Aula 6
21/10/2020

SISTEMAS

Objetivo: compreender o mundo em que vivemos
?
Realidade

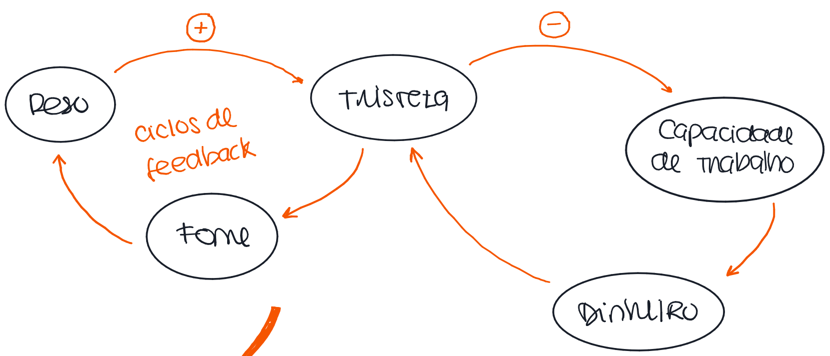
- objetiva
  - coisas objetivas
    - rios
    - montanhas
    - ouro
    - galinhas
    - chuva
    - ...
  - estados internos
    - tristeza
    - medo
    - fome
    - desejo
    - ...
- inter-subjetiva (está mente das pessoas, partilhada)
  - coisas inter-subjetivas → ideia criada por pessoas
    - Portugal
    - Empresa
    - Dinheiro

Leis da física, da natureza, da biologia, da psicologia, ...

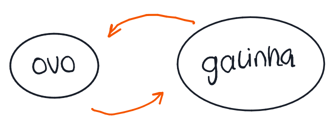
Leis sociais - códigos de conduta, direitos do homem, código da estrada, ...

Ações que homem pode tomar para alterar a realidade:
↳ comer, poluir, vender, comprar, argumentar

Compreender → estabelecer relações entre as coisas, identificando variáveis, por exemplo:
?



→ modelo: Relação entre variáveis, narrativa, explicação

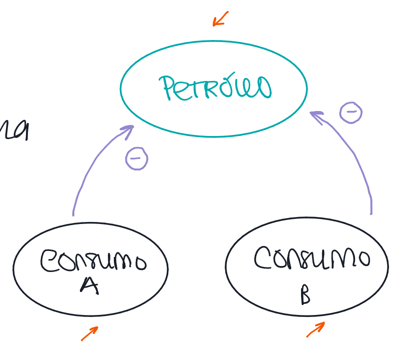


causa-efeito?

(MSSN)
Modelo matemático / computacional → Simulação - capacidade de comprimir ou expandir o tempo

- Determinísticos
- Estocásticos (probabilidade)
- De tempo contínuo
- De tempo discreto
- Baseados em eventos
- Baseados em agentes
- Baseados em stocks e flows
- Etc...

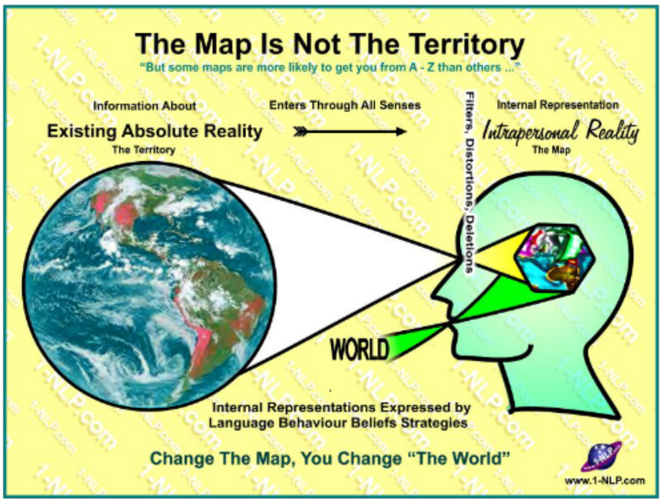
Realidade
└ coisas - stocks
└ mecanismos para alterar coisas
  └ flows



Exemplo Sheerless

Modelo vs. Realidade
(descrição da realidade)
Ex.: Mapa ≠ Território

- Os modelos explicam a realidade, mas fazem parte integrante do nosso sistema perceptivo



- Quando observamos a realidade, usamos os nossos sentidos, mas também os nossos modelos mentais (ex.: visão política da realidade de duas pessoas diferentes)

Conclusão:

- Modelos → permite acesso à realidade
  → permite responder a perguntas (why? what if?)
  - como o mundo funciona?
  - o que acontece se eu alterar a variável x?
  → são simplificações da realidade
  (todos os modelos estão "errados", mas uns são mais úteis)

mas assim, que características devem ser preservadas? o que é essencial e o que é supérfluo? qual o nível de detalhe?

A arte de construir modelos

2 ingredientes

1) QUESTÃO

- Método Científico:

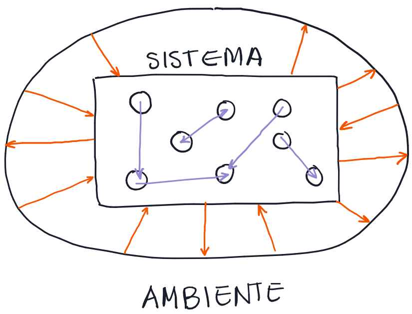
$\boxed{\text{Questão}}$ → Ter uma pergunta obriga-nos a focar
Hipótese (Modelo)
Validação

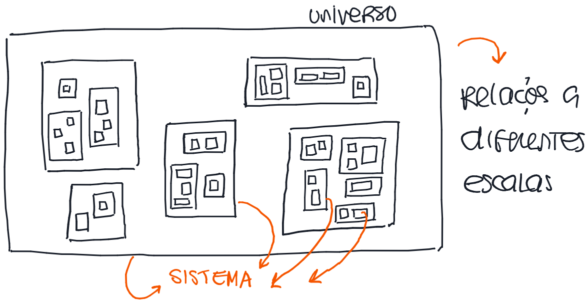
Focagem
o essencial
o não essencial

- O maior detalhe não define um melhor modelo
  ↳ o detalhe necessário depende da questão inicial.

2) VISÃO SISTÉMICA - forma de olhar para o mundo

- A base é a noção de sistema
- Sistema:
  - é constituido por elementos – as partes, que interagem entre si de uma determinada forma. O próprio sistema é uma parte de um sistema maior. Cada parte é ela própria um sistema.
    - ↳ a parte é um todo e o todo é uma parte
    - ↳ o todo é maior do que a soma das suas partes - mesmo estudando e conhecendo todas as suas partes, posso não compreendê-lo*
  - está inserido num ambiente, recebendo influência (input) desse ambiente. O sistema também afeta o ambiente (gera output)
  - Tem um propósito implícito ou explícito





- Pode ser caracterizada por 4 atributos, modelo DSRP
  - D - fazer distinções (Ex.: distinguir partes de um sistema)
  - S - ter a visão de Sistema (Todo constituído por partes, sendo também parte de um sistema)
  - R - estabelecer relações (partes relacionam-se a diferentes níveis - ex.: ciclos feedback)
  - P - desenvolver diferentes perspetivas (a mesma realidade tem diferentes modelos, consoante os diferentes problemas a resolver - questão)

Sistemas Complexos

Ciência da complexidade

- Interações de baixo nível, localmente, dão origem, de forma espontânea, a estruturas/comportamentos numa escala superior, globalmente
  - fenómenos e padrões emergentes, de auto organização
- *É difícil/impossível prever ou compreender essas estruturas e comportamentos emergentes a partir do conhecimento dos elementos que constituem o sistema.
  Ex.: não se consegue compreender os fenómenos da cognição ou da consciência no cérebro, a partir do estudo dos neurónios
  - ↳ o todo é maior do que a soma das suas partes (e dos seus efeitos)
- Se remover uma parte posso alterar qualitativamente o sistema, o todo

Referências
- Melanie Mitchell, "Complexity: A Guided Tour"
- Complexity Explained

Aula 8
28/10/2020

A.C. e DLA

Autómatos Celulares

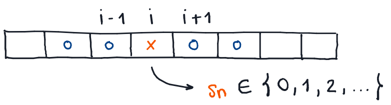
- constituído por células: □, cada célula tem uma posição fixa no espaço e tem estado $s \in \{0,1,2,3,\dots\}$
- cada célula interage com um conjunto de células vizinhas - vizinhança local
- cada célula evolui de acordo com uma certa Regra, que tem conta os estados das células adjacentes
- Se todas as células estiverem a aplicar a mesma Regra, diz-se que é um autómato celular Homogéneo

- É um modelo discreto
  - no espaço,
  - no estado,
  - no tempo: s_n, em que $n \in \{0,1,2,3,\dots\}$, ou seja evolui ao longo do tempo.

- Esta evolução é síncrona, todas as células atualizam o seu estado simultaneamente, aplicando a mesma Regra

Autómato celular 1D (unidimensional)

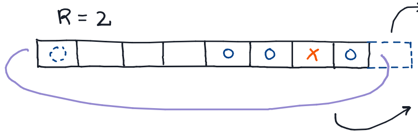
- as células estão dispostas numa linha



R = 2 (Raio)

$2R+1 = 5$ células na vizinhança local

- Definir condições fronteira. Exemplo:

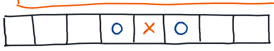


opção 1: célula auxiliar fictícia de s constante

opção 2: topologia em anel, primeira e última célula são vizinhas

1) 1D, binário, R=1

$\boxed{\text{A.C. Elementar}}$



$s \in \{0,1\}$

TABELA DE REGRA

S_{i-1}	$S_i^{(n)}$	S_{i+1}	$S_i^{(n+1)}$
0	0	0	?
0	0	1	?
0	1	0	?
0	1	1	?
1	0	0	?
1	0	1	?
1	1	0	?
1	1	1	?

$s \in \{0,1\}$

$2 \times 2 \times 2 = 2^3$ configurações (3: nº células; 2: estados possíveis)

$\#T_R$ (dimensão da T_R) $= 2^3 = 8$

- Definir a regra é definir os oito "?"
- Posso ter 2^8 Regras

$\#N_R = 2^8 = 256$ (2: estados; 8: $\#T_R$)

↳ Temos 256 A.C. elementares

Regra:

0	
0	
1	4
0	
1	16
1	32
0	Regra 52 de 256 Regras
0	$N_R = \{0,\dots,255\}$

2) 1D, ternário, $R=2$

$s \in \{0, 1, 2\}$

	o	o	x	o	o

$\# T_R = 3^5 = 243$

$\# N_R = 3^{243}$

A.C. Totalístico → a célula para tomar decisão, apenas precisa de saber a soma dos estados das células vizinhas

TABELA DE REGRAS

(n) Σ_i	$(n+1)$ S_i
0	?
1	?
2	?
...	
10	?
11	?

somatório do estado de todas as células centrado em i

$\Sigma_{min} = 0$

$\Sigma_{max} = 2 \times 5 = 10$

estado máx.

nº células

$\# T_R = 11$

$\# N_R = 3^{11}$

	o	o	x	o	o

A.C. Totalístico externo → a célula para tomar a decisão precisa de:

1) do seu estado individualizado
2) da soma externa dos estados dos vizinhos, não incluindo ela própria

$\Sigma_{max} = 2 \times 4 = 8$

$\Sigma_{ext} \in \{0, \dots, 8\} \rightarrow 9$

$S_i \in \{0, 1, 2\} \rightarrow 3$

$\# T_R = 9 \times 3 = 27$

$\# N_R = 3^{27}$

(n) Σ_{ext}	S_i	$(n+1)$ S_i
0 ... 8	0 ... 2	
9 x	3	

Autómato celular 1D

- Caso Geral: estado da célula depende do estado individual dos vizinhos
- Totalístico: estado da célula depende da soma dos estados vizinhos
- Totalístico externo: estado da célula depende do seu próprio estado individual, e da soma dos estados externos a ela

↓

Aplicam sempre a mesma regra, uma regra determinística. Ou seja, não existe incerteza nem mecanismos probabilísticos

- Probabilísticos: a regra é expressa de forma probabilística, ou seja, com os mesmos inputs não se tem sempre o mesmo output

EXEMPLOS

Elementar:

n=0	0	0	0	1	0	0	0
n=1	0	0	1	1	1	0	0
n=2	0	1	1	0	0	1	0
n=3	1	1	0	1	1	1	1
n=4	0	0	0	1	0	0	0

⋮

↳ comportamento periódico de período 5

s_{i-1}	$s_i^{(n)}$	s_{i+1}	$s_i^{(n+1)}$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Regra nº 30

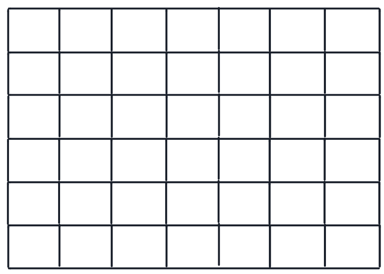
Totalístico

n=0	0	0	0	1	0	0	0
n=1	0	0	1	1	1	0	0
n=2	0	1	1	0	1	1	0
n=3	1	1	1	1	1	1	1
n=4	0	0	0	0	0	0	0

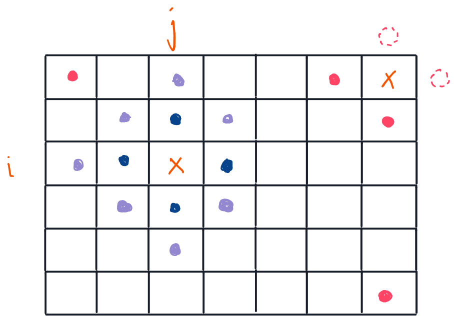
⋮

↳ convergiu para um atrator, um ponto fixo

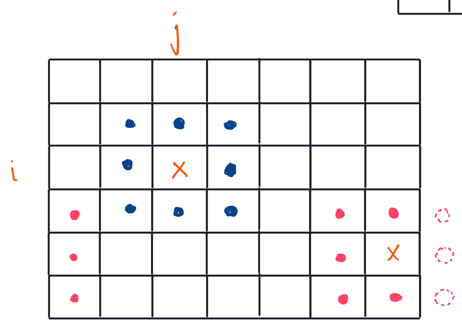
Σ_i	s_i
0	0
1	1
2	1
3	0



Automatos Celulares 2D $s \in \{0, 1, 2, \dots\}$



vizinhança Von Newman
• R = 1 • R = 2

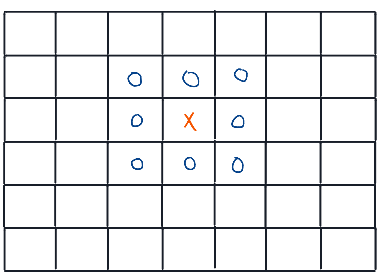


• condição fronteira

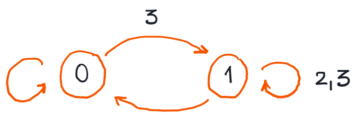
vizinhança de Moore : $(2R+1)^2$
R=1 → 9 R=2 → 25

Jogo da Vida (John Conway)

→ A.C. 2D, binário, totalístico externo, vizinhança de moore, R=1

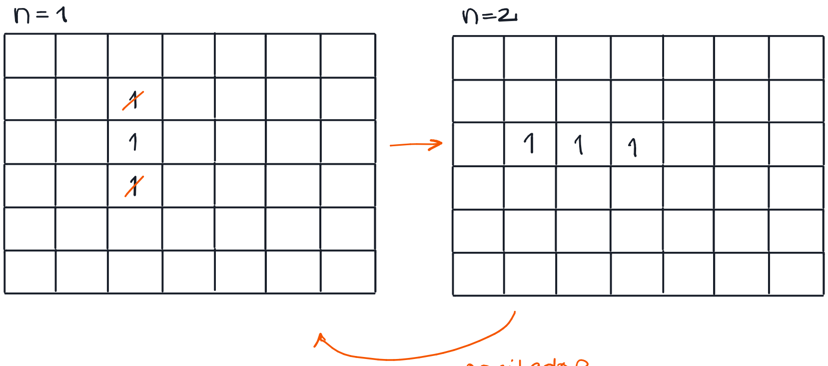


$s \in \{0, 1\}$ (0 morta, 1 viva)



nº de vizinhos vivos
3 → nasce
2/3 → sobrevive

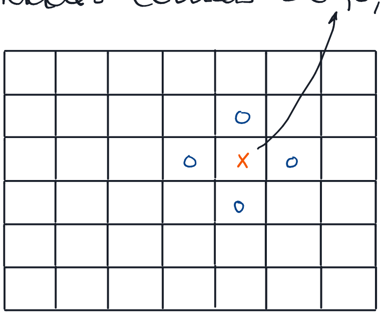
Exemplo.



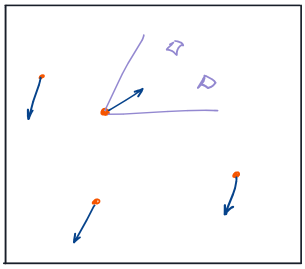
oscilador

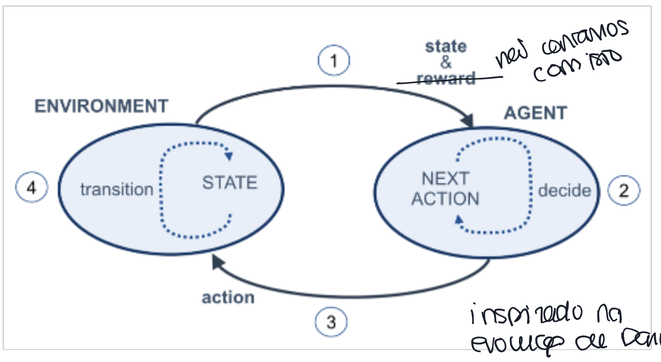
Agentes

1) Mundo 2D
Grelha discreta
Entidades: células $s \in \{0, 1, 2, \dots\}$



2) Mundo 2D
Grelha discreta ou contínuo
Entidades: Agentes



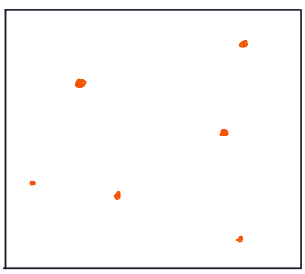


não contamos com isto

inspirado na evolução de Darwin

Estado mais complexo:
- posição
- orientação
- campo de visão ou obstáculos
- Info interna sobre o agente (ex.: fome)

Ação (fugir, perseguir, comer)



Mais simples:
- Estado = posição
- Ação = {vaguear, parado}
- Representação visual: círculo, cor muda e raio muda

Aula 10
04/11/2020

DINÂMICA DE SISTEMAS

A.C:
- estado de cada célula é discreto, isto é, toma valores inteiros
- estado do A.C. é a concatenação do estado das células, n números inteiros
- a regra é determinística: o estado de uma célula é calculado tendo em conta o estado das células vizinhas, se voltar a acontecer uma configuração igual, o resultado é o mesmo - é uma função
- o tempo evolui de forma discreta

DLA:
- estado é a posição de um agente, logo é contínuo (2D)
- estado do DLA é caracterizado por 6 números reais
- Regra é estocástica: o estado seguinte é aleatório, numa certa zona com um determinado raio
- o tempo evolui, conceptualmente, de forma contínua

DINÂMICA DE SISTEMAS
- variáveis de estado contínuas (x)
- evolução no tempo contínua (t)

tempo
- Ciclos de Feedback
- Stock e Flows

$x(t) = f(t) \rightarrow$ estado evolui em função do tempo

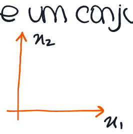
Objetivo: estudar o comportamento dos sistemas, como evoluem ao longo do tempo

4 ingredientes:

1) definir, para cada sistema, a suas variáveis de estado
2) definir o espaço de estados - representação geométrica das v. de estado
3) trajetória no espaço de estados
4) definir um modelo para o sistema - descrição matemática para a trajetória

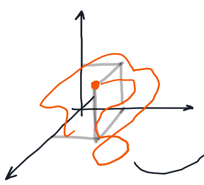
Variáveis de Estado
→ representam o que estamos interessados em descrever no sistema que estamos a estudar
→ conj. de variáveis que pode ser representado por um vetor x que pertence a $\mathbb{R}^n$: $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$
é um vetor com n componentes, n valores reais, que descrevem o estado do sistema
→ Dependem do que estamos interessados

Espaço de Estados
→ define um conjunto de eixos cartesianos. Por exemplo, no caso do $\vec{x}$ ser:

2D


3D


x_1, x_2, x_3 - variáveis de estado

Trajetória


• estado inicial

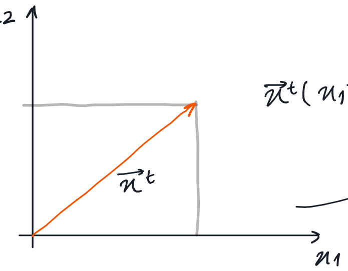
obtida através de um Modelo - a forma matemática e computacional que descreve o sistema

Exemplo:

modelo 2D

v. de estado: x_1 e x_2

num dado instante (t) é representado por um vetor:



$\vec{x}^t(x_1^t, x_2^t)$

→ Espaço de estados vetorial que suporta: soma, multiplicação por um escalar

x_n são as coisas da realidade (aula 6)

- estado x_n têm unidades, por isso são dimensionais

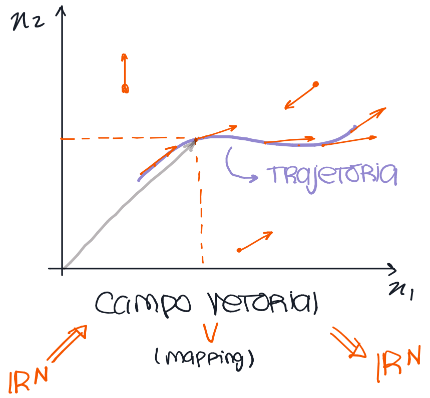
Modelo

- descrição de como as v. de estado x mudam ao longo do tempo
- visto que evoluem em tempo contínuo, ou seja, como se tratam de sistemas contínuos, são
- usadas derivadas matemáticas

derivadas de x_1 e x_2

- $x_1' = \frac{dx_1}{dt} = f(x_1, x_2)$
- $x_2' = \frac{dx_2}{dt} = g(x_1, x_2)$

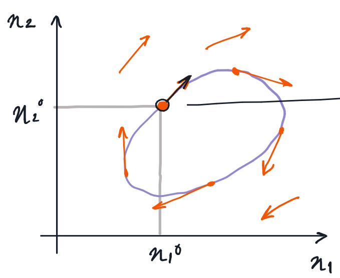
→ como variam ao longo do tempo



- para cada ponto no espaço de estados, posso calcular uma derivada, que resulta num vetor
- ou seja, um modelo mapeia um vetor $\mathbb{R}^N$ (neste caso, $\mathbb{R}^2$), noutro vetor $\mathbb{R}^N$ ($\mathbb{R}^2$). $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$
- ou seja, mapeia um vetor no espaço de estado, num vetor no espaço tangente: Espaço de Estados → Espaço Tangente

$V: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$

MÉTODO DE EULER



→ sabemos a direção e a intensidade com que evolui o sistema

- Espaço de estados
- Espaço tangente

- se quero maior precisão, diminuo o tamanho do passo (ΔT), mais velocidade aumenta-se o passo

1) Definir o ponto inicial $\vec{x}_0$
2) Calcular a derivada nesse ponto $\vec{x}_0'$
3) Dar um passo ΔT nessa direção, com uma determinada dimensão $\Delta T \times \vec{x}_0'$
4) Calcular o ponto seguinte $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \vec{x}_0' \Delta T$

t	$\vec{x}_0$	$\vec{x}_0'$	$\Delta T\, \vec{x}_0'$	$\vec{x}_1$
0				
Δt				
$2\Delta t$				

$$x'_t = \lim_{\Delta T \to 0} \frac{x(t+\Delta T) - x(t)}{\Delta T} \simeq \frac{x(t+\Delta T) - x(t)}{\Delta T} \Leftrightarrow$$

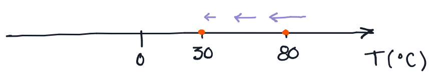
$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{x}(t+\Delta T) = \vec{x}(t) + \Delta T \, \vec{x}'_t}$$

Método de Euler
↳ pode não ser o mais adequado quando é preciso muita precisão

Outros métodos mais precisos:
- Verlet
- Runge-Kutta

Exemplo 1: Chávena de café

1 - variáveis de estado: T (temperatura) em °C
2 - Espaço de estados
3 - Trajetória



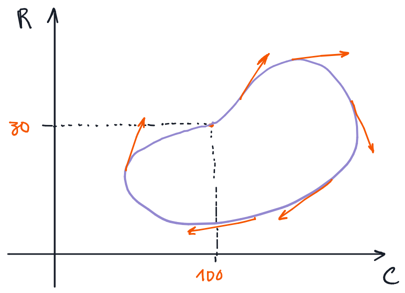
4 - modelo: $T' = \alpha (T_R - T)$ $T' = f(T)$
parâmetros

- quanto menor a diferença de temperaturas, menor a intensidade
- a mudança de estado (a derivada T'), depende do próprio estado

Exemplo 2: Ecossistema de Raposas e Coelhos

1 - variáveis de estado:
n Raposas (R) # n coelhos (C)

2 - Espaço de estados
3 - Trajetória



4 - modelo:
$R' = f(R, C)$
$C' = f(R, C)$

Exemplo 3: Cérebro

1 - variáveis de estado: $\vec{x}$ com milhões, biliões de números reais
2 - Espaço de estados - impossível de representar, mas é um vetor em $\mathbb{R}^N$ gigantesco
3 - Trajetória - a que chamamos pensamentos
4 - modelo: $\vec{x}' = f(\vec{x})$

População de coelhos

- Variável de estado:
  - C: nº de coelhos num dado instante
- C' → o que faz aumentar: nascimentos de coelhos
  → o que faz diminuir: mortes dos coelhos

C' = nascimentos - mortes → Representação do modelo por $\boxed{\text{texto}}$

coelho/mês ← $C' = bC - dC$ * → Representação $\boxed{\text{matemática}}$

b: taxa natalidade (birthrate) $1/\text{mês} = \text{mês}^{-1}$

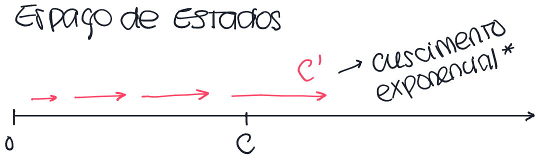
d: ↳ taxa de mortalidade (deathrate) $1/\text{mês} = \text{mês}^{-1}$

$$C' = bC - dC = (b - d)C$$

$b = 0{,}20$ → prob. de nascer de 20%

$d = 0{,}12$ → prob. de morrer de 12%

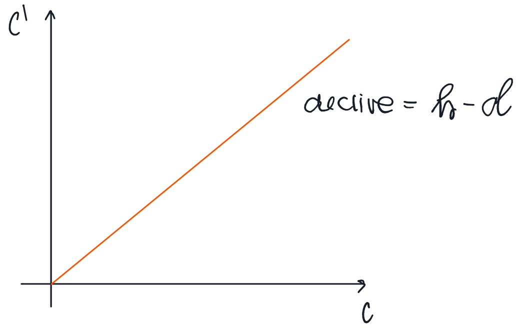
- Espaço de Estados

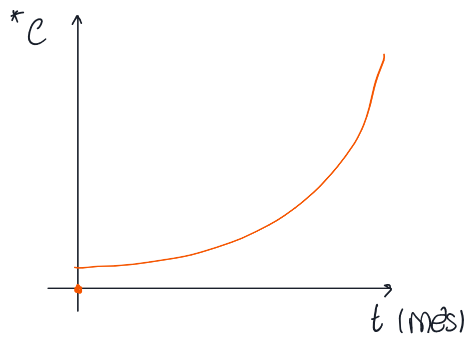


$C' = 0$ se $b = d$

$C' > 0$ se $b > d$

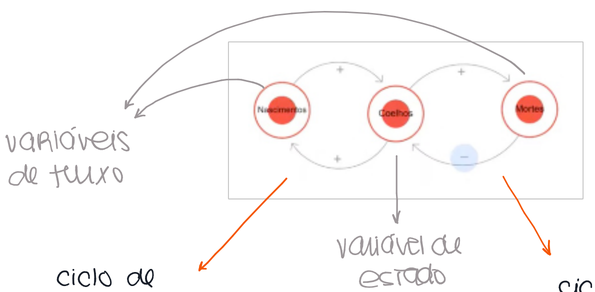
$C' < 0$ se $b < d$





* nascimentos / mortes dependem do nº de coelhos
coelhos dependem de nascimentos / mortes } identificar: existem ciclos de feedback?

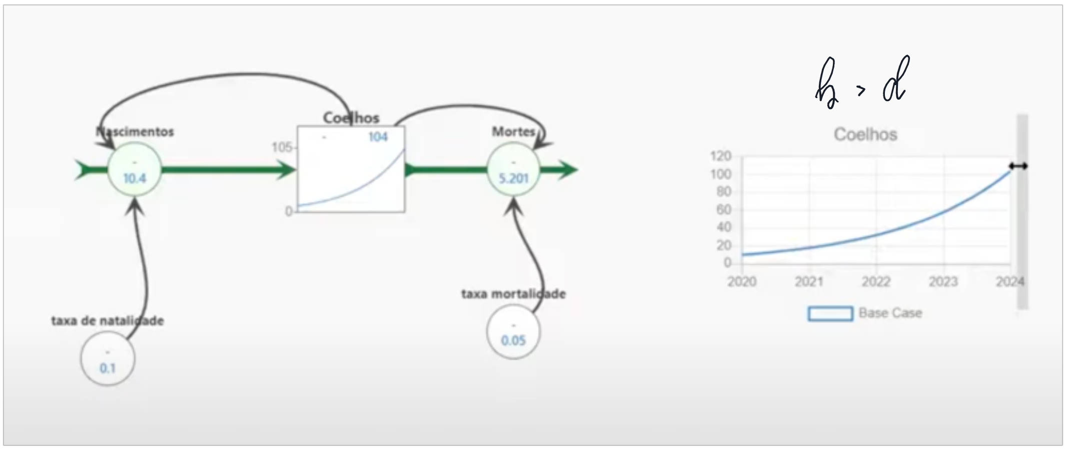
LOOPY: desenhar diagrama de ciclos causais

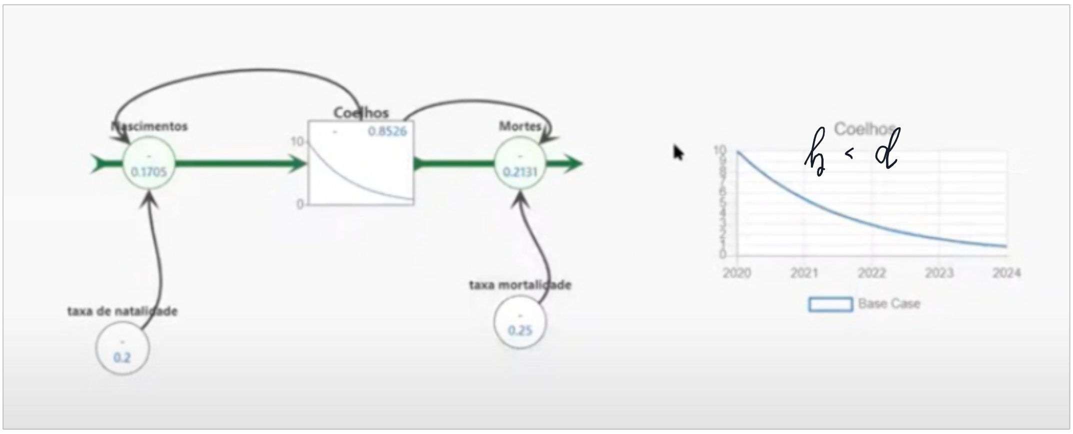


ciclo de feedback positivo
↳ é um ciclo de reforço, se for dominante vai levar a um crescimento exponencial

ciclo de feedback negativo
↳ estabiliza a quantidade de coelhos, se não houvessem nascimentos (tende para ∅)

Sheetless





SageMath: ver aula 35 (18:23) "População de Coelhos"

População de Raposas e Coelhos

· variáveis de estado: R e C

Texto

- C' = nascimentos − morte por predação
- R' = nascimentos (dependem de predação) − morte natural

Matemática

habilidade da raposa de caçar

· $C' = aC - (bR)C$

taxa de natalidade constante

taxa de mortalidade

· $R' = (cC)R - dR$

variáveis de estado

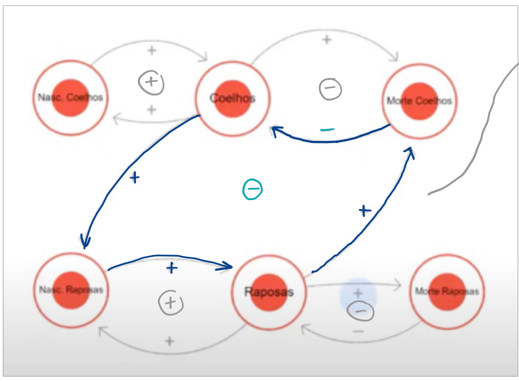
fluxos

valor nutritivo de cada coelho

taxa de natalidade

taxa de mortalidade constante

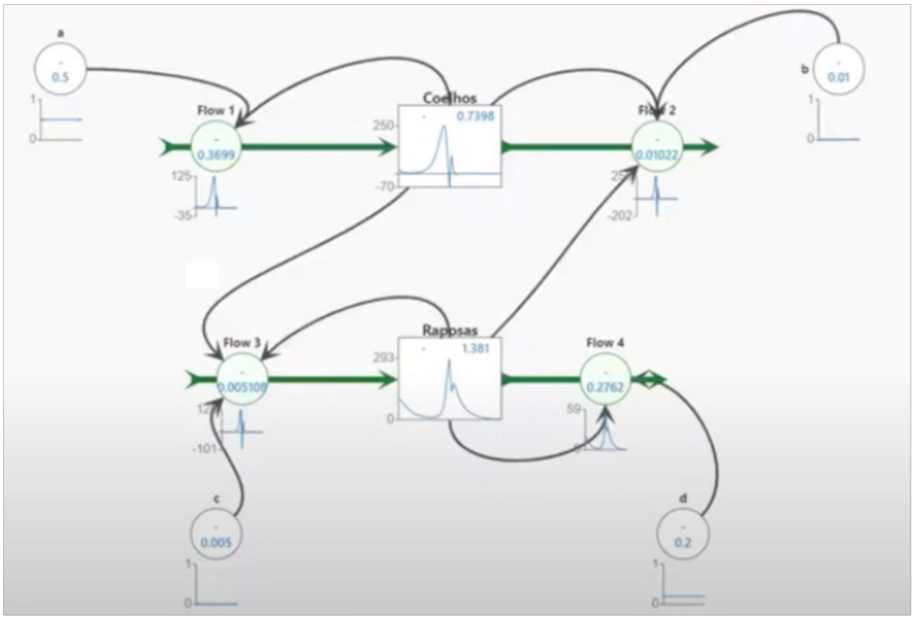
LOOPY: Ciclos causais (e de Feedback)



Ciclo de feedback negativo:

- O sistema vai tender a ter alguma estabilidade, não vai crescer indefinidamente e vai ficar capturado numa certa zona no espaço de estados
- Por outro lado, gera oscilação e instabilidade

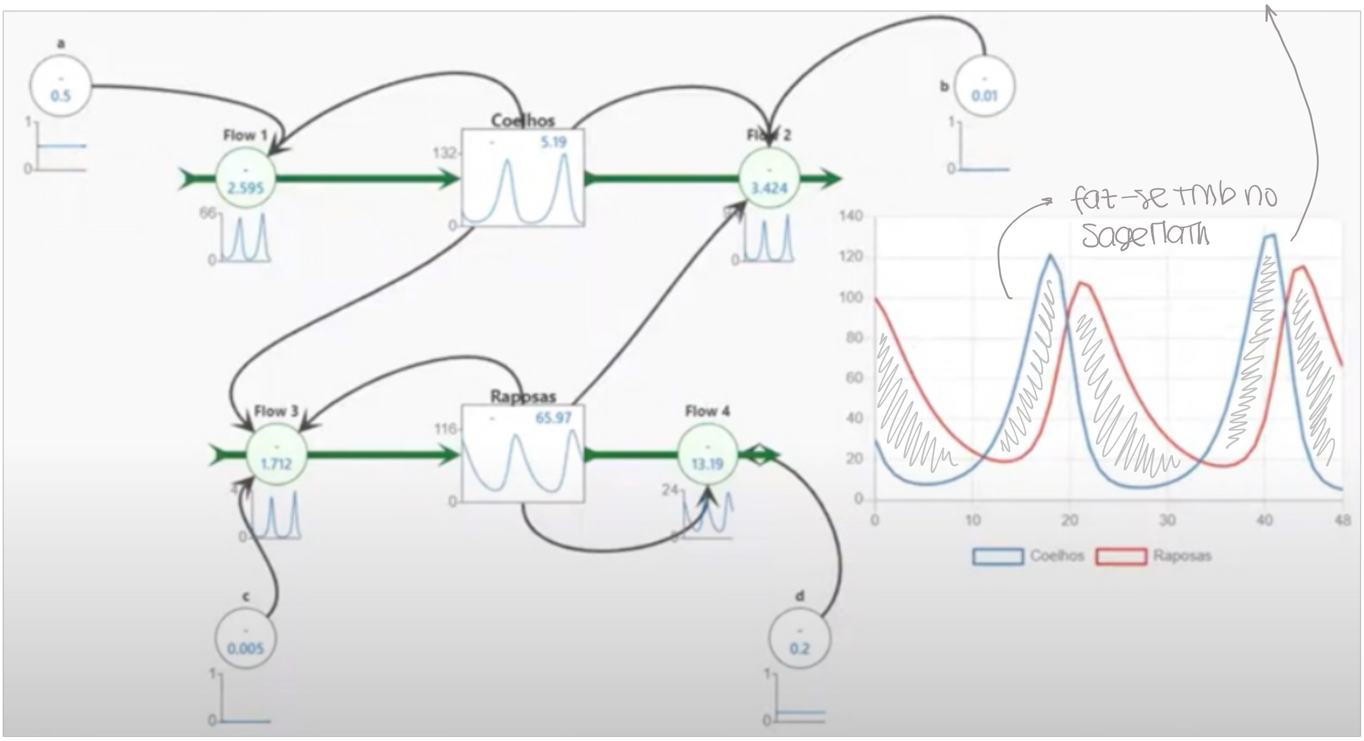
Sheetless:



Flow 1 - nascimento coelhos
Flow 2 - morte coelhos
Flow 3 - nascimento Raposas
Flow 4 - morte de Raposas

observa-se instabilidade pois o método de euler é um método aproximado
↳ solução: fazer método de euler com mais steps (resolution)

curvas não muito definidas por causa do método de euler (adicionar resolução!)



faz-se tmb no SageMath

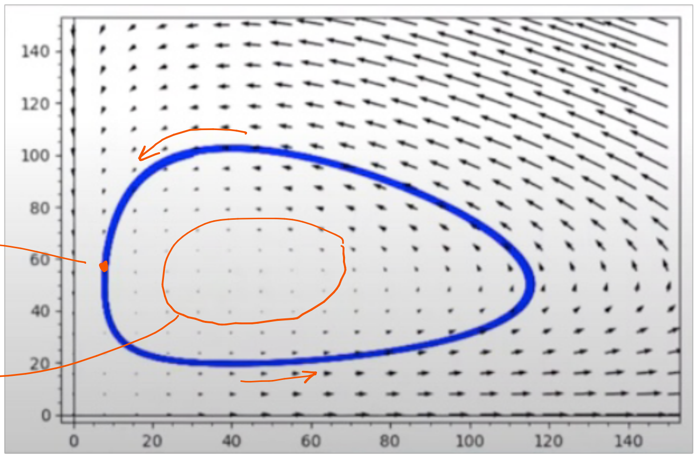
Sage Math aula 36 (21:05)

Campo vetorial (espaço de estados → espaço tangente)

R

posição inicial

zona estável
pouca variação



C

Aula 12
11/11/2020

FORÇAS E MOVIMENTO

Leis de Newton

1) Princípio da Inércia:

se $\vec{F} = 0$, logo: $\vec{v} =$ constante

- se o objeto estiver parado, manter-se-á parado indefinidamente, se estiver em movimento, manter-se-á com a mesma velocidade num movimento retilíneo

3) Princípio da ação e reação:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

- As forças surgem aos pares
- Exemplo: o sol exerce uma força gravítica na terra e, por conseguinte, a terra exerce uma força de atração gravítica no sol

2) Princípio Fundamental da dinâmica

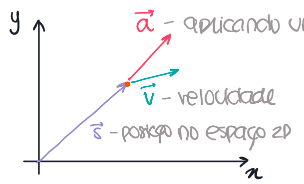
$$\underbrace{\vec{F} = m\vec{a}}_{\vec{a}\text{: aceleração}} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{\underbrace{m}_{\text{massa}}}$$

derivada da velocidade em ordem ao tempo

variação de posição ($\vec{s}$) em ordem ao tempo

- A aceleração é a variação de velocidade, logo $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, logo $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$

graficamente, num contexto 2D:



- logo, $\vec{s} = (x, y)$
- $\vec{a} = \vec{F}/m$ e vai alterar o vetor $\vec{v}$, e este faz alterar a posição $\vec{s}$

As variáveis de estado são a velocidade ($\vec{v}$) e a posição ($\vec{s}$)

- $\vec{v}' = \vec{F}/m$ (= aceleração)
- $\vec{S}' = v$

$\longrightarrow$ como as variáveis de estado variam ao longo do tempo

- Para simular usa-se a Aproximação de Euler, para transformar este movimento contínuo numa aproximação discreta:

EULER: $\vec{v}' = \frac{\vec{v}(t+\Delta T) - \vec{v}(t)}{\Delta T} = \frac{\vec{F}}{m}$ (=)

$$\boxed{\vec{v}(t+\Delta T) = v(t) + \Delta T \frac{\vec{F}}{m}}$$

$$\vec{s}' = \frac{(t+\Delta T) - \vec{s}(t)}{\Delta T} = \vec{v}(t)$$

$$\boxed{\vec{s}(t+\Delta T) = s(t) + \Delta T\, v(t)}$$

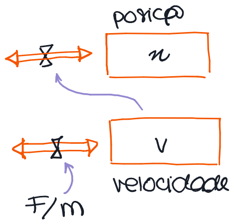
velocidade no instante anterior

Algoritmo para atualizar a posição e velocidade de um corpo ao longo do tempo

Stocks e Flows

$\vec{s} = (x, y)$
$\vec{v} = (\vec{v}_x, \vec{v}_y)$ EM 2D

$\vec{s} = x$
$\vec{v} = \vec{v}_x$ EM 1D



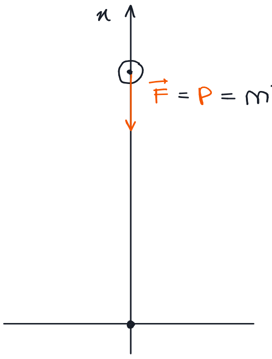
· a velocidade faz variar a posição

· a aceleração faz variar a velocidade

→ Não há ciclos de feedback

Casos Simples

Queda livre (sem atrito)



$\vec{F} = \vec{P} = m\vec{g}$

$\vec{g} = -9.8\ ms^{-2}$
$x' = v$
$v' = mg/m = g$

$x_0 = 10\,m$
$V_0 = 0$

constante logo...

$v(t) = v(0) + \int_0^t g\,dt = v(0) + gt$
$x(t) = x(0) + v(0)t + \frac{1}{2}gt^2$

consigo saber como evoluem o x e a v

Lei da Atração Universal

$$\boxed{\vec{F}_{ij} = G\frac{m_1 m_2}{d^2}\hat{R}_{ij}}$$

vetor unitário que liga i e j

constante de atração universal

Permite simular o movimento da Terra em torno do Sol, e outros astros

No caso da maçã:

$\vec{F}_{ij} = G\frac{M_T m}{(R_T)^2}\hat{R}$

massa e raio da Terra

g

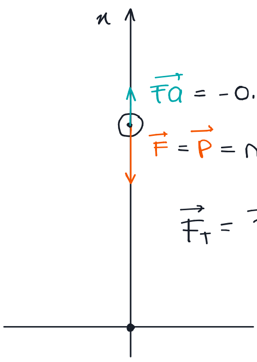
$P = mg$

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$
$M_T = 5.972 \times 10^{24}\ kg$
$R_T = 6371 \times 10^3\ m$
Logo, $g = 9.8\ ms^{-2}$

Força de Atrito

$$\boxed{\vec{Fa} = -0.5\,\cancel{C}^{*} D A \|\vec{v}\|^2 \hat{v}}$$

A: área de contacto entre objeto e fluido onde ele se move
D: densidade desse fluido
*C: constante de aerodinâmica (para objetos esféricos C = 1)
$\hat{v}$: vetor unitário segundo a direção da velocidade



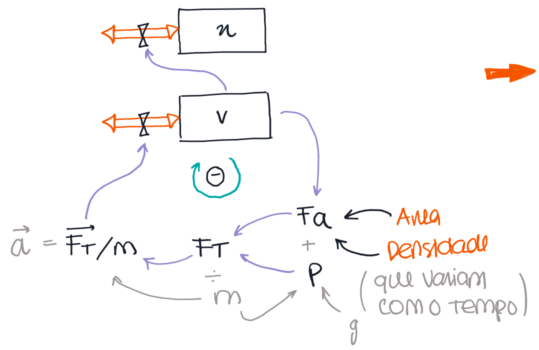
$\vec{Fa} = -0.5 D A \|\vec{v}\|^2$
$\vec{F} = \vec{P} = m\vec{g}$

$\vec{F}_T = \vec{P} + \vec{Fa}$

Força de atrito depende
- das características do meio em que o objeto se move
- da área de contacto entre objeto e fluido
- da velocidade a que ele se move

$\hat{R}$ aponta para baixo, logo é negativo, ⊖ com ⊖ dá ⊕, logo Fa é ⊕

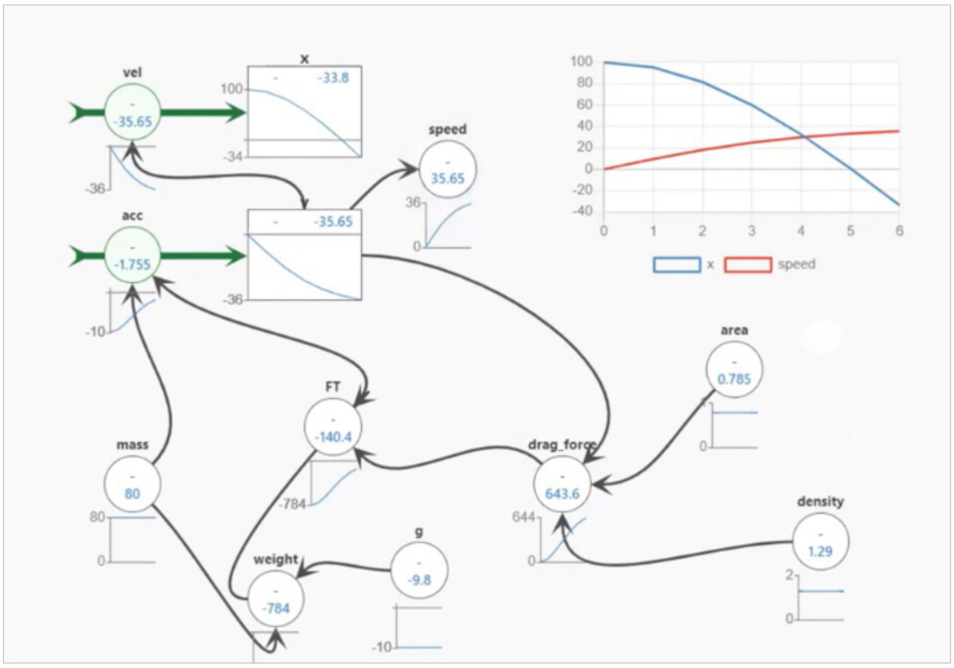
Stocks e Flows



→ Há um ciclo de Feedback negativo, logo as variáveis tendem a estabilizar
(a dado momento $\vec{Fa} = \vec{P}$, logo $\vec{F_T} = 0$, logo a velocidade passa a ser constante, e o corpo deixa de acelerar)

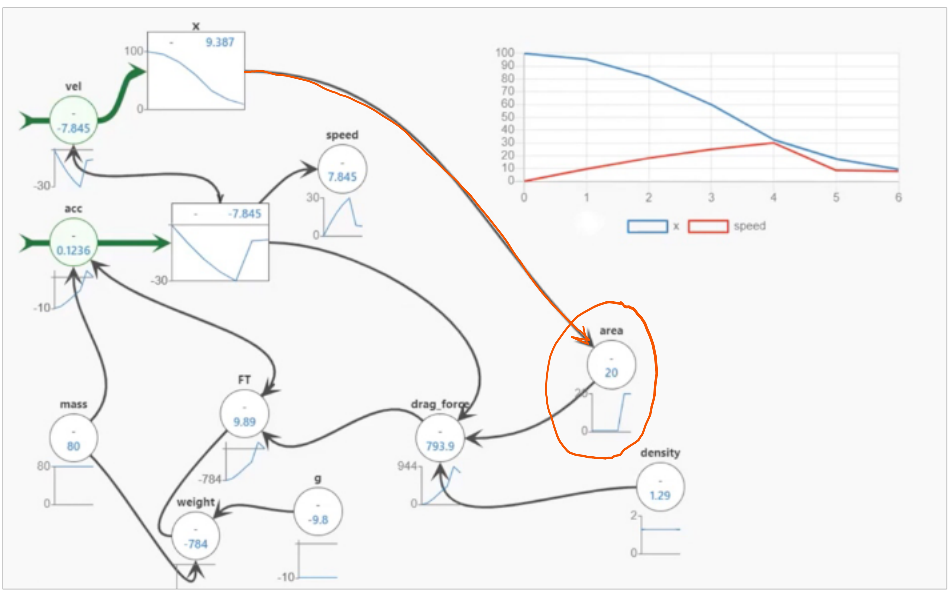
Sheetless

Aula 43 simulação de queda livre



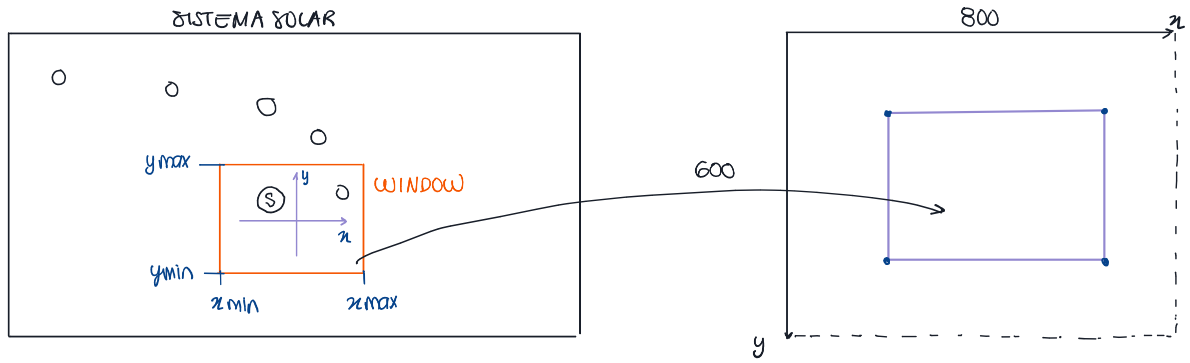
SageMath (11:13)

Simulação da abertura do paraquedas aos 30 m
(Área é variável e depende da posição)



outro exercício pode ser variar a densidade do fluido

TRANSFORMAÇÃO WINDOW - VIEWPORT



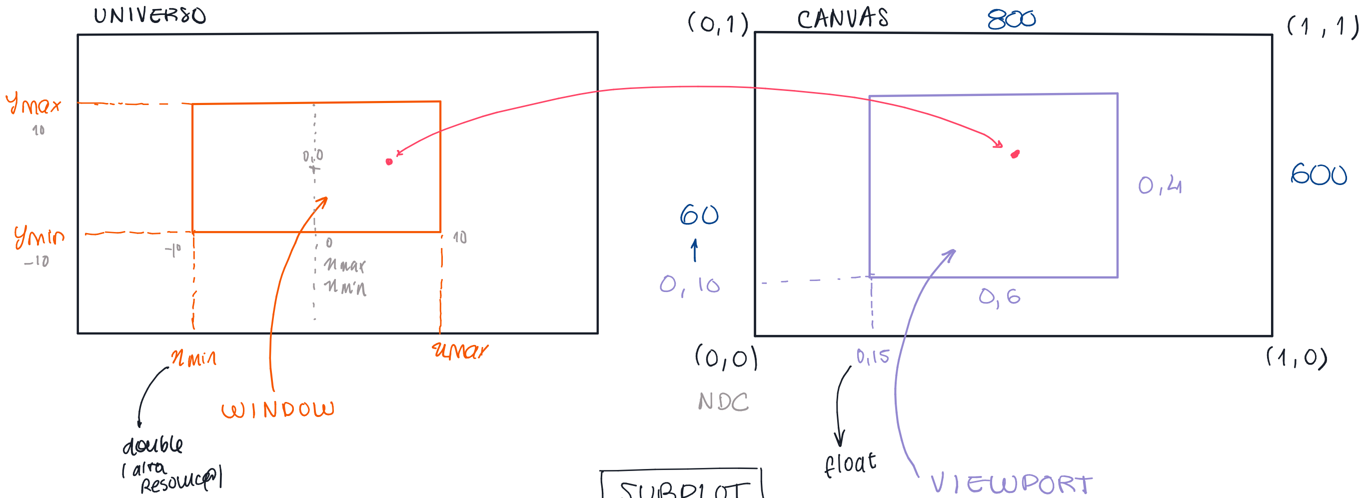
2 passos:

1) mapeamento WINDOW ⟶ NDC (normalized device coordinates)

assumimos que o dispositivo tem coordenadas entre (0,0) e (1,1)

2) NDC ⟶ VIEWPORT

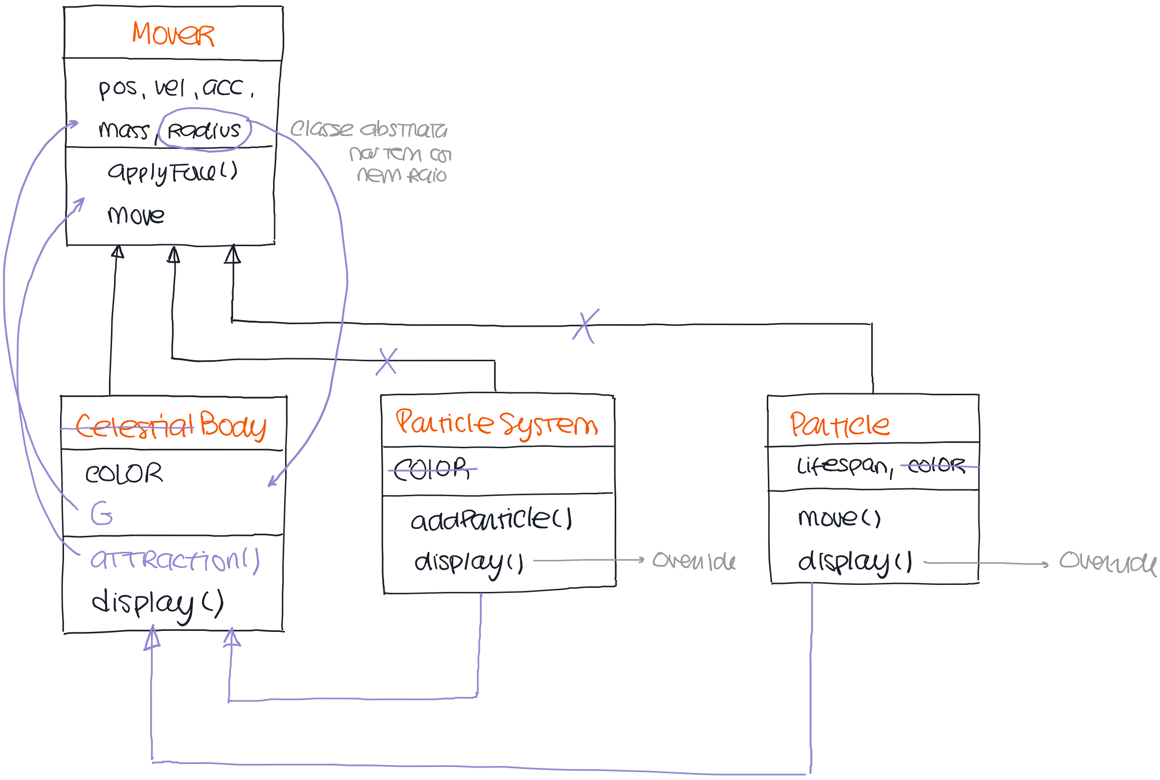
já se tem em conta a resolução do dispositivo (neste caso 800 x 600)



SUBPLOT

window (xmin, xmax, ymin, ymax)

Aula 14
18/11/2020



Agentes Autónomos e Vida Artificial

- objetivo: converter decisões em movimento, usando forças
- Artificial Life:
  - Craig Reynolds and Boids
  - Braitenberg, agentes autónomos reativos (resposta imediata)

Aula 20
09/12/2020

Boid

$\vec{F}_t = m\vec{a}_t$

usando a aproximação de Euler:

$$\vec{a}_t \simeq \frac{\vec{V}_{t+\Delta T} - \vec{V}_t}{\Delta T}$$

$$\vec{V}_{t+\Delta T} = \vec{V}_t + \Delta T \vec{a}_t = \vec{V}_t + \cancel{\Delta T}\,\frac{\vec{F}_t}{m}$$

$\vec{V}_{t+\Delta T}$ → velocidade desejada $\vec{V}_d$

$\vec{V}_t$ → velocidade atual

$m = \Delta T$

$\vec{F}_t$ → $\vec{F}_s$ Força de guiamento para que se aproxime, no futuro, da $\vec{V}_d$

Esta força tem que ser limitada (um veículo não pode aplicar uma força que não tenha) O veículo tem força finita

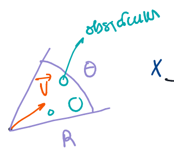
$$\boxed{\vec{F}_s = \vec{V}_d - \vec{V}}$$

→ vou aplicar uma força que é a diferença entre aquilo que quero e aquilo que tenho

Seek ≠ Flee ≠ Arrive ≠ Wander

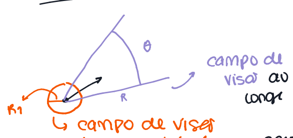
Logo, a $\vec{V}_d$ é uma função do comportamento do Boid, mas também é em função do ambiente

$\vec{V}_d = f(\text{Behaviour, Sensing})$ → obstáculos



X → está fora do campo de visão logo não vai executar o seu comportamento

EYE



↳ campo de visão de proximidade ao perto → não colide com objetos próximos, com percepção omnidirecional (360°)

$R_1 \ll R$

BEHAVIOUR

↳ qual é a $\vec{V}_d$ para cada comportamento

Um Boid pode não implementar um comportamento, mas sim um conjunto de comportamentos → comportamento complexo

$\vec{V}_d = \sum_i w_i \vec{V}_d^{\,i}$ → um somatório das velocidades desejadas dos vários comportamentos

w_i → peso de cada comportamento → média ponderada → combinação Ci

↳ há uns com + prioridade

Aula 21
16/12/2020

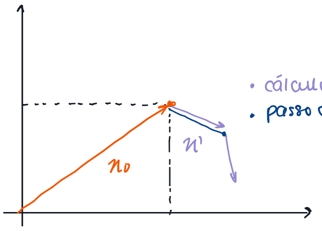
SISTEMAS DINÂMICOS

Tempo contínuo

- Sistema solar
- Boids
- Flocking

↳ ou seja, o estado, é um vetor $\vec{x}$ com muitas variáveis, em que a sua alteração, $\vec{x}'$ é função do estado $\boxed{\vec{x}' = f(\vec{x})}$

- $\vec{x}' = \vec{v}$
- $\vec{v}' = \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$



- cálculo da derivada
- passo de Euler nessa direção

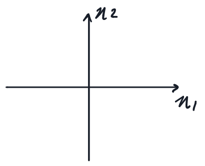
$\boxed{1D}$ $x' = f(x)$

$\boxed{2D}$

$x_1' = f(x_1, x_2)$

$x_2' = g(x_1, x_2)$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

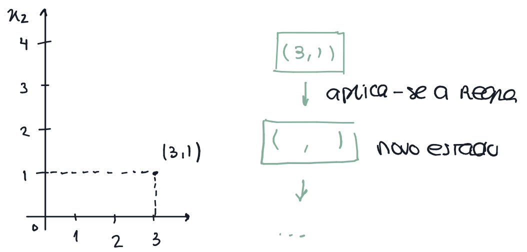


Tempo discreto

- Autómatos Celulares

↳ Não podemos definir uma derivada, mas também temos um estado, $\vec{x}$

- $\boxed{\vec{x}_{n+1} = f(\vec{x}_n)}$ → é função do estado na posição anterior
- No exemplo do jogo da vida, $x^{ij}_{n+1} = f(x^{ij}_n, x^{i-j}_n, \dots)$



$\boxed{1D}$ $x_{n+1} = f(x_n)$

$\boxed{2D}$

$x_{n+1} = f(x_n, y_n)$

$y_{n+1} = g(x_n, y_n)$

$x, y \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$

exemplo: A.C. com 2 células

PONTOS FIXOS E ESTABILIDADE

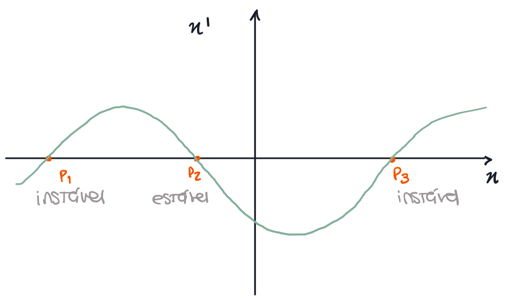
Definição de ponto fixo ou ponto de equilíbrio

Tempo contínuo 1D

$x' = f(x)$

- Ponto fixo é o ponto em que o sistema que está num estado, continuará nesse estado

Logo, $\boxed{x' = 0}$

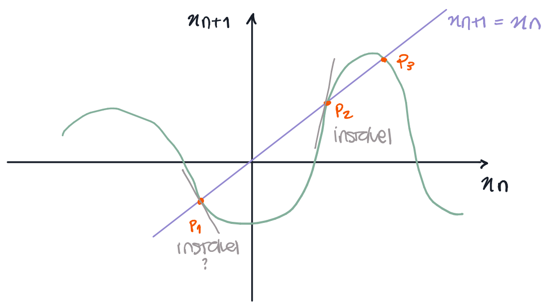


Tempo discreto 1D

$x_{n+1} = f(x_n)$

- Ponto fixo é aquele em que o próximo estado é o mesmo que o estado anterior

Logo, $\boxed{x_{n+1} = x_n}$



- pontos fixos do sistema

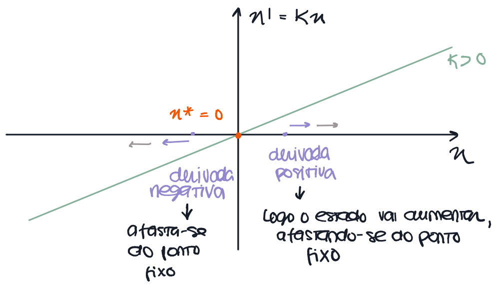
Existem vários pontos fixos pois o sistema é não linear

Estabilidade de um ponto fixo

Tempo contínuo

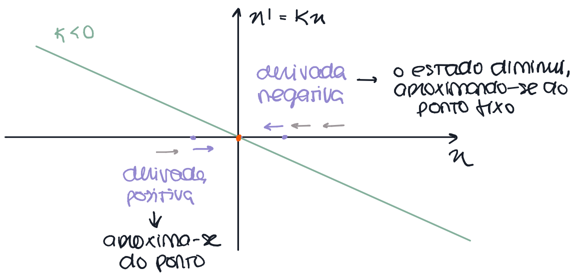
Cenário linear

$x' = kx \qquad k \neq 0$



Logo, se $k > 0$, o ponto fixo é instável

ponto repulsor



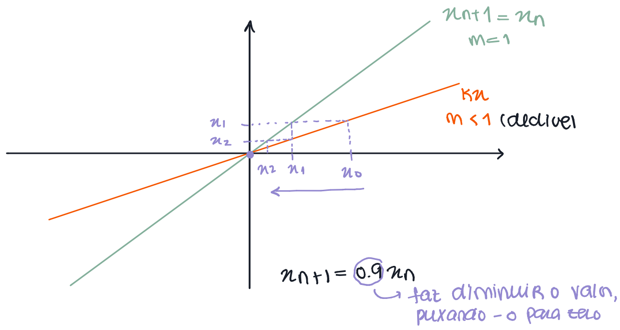
Logo, se $k < 0$, o ponto fixo é estável

ponto atrator

Tempo discreto

Cenário linear

$x_{n+1} = k x_n \qquad k \neq 0$

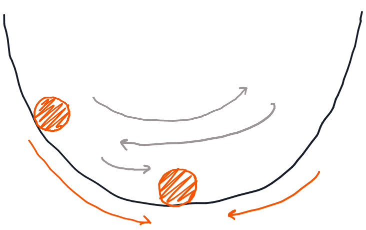


Logo, se (declive) $|k| < 1$, o ponto fixo é estável

Logo, se (declive) $|k| > 1$, o ponto fixo é instável

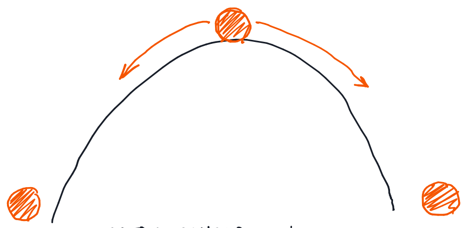
No entanto, se $|k| = 1$, trata-se de um ponto fixo neutro ou marginalmente estável

ponto fixo estável



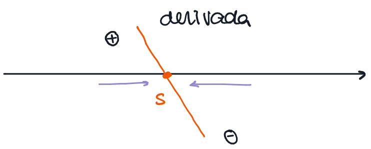
qualquer perturbação no berlinde leva-o sempre ao mesmo estado de equilíbrio

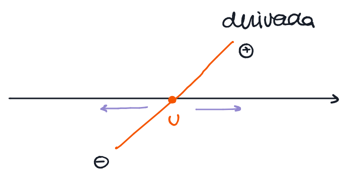
ponto fixo instável



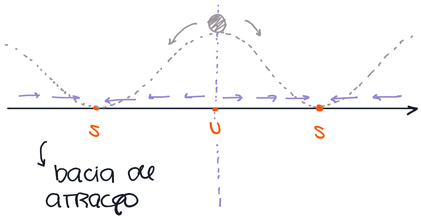
ponto repulsor vai fazer sempre com que o berlinde se afaste dessa posição

no contexto 1D

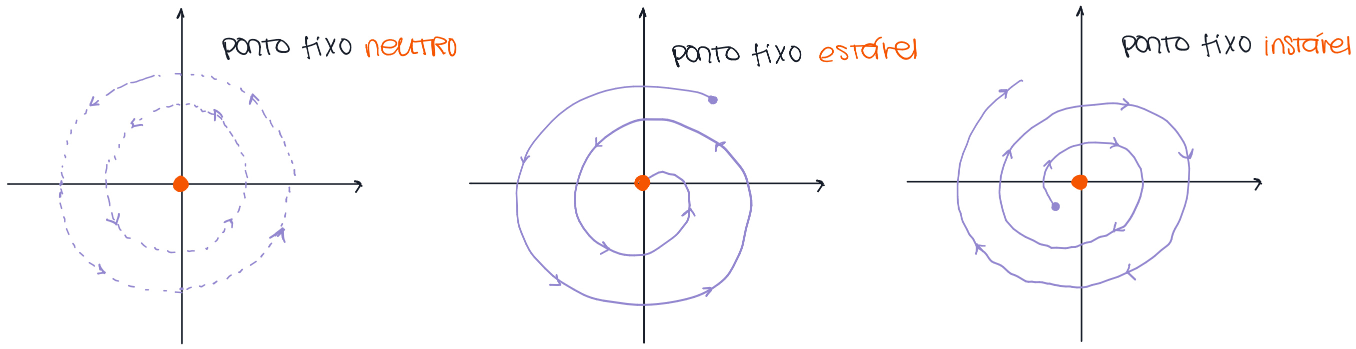




S: STABLE
U: UNSTABLE



no contexto 2D



exemplo: cenário presa e predador com um terceiro elemento, como recursos finitos

DINÂMICA DE POPULAÇÕES

Exemplo:

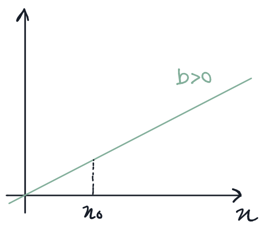
População de coelhos – n, que evolui consoante a sua derivada – n'.

$n' = b\,n$

↳ taxa de natalidade líquida

↳ $b > 0$ quando natalidade > mortalidade

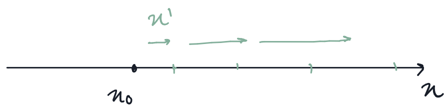
↳ $b < 0$ quando natalidade < mortalidade



$n(t) = n_0 e^{bt}$ $\qquad n'(t) = \underbrace{b n_0 e^{bt}}_{n}$

↓

Assumindo que os recursos são infinitos



crescimento exponencial

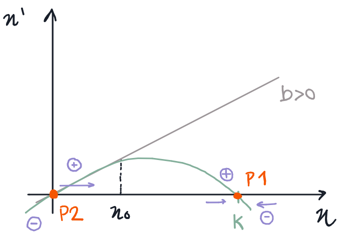
Modelo mais realista: $n' = bn \underbrace{\left(1 - \frac{n}{K}\right)}$

K – capacidade de carga: máximo de população que o sistema suporta

↓

Representa o efeito de overcrowding: à medida que a população aumenta, existe uma competição pelos recursos, que reduz a taxa efetiva de crescimento

- Quando $n \ll K$, o fator $\left(1 - \frac{n}{K}\right) \simeq 1$, mantendo-se o $n' = bn$
- Quando $n \simeq K$, o fator $\left(1 - \frac{n}{K}\right) \simeq 0$, logo $n' \simeq 0$

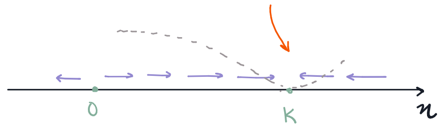


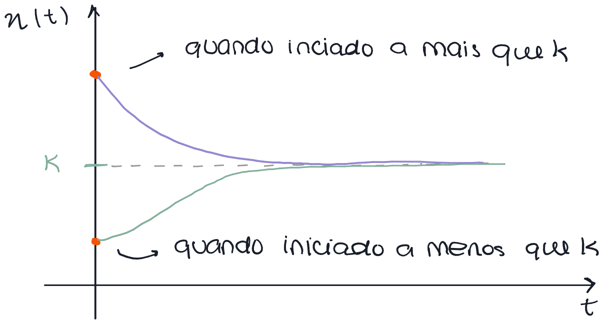
Tem-se dois pontos fixos

P1 (K) é um ponto fixo estável

P2 é um ponto fixo instável

Bacia de atração – todos os pontos convergem para K





$\longrightarrow$ Modelo Logístico de Crescimento

MODELO LOGÍSTICO

1) CASO CONTÍNUO

$$x' = (bx)\left(1 - \frac{x}{K}\right)\left(\frac{x}{a} - 1\right)$$

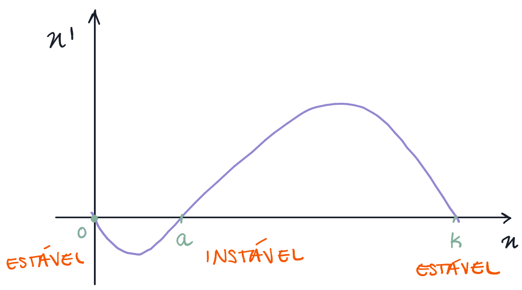
b: Taxa de crescimento quando a população é reduzida, quando existem recursos suficientes para toda a população

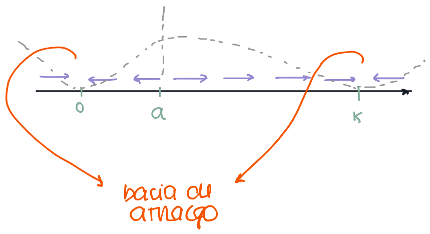
K: capacidade de carga

a: limite mínimo a partir do qual existe viabilidade para a espécie existir

Exemplo: aspeto social ou cooperação entre elementos de uma dada espécie

$x' = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \vee \boxed{x = K} \vee \boxed{x = a} \longrightarrow$ Sistema com 3 pontos fixos





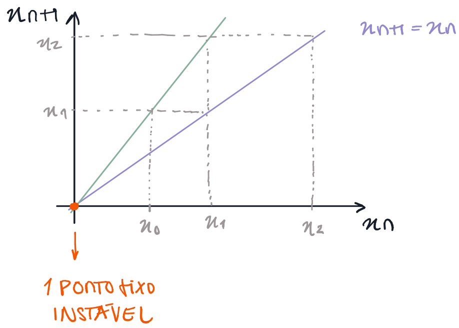
2) CASO DISCRETO

x_n? dúvida e quando $b < 0$, $R = ?$

$x_{n+1} = R x_n$

↳ Taxa de natalidade efetiva: $R = b + 1$

Neste caso, é preciso somar 1. Se $b = 0.1$, então $R = 1.1$ (x_n + 10% de x_n)



$x_1 = b x_0$

$x_2 = b x_1 = b^2 x_0$

$\vdots$

$x_n = b^n x_0 \longrightarrow$ $b > 1$ Tende para infinito

$b < 1$ Tende para zero (extinção)

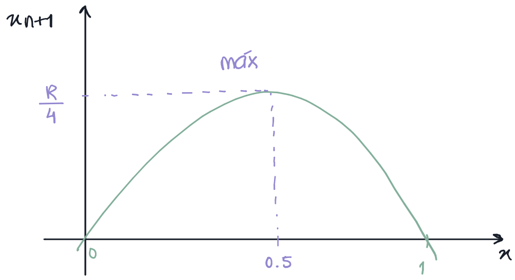
$$x_{n+1} = R\, x_n \left(1 - \frac{x_n}{K}\right) \longrightarrow \text{2 Pontos fixos}$$

Mudança de variável (para simplificar a função): $y = \frac{x}{K}$

$$\cancel{K} y_{n+1} = R \cancel{K} y_n (1 - y_n) \Leftrightarrow \boxed{x_{n+1} = R\, x_n (1 - x_n)} \longrightarrow \text{equação logística}$$

?
dúvida na passagem
$y_n \to x_n$

- o K desapareceu, mas está implícito: assumimos que x é uma população relativa à capacidade de carga do sistema. É uma densidade de população que varia entre $0 < x < 1$, que quando $x = 1$, significa que o sistema atingiu a sua capacidade de carga



ou seja:

$0 < x < 1$

$0 < R < 4$

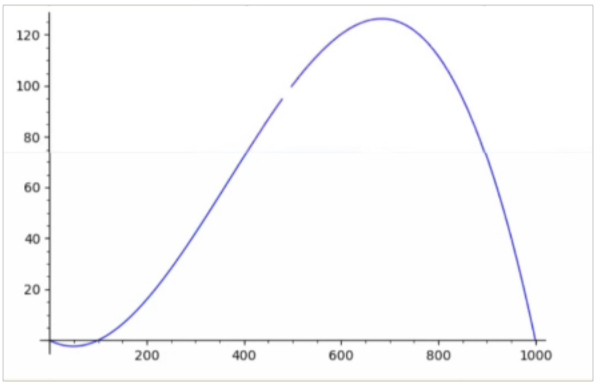
NO SAGEMATH

$$x' = (bx)\left(1 - \frac{x}{K}\right)\left(\frac{x}{a} - 1\right)$$

$b = 0.1$

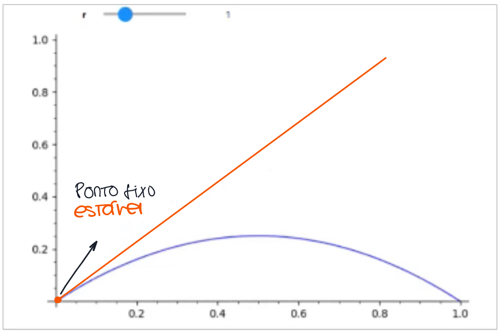
$K = 1000$

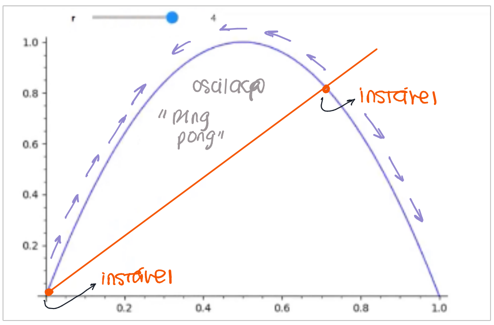
$a = 100$

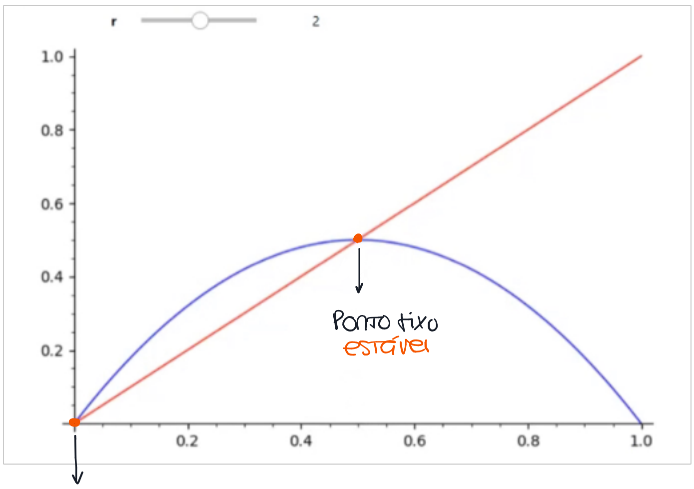


$$x_{n+1} = R\, x_n (1 - x_n)$$

$R = 1.1$







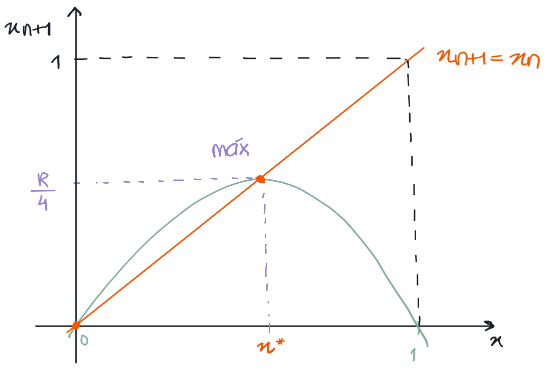
Ponto fixo
instável

FUNÇÃO LOGÍSTICA E CAOS

Equação Logística

$x_{n+1} = R\,x_n\,(1 - x_n)$

$$\boxed{f(x) = R\,x\,(1-x)}$$



Condição de Ponto fixo:

$R x (1 - x) = x \quad (\Leftrightarrow)$

$x = 0 \ \vee \ R(1-x) = 1 \quad (\Leftrightarrow)$

$\boxed{x = 0} \ \vee \ 1 - x = \frac{1}{R}$

$R > 1$

Logo: $\boxed{x^* = \frac{R-1}{R}}$

Estabilidade dos pontos fixos

$f'(x) = R - 2Rx$

$\quad = R(1 - 2x)$

$f'(0) = R \longrightarrow$ se $R < 1$, o ponto fixo é estável

se $R > 1$, o ponto fixo é instável

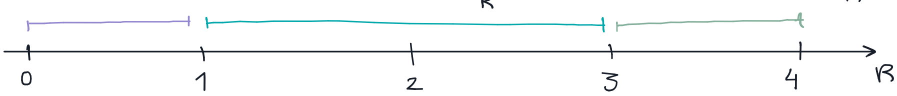
$f'\left(\frac{R-1}{R}\right) = R\left(1 - 2\left(\frac{R-1}{R}\right)\right) = \cancel{R}\left(\frac{R - 2R + 2}{\cancel{R}}\right) = 2 - R \longrightarrow$ se $|2 - R| < 1 \ (\Leftrightarrow)\ 1 < R < 3$ é estável ($R > 1$)

se $R > 3$ é instável

A — 1 ponto fixo: $x^* = 0$ estável

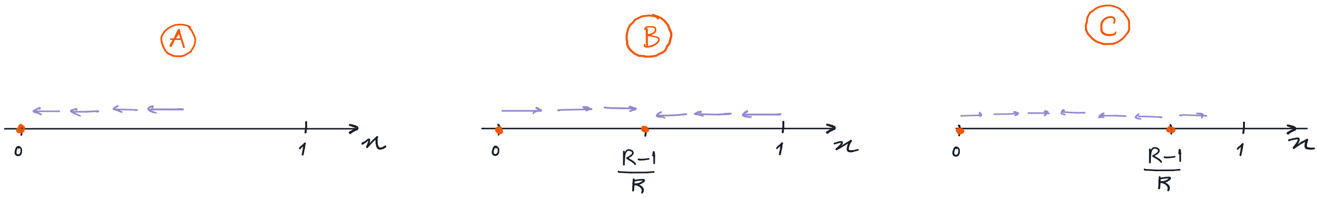
B — 2 pontos fixos: $x^* = 0$ instável $\wedge$ $x^* = \frac{R-1}{R}$ estável

C — 2 pontos fixos: $x^* = 0$ instável $x^* = \frac{R-1}{R}$ instável

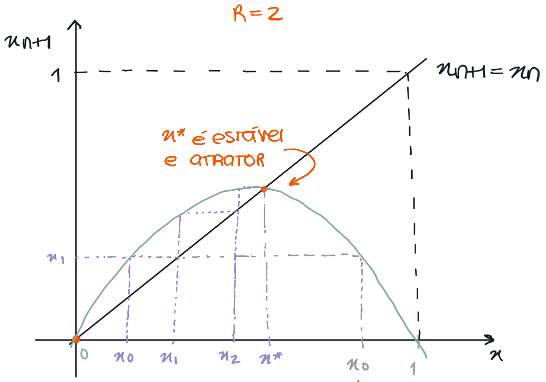


- atrator
- extinção da espécie

CAOS

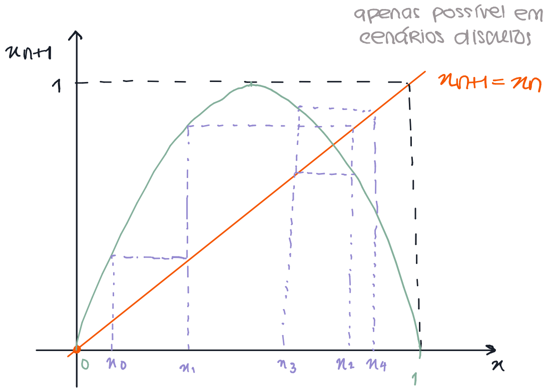


$R = 2$



iniciando aqui, daria o mesmo resultado

apenas possível em cenários discretos

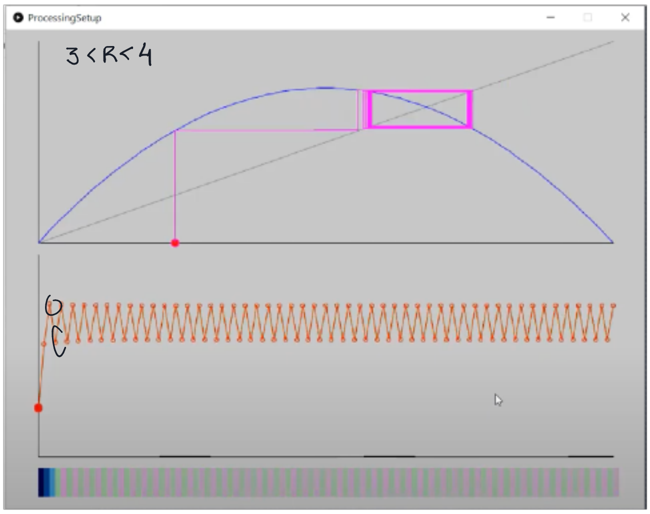


comportamento de oscilação sem convergir

fenómeno de caos

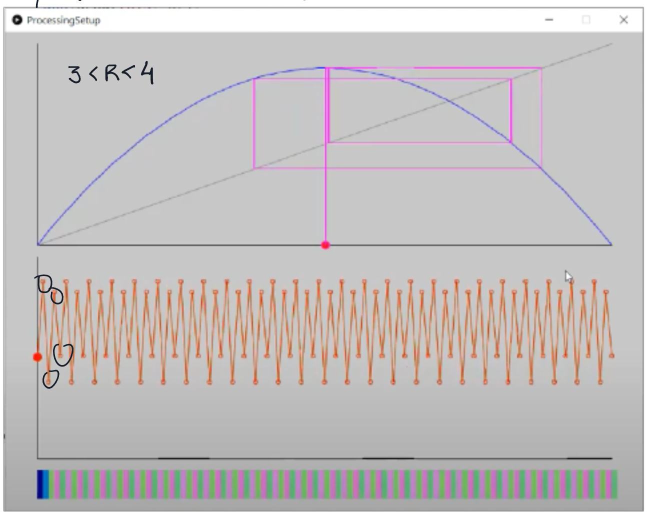
(sistema com repulsor caótico)

- Fenômeno de periodicidade



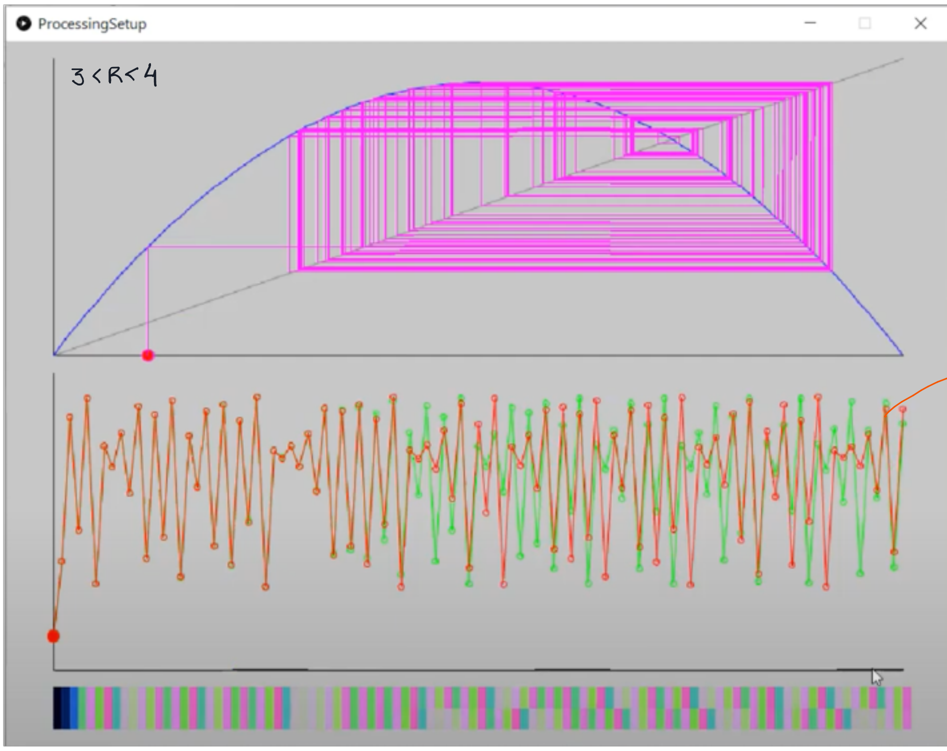
↳ periodicidade entre 2 estados

↗ periodicidade entre 4 estados

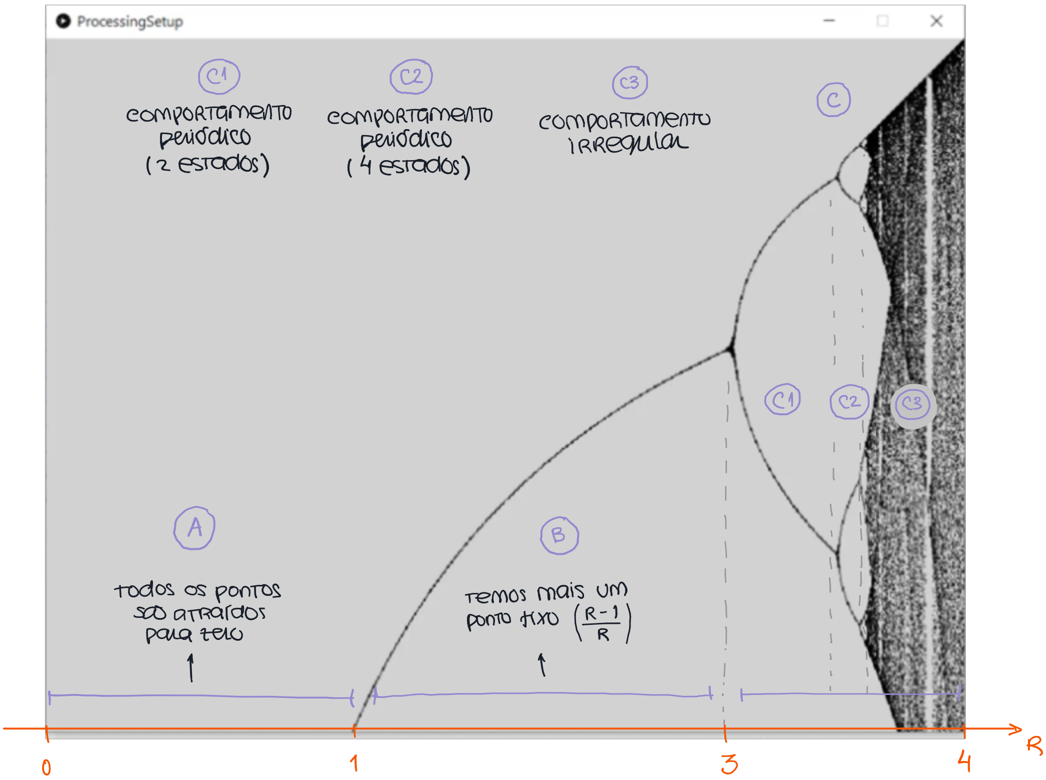


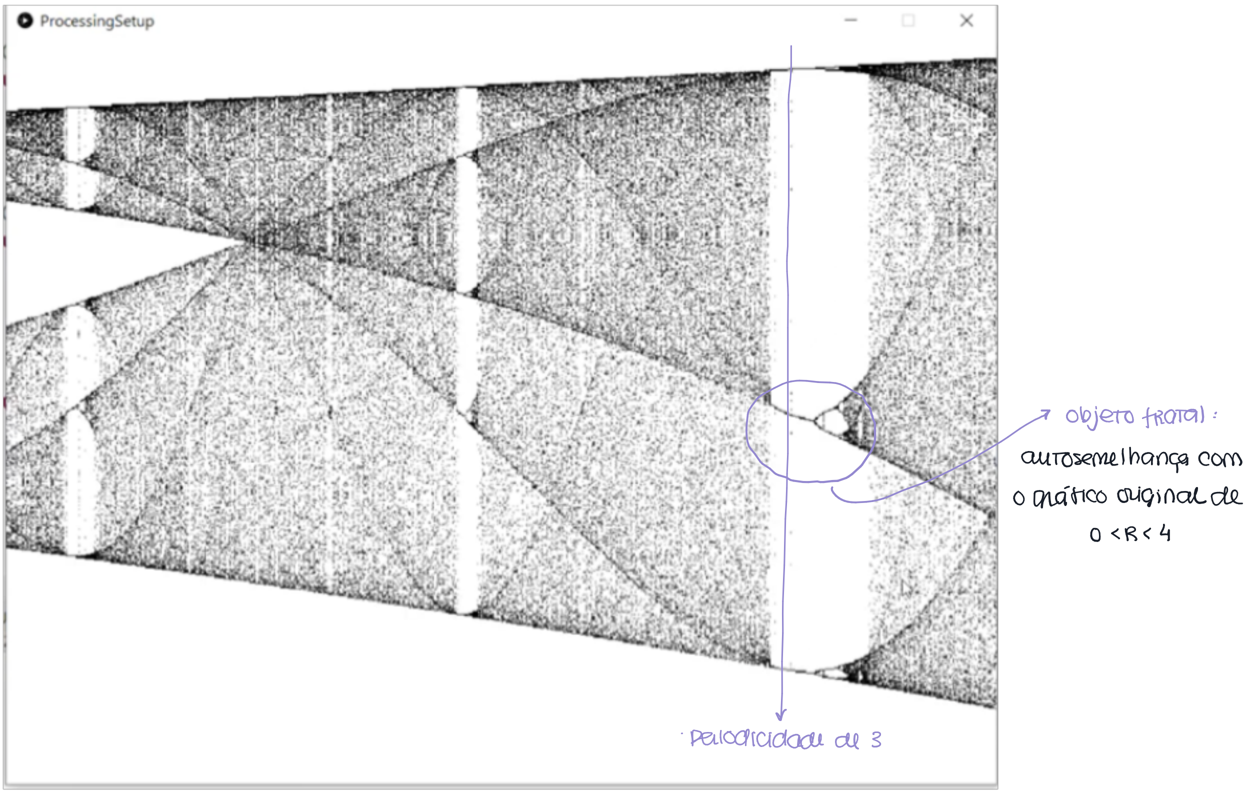
- Fenômeno de Caos e Efeito Butterfly (basta uma pequena perturbação nas condições iniciais para que seja impossível prever o comportamento do sistema)

↳ O que define um sistema caótico - sistema determinístico, mas imprevisível regido por regras de não influência externa ou incerteza, mas sim dinâmicas próprias do sistema, que é extremamente sensível às condições iniciais



Efeito Butterfly



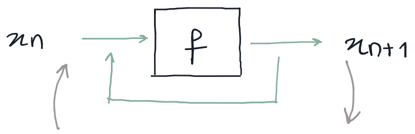


Aproximando os valores $R>3$, é possível observar características de sistemas caóticos:

- zonas com periodicidade, onde depois se volta ao estado de caos
- aparecimento de trajetórias que exibem propriedades fractais de autosemelhança,

Aula 22
06/01/2021

DINÂMICAS DE SISTEMAS DISCRETOS



Domínio e contra-domínio têm que ser iguais, pois o resultado é injetado de novo (ciclo feedback)

$n = 0, 1, 2, 3, \dots$

x_0

$x_1 = f(x_0)$

$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^{(2)}(x_0)$

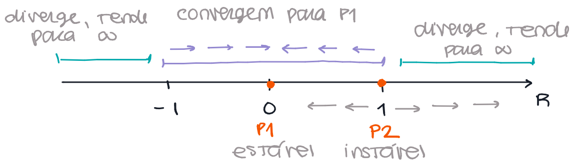
$\vdots$

$x^n = f^{(n)}(x_0)$

EXEMPLOS DE FUNÇÕES ITERADAS

A) $f(x) = Rx(1-x)$

B) $g(x) = x^2$



Dois pontos fixos:

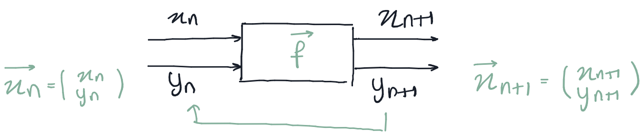
P1) $x_0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \ x_2 = 0, \dots$

P2) $x_0 = 1 \Rightarrow x_1 = 1, \ x_2 = 1, \dots$

$x_0 = 2, \ x_1 = 4, \ x_2 = 16, \ x_3 = 256, \dots$

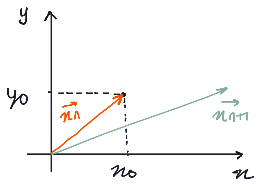
$x_0 = -1, \ x_1 = 1, \ x_1 = 1, \dots$

C) Função vetorial

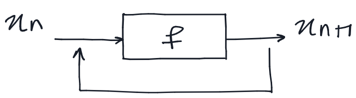


$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

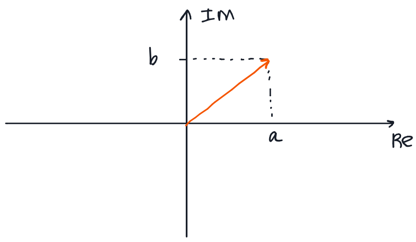
↳ Rotação, escalamento, ...



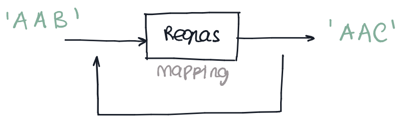
D) Números complexos



$x_n, x_{n+1} \in \mathbb{C}$



E) Gramática



- Definir o conjunto de símbolos: A, B, C
- Definir regras que operam sobre os símbolos

Exemplo: Gramática de Lindenmayer

F) Partições de Conjuntos : Solitário Búlgaro

(5) → $\boxed{\text{Regras}}$ → (4,1)

para N = 5 , tenho 7 partições

(5)
(4,1)
(3,2)
(3,1,1)
(2,2,1)
(2,1,1,1)
(1,1,1,1,1)

Solitário Búlgaro N = 3 (3 cartas)

Em quantas partições posso decompor o baralho?

3 partições

(3)
(2,1)
(1,1,1)

SOLITÁRIO BÚLGARO

Regra: tirar uma carta de cada um dos montes

$\boxed{N = 5}$

(5) → (4,1) → (3,2) → (2,2,1) → (3,1,1)

(1,1,1,1,1) → (5)

(2,1,1,1) → (4,1)

bacia de atração

periodicidade de 3

↓

atrator de ciclo limite ou
atrator periódico com período = 3

$\boxed{N = 6}$

(2,2,2) → (3,1,1,1) → (4,2) → (3,2,1)

atrator de ponto fixo

$\boxed{N = 8}$

(3,3,2) → (3,2,2,1) → (4,2,1,1) → (4,3,1) → (3,3,2)

bacia de atração

atrator de ciclo limite
T = 4

(6,1,1) → (5,3) → (4,2,2) → (3,3,1,1)

bacia de atração

atrator de ciclo limite
T = 2

A que bacia de atração pertence (2,2,2,2) ?

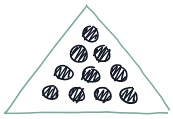
(2,2,2,2) → (4,1,1,1) → (5,3)

Condições para surgir um ponto fixo.
- se o número de cartas (N) for um <u>número triangular</u>

Número triangular: número que pode ser obtido pela soma dos primeiros inteiros

$N=1$	$1 = 1$	
$N=3$	$3 = 1+2$	
$N=6$	$6 = 1+2+3$	
$N=10$	$10 = 1+2+3+4$	
$N=15$	$15 = 1+2+3+4+5$	

$N=10$



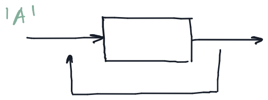
Para $N=6$, o ponto fixo é $(3,2,1)$
Para $N=15$, o ponto fixo é $(5,4,3,2,1)$

SISTEMAS DE LINDENMAYER
(L-SYSTEM)

EXEMPLO 1

- Símbolos: A, B
- Axioma (configuração inicial): A
- Regras: 1) $A \rightarrow AB$
  2) $B \rightarrow A$

A e B são variáveis pois têm, cada uma delas, uma regra associada



axioma $\{$ $n=0$ A

teoremas
- $n=1$ AB
- $n=2$ ABA
- $n=3$ ABAAB
- ⋮

EXEMPLO 2

- Símbolos (4)
  - <u>Variáveis</u>: 0, 1
  - <u>Constantes</u>:], [
- Axioma: 0
- Regras: 1) $1 \rightarrow 11$
  2) $0 \rightarrow 1[0]0$
  3) $[\rightarrow [$
  4) $] \rightarrow]$

$n=0$	0
$n=1$	1[0]0
$n=2$	11[1[0]0]1[0]0
⋮	

- A aplicação destes sistemas é dada pela atribuição de significado a cada um dos símbolos.

A isto denomina-se de "Processo de Renderização"

Exemplo: Renderização visual, associando a cada um dos símbolos uma primitiva gráfica
Renderização sonora, associando a cada um dos símbolos um som ou nota musical
Curva de Koch

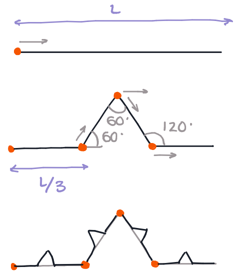
CURVA DE KOCH

- Variáveis: F
- Constantes: + , −
- Regra: F → F+F−−F+F
- Axioma: F

n=0 F

n=1 F+F−−F+F

n=2 cada F (cada linha) é substituída pela sequência



→ sequência

Atribuir significado:

F → desenhar um traço com um certo tamanho

+ → Rodar 60° no sentido anti-horário

− → Rodar 60° no sentido horário

Conclusão: desenha-se um objeto fractal com um perímetro infinito

Gera-se uma linha com comprimento infinito.

$P_0 = L \quad P_1 = 4\,\frac{L}{3} \quad P_2 = 4^2\,\frac{L}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 L$

Logo:

$P_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n L$

Quando $n \to \infty$, $P_n \to \infty$

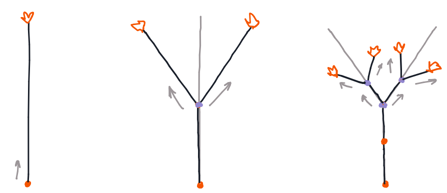
OUTRO EXEMPLO - ÁRVORE

- Variáveis: F, G
- Constantes: + , − , [,]
- Regras: 1) F → G[+F]−F
  2) G → GG
- Axioma: F
- Significado:
  - F , G : desenhar um traço com um determinado comprimento
  - + : Rodar 30° para a esquerda
  - − : Rodar 30° para a direita
  - [,] : operações de push e pop do estado de orientação da turtle

n=0 F

n=1 G[+F]−F

n=2 GG[+G[+F]−F]−G[+F]−F



n=0 n=1 n=2

- push e pop da posição e orientação

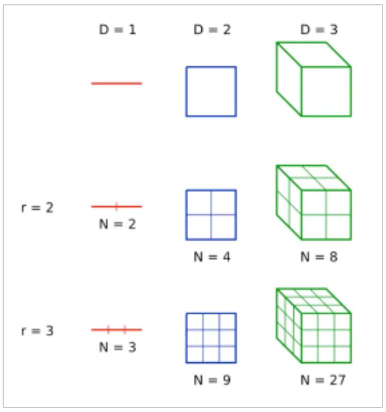
OBJETOS FRACTAIS

Objetos fratais, ao contrário da geometria euclideana - normalmente observada em estruturas produzidas pelo homem, são objetos representados por algoritmos recursivos e não expressões matemáticas simples.

Características:

- Autosemelhança a diferentes escalas:
  Uma parte do objeto é igual ao seu todo, pois estes objetos são obtidos recursivamente
- Dimensão fraccionária:
  Ao contrário de objetos euclideanos, que são ora bidimensionais, ora tridimencionais, ou têm apenas uma dimensão (exemplo: ponto), a sua dimensão não é inteira

Dimensão inteira ou topológica



Dimensão:
número de parâmetros independentes necessários para descrever um ponto

$N = R^D$

$D = \frac{\log N}{\log D}$ → Ao aplicar nos objetos fractais, obtém-se uma dimensão fracionaria

Dimensão Fracionária

Exemplo A: Conjunto de Cantor

- Desenhar uma linha no intervalo [0,1]
- Recursivamente, remover o terço interior de cada linha.
- Na iteração n, tem-se 2n segmentos, cada qual com 1/(3n) de comprimento:
- O comprimento na iteração n é portanto (2/3)n
- Número infinito de pontos mas comprimento total nulo!

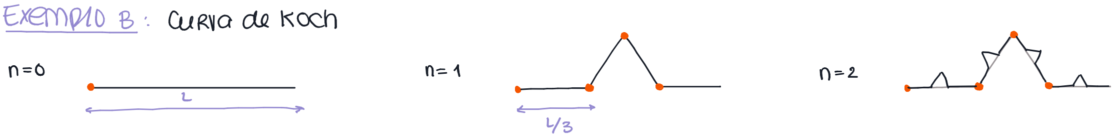
- Duas cópias
- Fator de Redução 3

$\boxed{N = R^D}$

$2 = 3^D \iff \log 2 = D \log 3 \iff$

$D \simeq 0.6$ → o comprimento da linha tende para zero, ou seja, é menos do que uma linha

Exemplo B: Curva de Koch



- Fator de Redução = 3
- Número de cópias = 4

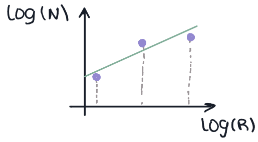
$D = \frac{\log 4}{\log 3} > 1$ → quando $n \to \infty$, $P \to \infty$

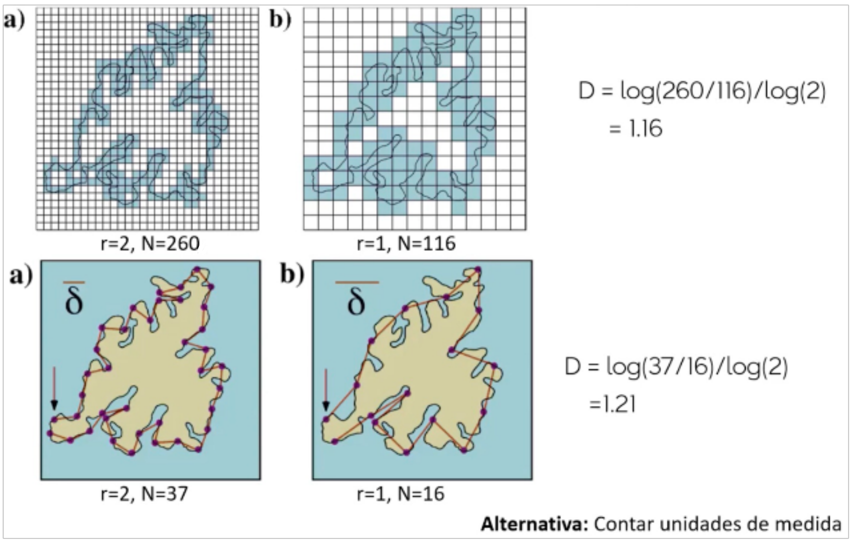
Exemplo C: objeto real (árvore, linha da costa de uma ilha, veias e artérias ...)

- Neste caso, como não se conhece o processo de construção fractal, não é possível calcular a sua dimensão fractal. Utiliza-se o método de contagem de caixas, fazendo uma estimativa da sua dimensão

Método de contagem de caixas

1) Analisar o objeto em estudo em várias resoluções - análise multi-resolução
2) Para cada resolução R, contar número de "caixas" N
3) Fazer o gráfico de log(N) e log(R)
4) Calcular a dimensão fractal D, através do declive da reta



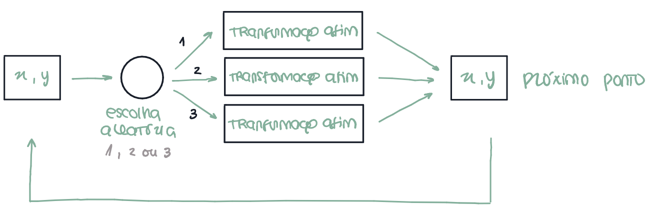


Formas de Criar Objetos Fractais

- Aplicação sucessiva de regra fixa de substituição geométrica
  - Máquina de cópias reduzidas (MRCM: Multiple Reduction Copy Machine)
  - Sistemas de funções iteradas (IFS: Iterated Functional System)
  - Exemplos: curva Koch, tapete Sierpinski, esponja de Menger, etc.
- Sistemas de Lindenmayer (L-Systems)
  - Formalismo matemático proposto em 1968 por biólogo húngaro
- Sistemas dinâmicos: fractais de fuga do tempo
  - Relação de recorrência no plano complexo
  - Exemplo: conjunto de Mandelbrot, etc.
- Fractais aleatórios - montanhas, trovões, veias, ...
  - Gerados por processos estocásticos
  - Exemplo: agregação por difusão limitada (DLA: Diffusion Limited Aggregation)

MRCM: Multiple Reduction Copy Machine

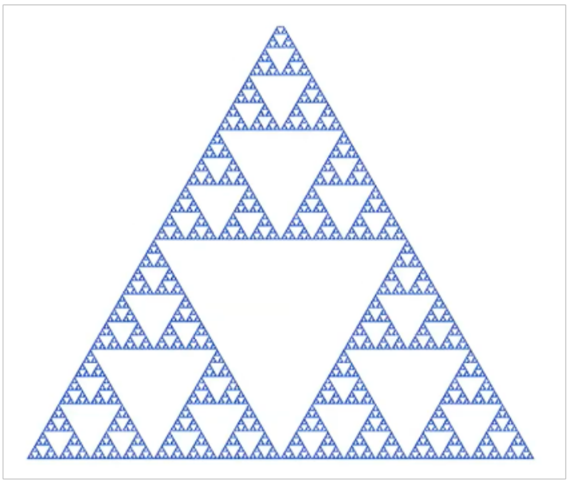
IFS: Iterated Functional System



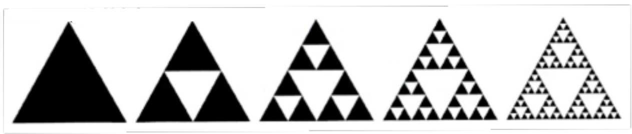
NOTA
- descartar os primeiros pontos gerados
- substitui, com vantagem, o algoritmo MRCM

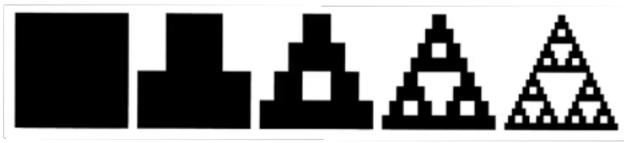
Triângulo de Sierpinski

- $D = \frac{\log(3)}{\log(2)} \simeq 1,585$



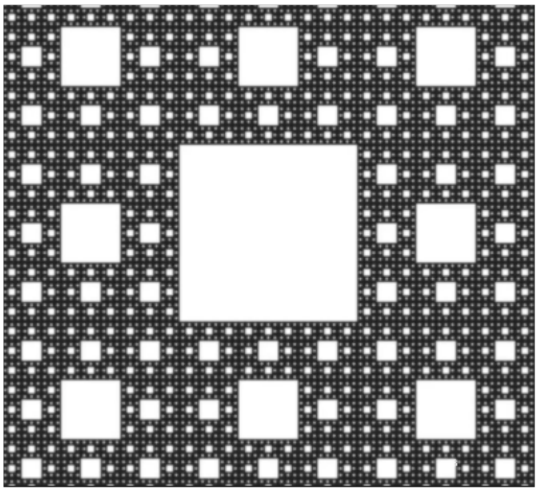
- Fator de Redução = 2
- Número de cópias = 3





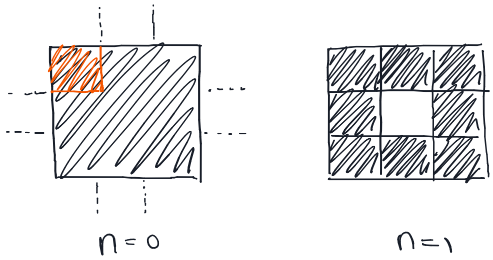
independentemente do axioma (forma inicial), o resultado é sempre o mesmo, ou seja, converge para o mesmo atrator, ponto fixo (fazem parte da mesma bacia de atração)

Carpete de Sierpinski

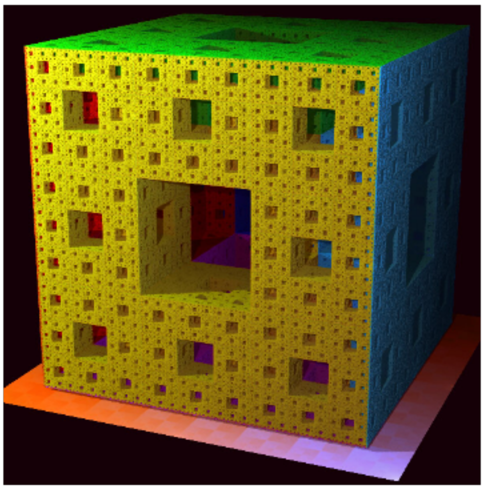


- Fator de Redução = 3
- Número de cópias = 8

- $D = \frac{\log(8)}{\log(3)} \simeq 1,8928$



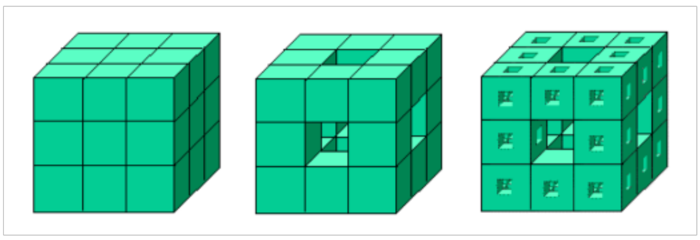
Esponja de Menger



- Fator de Redução = 3
- Número de cópias = 20

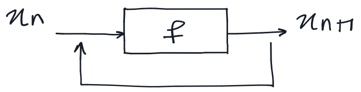
- $D = \frac{\log(20)}{\log(3)} \simeq 2,73$

> Volume tende para zero, logo não chega a ser um objeto tridimensional ($D < 3$)

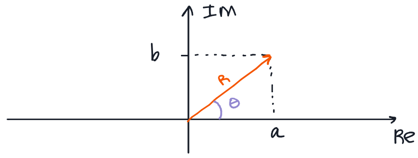


Conjuntos de Julia e Mandelbrot

Sistemas Discretos no plano Complexo



$x_n, x_{n+1} \in \mathbb{C}$



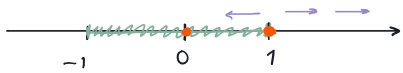
$$x = a + ib = Re^{i\theta}$$

1) Conjunto de Julia

- conjunto de pontos que permanecem limitados (isto é, que não tendem para infinito) quando iterados por uma determinada função

Exemplo 1:
(para uma função real)

$f(x) = x^2$



Conjunto de Julia de $f(x) = [-1, 1]$

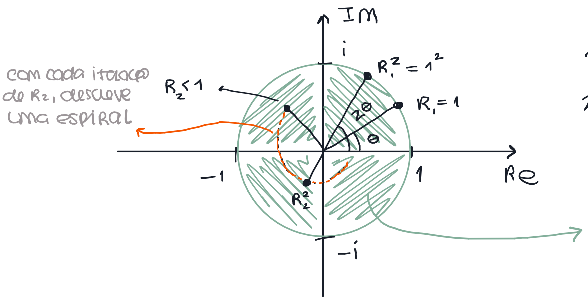
$x_0 = 2 \rightarrow x_1 = 4 \rightarrow x_2 = 8 \rightarrow +\infty$

ou seja, não pertence ao conjunto de Julia

$x_0 = 0{,}5 \rightarrow x_1 = 0{,}25 \rightarrow x_2 = 0.0625 \rightarrow 0$

não vai divergir, ou seja, este ponto pertence ao conjunto de Julia

Exemplo 2:
(no plano complexo)



$$x = Re^{i\theta}$$
$$x^2 = R^2 e^{i2\theta}$$

- se $R = 1$, a cada iteração $R = 1$
- se $R < 1$, a cada iteração R diminui $(R \rightarrow 0)$
- se $R > 1$, a cada iteração R aumenta $(R \rightarrow \infty)$

Conjunto de Julia = Todos os pontos com $R = [0, 1]$

Algoritmos: computar J-sets (recursivo?)

- Definir uma função quadrática:

$\boxed{f_c(z) = z^2 + c}$, em que z é um número complexo e c é uma constante complexa

- Para cada valor de c, quer-se calcular o seu conjunto de Julia
- Iniciar c com um número complexo, para cada x_0 existente num dado subconjunto do plano complexo:

1) Para $t = 1$ até t_{max},
2) Calcular $x_{t+1} = x_t^2 + c$
3) Se $|x_t| > 2$, sai-se do ciclo, pois se o ponto se afastar da origem mais do que 2, o processo iterativo diverge (segundo um teorema matemático)

↳ dentro deste círculo de raio 2, o ponto em princípio, pertence ao conj. de Julia. Não é garantido, pois existem alguns pontos com um comportamento caótico, sendo difícil distinguir se diverge ou não

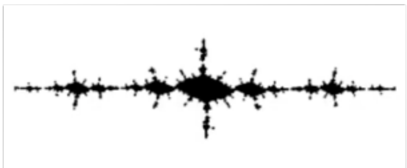
(?) se for caótico mantém-se dentro de um atrator, senão diverge

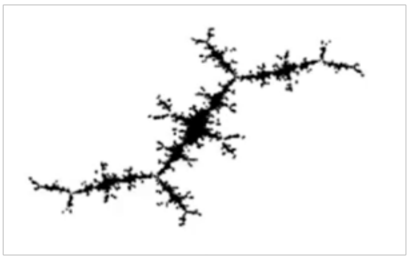
- Assim, tem que se definir em quantas iterações (t_{max}) se faz o teste. Por exemplo, testa-se durante 100 iterações, se o ponto nunca sair do círculo de raio 2, então assume-se que pertence ao conjunto de Julia

$$\boxed{J(f_c) = \{ z \in \mathbb{C} : \forall n \in \mathbb{N}, |f_c^n(z)| \leq 2 \}}$$

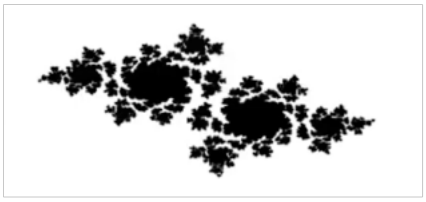
- Tem-se conjuntos de Julia para diferentes valores de c.

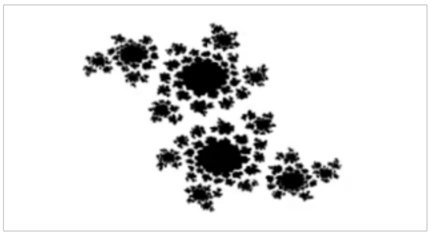
Conjuntos Conexos





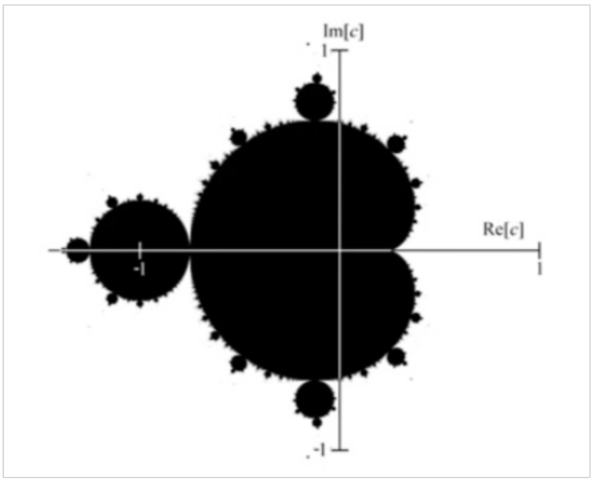
Conjuntos Não Conexos





Conjunto de Mandelbrot

- É constituído pelo conjunto de valores de c dos conjuntos de Julia que dão origem a conjuntos conexos



NOTA
Existem infinitos conjuntos de Julia, mas só existe um conjunto de Mandelbrot

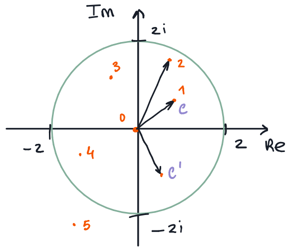
$$\boxed{M = \{ c \in \mathbb{C} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |f_c^n(0)| < \infty \}}$$

Algoritmo: Determinação de M

• Iniciar $x_0 = 0$, para cada c existente num dado subconjunto do plano complexo:

1) Para $t=1$ até t_{max},
2) Calcular $x_{t+1} = x_t^2 + c$
3) Se $|x_t| > 2$, sai-se do ciclo, pois se o ponto se afastar da origem mais do que 2, o processo iterativo diverge (segundo um teorema matemático)

↳ dentro deste círculo de raio 2, o ponto em princípio, pertence ao conj. de Julia. Não é garantido, pois existem alguns pontos com um comportamento caótico, sendo difícil distinguir se diverge ou não



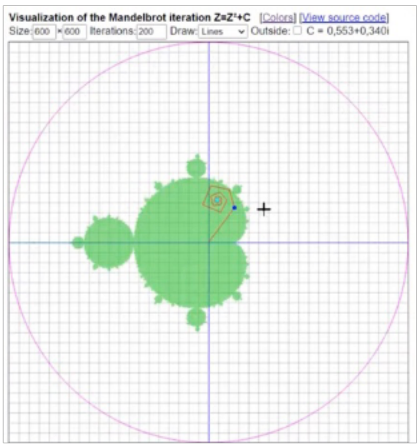
$f(x) = x^2 + c$

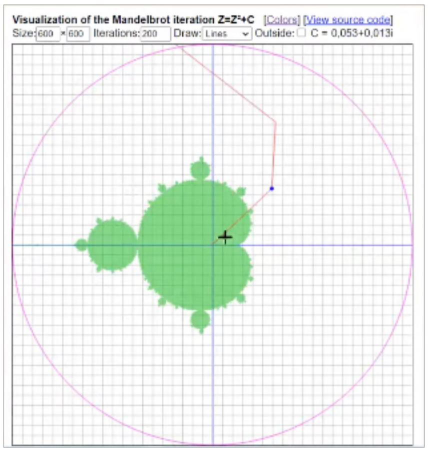
$x_0 = 0$

$x_1 = c$

$x_2 = c^2 + c$

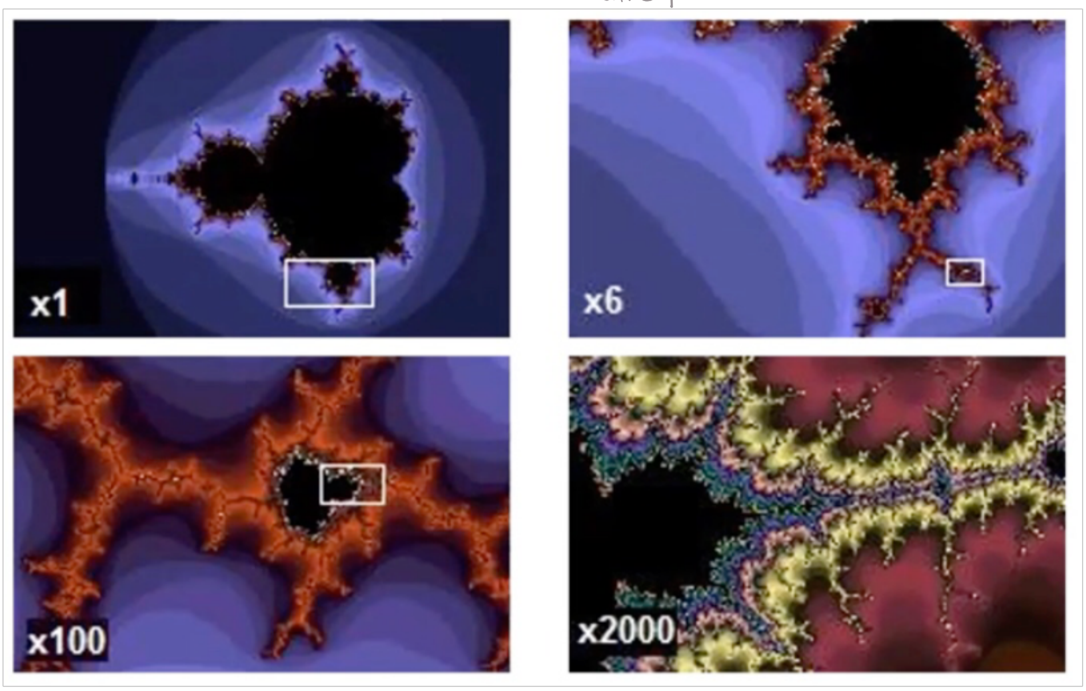
...



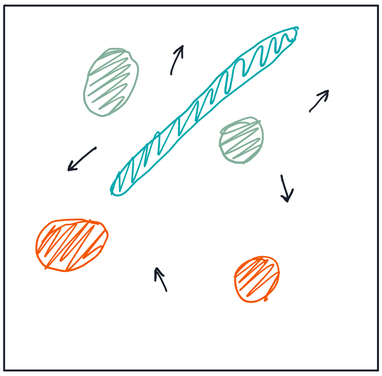


Objeto Fractal e Autosemelhança – Conjuntos de Julia e Mandelbrot:

• Atribuir uma cor, consoante a iteração em que o ponto diverge ($|x_t| > 2$), ou consoante outro critério à escolha (ex.: qual o quadrante em que saiu do círculo)
↳ direção



ECOSSISTEMA



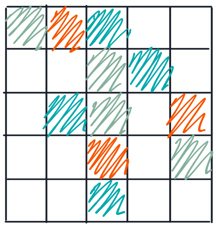
- Espaço 2D
1. zonas de alimento
2. zonas de água
3. obstáculos ou penalizações
- Sobre este mundo evoluem animais

Animais
- nascer
- comer
- Reprodução
- morrer

- Têm um atributo interno: energia. Nascem com uma determinada energia

⊕ comer
⊖ movimento, metabolismo

REGRA DA MAIORIA PARA CRIAR BIOMAS



- incoerente espacialmente
- procura-se ter zonas contíguas

→ solução: Regra da maioria

SHEETLESS

- Capacidade de carga = ?

45 × 60 = 2700 patches

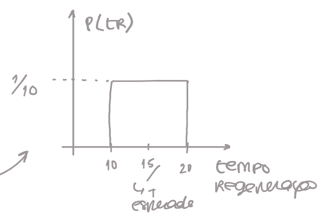
4 calorias / patch

E [tempo de regeneração] = 15 s

$\frac{2700 \times 4}{15}$ calorias / segundo

capacidade de produção

↳ produção do terreno =
= 720 calorias / segundo



1 caloria/segundo por Animal

Capacidade de carga $= \frac{720}{1} = 720$

Reprodução: 10 cal → 25 cal

$15/4 \simeq 4$

Tem que comer 4 vezes

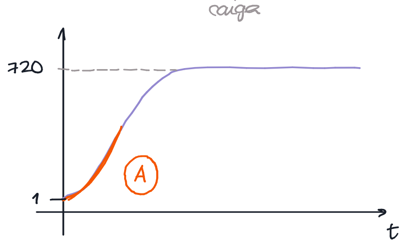
Imaginando que demora ~ 5 segundos a duplicar a população

se os recursos fossem ∞

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P \left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

densidade relativa

capac. carga



variação da população

$$\frac{dP}{d} = \alpha \underbrace{(1-d)}_{} P$$

Taxa natalidade máxima

Taxa de natalidade efetiva

começa por ser α, mas vai diminuindo

α = ?

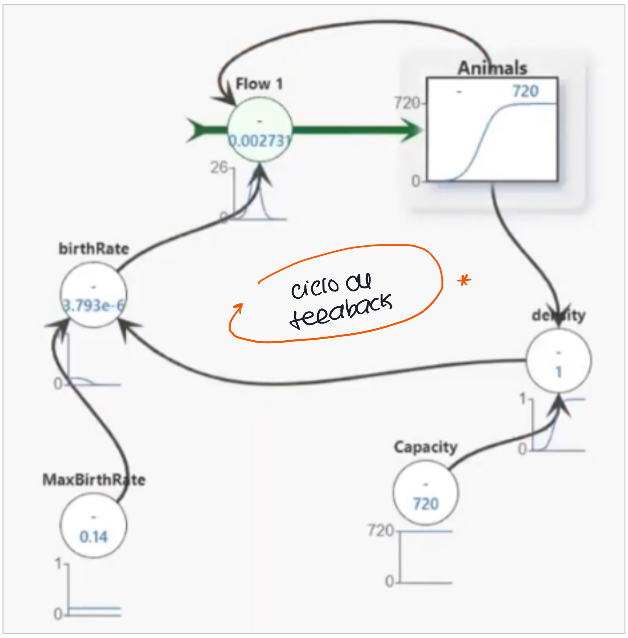
(A) $P(t) = P_0 e^{\alpha t}$

$2 \cancel{P_0} = \cancel{P_0} e^{5\alpha}$ (=)

$\ln 2 = 5\alpha$ (=)

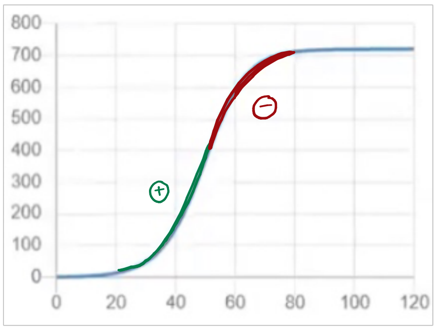
$\alpha \simeq 0.14$ //

Logo: $\frac{dP}{d} = 0.14\,P\left(1 - \frac{P}{720}\right)$

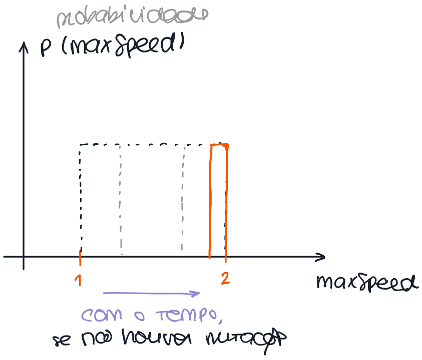


* ciclo de feedback

- positivo
- negativo ⟶ obriga a estabilizar



DIVERSIDADE E ADAPTAÇÃO



Condições para evolução de uma população

(para que se adapte ao ambiente, escolhendo os genes mais "fortes")

1) Diversidade
2) Hereditariedade
3) seleção (pressão competitiva, devido à capacidade de carga → não há recursos infinitos)

MUTAÇÕES
E
CROSSOVER
(com reprodução sexuada)