Lista de exercícios das aulas n.º 02: Teoria das probabilidades

Exercício 1.
Considere a experiência que consiste em lançar um dado ao ar e anotar o número que sai. Sejam os acontecimentos:

- A - *"saída de face par"*
- B - *"saída de face múltipla de 3".*

(a) *Defina o espaço de resultados* S *e os acontecimentos* A *e* B.

(b) *Determine* $A \cup B$ *e* $A \cap B$.

(c) *Determine* $\overline{A}$ *e* $\overline{B}$.

(d) *Determine* $\overline{A \cup B}$ *e* $\overline{A \cap B}$.

(e) *Determine* $\overline{A} \cup \overline{B}$ *e* $\overline{A} \cap \overline{B}$.

(f) *Determine* $B - A$ *e* $A - B$.

Exercício 2.
Mostre que

$$\overline{\left(\overline{\overline{A} \cup B}\right) \cap B} = S.$$

Exercício 3.
Uma caixa contém quatro bolas brancas, seis pretas, três vermelhas e oito verdes. Retiram-se simultaneamente três bolas. Calcular é a probabilidade de:

(a) *serem todas da mesma cor;*

(b) *serem de cores diferentes;*

(c) *serem duas brancas e uma de outra cor;*

(d) *serem pelo menos duas brancas;*

(e) *ser só uma azul.*

Exercício 4.
Considere um jogo que consiste no lançamento de um dado quatro vezes consecutivas em que se ganha se sair pelo menos uma vez a face seis. Qual é a probabilidade de se ganhar o jogo?

Exercício 5.
Uma caixa tem 10 fichas numeradas de 0 a 9. Extraem-se 3 fichas sucessivamente e sem reposição. Entre os números formados com 3 algarismos, qual é a probabilidade destes números:

(a) *terem o último algarismo igual a zero?*

(b) *serem pares?*

(c) *serem ímpares?*

Exercício 6.
Oito amigos compraram bilhetes para o cinema. Observaram que ficariam sentados em duas filas paralelas, quatro numa e quatro na outra. Determine a probabilidade de dois desses amigos, o Nuno e o Pedro, ficarem sentados um atrás do outro.

Exercício 7.
Para assistirem a um espectáculo, o João, a Margarida e cinco amigos sentam-se, ao acaso, numa fila com sete lugares. Qual é a probabilidade do João e da Margarida não ficarem sentados ao lado um do outro?

Exercício 8.
Com base num estudo sobre o ambiente, apurou-se que 15% *dos automóveis testados emitem hidrocarbonetos em excesso,* 12% *emitem demasiado* CO_2 *e* 8% *emitem demasiada quantidade de ambos. Um automóvel é seleccionado aleatoriamente. Determine a probabilidade de:*

(a) *pelo menos um dos compostos ter níveis altos de emissão;*

(b) *nenhuma das emissões ser excessiva;*

(c) *a emissão de hidrocarbonetos não ser excessiva;*

(d) *a emissão de hidrocarbonetos ser excessiva mas a emissão de* CO_2 *não ser excessiva.*

Exercício 9.
Relativamente a A e B, acontecimentos de uma mesma experiência aleatória, sabe-se que:

$$P\left[\overline{A \cup B}\right] = 0,2; \qquad P\left[\overline{A}\right] = 0,3; \qquad P\left[B\right] = 0,1.$$

Mostre que A e B são acontecimentos incompatíveis, mas não contrários.

Exercício 10.
No departamento de controlo de qualidade de uma empresa existem vários microscópios, dos quais, A, B e C têm as seguintes taxas de utilização diária: A - 25%, B - 30%, C - 40%, A e B - 15%, A e C - 18%, B e C - 12%, A, B e C - 10%. Calcule a probabilidade de num determinado dia:

(a) *serem utilizados os microscópios B e C, mas não o microscópio A;*

(b) *serem utilizados todos os microscópios;*

(c) *ser utilizado só o microscópio B;*

(d) *ser utilizado pelo menos um dos microscópios;*

(e) *serem utilizados dois dos microscópios;*

(f) *não ser utilizado nenhum dos microscópios;*

(g) *ser utilizado o microscópio A, sabendo que o microscópio C foi utilizado nesse dia.*

Exercício 11.
Em determinado colégio, 25% dos estudantes foram reprovados em Matemática, 15% em Química e 10% em Matemática e Química. Um estudante é seleccionado aleatoriamente.

(a) *Qual é a probabilidade dele ter sido reprovado em Matemática dado que ele foi reprovado em Química?*

(b) *Se foi reprovado em Matemática, qual é a probabilidade de ter sido reprovado a Química?*

(c) *Qual é a probabilidade dele ter sido reprovado em pelo menos uma das disciplinas?*

(d) *Qual é a probabilidade dele não ter reprovado a nenhuma das disciplinas?*

Exercício 12.
Num aldeamento turístico encontram-se reunidos 200 turistas de vários países. Sabe-se que 82 falam português, 38 não falam inglês e há 62 turistas que falam português e inglês.

(a) *Qual é a probabilidade de um turista, escolhido ao acaso, falar inglês mas não falar português?*

(b) *Qual é a probabilidade de um turista, escolhido ao acaso, falar pelo menos uma destas duas línguas?*

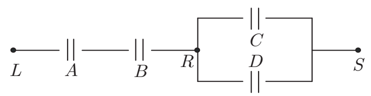
(c) *Qual é a probabilidade de um turista escolhido ao acaso, não falar inglês nem falar português?*

(d) *Fez-se um sorteio de um bilhete para a entrada num parque aquático. Sabe-se que o vencedor não fala inglês. Qual é a probabilidade de falar português?*

(e) *Se um determinado turista escolhido ao acaso falar português, qual é a probabilidade de falar também inglês?*

Exercício 13.
Numa escola, 60% dos alunos do 12º ano estudam Matemática e 50% dos que estudam Matemática também estudam Economia. Encontra-se, ao acaso, um aluno do 12º ano da escola. Qual é a probabilidade deste aluno estudar Matemática e Economia?

Exercício 14.
A probabilidade de fecho de cada relé do circuito apresentado é dada por p.



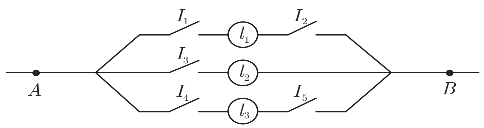
Se todos os relés funcionarem independentemente, qual será a probabilidade de que:

(a) *passe corrente entre os terminais L e R?*

(b) *passe corrente entre os terminais R e S?*

(c) *passe corrente entre os terminais L e S?*

Exercício 15.
Considere o circuito eléctrico representado na figura seguinte.



As lâmpadas l_1, l_2 e l_3 só acendem se os interruptores dos respectivos ramos se encontrarem fechados. Sabendo que os interruptores funcionam independentemente uns dos outros e que cada um deles tem a probabilidade p de se encontrar fechado, determine (em função de p):

(a) a probabilidade de poder passar corrente entre os pontos A e B;

(b) a probabilidade de se acenderem as lâmpadas l_1 e l_2;

(c) a probabilidade de se encontrarem acesas todas as lâmpadas;

(d) a probabilidade de só se encontrarem acesas l_1 e l_3.

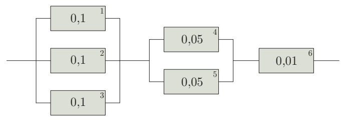
Exercício 16.
Três indivíduos atiram a um alvo de forma independente, sendo a probabilidade de cada um deles acertar de $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$, respectivamente. Qual é a probabilidade de que:

(a) o alvo não seja atingido?

(b) o alvo seja atingido?

(c) o alvo seja atingido por pelo menos dois indivíduos?

Exercício 17.
Considere um circuito constituído por vários blocos. A probabilidade de cada componente i, com $i = 1, \ldots, 6$, falhar é a indicada na figura. Suponha que as componentes falham de forma independente. Qual é a probabilidade do circuito estar a funcionar?



Exercício 18.
Consideremos os acontecimentos A_1, A_2 e A_3, com probabilidades de ocorrência diferentes de zero. Sabe-se que:

- $P[A_1] = 0,12$; $P[A_2] = 0,1$; $P[A_2 \cap A_3] = 0,05$;
- *A_1 é mutuamente exclusivo quer com A_2, quer com A_3;*
- *dois dos acontecimentos referidos são independentes.*

Calcule $P[A_1 \cup A_2 \cup A_3]$.

Exercício 19.
Uma empresa de reparações faz um teste aos candidatos a um emprego, para detectar as suas aptidões para a profissão. Passam no teste 60% dos candidatos. Dos que passam no teste, 80% concluem o treino com sucesso. Como experiência empregaram-se também candidatos que não passaram no teste. Deste grupo concluíram o treino com sucesso 50%.

(a) Qual é a probabilidade de um candidato escolhido ao acaso concluir o treino com sucesso?

(b) Verificou-se que um candidato escolhido ao acaso conclui o treino com sucesso. Qual é a probabilidade de ele ser oriundo do grupo que não passou no teste?

Exercício 20.
Um investigador da área de hardware está a desenvolver três componentes, A, B e C, que planeia lançar no mercado. Para avaliar os efeitos da temperatura nesses componentes, submeteu uma produção experimental dos referidos componentes a um teste que envolveu temperaturas elevadas, visando verificar se a reacção destes em relação a um determinado parâmetro de interesse é positiva ou negativa. Sabe-se que 55% da produção total de componentes submetida ao teste obteve resultados positivos; em 40% dos componentes do tipo A e em 10% dos componentes do tipo C observou-se um resultado negativo no teste; em 40% dos componentes do tipo B o resultado do teste foi positivo; 15% da produção experimental é constituída por componentes do tipo C.

(a) *Calcule a probabilidade de um componente escolhido ao acaso de entre os produzidos ser do tipo A.*

(b) *Calcule a probabilidade de um componente escolhido ao acaso ser do tipo C e tenha obtido um resultado negativo no teste.*

(c) *Sabe-se que um determinado componente foi submetido ao teste e apresentou resultado negativo. Qual a probabilidade de que este seja do tipo B?*

(d) *Qual é a probabilidade de um determinado componente submetido ao teste ter apresentado resultado positivo ou ser do tipo C?*

Exercício 21.
A empresa BETA apresentou ao seu contabilista as facturas de venda dos seus três clientes, A, B e C. 40% dessas facturas são do cliente A. Sabe-se que 8% das facturas do cliente B não estão pagas e 18% das facturas do cliente C não estão pagas. A probabilidade duma factura não estar paga e ser do cliente A é $0,04$. Sabe-se ainda que 88,2% das facturas estão pagas.

(a) *Calcule a percentagem de facturas correspondente às empresas B e C;*

(b) *Escolheu-se uma factura ao acaso e verificou-se que não foi paga. Qual a probabilidade de ser do cliente B?*

(c) *Os acontecimentos "factura ser do cliente A" e "factura não foi paga" são independentes? Justifique.*

Exercício 22.
De um determinado instrumento de medição fazem parte três componentes electrónicas, cujas probabilidades de não estarem avariadas são respectivamente iguais a $0,7$, $0,8$ e $0,9$. Se nenhuma das componentes estiver avariada, o sistema funciona sempre; se uma das componentes estiver avariada, a probabilidade do sistema funcionar é $0,75$; se duas componentes estiverem avariadas, a respectiva probabilidade é $0,5$; no caso de todas as componentes estarem avariadas, o sistema não funciona. Admita que as componentes funcionam independentemente umas das outras.

(a) *Determine a probabilidade do sistema funcionar.*

(b) *Sabendo que o sistema não está a funcionar, determine a probabilidade de existir uma componente avariada no sistema.*

Exercício 23.
Uma determinada agência de viagens trabalha com três companhias aéreas diferentes, A, B e C. Para poder servir melhor os seus clientes, a agência decidiu fazer um estudo sobre as três companhias. Concluiu que 35% dos seus clientes preferem a companhia A. Das pessoas que viajam com a companhia B, 10% perdeu a bagagem, enquanto que das pessoas que viajam com a companhia A, apenas 8% perdem a bagagem. 3% das pessoas viajam na companhia C e perdem a bagagem. 7,3% das pessoas que adquiriram bilhete nesta agência perdem a bagagem no final da viagem. Uma determina pessoa pretende adquirir um bilhete de avião nessa agência de viagens.

(a) *Qual é a probabilidade de comprar um bilhete da companhia B?*

(b) *Se no final da viagem perdeu a bagagem, qual é a probabilidade de ter viajado na companhia C?*

(c) *Qual é a probabilidade de ter viajado na companhia B e não ter perdido a bagagem no final da viagem?*

(d) *No final duma viagem foram observados 10 passageiros à espera da bagagem.*

(d_1) *Qual é a probabilidade de pelo menos 8 deles receberem a bagagem?*

(d_2) *Se dois deles não receberam a bagagem, qual é a probabilidade de serem o primeiro e o último da fila?*