SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS

Arnaldo Abrantes

Paulo Vieira

2019

TEORIA DE SISTEMAS DINÂMICOS

- O ramo da matemática que estuda como os sistemas evoluem ao longo do tempo
  - Cálculo
  - Equações diferenciais
  - Mapas iterados
  - Topologia algébrica

- A dinâmica de um sistema: a forma como o sistema evolui

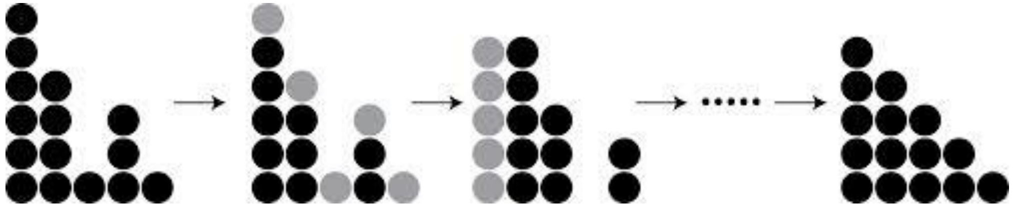
- A Teoria de Sistemas Dinâmicos dá-nos um vocabulário e um conjunto de ferramentas para descrever as dinâmicas dos sistemas

EXEMPLOS DE SISTEMAS DINÂMICOS

- A atmosfera (o tempo, alterações climáticas)
- A economia (o mercado de acções)
- O corpo humano (coração, cérebro, pulmões)
- Ecologia (populações de animais e plantas)
- Tráfego rodoviário
- Reacções químicas
- O alastramento de epidemias
- Evolução de ideias na sociedade
- A Internet

SOLITÁRIO BÚLGARO

- Um jogo que se inicia com N objectos iguais distribuídos por n montes
- Em cada jogada, de cada um destes montes é retirado um elemento, formando-se uma nova pilha com os objectos seleccionados.



http://mancala.wikia.com/wiki/Bulgarian_Solitaire

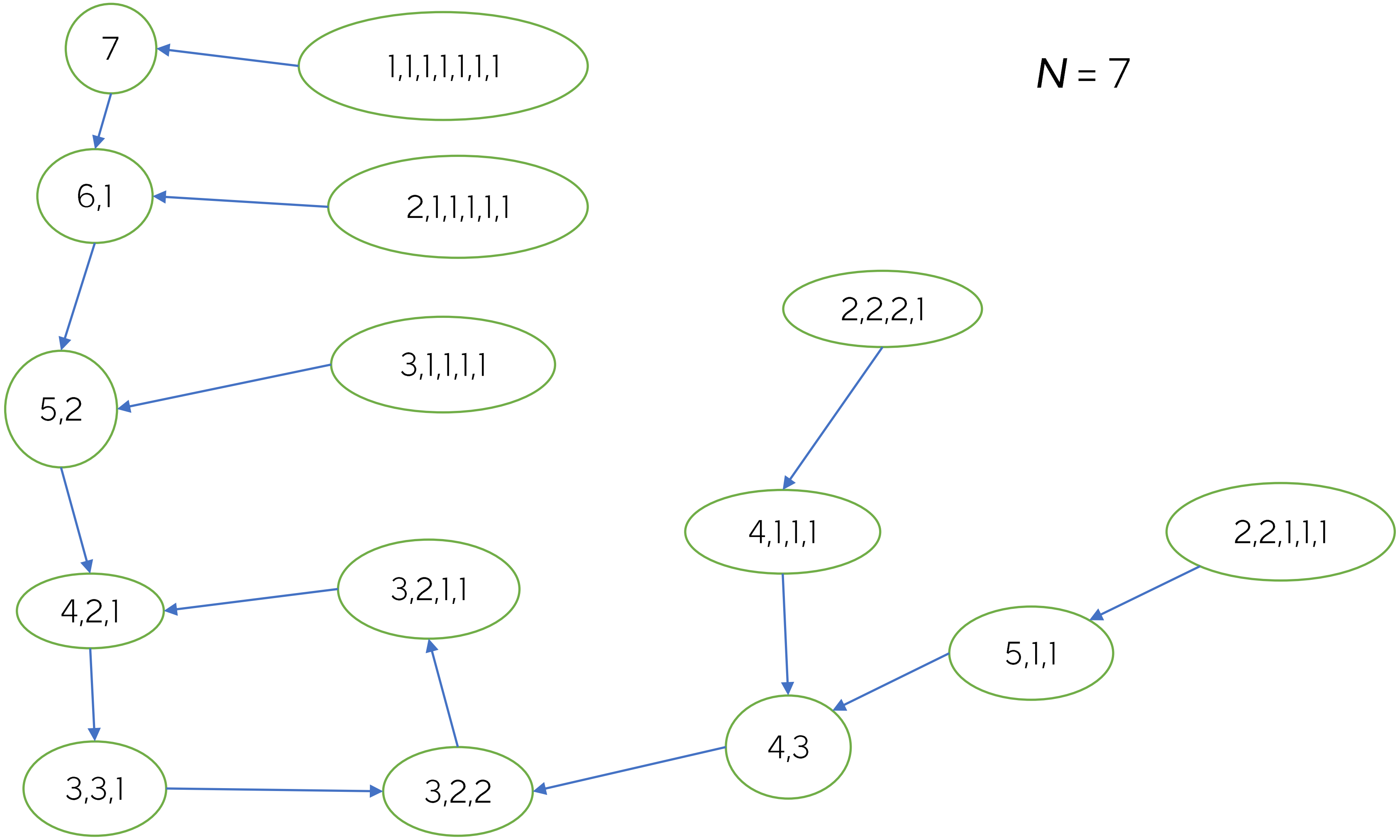
SOLITÁRIO BÚLGARO (CONT.)

- Trata-se portanto de uma forma de obter uma partição do natural N a partir de outra.

- Uma vez que o número de partições de um qualquer natural é finito, o jogo conduz necessariamente a um ciclo.

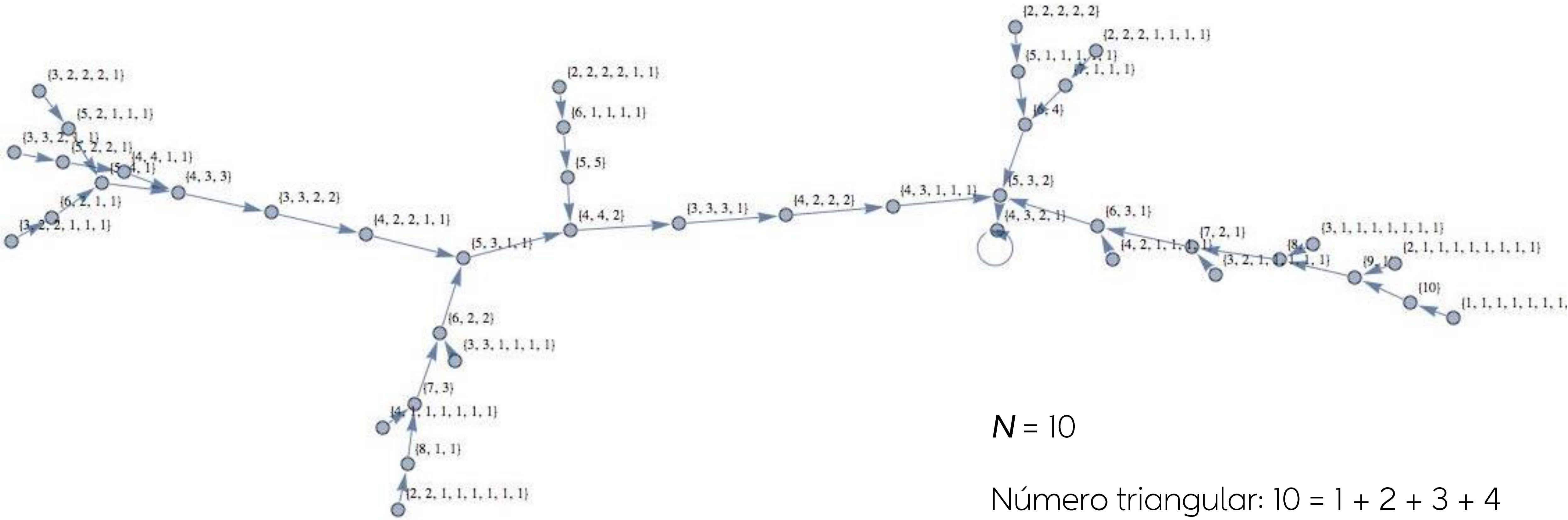
http://en.wikipedia.org/wiki/Partition_(number_theory)

EXEMPLO: CICLO LIMITE



$N = 7$

EXEMPLO: PONTO FIXO (CICLO DE PERÍODO 1)



N = 10

Número triangular: 10 = 1 + 2 + 3 + 4

TESTE DE CRENÇAS

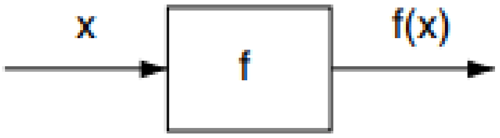
- Considera possível um sistema determinístico produzir comportamento aleatório e imprevisível?

- Considera possível que sistemas simples produzam comportamento complexo?

Go to **www.menti.com** and use the code **57 29 06**

FUNÇÕES

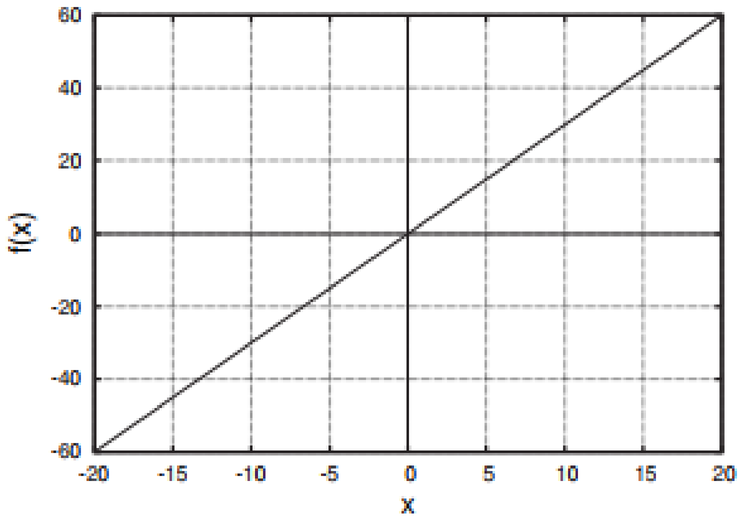
- Acções



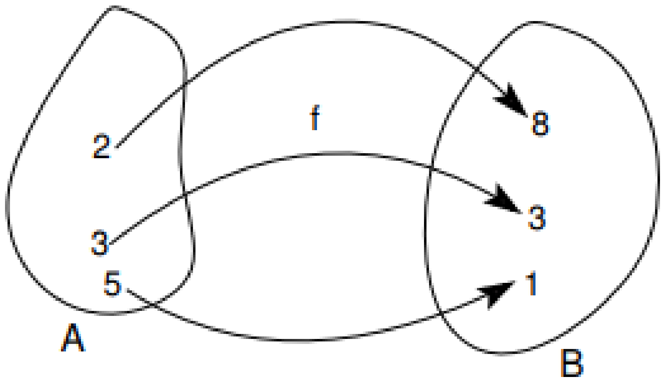
- Fórmulas

$$f(x) = 3x$$

- Gráficos



- Mapeamentos



EXERCÍCIOS

(1.1) Let g be the doubling function.

(a) Calculate:
   (i) $g(3)$
   (ii) $g(0)$
   (iii) $g(17)$
   (iv) $g(0.4)$
   (v) $g(-3)$

(b) Sketch the graph of g.

(c) Determine the formula for g.

(1.2) Let h be a function that takes a number, quadruples it, and then subtracts 3.

(a) Calculate:
   (i) $h(5)$
   (ii) $h(0)$
   (iii) $h(0.5)$
   (iv) $h(-1)$

(b) Determine the formula for h.

(1.5) Let $f(x) = 2x$.

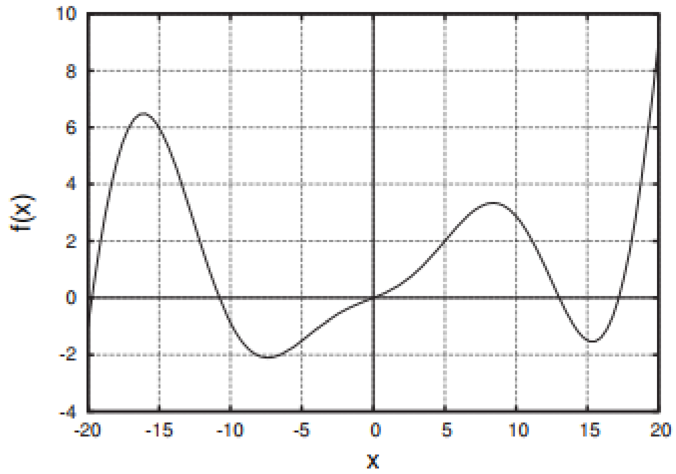
(a) Evaluate the following
   (i) $f(0)$
   (ii) $f(1)$
   (iii) $f(2)$
   (iv) $f(2+1)$
   (v) $f(f(0))$
   (vi) $f(f(1))$

(b) Does $f(2+1) = f(2) + f(1)$? Should it? Compare with Exercise 1.4b. What is the difference between the two situations?

(1.7) Consider the function shown in Fig. 1.7.

(a) If $f(x) = 7$, what is x?

(b) If $f(x) = 2$, what is x?



EXERCÍCIOS

(1.11) ⋆ Figure 1.9 shows a possible relationship between this year's and next year's population of rabbits on a small coastal island. The reason that the rabbits may be considered to behave this way is as follows. Let us imagine that the rabbits do not have any predators on this island, but that there is a limited amount of food, since the island is small. Suppose there are a lot of rabbits on the island one year, say 100. Then there will not be enough food on the island for all the rabbits, and some will starve. So there will be fewer rabbits in the following year. This is indicated on the graph in Fig. 1.9; if one year there are 100 rabbits, the next year there will be approximately 63 rabbits. On the other hand, suppose there are few rabbits on the island, say 10. Then there will be plenty of food to go around, the well-fed rabbits will reproduce, and there will be more rabbits next year—around 50.

(a) In 1999 there are 70 rabbits on the island. How many rabbits are there in 2000?

(b) In 2003 there are 35 rabbits on the island. How many rabbits are there in 2004?

(c) In 1985 three are 20 rabbits on the island. How many rabbits are there in 1987. Explain your reasoning.

(d) In 1992 there are 80 rabbits on the island. How many rabbits were there in 1991?

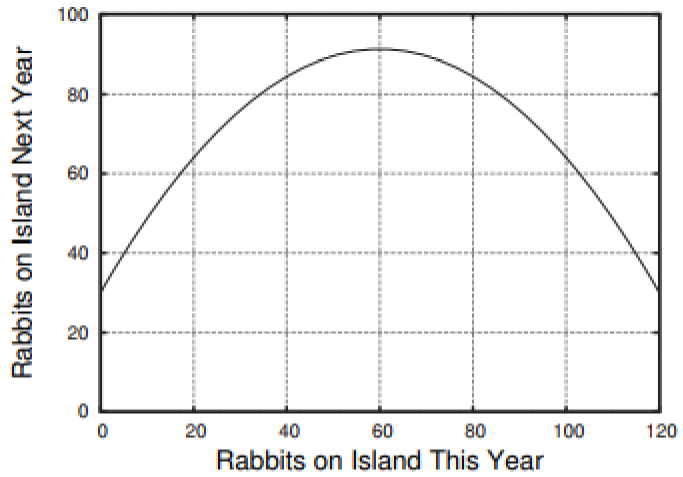
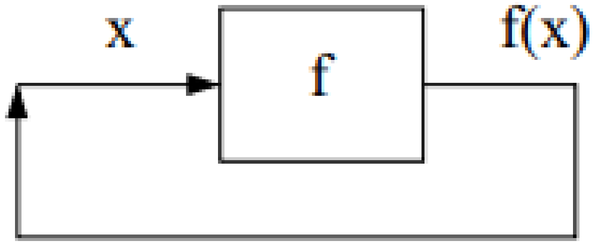


Fig. 1.9 The rabbit population on an island next year as a function of the number of rabbits on the island this year. See Exercise 1.11.

ITERAR FUNÇÕES

- Efectuar a mesma operação utilizando como entrada a saída do cálculo anterior
  - E.g., numa calculadora a operação 2+= dá o valor 4. Porquê?



- Muitos sistemas do mundo real parecem reger-se pela aplicação de uma operação de forma iterativa
  - E.g., populações de coelhos (ex. 1.11)

ITERAR FUNÇÕES - VOCABULÁRIO

- Condição inicial (seed) –x0
- Órbita ou itinerário – conjunto de números produzidos por iteração de determinada função
- Tempo, t, que pode ser discreto ou contínuo
- Espaço de estados, S, cujos elementos representam os estados possíveis do sistema, sendo que cada estado é representado por um vector de dimensão N
  - Caso escalar (N=1)
  - Caso multidimensional
- Uma regra de evolução, F, que permite determinar o estado no instante t a partir do conhecimento do estado no instante anterior (ou anteriores) e da entrada actual. A regra pode ser linear ou não-linear

EXERCÍCIOS

(2.1) Let g be the doubling function. Determine the first five numbers in the orbit for the following seeds:

(a) $x_0 = -2$

(b) $x_0 = -0.5$

(c) $x_0 = 0$

(d) $x_0 = 0.5$

(e) $x_0 = 2$

(2.2) Let $f(x) = \sqrt{x}$. Determine the first five numbers in the orbit for the following seeds:

(a) $x_0 = 0$

(b) $x_0 = \frac{1}{2}$

(c) $x_0 = 1$

(d) $x_0 = 2$

(e) $x_0 = 4$

(2.8) Let $h(x) = 3x - 1$. Determine the numerical value of:

(a) $h^{(2)}(1)$

(b) $h^{(2)}(3)$

(c) $h^{(4)}(\frac{2}{3})$

(d) $h^{(3)}(2)$

(2.9) Let $g(x) = x^2 + 1$. Determine the numerical value of:

(a) $g^{(2)}(1)$

(b) $g^{(2)}(3)$

(c) $g^{(4)}(0)$

(d) $g^{(3)}(2)$

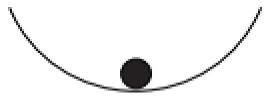
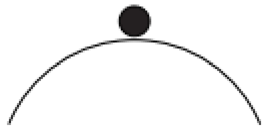
DINÂMICA QUALITATIVA

$$f(x) = x^2$$

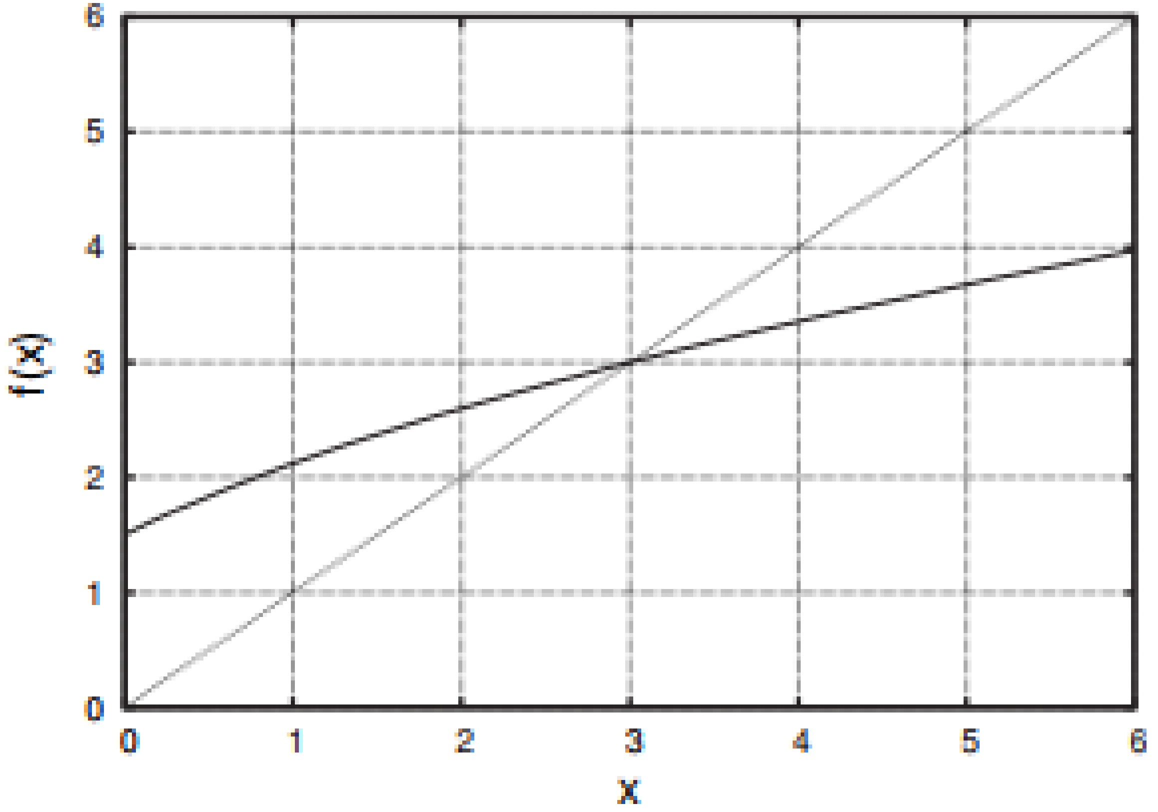
$$\frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{4} \longrightarrow \frac{1}{16} \longrightarrow \frac{1}{256} \longrightarrow \frac{1}{65536} \longrightarrow \cdots .$$

Linha de fase

CONVERGÊNCIA

- Ponto fixo $F(c) = c$
  - Estável $|F'(c)| < 1$ 
  - Instável $|F'(c)| > 1$ 
- Ciclo limite
  - Período 2 $F(F(c)) = c$ $\left(c, F(c)\right)$
  - Período k $F^k(c) = c$ $\left(c, F(c), F^2(c), \ldots, F^{k-1}(c)\right)$

DETERMINAR GRAFICAMENTE



EXERCÍCIOS

(3.1) Consider the square root function, $f(x) = \sqrt{x}$.

(a) Determine the phase line for $f(x)$ for non-negative x. Explain your reasoning carefully.

(b) Determine all fixed points, if any, of $f(x)$.

(c) What is the stability of these fixed points?

(3.4) Find the fixed point(s), if any, of $g(x) = \frac{1}{2}x + 4$.

(3.5) Find the fixed point(s), if any, of $h(x) = x^2 - 1$.

(3.6) Find the fixed point(s), if any, of $f(x) = x^2 + 1$.

(3.7) Find the fixed point(s), if any, of $g(x) = x - 3$.

(3.8) Find the fixed point(s), if any, of $h(x) = x^3$.

(3.11) Determine all fixed points for the function shown in Fig. 3.7.

(3.12) Determine all fixed points for the function shown in Fig. 3.8.

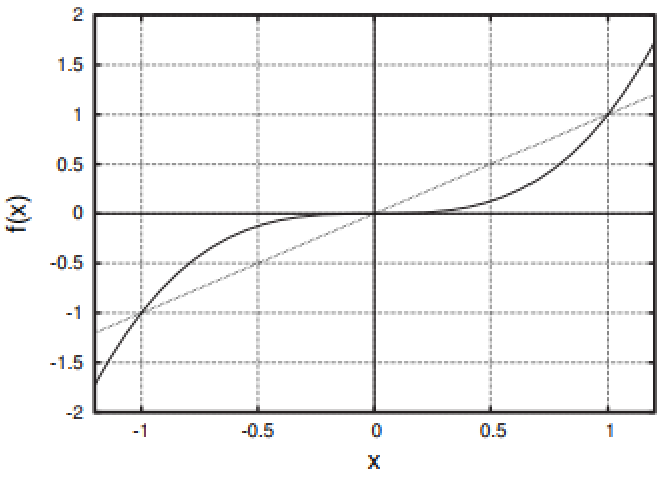


Fig. 3.7 The function for Exercise 3.11. The line $y = x$ is the thin, straight line.

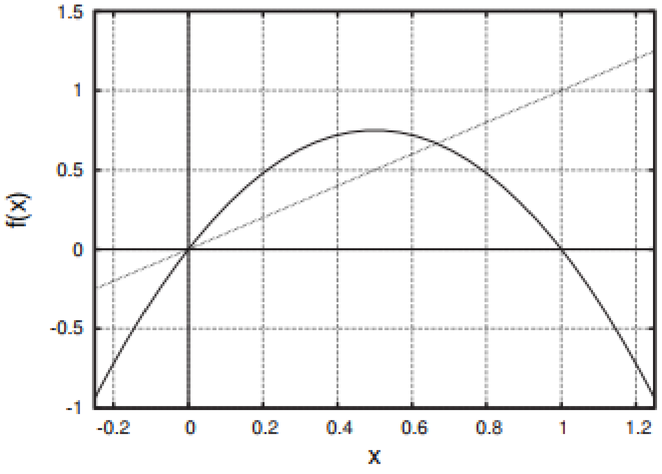
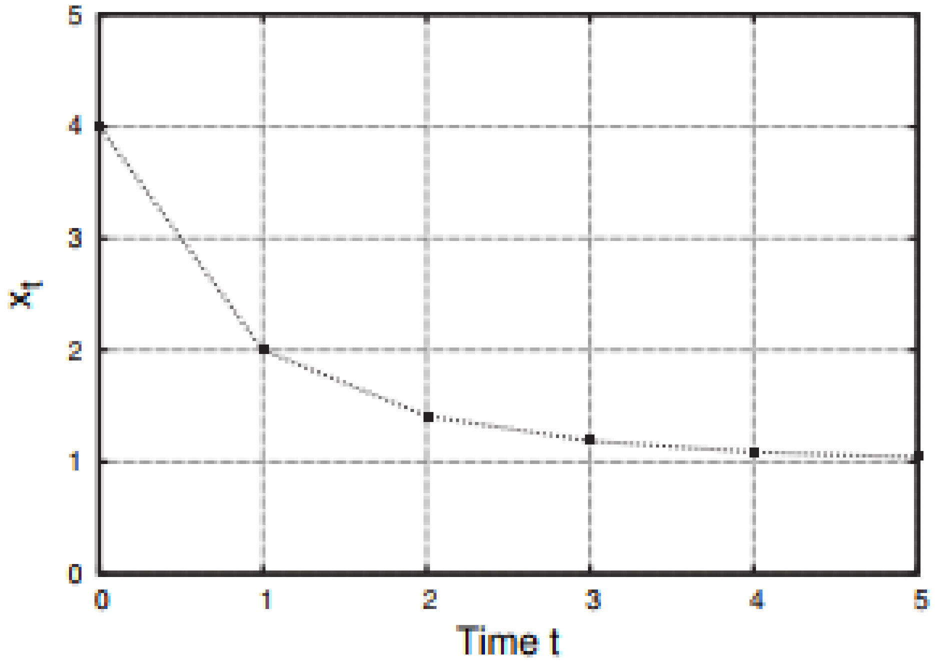


Fig. 3.8 The function for Exercise 3.12. The line $y = x$ is the thin, straight line.

GRÁFICOS TEMPORAIS

$$4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1.4142 \longrightarrow 1.1892 \longrightarrow 1.0905 \longrightarrow \cdots \quad .$$

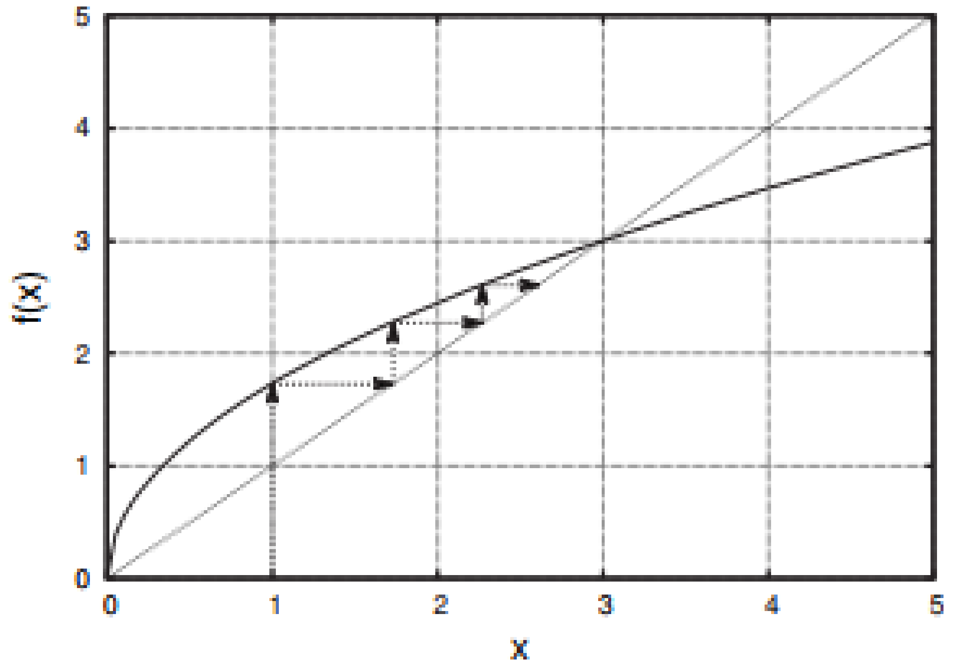
$$f(x) = \sqrt{x}$$



ITERAR GRAFICAMENTE - COBWEB

Método geral para determinar a órbita de uma condição inicial x_0

1. Iniciar com *x0* no eixo *xx*
2. Mover verticalmente o lápis até encontrar a função *f(x)*
3. Mover horizontalmente o lápis até encontrar a linha *y = x*
4. Mover verticalmente até encontrar a função *f(x)*
5. Repetir os passos 3-4



EXERCÍCIOS

(5.2) Figure 5.10 shows a plot of the function $f(x) = 1.5x(1-x)$.

(a) Use the plot to determine approximate values for all fixed points of $f(x)$.

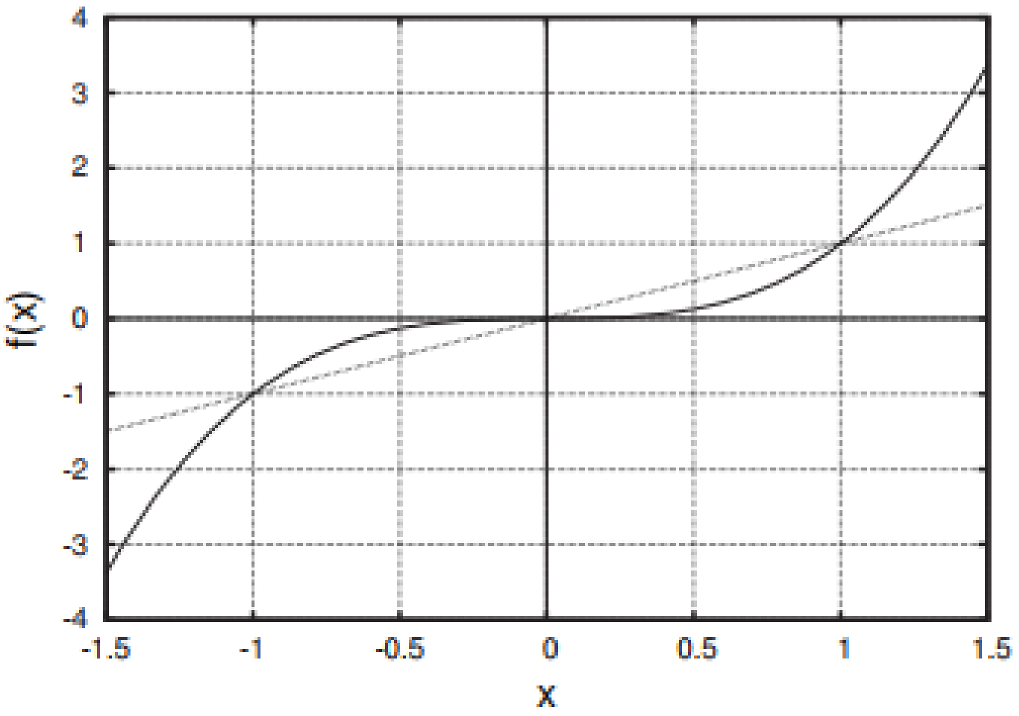
(b) Graphically iterate the seed $x_0 = 0.1$.

(c) Graphically iterate the seed $x_0 = 0.8$.

(d) What do you conclude about the stability of the fixed point near $x = 0.35$?

(e) What is the stability of the fixed point at $x = 0$?

(f) Use algebra to find the fixed points exactly.



MODELOS DE POPULAÇÃO

- Como varia a população mundial?
  - Usa-se uma regra de três simples como modelo?
  - Será que o modelo está bem calibrado para 1993?
  - Quantas pessoas existirão em 2020?

	1950	1960	1993	2020
População	2560	3040	?	?

MODELOS DE POPULAÇÃO

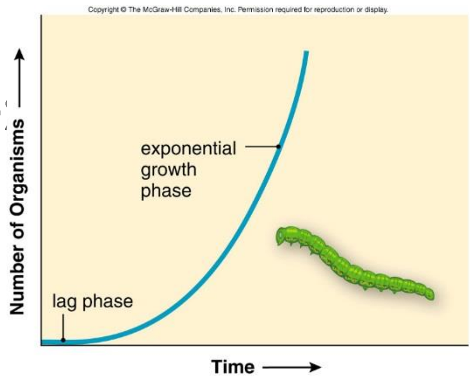
- Modelo Maltusiano (crescimento sem restriçõe
  - Equação diferencial $$\frac{dP}{dt} = rP$$
  - Solução analítica (crescimento exponencial)

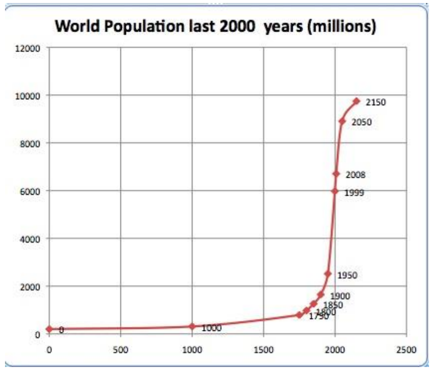
$$P(t) = P(0)e^{rt}$$

Modelo linear

  - Aproximação de Euler

$$P(t) = P(t - \Delta t) + r\Delta t P(t - \Delta t)$$





MODELOS DE POPULAÇÃO

	1950	1960	1993	2020
População	2560	3040	?	?

- Solução:
  - Determinar o r usando P(10)
    - r = 0,017185
  - Determinar P(43)
    - Número real de pessoas em 1993 é 5522 milhões.
    - O modelo permitiu obter um valor aceitável?
  - Determinar P(70)

EXERCÍCIO

- Considere a equação logística $f(x) = rx(1 - x)$ com $r = 2.5$
  - Determine as três primeiras iterações considerando $x_0 = 0.8$
  - Utilizando o programa em http://chaos.coa.edu/time_series.html para verificar os resultados obtidos

PREPARAÇÃO PARA A PRÓXIMA SEMANA...

- Hoje concluímos a Parte I do livro “Chaos and Fractals: An Elementary Introduction”
  - Reler e identificar dúvidas sobre os temas
- Ler a Parte II do livro “Chaos and Fractals: An Elementary Introduction”
- Iniciaremos o desenvolvimento utilizando Java e Eclipse/Processing
  - Verificar se o ambiente de desenvolvimento está convenientemente preparado