{B}\right] = 1 - P[B] = 0,35$.

(c) $P\left[\overline{A} \cap \overline{B}\right] = P\left[\overline{A \cup B}\right] = 1 - P[A \cup B] = 0,3$.

(d) $P\left[\overline{A} \cap B\right] = P[B] - P[A \cap B] = 0,4$.

(e) $P[A|B] = \frac{P[A\cap B]}{P[B]} = 0,3846$.