

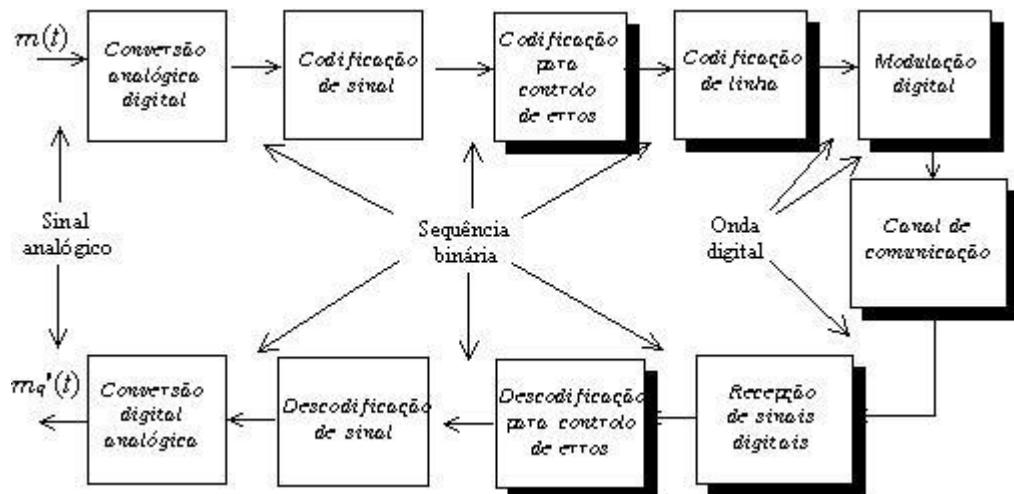
INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

ÁREA DEPARTAMENTAL DE ENGENHARIA DE ELETRONICA E
TELECOMUNICAÇÕES E DE COMPUTADORES

GRUPO DISCIPLINAR DE TELECOMUNICAÇÕES

Comunicação de Dados

(Introdução)



CARLOS EDUARDO DE MENESES RIBEIRO

Novembro de 2012

(...) um sistema de comunicação (...) consiste essencialmente de cinco partes:

1. Uma *fonte de informação* que produz uma mensagem ou sequência de mensagens a serem comunicadas ao terminal recetor. (...)
2. Um *transmissor* que opera sobre a mensagem de alguma forma para produzir um sinal adequado à transmissão ao longo do canal. Na telefonia esta operação consiste simplesmente na mudança de pressão sonora numa corrente elétrica proporcional. Em telegrafia temos um processo de codificação que produz a sequência de pontos, traços e espaços sobre o canal correspondente à mensagem. Num sistema multiplexado PCM os diferentes sinais de fala devem ser amostrados, quantificados, codificados e, finalmente, intercalados adequadamente para construir o sinal. Sistemas *vocoder*, televisão e de frequência modulada são outros exemplos de operações complexas aplicadas à mensagem para obter o sinal.
3. O *canal* é meramente o meio utilizado para transmitir o sinal do transmissor ao recetor. Pode ser um par de condutores, um cabo coaxial, uma banda de frequências de rádio, um feixe de luz, etc..
4. O *recetor* normalmente executa a operação inversa da que fez o transmissor, reconstruindo a mensagem a partir do sinal.
5. O *destino* é a pessoa (ou coisa), para quem a mensagem é proposta.

Claude E. Shannon

A Mathematical Theory of Communication, 1948

ÍNDICE

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 LIMITAÇÕES DOS SISTEMAS DE COMUNICAÇÃO	1
1.2 MODELO DE REFERÊNCIA OSI	2
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	4
2 CÓDIGOS DE LINHA BINÁRIOS	7
2.1 ATRIBUTOS DOS CÓDIGOS DE LINHA	7
2.2 FORMATOS DOS CÓDIGOS DE LINHA	11
2.3 POLAR SEM RETORNO A ZERO (PNRZ)	13
2.4 POLAR COM RETORNO A ZERO (PRZ)	13
2.5 UNIPOLAR SEM RETORNO A ZERO (UNRZ)	14
2.6 MANCHESTER	15
2.7 BIPOLAR SEM RETORNO A ZERO (BNRZ)	15
2.8 SEM RETORNO A ZERO INVERTIDO (NRZI)	17
2.9 MANCHESTER DIFERENCIAL	18
2.10 BIT DE ENCHIMENTO	19
2.11 MODO DE TRANSMISSÃO ASSÍNCRONO	20
3 CANAL DE COMUNICAÇÃO	23
3.1 CANAL AWGN DE BANDA LIMITADA	23
3.2 ATENUAÇÃO	24
3.3 RELAÇÃO SINAL–RUÍDO NO CANAL	25
3.4 CANAL SEM DISTORÇÃO	25
3.5 ATRASO	27
3.6 MEIOS DE TRANSMISSÃO	28
4 LARGURA DE BANDA	31
4.1 INTERFERÊNCIA INTERSÍMBÓLICA	32
4.2 CRITÉRIO DO PRIMEIRO ZERO ESPETRAL	32
4.3 CRITÉRIO DE NYQUIST	32
4.4 PADRÃO DE OLHO	39
5 RECEPTOR ÓTIMO	45
5.1 DESCODIFICADOR DE MÁXIMO <i>A POSTERIORI</i>	46
5.2 DESCODIFICADOR DE MÁXIMA VEROSIMILHANÇA	47
5.3 PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT	48
5.4 FILTRO ADAPTADO	51
5.5 FILTRO ADAPTADO NORMADO	54
5.6 CÓDIGO PNRZ	55
5.7 CÓDIGOS POLARES	58
5.8 CÓDIGOS UNIPOLARES	58
5.9 CÓDIGO BNRZ	60
5.10 CÓDIGOS DIFERENCIAIS	62
5.11 COMPARAÇÃO DO DESEMPENHO	63
6 TRANSMISSÃO M–ÁRIA EM BANDA DE BASE	65
6.1 PAM DIGITAL – MODULAÇÃO POR AMPLITUDE DE IMPULSOS	65
6.2 ENERGIA MÉDIA POR SÍMBOLO	66
6.3 LARGURA DE BANDA	66
6.4 PROBABILIDADE DE ERRO DE SÍMBOLO	67
6.5 PROBABILIDADE DE ERRO DE BIT	68
6.6 CÓDIGO 2B1Q	70
6.7 COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO	72

6.8	CAPACIDADE DE CANAL	73
7	MODULAÇÃO DIGITAL	75
7.1	MODULAÇÕES B-PSK, OOK E B-ASK.....	76
7.2	MODULAÇÃO FSK	80
7.3	RECEÇÃO NÃO COERENTE	84
7.4	MODULAÇÃO M-PSK.....	87
7.5	MODULAÇÃO QAM	91
7.6	COMPARAÇÃO DE DESEMPENHO	95
8	CODIFICAÇÃO PARA CONTROLO DE ERROS	97
8.1	ATRIBUTOS DOS CÓDIGOS DE CONTROLO DE ERROS	97
8.2	PROBABILIDADE DE ERRO DE BLOCO	101
8.3	CÓDIGO DE PARIDADE	102
8.4	CARÁCTER DE VERIFICAÇÃO DE BLOCO (BCC)	103
8.5	INTERLEAVING	104
8.6	DISTÂNCIA DE HAMMING E CAPACIDADE DE DETEÇÃO E CORREÇÃO	105
8.7	CÓDIGOS LINEARES	108
8.8	CÓDIGO DE REPETIÇÃO	109
8.9	CÓDIGO DE HAMMING	110
8.10	MATRIZ GERADORA	115
8.11	CÓDIGOS CÍCLICOS	119
8.12	IP CHECKSUM	125
9	CONCLUSÕES	127
PRINCIPAIS EQUAÇÕES		129
APÊNDICES	137	
APÊNDICE 1 – CÓDIGO ASCII	137	
APÊNDICE 2 – LARGURA DE BANDA EQUIVALENTE DO RUÍDO	138	
APÊNDICE 3 – FUNÇÕES DENSIDADE ESPETRAL DE POTÊNCIA EM CÓDIGOS DE LINHA	140	
APÊNDICE 4 – FUNÇÃO COMPLEMENTAR DE ERRO	141	
APÊNDICE 5 – <i>BER</i> COM CRITÉRIO MAP	143	
APÊNDICE 6 – <i>BER</i> EM SISTEMAS DISCRETOS	144	
APÊNDICE 7 – DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE BINOMIAL	146	
PERGUNTAS TEÓRICAS	149	
EXERCÍCIOS RESOLVIDOS	151	
EXERCÍCIOS PROPOSTOS	181	
EXERCÍCIOS PROPOSTOS EM MATLAB	193	
TRANSMISSÃO BINÁRIA NUM CANAL AWGN	193	
CÓDIGOS DE CONTROLO DE ERRO	197	
GLOSSÁRIO	199	
BIBLIOGRAFIA	201	

1 Introdução

O problema da comunicação de dados prende-se com a transmissão de informação digital entre dois equipamentos (computadores, telefones, *etc.*) através de um canal de comunicação. São transmitidos sinais (elétricos, eletromagnéticos, óticos) que correspondem a códigos representando a informação digital.

1.1 Limitações dos sistemas de comunicação

No canal de comunicação, os sinais não são transmitidos instantaneamente, são atenuados devido à resistência elétrica, distorcidos devido à largura de banda e inseridos em ruído devido ao ruído *térmico* ou a interferências eletromagnéticas.

Os efeitos do canal de comunicação levam o receptor a nem sempre conseguir discriminar a informação recebida. Havendo erros entre o transmissor e o receptor a qualidade da transmissão é medida através da relação entre o número de erros de bit e a totalidade dos bits transmitidos (*BER – bit error rate*), que é uma estimativa da probabilidade de erro de bit (também denominada relação ou taxa de erro de bit).

A largura de banda do canal de comunicação é um recurso extremamente importante que interessa preservar. A eficiência espectral é a relação entre o débito binário (número de bits transmitidos por segundo) e a largura de banda ocupada pelo sinal transmitido, servindo de medida de qualidade em relação a estes atributos. A transmissão *M-ária*, ou seja, a transmissão de símbolos com mais de duas formas de onda possíveis, faz diminuir o débito de símbolos mantendo o débito binário. A largura de banda é linearmente dependente do débito de símbolos, sendo esta uma forma de melhorar a eficiência espectral.

Aos bits de informação poderão ser introduzidos bits de redundância, de modo a que bits errados sejam detetados ou mesmo corrigidos. Os códigos de

correção necessitam de mais redundância que os códigos de deteção, aumentando o número de bits no canal de comunicação. No entanto os códigos de deteção de erros necessitam de mecanismos que informem o transmissor destes erros de modo a que a informação respetiva possa ser retransmitida.

Não é possível encontrar um método de transmitir a informação digital com total eficiência, ou seja, com grande débito binário, grande eficiência espectral, pequena probabilidade de erro de bit, pequena energia e com pequena complexidade dos equipamentos transmissores e receptores. São discutidos neste texto os compromissos entre estes atributos e terá que ser encontrado, função dos recursos disponíveis, o método que melhor se adequa a cada aplicação. Por exemplo, são diferentes as soluções para ligar dois computadores numa mesma sala distanciados de alguns metros, ou quando estes se encontram em qualquer parte de um país ou mesmo do mundo. Chega-se ainda a soluções diferentes quando os utilizadores geram pouco tráfego, como os utilizadores domésticos, ou muito tráfego de grande prioridade, como numa empresa com diversos balcões interligados.

1.2 Modelo de referência OSI

Para interligar diversos equipamentos de diferentes fabricantes, cada um com a sua arquitetura, formato de dados, sistema operativo, *etc.*, a ISO (*International Organization for Standardization*) normalizou em 1979 um modelo de referência denominado de OSI (*open system interconnection*). Este é um modelo abstrato baseado em 7 camadas (física, ligação, rede, transporte, sessão, apresentação e aplicação), esquematizado na figura 1.1. Cada camada apenas comunica com as camadas imediatamente acima e abaixo, através de uma interface bem definida, tornando os protocolos que as implementam independentes das outras camadas.

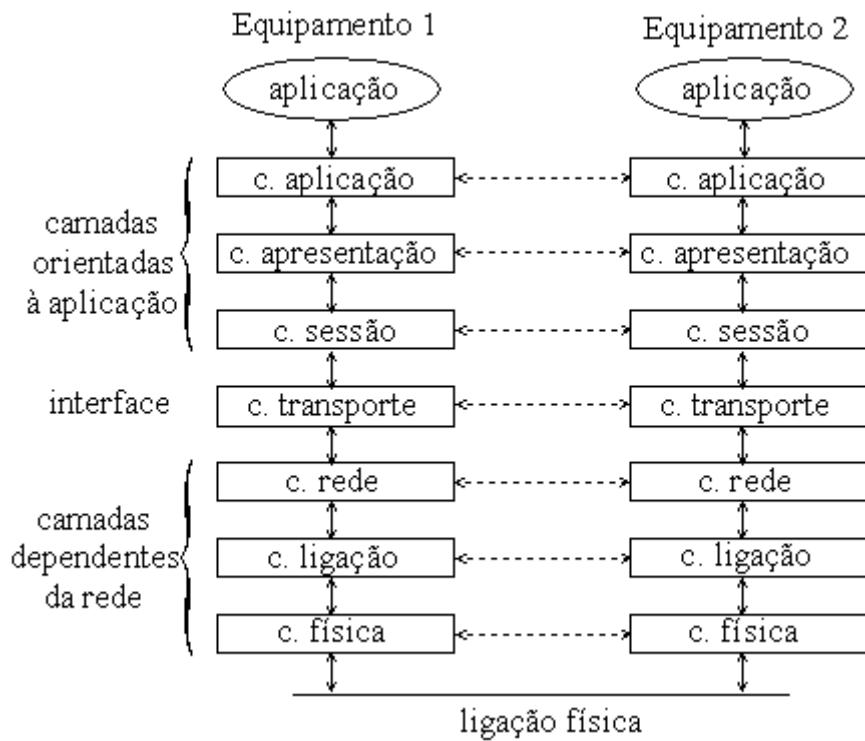


Figura 1.1

Modelo de referência OSI.

Modelo de 7 camadas normalizado em 1979 pela ISO.

1.2.1 Camada física

A camada física define as especificações físicas e elétricas dos equipamentos, *i.e.*, define a relação entre o equipamento e o meio físico. (*e.g.* tipo de fichas, cabos, formas e tensões dos sinais elétricos, quantidade de bits transmitidos, sincronismo dos relógios).

1.2.2 Camada de ligação

A camada de ligação de dados oferece, às camadas superiores, um trânsito fiável de dados em cada uma das ligações físicas da rede, pelo que ao detetar os erros nas suas unidades de envio (tramas), procede à sua correção, através de códigos apropriados, ou utiliza protocolos que promovem a retransmissão da trama em falha. De forma a garantir um trânsito fiável, estabelece procedimentos de sequência de tramas e do controlo do seu fluxo.

1.2.3 Camada de rede

A camada de rede procede ao encaminhamento da informação pela rede, organizando-a em pacotes, gerindo o endereçamento, levando em conta nomeadamente os tráfegos na rede e as respetivas prioridades.

1.2.4 Camada de transporte

A camada de transporte é uma camada de interface entre a aplicação e a rede, tornando as camadas orientadas à aplicação independentes da rede utilizada. É suportada por um protocolo que se estabelece entre os utilizadores finais da ligação, que disponibiliza os serviços de transferência de dados com garantia, nomeadamente de controlo de fluxo e de sequência correta dos segmentos formados nesta camada.

1.2.5 Camadas orientadas à aplicação

As camadas orientadas à aplicação (sessão, apresentação, aplicação) são responsáveis pela comunicação entre aplicações a correr em dois equipamentos, pela compatibilidade entre formatos e pela interface com os utilizadores.

Este texto focará especificamente a interface elétrica da camada física e os algoritmos de deteção e correção de erros de bit de camadas superiores dependentes da rede e da camada de transporte. Os outros aspetos saem do contexto deste texto, devendo ser abordados por exemplo em unidades curriculares específicas de redes de computadores.

1.3 Organização do texto

Para compreensão deste texto os leitores devem ter conhecimentos, a nível introdutório, sobre sinais e sistemas, análise de Fourier e principalmente sobre estatística e probabilidades. O texto é organizado do modo seguinte:

A secção 2 descreve os principais códigos de linha binários e seus atributos, que correspondem aos sinais a serem transmitidos em banda de base, ou seja, em canais do tipo “passa-baixo”. Termina com um exemplo de transmissão assíncrona, utilizada especialmente quando a geração da informação é aleatória, em pequena quantidade e para distâncias curtas.

Na secção 3 é apresentado um modelo do canal de comunicação e suas limitações: largura de banda, ruído, atenuação e distorção na banda. Reduzir o efeito destas limitações é objeto das secções 4 e 5.

Na secção 4 é resolvido o problema da interferência intersimbólica que advém da limitação da largura de banda do canal de comunicação, ao mesmo tempo que se limita a largura de banda ocupada.

A secção 5 é dedicada a outra das limitações do canal de comunicação, a introdução de ruído aditivo, gaussiano e branco. É apresentado o recetor ótimo e estimada a probabilidade de erro de bit, para todos os códigos de linha mencionados na secção 2.

Todas as secções anteriores devem ser vistas de modo sequencial e constituem um todo coerente obrigatório numa introdução mínima sobre comunicação de dados.

Na secção 6 introduz-se o conceito de transmissão *M*-ária, essencial para melhorar a eficiência espectral. É abordada a Lei de Hartley-Shannon sobre capacidade de canal em canais com ruído aditivo gaussiano, correspondendo ao débito binário máximo possível de transmitir, virtualmente sem erros, para determinadas relação sinal-ruído e largura de banda do canal.

A secção 7 descreve as principais modulações binárias e *M*-árias, utilizadas quando o canal é do tipo “passa-banda”. Novamente são abordados os problemas da largura de banda e da probabilidade de erro de bit. É referido o

problema da necessidade de sincronismo de portadora e são apresentados receptores não coerentes para contornar esta necessidade.

A secção 8 dedica-se à codificação para controlo de erros. Havendo erros na comunicação entre o transmissor e o receptor é possível introduzir informação redundante de modo a os detetar ou corrigir. Esta secção pode ser omissa ou ser abordada seguidamente às secções 5, 6, ou 7. Num contexto por exemplo de redes de computadores pode mesmo ser abordada independentemente do resto do texto, bastando para tal assumir que numa transmissão existem erros devido às limitações do canal de comunicação.

Na secção 9 apresentam-se as conclusões, complementadas com a compilação das principais equações e quadros comparativos do desempenho dos diversos códigos de linha e modulações, bem como do controlo de erros.

São seguidamente apresentados vários apêndices que correspondem a temas de dois níveis: (1) temas que devem ser conhecidos, como conceitos de estatística e probabilidades e de sinais e sistemas, mas que devido à sua importância para a compreensão deste texto aqui se recordam; (2) temas que não são essenciais para a compreensão deste texto mas que podem ser de interesse dos leitores, aprofundando alguns assuntos.

Para que o leitor possa consolidar os seus conhecimentos são seguidamente propostas atividades com âmbitos distintos: perguntas teóricas; exercícios resolvidos; exercícios propostos com soluções; e exercícios para resolver recorrendo ao ambiente de programação MATLAB. Estes últimos correspondem ao desenvolvimento de simuladores em que é possível verificar experimentalmente os valores obtidos pelas equações deduzidas teoricamente. Está indicado em cada exercício a secção até à qual são necessários conhecimentos para o resolver.

2 Códigos de linha binários

Os códigos de linha têm como objetivo transmitir informação digital (níveis lógicos “0” e “1”) num canal de comunicação através de uma onda elétrica, eletromagnética ou ótica. Estes códigos encontram-se em banda de base, não utilizando modulação, ou seja, são constituídos por níveis de tensão (ou corrente) que transitam de um modo descontínuo.

2.1 Atributos dos códigos de linha

Diferentes características do canal de comunicação, diferentes aplicações e requisitos de qualidade, levaram a desenvolver diferentes códigos de linha, com atributos diferentes. Quase sempre estes atributos estabelecem compromissos, no sentido em que tentar melhorar um deles corresponde a piorar outro ou mesmo outros atributos. Os atributos mais importantes num código de linha são:

2.1.1 Débito binário

Numa transmissão binária em série o débito binário R_b (número de bits transmitidos por segundo) corresponde ao inverso do tempo de cada bit T_b (duração de cada símbolo binário), ou seja:

$$R_b = \frac{1}{T_b}. \quad (2.1)$$

2.1.2 Energia média por bit e potência transmitida

A energia é um recurso extremamente importante, do qual depende o valor a pagar à empresa fornecedora. Este torna-se ainda mais importante num mundo cada vez mais móvel, em que os equipamentos não estão ligados a tomadas (*e.g.* telefones móveis, computadores portáteis) mas são alimentados por baterias. Um maior consumo de energia corresponde assim à utilização de baterias de maior capacidade e/ou a um menor tempo da sua duração.

A energia (normalizada¹) de cada símbolo é definida por:

$$E_l = \int_0^{T_b} s_l^2(t) dt, \quad l = 0 \text{ ou } 1, \quad (2.2)$$

em que l representa o nível lógico “0” ou “1” e $s_l(t)$ a respetiva forma de onda. A energia média por bit, E_b , corresponde à média ponderada pela probabilidade de cada nível lógico, p_0 ou p_1 , respetivamente para o nível lógico “0” e “1”:

$$E_b = p_0 E_0 + p_1 E_1. \quad (2.3)$$

Neste texto assume-se que os níveis lógicos são equiprováveis, ou seja, $p_0=p_1=0,5$. Esta hipótese é suficientemente realista e simplifica a análise dos sistemas de comunicação. Nesta situação obtém-se:

$$E_b = \frac{E_0 + E_1}{2}. \quad (2.4)$$

A potência (normalizada¹) transmitida é definida por,

$$S_T = \frac{E_b}{T_b} = E_b R_b. \quad (2.5)$$

2.1.3 Eficiência espectral

Qualquer canal de comunicação (secção 3) tem uma banda de frequências limitada. Para evitar distorção da forma de onda o espetro do código de linha tem de estar contido na banda do canal de comunicação. Por outro lado, quando se pretende transmitir vários sinais digitais ao mesmo tempo no mesmo canal de comunicação, quanto menor for a largura de banda de cada sinal mais sinais se conseguem transmitir. A banda do canal de comunicação aparece assim como um recurso de extrema importância, que deve ser bem administrado.

¹ Assumindo um sinal de tensão ou corrente sobre uma carga de $1\ \Omega$.

Como os códigos de linha têm transições bruscas entre níveis (descontinuidades), a sua largura de banda é infinita. Este problema e suas soluções serão abordados posteriormente (secção 4), mas a largura de banda do código de linha, B_T , dependerá do número máximo de transições por segundo e deverá ser a menor possível. A eficiência espectral, medida de qualidade de como determinado código aproveita a largura de banda, correspondente à relação entre o débito binário e a largura de banda ocupada, e é dada por:

$$\rho = \frac{R_b}{B_T}. \quad (2.6)$$

2.1.4 Componente DC

Alguns canais de comunicação têm apenas acoplamento AC (corrente alterna), contendo condensadores em série que eliminam a componente DC (corrente contínua). Um canal típico com apenas acoplamento AC é a linha telefónica. Para transmitir neste tipo de canais o código de linha não pode apresentar componente DC, ou seja, o seu valor médio deve ser nulo, pois corre-se o risco do código não ser descodificado no receptor. Também é de evitar componentes DC localizadas pois podem ser desvanecidas num tempo curto.

2.1.5 Probabilidade de erro de bit

Uma das características dos canais de comunicação (secção 3) é a presença de ruído, que pode levar a erros de bit entre o transmissor e o receptor. Um código de linha deve ser o mais imune possível ao ruído, ou seja, deve ser descodificado com o menor número de erros de bit. Deve-se então minimizar a probabilidade de erro de bit, também denominada relação ou taxa de erro de bit (*BER – bit error rate*), para uma dada relação sinal-ruído no canal de comunicação. A probabilidade de erro de bit é definida por:

$$BER = \frac{\text{Número de bits errados}}{\text{Número de bits transmitidos}}, \quad (2.7)$$

em que se deve tender o número de bits transmitidos para infinito.

2.1.6 Capacidade de deteção de erros de bit

Alguns códigos são capazes de detetar erros de bit entre o transmissor e o recetor, ao restringir por regra a sequência de símbolos transmitidos. Se houver possibilidade de informar o transmissor destes erros os respetivos bits poderão ser retransmitidos. Esta capacidade, sem o envio de informação redundante, consegue diminuir a probabilidade de erro de bit, sem aumentar o débito binário (a menos da informação retransmitida).

2.1.7 Capacidade de sincronismo de símbolo

De modo a que o recetor consiga extrair corretamente a informação, este tem de conhecer o início e fim de cada símbolo (sincronismo de símbolo). Existem dois modos de transmissão: modo assíncrono e modo síncrono.

O modo assíncrono de transmissão é utilizado tipicamente quando a geração da informação é aleatória e em pequena quantidade e explicado no fim desta secção.

O modo síncrono de transmissão é utilizado para transmitir grande quantidade de informação (trama). No recetor, o relógio com informação de início e fim de cada símbolo (ou bit no caso da transmissão binária) tem que ser extraído do próprio código de linha, a partir das transições entre níveis. Esta capacidade deve ser independente da sequência de símbolos transmitidos. Idealmente, para que não haja perda de sincronismo, deve ser garantida uma transição por símbolo.

2.1.8 Complexidade

Um código de linha deve ser fácil de realizar e de ser detetado, pois esta facilidade leva a equipamentos menos complexos que por sua vez se traduzem num custo menor. Por exemplo, os equipamentos que, devido ao código que implementam, necessitem de fontes de alimentação com apenas uma polaridade,

são mais baratos que os que necessitem de polaridades simétricas. Os receptores que necessitem de sincronismo de símbolo e este não seja fácil de realizar são também mais sofisticados e portanto mais dispendiosos.

2.2 Formatos dos códigos de linha

Quanto à polaridade os códigos de linha podem ser: (1) Polares (P), quando definidos por formas de onda simétricas; (2) Unipolares (U) quando um dos símbolos é definido pela tensão 0 V; (3) Bipolares² (B) quando definidos por 3 símbolos, sendo duas formas de onda simétricas e pela tensão 0 V. Os códigos unipolares necessitam de apenas uma fonte de alimentação, reduzindo a complexidade, mas contêm sempre componente DC.

Quanto à maneira como a informação é transmitida os códigos de linha podem ser: (1) de nível, quando a informação se encontra no nível de tensão; (2) de transição, quando a informação se encontra na transição entre níveis. Esta transição pode se dar entre símbolos ou a meio do símbolo. Note-se que na presença de ruído é mais fácil detetar transições do que níveis de tensão.

Os códigos de linha podem ainda ser: (1) de retorno a zero (RZ – *return to zero*), normalmente a meio do bit e produz sempre pelo menos uma transição por símbolo, facilitando o sincronismo; (2) sem retorno a zero (NRZ – *no return to zero*), mantendo a mesma tensão durante todo o tempo de bit.

Alguns dos termos da antiga telegrafia migraram para a comunicação de dados. Destes, *mark* significa nível lógico “1” e *space* símbolo lógico “0”.

Seguidamente descrevem-se alguns dos códigos de linha mais comuns, representados na figura 2.1. Alternativamente os níveis lógicos e a sua representação podem estar invertidos.

² Alguns autores referem-se à codificação bipolar como sendo aquela que neste texto, como referido também por outros autores, é referida como codificação polar.

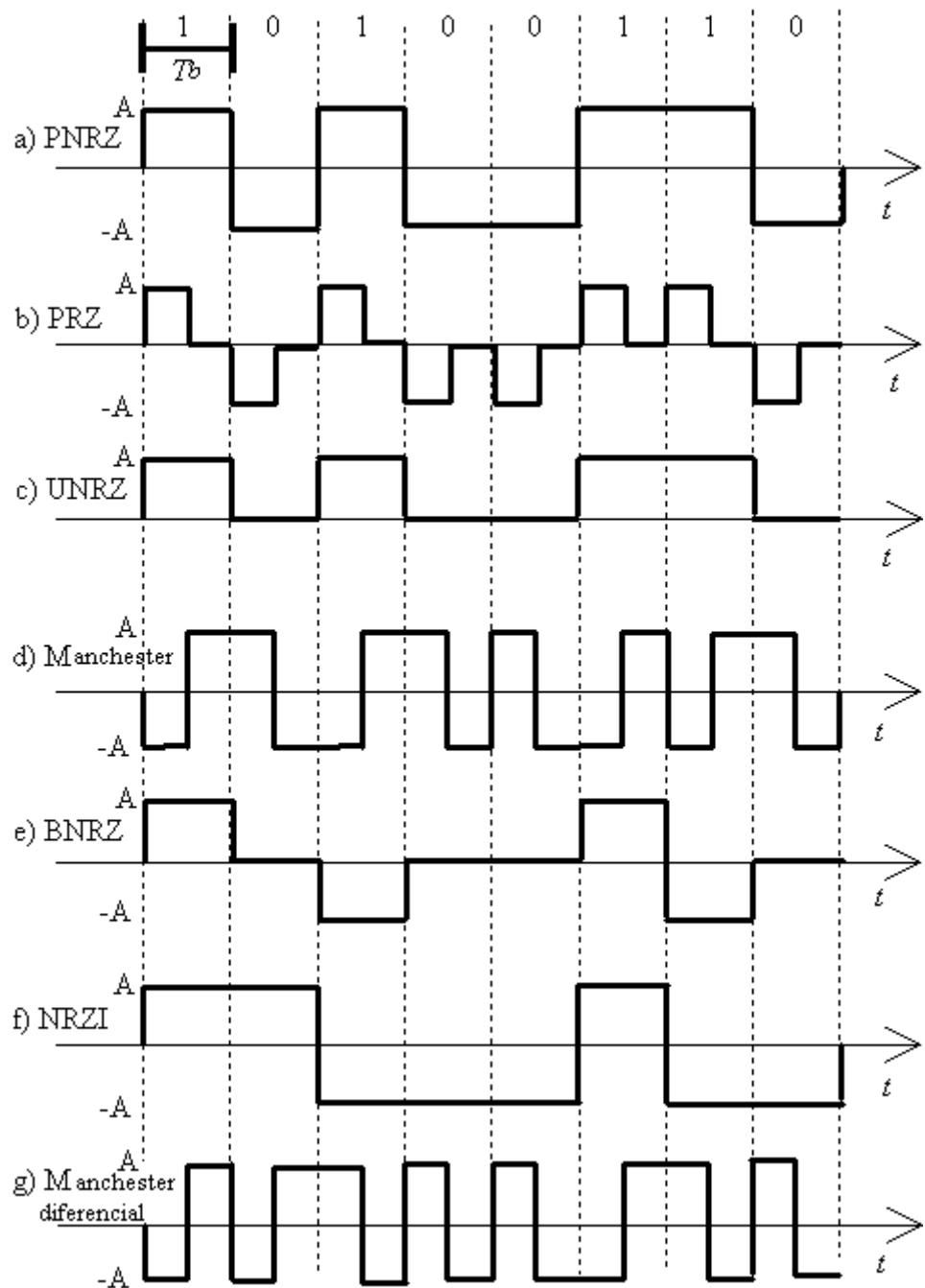


Figura 2.1

Formas de onda dos códigos de linha mais comuns.

Exemplo para a sequência binária "1 0 1 0 0 1 1 0".

a)PNRZ b)PRZ c)UNRZ d)Manchester e)BNRZ f)NRZI g)Manchester diferencial.

2.3 Polar sem retorno a zero (PNRZ)

Este é um código de nível em que o nível lógico “1” é representado pela tensão $+A$ e o nível lógico “0” pela tensão $-A$. Este código, ilustrado na figura 2.1-a, é também designado por NRZ-L (*level*).

O sincronismo de símbolo é conseguido através das transições que possam ocorrer quando da troca de níveis lógicos, pelo que pode ser perdido quando da transmissão de uma sequência longa de bits ao mesmo nível lógico. O número máximo de transições por segundo é de R_b , ou seja, no máximo uma transição por símbolo. Esta situação dá-se quando se envia uma sequência alternada de níveis lógicos.

Se os níveis lógicos forem equiprováveis a componente DC é nula. Contudo, para uma sequência ao mesmo nível lógico suficientemente prolongada, existirá desvanecimento do sinal se o canal tiver acoplamento AC. A potência deste código, independentemente da probabilidade de ocorrência de cada nível lógico, é A^2 , obtendo-se para a energia média,

$$E_b = S_T T_b = A^2 T_b. \quad (2.8)$$

Um exemplo da transmissão com código PNRZ é a interface RS-232, usada para conectar numa rede local dois computadores, ou um computador e teclados, impressoras, *modems*, *etc.*, com débitos binários até 115 kbit/s.

2.4 Polar com retorno a zero (PRZ)

Este código é semelhante ao PNRZ mas, como representado na figura 2.1-b, é produzido um retorno a 0 V a meio de cada bit.

A vantagem deste código em relação ao PNRZ é serem produzidas sempre duas transições por bit, uma no início e outra a meio do símbolo, nunca se perdendo o sincronismo. O número de transições por segundo é assim de $2R_b$,

independentemente da sequência de níveis lógicos. A potência deste código, independentemente da probabilidade de ocorrência de cada nível lógico, é $A^2/2$, obtendo-se para a energia média,

$$E_b = \frac{A^2}{2} T_b. \quad (2.9)$$

Este código pode ser considerado um código de transição, já que ao símbolo “1” corresponde uma transição positiva no início do bit e negativa a meio do bit, tendo o símbolo “0” as transições contrárias.

2.5 Unipolar sem retorno a zero (UNRZ)

Este código é análogo ao PNRZ mas, como representado na figura 2.1-c, o nível lógico “0” é representado por 0 V (também designado Unipolar NRZ-L).

A vantagem principal é ser de fácil implementação, nomeadamente por necessitar apenas de uma fonte de alimentação. A grande desvantagem é ter sempre uma componente DC. Todas as outras características são idênticas ao código PNRZ. Aliás, este código pode ser interpretado como um código PNRZ ao qual foi adicionado uma componente DC, de modo que o nível lógico “0” seja representado por 0 V. A energia do símbolo “1” é $A^2 T_b$ e a do símbolo “0” é 0 J. A energia média por bit é, para símbolos equiprováveis, dada pela equação 2.9.

Este código é vulgarmente utilizado para interligar em paralelo (em *bus* normalmente com dimensão múltipla de um byte) componentes de um computador, tais como o microprocessador, a RAM e controladores. Outra norma utilizando o código UNRZ é o “laço de corrente de 20 mA”. Esta utiliza 20 mA de corrente ou a ausência de corrente como símbolos. A vantagem da utilização da corrente em vez de tensão é um aumento da distância entre equipamentos. A corrente poder ser utilizada no recetor para ativar um diodo transmissor de luz (*led*) que fará acoplamento ótico com um fototransistor, isolando eletricamente o transmissor do recetor.

2.6 Manchester

Este código, também denominado de *split-phase*, é um código polar de transição entre níveis. Como representado na figura 2.1-d, o nível lógico “1” é representado pela transição a meio do tempo de bit da tensão $-A$ para $+A$ e o nível lógico “0” pela transição contrária. Dito de outra forma, o nível lógico “1” é representado pela amplitude $-A$ na primeira metade do bit e por $+A$ na segunda metade e o nível lógico “0” pelas amplitudes simétricas.

Como existe sempre uma transição a meio do bit nunca se perde o sincronismo de bit. O número mínimo de transições por segundo é assim de R_b . No máximo o número de transições é de $2R_b$, quando se envia uma sequência do mesmo nível lógico. Os símbolos não têm componente DC, pelo que o código não tem componente DC, seja qual for a sequência a ser transmitida e a probabilidade de ocorrência dos símbolos. A potência é também independente da probabilidade de ocorrência dos símbolos, sendo dada por A^2 e a energia por bit é dada pela equação 2.8.

Este código é utilizado por exemplo na norma IEEE 802.3 a 10 Mbit/s, para interligar equipamentos de redes locais *Ethernet*.

2.7 Bipolar Sem Retorno a Zero (BNRZ)

Neste código de nível bipolar, o nível lógico “1” é representado alternadamente pelas tensões $+A$ e $-A$, e o símbolo “0” por 0 V. Este código está ilustrado na figura 2.1-e, em que se assume que o último nível lógico “1” foi representado por $-A$.

Uma das principais vantagens deste código³ é ter memória e ser possível detetar erros de bit quando da receção dos níveis lógicos “1” que devem ocorrer

³ Também denominado pseudo-ternário porque tem 3 símbolos, embora a informação seja binária. Também denominado AMI (*alternate mark inversion*). Existe a versão deste código com retorno a zero (BRZ).

no recetor com tensões alternadas. Violações a esta regra correspondem a erros de bit. Erros isolados são sempre detetados. Outra vantagem deste código é o de ser insensível à polaridade. Pode-se inverter a polaridade do cabo de ligação entre os equipamentos transmissor e recetor que a informação continua a ser descodificada corretamente.

Devido à alternância da polaridade no símbolo “1” o código não produz componente DC nem sequer durações prolongadas à mesma tensão e portanto não sofre de desvanecimento. O número máximo de transições é de R_b , o que acontece quando se transmitem apenas níveis lógicos a “1”. A energia do símbolo “1” é A^2T_b e a do símbolo “0” é 0 J. A energia por bit é, para símbolos equiprováveis, dada também pela equação 2.9.

Quando de um nível lógico “1” existe sempre uma transição que permite o sincronismo de símbolo. Quando de uma sequência prolongada de níveis lógicos “0” o sincronismo pode perder-se. Em relação a este atributo o código BNRZ é mesmo assim melhor que os códigos PNRZ e UNRZ, que podem perder o sincronismo quando de uma sequência prolongada a qualquer nível lógico.

Uma das maneiras de evitar a perda de sincronismo é produzir transições como se fossem transmitidos níveis lógicos “1”, mas com violações que permitam ao recetor detetar esta situação e substituir por níveis lógicos “0”. A esta técnica dá-se o nome de bipolar com substituição de N zeros (BNZS – *bipolar with N zero substitution*), em que N é o número de níveis lógicos consecutivos a “0” a ser substituídos. Exemplos comuns deste código são o B3ZS, B6ZS e B8ZS. O B6ZS tem a regra seguinte:

- Último símbolo transmitido positivo, transmite-se “0 +A -A 0 -A +A”
- Último símbolo transmitido negativo, transmite-se “0 -A +A 0 +A -A ”

Note-se que existem duas violações, no 2º e 5º símbolo. Se o número de zeros for múltiplo de 6 a substituição é efetuada o mesmo número de vezes.

Este código é utilizado por exemplo em ISDN ITU-T Rec. I.430 e na interligação entre centrais telefónicas por cabo de cobre.

2.8 Sem retorno a zero invertido (NRZI)

O código NRZI parece ser idêntico ao PNRZ mas é um código de transição. Representa um dos níveis lógicos invertendo o símbolo em relação ao último símbolo transmitido e o outro nível lógico corresponde a manter o último símbolo transmitido. Existem duas versões deste código: NRZ-M (inversão em *mark*), representado na figura 2.1-f, em que o nível lógico “1” é codificado com a inversão do símbolo e o nível lógico “0” sem inversão; e NRZ-S⁴ (inversão em *space*) em que o nível lógico “0” corresponde a inverter o símbolo em relação ao último símbolo transmitido e o nível lógico “1” corresponde a manter o último símbolo transmitido.

Como o código BNRZ, este código também é insensível à polaridade, o que emerge do facto de a informação fluir na transição, independentemente de esta ser positiva ou negativa. A potência é independente da probabilidade de ocorrência de cada símbolo e é dada por A^2 , sendo a energia média por bit dada pela equação 2.8.

O código NRZ-M tem sempre transições quando da codificação de bits ao nível lógico “1”, mas pode perder o sincronismo quando é enviada uma sequência longa de bits ao nível lógico “0”, acontecendo o oposto para o código NRZ-S. Como os códigos BNRZ, estes códigos diferenciais garantem então melhor sincronismo do que os códigos PNRZ e UNRZ.

⁴ Alguns autores estabelecem uma diferença entre o código NRZI e as suas variantes NRZ-M e NRZ-S, em relação à altura de ocorrência das transições.

O código NRZI pode ser encarado como um código PNRZ em que a sequência binária $b[n]$ é pré-codificada em $a[n] = (a[n-1] \text{ xor } b[n])$. No receptor esta pré-codificação é desfeita com a pós-descodificação $c[n] = (a[n] \text{ xor } a[n-1])$ (figura 2.2), que se verifica ser igual a $b[n]$.

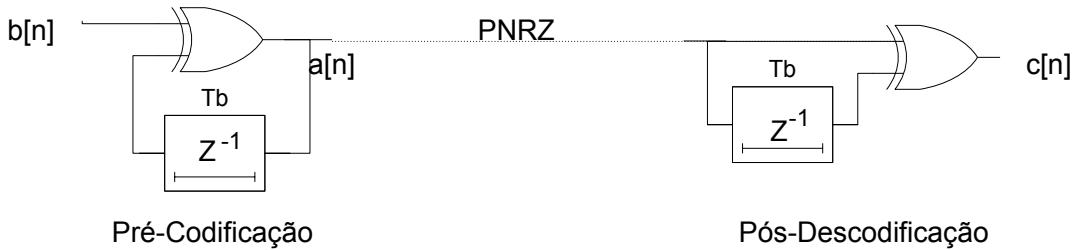


Figura 2.2
Código de linha NRZI

PNRZ com pré-codificação e pós-descodificação

Pré-codificação ($a[n] = a[n-1] \text{ xor } b[n]$). Pós-descodificação ($c[n] = a[n] \text{ xor } a[n-1] = b[n]$).

Na tabela 2.1 é apresentado um exemplo da pré-codificação e a da pós-descodificação do exemplo da figura 2.1-f.

$b[n]$		1	0	1	0	0	1	1	0
$a[n] = a[n-1] \text{ xor } b[n]$	0	1	1	0	0	0	1	0	0
$c[n] = a[n] \text{ xor } a[n-1] = b[n]$		1	0	1	0	0	1	1	0

Tabela 2.1
Pré-codificação e pós-descodificação em NRZI.
Exemplo correspondente ao da figura 2.1-f).

Um exemplo da transmissão com código NRZ-S é a interface de computador USB, usada para conectar periféricos.

2.9 Manchester diferencial

Os códigos, como o código NRZI, em que os níveis lógicos são codificados invertendo ou não o símbolo anterior são genericamente denominados de códigos diferenciais. Têm como principais vantagens serem insensíveis à polaridade e tornar os receptores menos complexos, já que, na presença de ruído, é mais robusto detetar transições do que comparar com um limiar.

Um código diferencial bastante comum é o código Manchester diferencial, representado na figura 2.1-g, em que o nível lógico “1” é codificado invertendo o símbolo anterior e o nível lógico “0” corresponde a manter o símbolo anterior. Como consequência não existe transição no início dos símbolos correspondentes ao nível lógico “1” e existe sempre transição quando se transmite o nível lógico “0”.

Este código contempla todas as características do código Manchester, realçando-se pela positiva a facilidade de sincronismo de bit e pela negativa uma maior largura de banda, adicionando-lhe as vantagens de um código diferencial.

Um exemplo da utilização deste código é em redes locais com a norma IEEE 802.5 e no armazenamento em discos magnéticos e óticos.

2.10 Bit de enchimento

Relembre-se que o código NRZI pode perder o sincronismo quando envia uma sequência longa de bits ao mesmo nível lógico. Por exemplo na interface USB o sincronismo pode ser perdido quando transmitida uma sequência de bits ao nível lógico “0”. De modo a nunca perder o sincronismo, para uma sequência de 6 bits ao nível lógico “1” é colocado um sétimo bit ao nível lógico “0”, denominado bit de enchimento (*bit stuffing*). Este bit é descartado no receptor, servindo no entanto a sua transição para garantir o sincronismo.

Consegue-se assim garantir o sincronismo sem aumentar o número máximo de transições e consequentemente a largura de banda, como nos códigos PRZ e Manchester. Este procedimento pode ser facilmente estendido aos códigos PNRZ e UNRZ. Como desvantagem, a introdução do bit de enchimento provoca um aumento artificial do débito binário, mas como a probabilidade da ocorrência de 6 bits consecutivos ao mesmo nível lógico é pequena (1/64 para sequências equiprováveis), este método consegue garantir sempre o sincronismo de símbolo com a introdução de muito poucos bits de enchimento.

2.11 Modo de transmissão assíncrono

Os códigos NRZ, nas suas versões polar e unipolar, não são especialmente vocacionadas para fornecer sincronismo de símbolo ao receptor, pois quando são transmitidas longas sequências do mesmo símbolo lógico, não são criadas transições. Para distâncias curtas em que o canal de comunicação é um cabo elétrico, nomeadamente na transmissão numa mesma sala, é possível transmitir num segundo condutor a informação do relógio do transmissor para sincronismo do receptor. Contudo existe um outro método para resolver o sincronismo de símbolo que evita a transmissão do relógio num segundo condutor, denominado de modo de transmissão assíncrono. O modo assíncrono de transmissão é utilizado também em distâncias curtas, mas especialmente quando a geração da informação é aleatória e em pequena quantidade. É exemplo a geração de informação num teclado e transmitido para um computador, em que cada carácter é representado por um código, por exemplo o código ASCII (*American standards committee for information interchange*) de 7 bits (Apêndice 1).

O processo de transmissão assíncrono é exemplificado na figura 2.3 com o código de linha PNRZ e para a tecla “B”, a que corresponde a sequência binária em ASCII “1 0 0 0 0 1 0”.

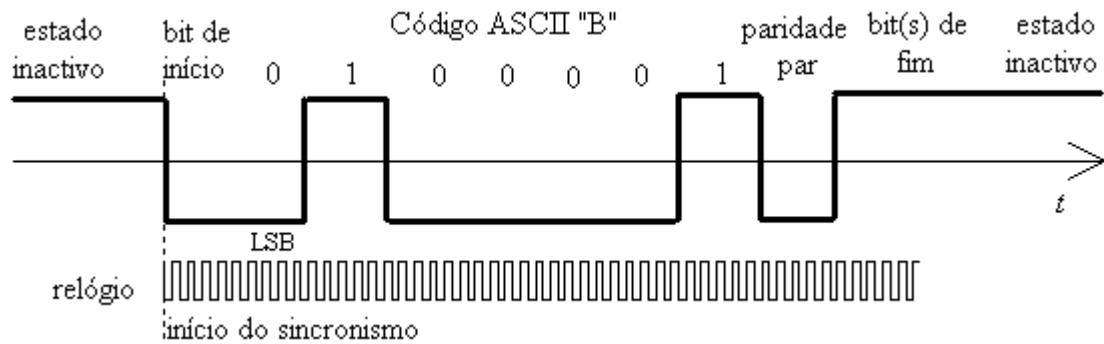


Figura 2.3
Exemplo de transmissão assíncrona com código de linha PNRZ para o carácter “B”, utilizando código ASCII.

Entre o premir de duas teclas não há informação transmitida e a linha fica inativa (*idle*), representado pela tensão +A. Quando uma tecla é premida é

gerado um bit de início (*start bit*) à tensão –A. Esta transição da linha inativa para o bit de início inicia o sincronismo de símbolo, que não é perdido se for transmitido apenas um carácter (≈ 10 bits). O início de sincronismo corresponde a iniciar um relógio a uma frequência mais elevada que o débito binário (tipicamente 16 ou 32 vezes maior), sendo possível a meio de cada bit verificar o nível de tensão e portanto o nível lógico.

A seguir ao bit de início são enviados os 7 bits correspondentes ao código ASCII da tecla premida, começando pelo bit menos significativo (LSB). Pode ainda ser transmitido um bit de paridade de modo que o conjunto de 8 bits (byte) transmitidos contenha um número par de bits com nível lógico “1” (paridade par) ou ímpar (paridade ímpar). Este bit serve para detetar erros de bit. Finalmente é enviado um ou mais bits de fim de carácter (*stop bit*).

A transmissão assíncrona é também utilizada para transmitir informação de um conjunto de caracteres, por exemplo para impressoras. Neste caso a informação não é gerada aleatoriamente mas a seguir ao bit de fim de carácter é enviado o bit de início de novo carácter, sincronizando novamente o relógio. O fim da transmissão corresponde ao envio do carácter EOT (*end of text*).

Numa transmissão assíncrona o número de bits de informação, a existência ou não de bit de paridade e o número de bits de fim de carácter têm que estar pré-determinados. Os bits de início e fim de carácter correspondem a cerca de 20% dos bits transmitidos, sendo esta a principal desvantagem da transmissão assíncrona, quando transmitidas seguidamente grandes quantidades de informação.

3 Canal de comunicação

O canal de comunicação é o meio físico que liga os equipamentos na camada física. Este tem quatro características que afetam o desempenho dos sistemas de comunicação, afetando a capacidade do receptor de discriminação dos símbolos: (1) a dimensão, que atrasa e atenua os sinais e portanto os níveis de tensão que chegam ao receptor; (2) a largura de banda, que para que não haja distorção tem de ser maior que a largura de banda do sinal transmitido; (3) a resposta em frequência que provoca diferentes atenuações e atrasos ao longo da banda; (4) e o ruído, que altera os níveis de tensão.

3.1 Canal AWGN de banda limitada

Independentemente do tipo de canal o modelo do canal a ser adotado no resto deste texto é apresentado na figura 3.1. À sua entrada encontra-se o sinal a transmitir e à sua saída o sinal que chega ao receptor.

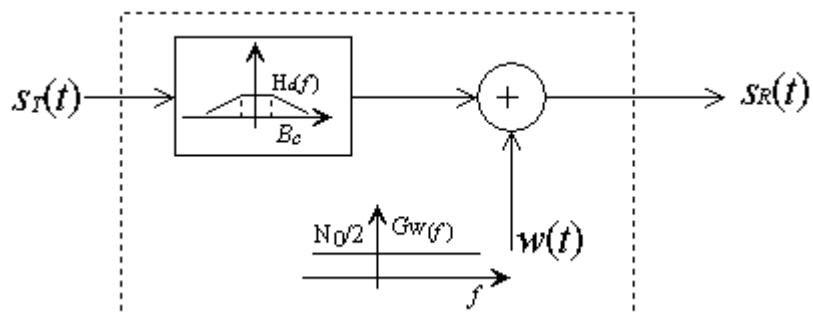


Figura 3.1
Canal AWGN com filtragem passa-baixo.

Para simular um canal passa-banda o filtro deve ser do tipo passa-banda.

O filtro modela a banda do canal (frequência de corte do filtro) e a atenuação (ganho na zona passante), tornando o canal de banda limitada. O filtro que modela a banda do canal é do tipo passa-baixo, adequado aos códigos de linha, mas poderia modelar um canal do tipo passa-banda. É ainda adicionado ruído branco e gaussiano, pelo que o canal toma a designação de canal AWGN (*additive white Gaussian noise*). O ruído branco é caracterizado

por ter uma função densidade espectral de potência constante ao longo de uma larga gama de frequências (No/2 tem dimensão W/Hz ou J). Este termo provém da analogia com a luz branca. A causa do ruído ser aditivo branco e gaussiano é o movimento aleatório das partículas elétricas.

3.2 Atenuação

Devido à dimensão do canal o sinal é atenuado, sendo a atenuação correspondente à relação entre a potência transmitida e recebida (sem ruído):

$$At = \frac{S_T}{S_R}, \quad (3.1)$$

ou, em decibéis,

$$At_{dB} = 10 \times \log_{10} \left(\frac{S_T}{S_R} \right) = -20 \times \log_{10} (|H(0)|). \quad (3.2)$$

A atenuação depende da distância, sendo o canal normalmente caracterizado em decibéis por quilómetro,

$$At_{dB/km} = 1000 \frac{At_{dB}}{L}, \quad (3.3)$$

sendo L a dimensão do canal.

As equações 2.2, 2.5, 2.8 e 2.9, que relacionam a potência do sinal com a energia média por bit e a amplitude do sinal são válidas também à entrada do receptor, desde que se utilize a respetiva potência recebida S_R . Embora a notação para a energia média por bit e para a amplitude utilizada neste texto seja a mesma à entrada e saída do canal, esta ambiguidade deve ser resolvida do contexto em que os sinais se aplicam.

3.3 Relação sinal–ruído no canal

O ruído gaussiano é caracterizado por ter uma distribuição de amplitudes que segue uma distribuição normal, com média nula. A variância corresponde à potência do ruído. Sendo o ruído branco, ocupa uma largura de banda infinita e a sua potência é teoricamente infinita. Este modelo idealizado é válido desde que a função densidade espectral de potência do ruído tenha uma característica plana na banda do sinal transmitido, já que este deve ser filtrado à entrada do recetor com um filtro com essa banda passante. Assumindo um código de linha este filtro é do tipo passa-baixo com largura de banda B_T . A distribuição do ruído nesta banda é também normal (apêndice 2) com potência σ_c^2 ,

$$\sigma_c^2 = \frac{N_0}{2} (2B_T) = N_0 B_T. \quad (3.4)$$

A relação entre a potência do sinal à saída do canal e a potência do ruído na banda do sinal, ou seja, a relação sinal-ruído à entrada do recetor, tendo em conta as equações 2.5, 2.6 e 3.4, é determinada por:

$$SNR_c = \frac{S_R}{\sigma_c^2} = \frac{S_R}{N_0 B_T} = \frac{E_b}{N_0} \frac{R_b}{B_T} = \frac{E_b}{N_0} \rho, \quad (3.5)$$

sendo E_b a energia de bit à entrada do recetor e não à saída do transmissor. Esta é uma das medidas da qualidade da comunicação, sendo por exemplo a probabilidade de erro de bit função deste valor.

3.4 Canal sem distorção

De modo a que o sinal chegue ao recetor sem distorção, o sinal a transmitir apenas pode ser multiplicado por um fator de escala, G e atrasado no tempo de t_d . A atenuação corresponde a uma perda de energia, contribuindo para aumentar a probabilidade de erro de bit. Esta perda de energia pode ser compensada com o aumento da energia à saída do transmissor. Um atraso

constante não é significativo porque existem no receptor circuitos de recuperação do relógio síncronos com o sinal recebido. Em comunicação bidirecional, contudo, um atraso longo pode ser psicologicamente incômodo.

Na banda do sinal a transmitir o canal não pode portanto ter diferentes ganhos ou provocar diferentes atrasos função da frequência. O sinal de saída do canal, sem a influência do ruído, tem por isso que ser descrito por:

$$s_R(t) = G s_T(t - t_d). \quad (3.6)$$

Tendo em conta as propriedades da Transformada de Fourier, linearidade e deslocamento no tempo, o espetro do sinal recebido é representado por:

$$S_R(f) = G S_T(f) e^{-j2\pi f t_d}. \quad (3.7)$$

A resposta em frequência do canal, $H_c(f)$, até à largura de banda do sinal, B_T , é descrita por,

$$H_c(f) = \frac{S_R(f)}{S_T(f)} = G e^{-j2\pi f t_d} \quad |f| \leq B_T. \quad (3.8)$$

Para que não haja distorção de amplitude tem-se que:

$$|H_c(f)| = |G| \quad |f| \leq B_T, \quad (3.9)$$

e para que não haja distorção de fase tem-se que:

$$\arg(H_c(f)) = -2\pi t_d f \quad |f| \leq B_T, \quad (3.10)$$

em que t_d é denominado atraso de grupo. A largura de banda do sinal, B_T , tem que ser menor ou igual à largura de banda do canal,

$$B_T \leq B_C. \quad (3.11)$$

Canais reais, contudo, podem provocar distorção quer de amplitude quer de fase. Neste caso é necessário que, à entrada do receptor, se coloque um

equalizador. Este tem como função garantir que o sistema resultante (canal mais equalizador) não provoque distorção de amplitude e de fase, ou seja, o produto da resposta em frequência do canal de comunicação com a resposta em frequência do equalizador, $H_e(f)$, cumpra os requisitos da equação 3.9 e 3.10:

$$\begin{cases} |H_c(f)H_e(f)| = |G| \\ \arg(H_c(f)H_e(f)) = -2\pi t_d f \end{cases} \quad |f| \leq B_T. \quad (3.11)$$

3.5 Atraso

O atraso de uma transmissão define-se como o tempo entre o início da transmissão e o momento que todos os dados estão presentes no receptor. Para além do tempo de processamento dos equipamentos, existem essencialmente dois tipos de atrasos: o atraso de propagação e o atraso de transmissão.

Atraso de propagação – Define-se atraso de propagação ao tempo que um sinal leva a atravessar o canal de comunicação. Este depende do comprimento do canal e da velocidade de propagação no meio de transmissão.

A velocidade de propagação no meio de transmissão é dada por,

$$v_i = \frac{C}{n_i}, \quad (3.12)$$

em que n_i é o índice de refração do meio e C a velocidade de propagação da luz no vácuo (300 mil km/s). O atraso de propagação depende da velocidade de propagação no meio e da sua dimensão, L , sendo dado por,

$$T_p = \frac{L}{v_i}. \quad (3.13)$$

Quanto maior a dimensão do canal maior é o atraso de propagação. No vácuo, a luz demora 3,3(3) microssegundos a percorrer um quilómetro, sendo normal caraterizar um meio de transmissão através deste parâmetro.

Atraso de transmissão – Nas redes de computadores os bits são normalmente enviados em pacotes de N bits. Define-se tempo de transmissão de um pacote como o tempo que o transmissor demora a colocá-lo no canal,

$$T_t = \frac{N}{R_b} . \quad (3.14)$$

O atraso de transmissão é relevante para débitos binários baixos enquanto o atraso de propagação é relevante para canais de grande dimensão. Para canais de dimensão e débito binário elevados o atraso dominante é o atraso de propagação. Pelo contrário, para canais de pequena dimensão e baixo débito binário é o atraso de transmissão o dominante. O atraso total, correspondente à soma dos diversos atrasos, é um problema grave principalmente em aplicações interativas bidirecionais, como é o caso do telefone ou jogos *online*.

3.6 Meios de transmissão

Os canais de comunicação são compostos por um ou mais meios de transmissão diferentes, cada um com características bastante distintas. Seguidamente caracterizam-se sucintamente alguns dos principais meios de transmissão, sendo a largura de banda, a atenuação e o atraso de propagação apresentados, apenas como ilustração, na tabela 3.1.

Cabo de par trançado – Os cabos de par trançado são constituídos por dois condutores de cobre enrolados em espiral para, através do efeito de cancelamento, reduzir o efeito das interferências eletromagnéticas. A velocidade de propagação é de cerca de 175 mil km/s, a que corresponde um atraso de propagação de 5,7 $\mu\text{s}/\text{km}$.

Um das suas aplicações é o canal telefónico, construído de modo a transmitir sinais de fala entre dois pontos. Este canal tem um ganho praticamente constante entre os 300 e os 3300 Hz, capaz de transmitir fala percepível. Embora com maior atenuação que na zona do sinal de fala, este

canal é também utilizado até aos 2,2 MHz, na transmissão de sinais digitais baseado em ADSL2+ (*asymmetric digital subscriber line*).

Cabo coaxial – Os cabos coaxiais são constituídos por um condutor interno de cobre, coberto por um isolante. Uma malha exterior, também em cobre, atua como segundo condutor. Um segundo isolante protege todo o cabo. A largura de banda deste meio de transmissão é superior ao do cabo trançado. A velocidade de propagação é de cerca de 250 mil km/s, a que corresponde um atraso de propagação de 4 μ s/km.

Uma utilização típica dos cabos coaxiais é a ligação entre equipamentos numa rede local. Outra é a transmissão de sinais de TV analógicos que podem coexistir com sinais digitais no fornecimento de televisão por cabo.

Fibra ótica – As fibras óticas transportam sinais de luz de um ponto para outro. A sua grande vantagem é uma elevada largura de banda aliada a uma pequena atenuação. A largura de banda depende da distância percorrida pois esta aumenta a dispersão dos impulsos de luz. É ainda imune a interferências eletromagnéticas tendo um tamanho e peso pequenos. A velocidade da luz na fibra é cerca de 200 mil km/s, sendo o atraso de propagação de cerca de 5 μ s/km.

As fibras óticas são largamente utilizadas na transmissão digital de informação, quer na ligação entre centrais e operadores quer no fornecimento de serviços integrados (*internet*, televisão, voz).

Canal rádio – Os canais de comunicação que empregam a transmissão rádio utilizam o espaço livre como meio de propagação de ondas eletromagnéticas. Têm uma característica passa-banda, servindo para transmitir sinais modulados (áudio, televisão) ou para dar mobilidade à rede telefónica e às redes de computadores. Pode sofrer de receção multipercorso devido a reflexões em obstáculos. O atraso de propagação num canal rádio é praticamente igual ao da luz, ou seja, 3,3(3) μ s/km.

Satélite – Os satélites são usados como retransmissores de modo a cobrir uma grande área para difundir sinais de televisão ou efetuar ligações intercontinentais de voz ou televisão. São também utilizados no fornecimento de serviços integrados.

Os satélites funcionam com frequências mais elevadas que a transmissão rádio normal e também com uma maior largura de banda. Um satélite geoestacionário encontra-se perto da linha do equador, a uma distância de cerca de 36.000 km, de modo a que as forças centrifuga e centrípeta se anulem. A velocidade de propagação é praticamente igual à velocidade da luz, pelo que o atraso de propagação do sinal para percorrer duas vezes (ida e volta) a distância da terra ao satélite é de 0,24 segundos.

Meio de Transmissão	Banda [MHz]	Atenuação [dB/km]	Atraso de propagação [$\mu\text{s}/\text{km}$]
Par trançado classe A	0,1	8,3	5,7
Par trançado classe C	16	130	5,7
Cabo coaxial RG59	100	112	4
	400	237	4
	3000	808	4
(comp. onda 850 nm)		1	5
Fibra ótica (comp. onda 1310 nm)	$10^3 \times \text{km}$	0,3	5
(comp. onda 1550 nm)		0,2	5
Rádio	0,1 a 10^3	----	3,3(3)
Satélite	10^3 a 10^5	----	3,3(3)

Tabela 3.1
Características de diversos tipos de meios de transmissão.
 Os valores apresentados são meramente ilustrativos.

Nas próximas secções serão apresentadas soluções para minimizar os efeitos da largura de banda e da adição de ruído no canal comunicação, utilizando o modelo do canal AWGN apresentado na figura 3.1. Equalizadores, para resolver o efeito da distorção de amplitude e fase, não serão abordados.

4 Largura de banda

Todos códigos de linha têm uma largura de banda infinita, imposta por transições instantâneas entre variações de nível de tensão. Na figura 4.1 são esboçadas as funções densidade espectral de potência para os diversos códigos, sendo as respectivas equações apresentadas no Apêndice 3. Assume-se que os níveis lógicos são equiprováveis, a sua geração independente e que a potência é de 1 W. Não são apresentados os códigos NRZI e Manchester diferencial, que neste contexto são idênticos respectivamente aos códigos PNRZ e Manchester.

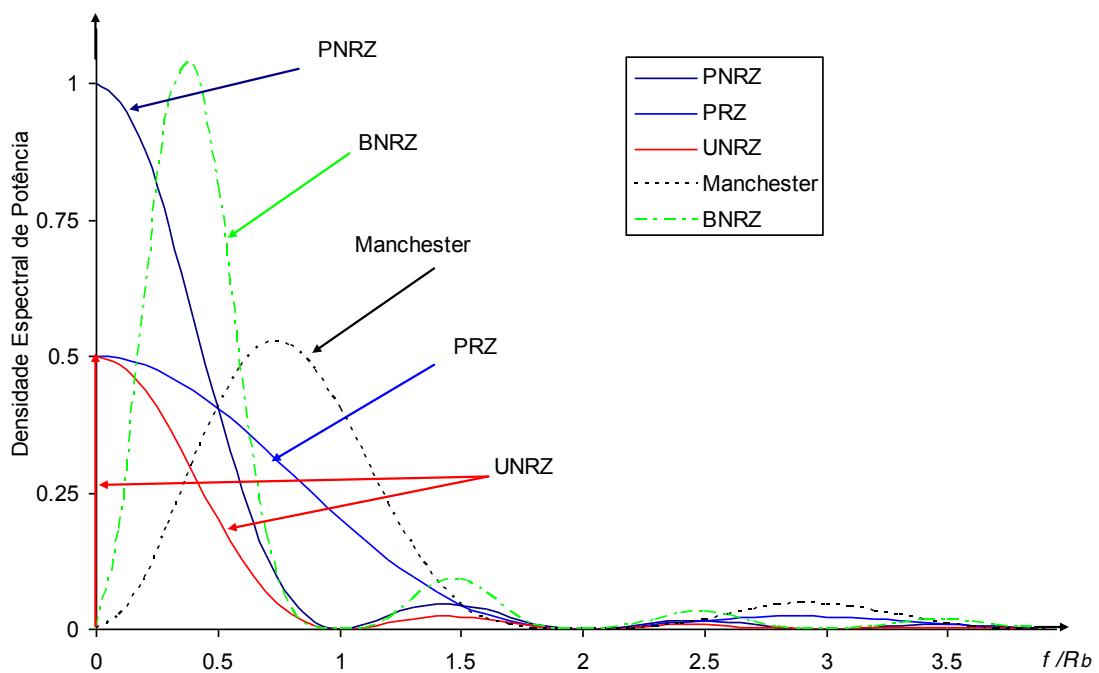


Figura 4.1

Funções densidade espectral de potência dos diversos códigos de linha.

Assume-se para todos os códigos uma potência de 1 W (e não a amplitude), geração independente e equiprovável dos níveis lógicos.

4.1 Interferência intersimbólica

Utilizando um canal de banda limitada, como o canal descrito na secção 3, as transições instantâneas dos códigos de linha transformam-se em variações lentas que interferem com os símbolos adjacentes. A esta distorção dá-se o nome de interferência intersimbólica (ISI – *intersymbolic interference*). Existem dois critérios para lidar com a interferência intersimbólica e definir a largura de banda do sinal transmitido, explicados seguidamente: o critério do primeiro zero espectral e o critério de Nyquist⁵.

4.2 Critério do primeiro zero espectral

Como se pode verificar na figura 4.1, as funções densidade espectral de potência vão tendendo para zero (segundo o quadrado de uma *sinc*) à medida que a frequência aumenta, mais rapidamente quando o primeiro zero se situa em R_b (PNRZ, UNRZ, BNRZ e NRZI) e mais lentamente quando este se situa em $2R_b$ (PRZ, Manchester). Um critério de determinação da largura de banda, embora minimalista, é considerar que a maior parte da potência do sinal está contida até à frequência do primeiro zero espectral (*first null bandwidth*) assumindo ser esta a largura de banda. De facto, para qualquer dos códigos, esta potência é no mínimo 90% do valor total. Uma largura de banda superior à do primeiro zero espectral torna a distorção devida à interferência intersimbólica insignificante. É tipicamente esta a situação na transmissão assíncrona, de baixo débito binário, em que o canal tem uma dimensão de apenas alguns metros e a sua largura de banda é mesmo bastante superior ao débito binário.

4.3 Critério de Nyquist

Uma solução para evitar a interferência intersimbólica é assumir que em pelo menos um instante por símbolo o sinal à entrada do transmissor tem de

⁵ Harry Nyquist, 1889–1976. Sueco-Americano, trabalhou na AT&T e nos Laboratórios Bell.

passar exatamente pela amplitude desejada, ao mesmo tempo que se limita a largura de banda. Se a largura de banda do canal de comunicação for maior que a limitação de banda imposta pelo transmissor o sinal não é distorcido. Nesta análise considera-se o canal ideal até à largura de banda do sinal. Caso contrário o efeito do canal deve ser compensado (equalização). Este método de evitar a interferência intersimbólica obriga a uma formatação dos pulsos correspondentes aos símbolos (*pulse shaping*) no transmissor, já que estes deixam de apresentar transições bruscas de amplitude para exibirem transições suaves. Por exemplo no caso dos códigos NRZ, basta garantir um instante a meio dos bits de zero de ISI ($\pm A$ conforme o nível lógico), sem ser determinante a evolução entre estes instantes. Este método de determinar a largura de banda denomina-se de critério de Nyquist.

4.3.1 Filtro ideal

Existe uma infinidade de pulsos capazes de corresponder ao critério de Nyquist. Para se obter o pulso a que corresponde a menor largura de banda relembrase que, pelo teorema de Nyquist-Shannon⁶, um sinal deve ser amostrado com uma frequência igual (ou superior) a duas vezes a sua largura de banda. O sinal é recuperado sem erro por filtragem passa-baixo ideal com frequência de corte igual a metade da frequência de amostragem. Deste modo, assumindo um instante de zero de ISI a meio de cada símbolo, gera-se uma amostra por símbolo e são consequentemente geradas R_b amostras por segundo. Filtrando esta sequência de amostras à frequência $R_b/2$ produz-se um sinal com esta largura de banda, pelo que,

$$B_T = \frac{R_b}{2}. \quad (4.1)$$

⁶ Claude Shannon, 1916–2001. Americano, trabalhou nos Laboratórios Bell e foi professor no MIT.

O critério de Nyquist pode ser visto então como o dual do teorema de Nyquist-Shannon. Cada símbolo passa a ser definido por pulsos, que em PNRZ são positivos ou negativos conforme o nível lógico e que têm a forma da resposta impulsiva do filtro passa-baixo (Transformada de Fourier inversa de um retângulo, correspondente ao filtro ideal):

$$p(t) = A \text{ sinc}(R_b t). \quad (4.2)$$

Na figura 4.2 é apresentada a forma de onda com formatação de pulsos do sinal para a sequência binária “1 0 1 1 0 0 1” em PNRZ, com amplitude $A=1$ V. O pulso toma, como se pretende, o valor $\pm A$ para $t=0$ e 0 nos instantes múltiplos de T_b , ou seja, para $t=0, \pm T_b, \pm 2T_b, \dots$, não interferindo nos instantes de amostragem dos outros símbolos. Verifica-se que apesar das variações lentas o código toma os valores $\pm A$ nos instantes de zero de ISI (a meio do símbolo).

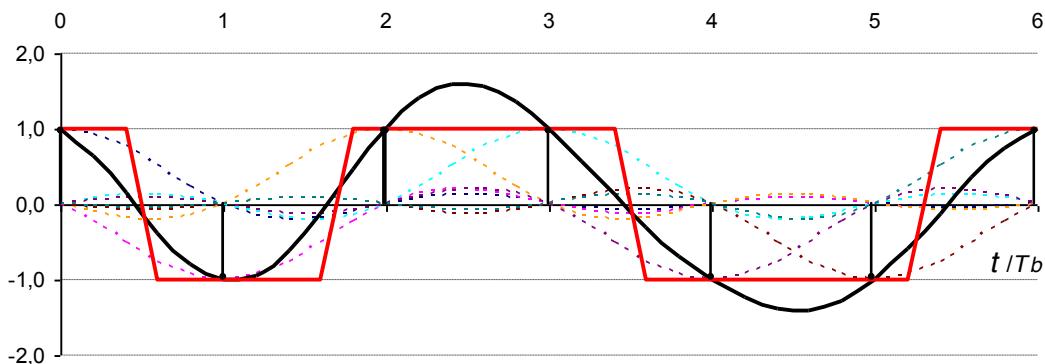


Figura 4.2
Resposta do filtro ideal de formatação de pulsos para o código de linha PNRZ
com $A=1$ V, tendo como entrada a sequência binária “1 0 1 1 0 0 1”.

Na figura 4.3 é apresentada a cadeia transmissor–canal–recetor, em que à saída do transmissor é colocado o filtro de formatação de pulsos. Para que não haja distorção no canal este deve ter uma largura de banda superior à largura de banda dos códigos de linha após a formatação. O recetor amostra o sinal a meio dos símbolos nos instantes de zero de ISI tomando a decisão sobre o nível lógico correspondente. Para tal é necessário sincronismo de símbolo no recetor.

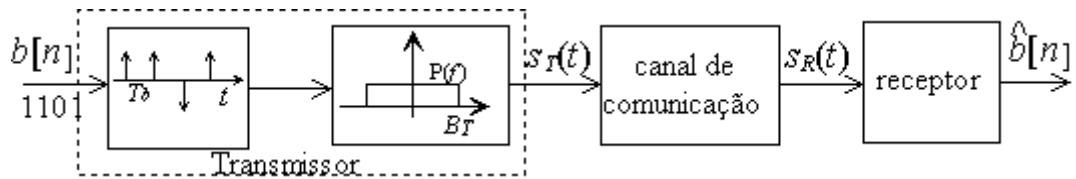


Figura 4.3
Transmissão de códigos PNRZ com formatação de pulsos por filtro ideal.

É contudo impossível realizar uma filtragem passa-baixo ideal e possíveis aproximações são não causais e com a “cauda” da *sinc* da resposta impulsiva exibindo um decaimento lento, criando maior atraso e sendo difíceis de realizar.

4.3.2 Filtro de cosseno elevado

A filtragem ideal para zero de ISI pode ser alterada de modo a que a resposta ao impulso mantenha o termo da equação 4.2 e portanto continue a evitar a ISI, com um fator que torne a resposta em frequência mais suave, logo mais fácil de realizar. O pulso toma a forma:

$$p(t) = \frac{\cos(\pi\alpha R_b t)}{1 - (2\alpha R_b t)^2} \text{Asinc}(R_b t), \quad (4.3)$$

em que α é denominado fator de *rolloff*, variando entre 0 e 1. Este pulso é apresentado na figura 4.4-a e a respetiva resposta em frequência na figura 4.4-b, para diversos valores de α . Como se pretendia, quanto maior for α mais depressa decai a “cauda” da *sinc* da resposta impulsiva, produzindo menor atraso e sendo mais fácil de realizar.

A resposta em frequência tem a forma de um *cosseno elevado*, dando o nome ao filtro respetivo (*raised cosine filter*). Este filtro continua a ser do tipo passa-baixo e produz sinais com uma largura de banda dada por:

$$B_T = \frac{R_b}{2}(1 + \alpha), \quad (4.4)$$

que é tanto maior quanto maior for o fator de *rolloff*. Tomando $\alpha=0$ obtém-se a filtragem ideal e, no outro extremo, com $\alpha=1$, duplica-se a largura de banda.

A resposta em frequência é dada por:

$$P(f) = \begin{cases} \frac{1}{R_b} & |f| < \frac{R_b}{2}(1-\alpha) \\ \frac{1}{R_b} \cos^2\left(\frac{\pi}{2\alpha R_b}\left(|f| + \frac{R_b}{2}(\alpha-1)\right)\right) & \frac{R_b}{2}(1-\alpha) < |f| < \frac{R_b}{2}(1+\alpha) \\ 0 & |f| > \frac{R_b}{2}(1+\alpha) \end{cases} \quad (4.5)$$

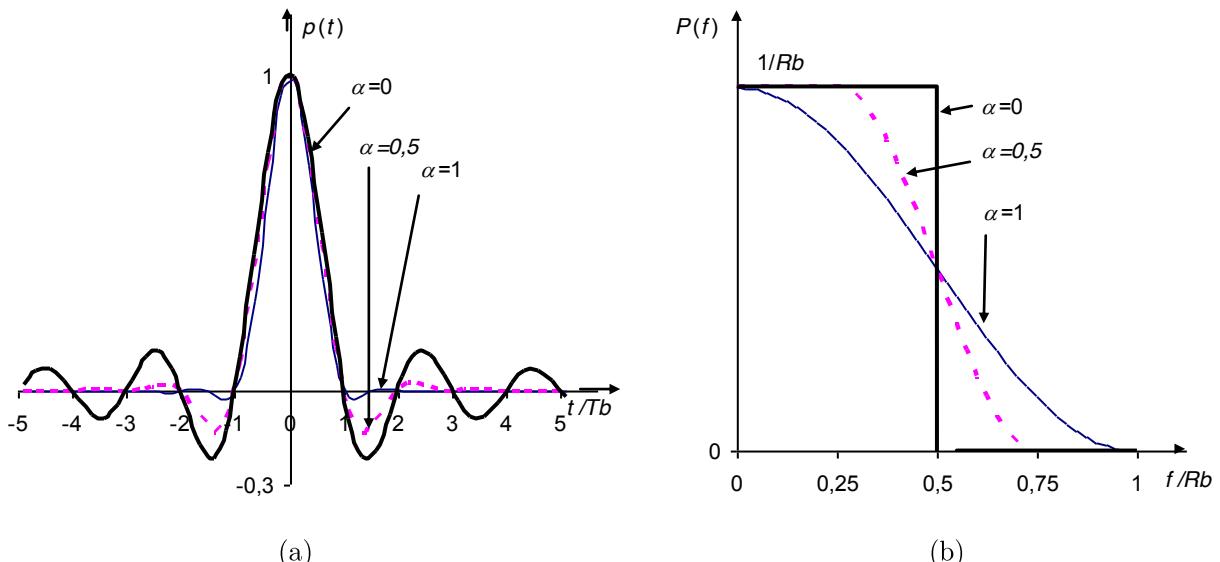


Figura 4.4
Filtro de cosseno elevado

(a) Pulsos de formatação de pulsos para diversos valores de α . (b) Resposta em frequência.

Para além do maior atraso e da dificuldade de realização devido à maior energia da “cauda” da *sinc*, outra desvantagem do filtro ideal advém do facto de que a sua resposta impulsiva manifesta uma grande variação no instante de zero de ISI nos símbolos adjacentes, correspondendo às passagens por zero da *sinc*. Esta característica torna o filtro sensível a erros de sincronismo de símbolo no recetor, já que uma pequena variação no instante de amostragem corresponde a

uma amplitude bastante diferente da desejada. Com o aumento do fator de *rolloff*, como se pode verificar na figura 4.4-a, provoca-se menor variação do sinal, sendo mais robusto na presença de erros de sincronismo de símbolo no receptor. A maior robustez a erros de sincronismo, menor atraso e maior facilidade de realização do filtro tem como contrapartida um aumento da largura de banda, sendo a escolha do fator de *rolloff* claramente um compromisso entre todos estes atributos.

Na figura 4.5 é apresentada a forma de onda do sinal para a sequência binária “1 0 1 1 0 0 1” em PNRZ, com amplitude $A=1$ V. Pode-se verificar que apesar das variações lentas o código toma o valor de $\pm A$ nos instantes de zero de ISI (a meio do símbolo), independentemente do valor de α .

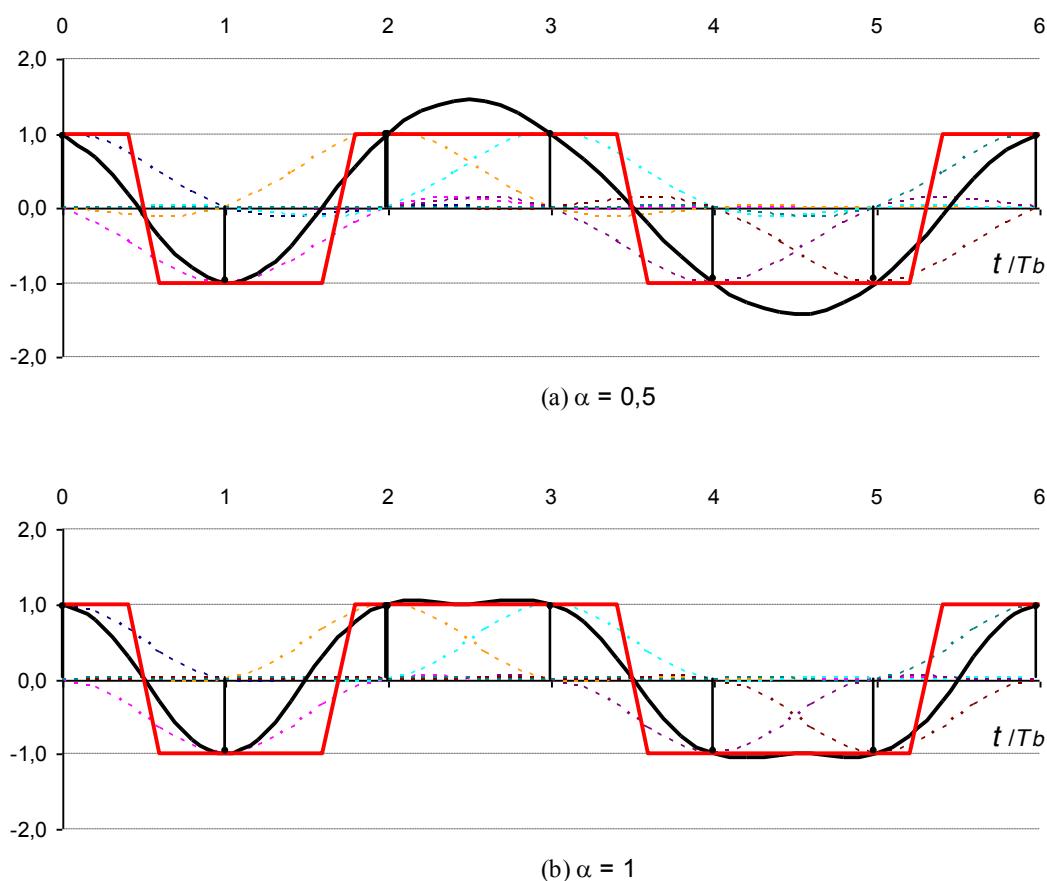


Figura 4.5

Resposta do filtro de formatação de pulsos para o código de linha PNRZ
com $A=1$ V, tendo como entrada a sequência “1 0 1 1 0 0 1”; (a) $\alpha=0,5$; (b) $\alpha=1$.

4.3.3 Largura de banda e eficiência espectral

Para os códigos de linha PNRZ, UNRZ e BNRZ a largura de banda é dada pela equação 4.4, pois sendo códigos em que a tensão se mantém fixa durante todo o tempo de bit necessita apenas de um instante de zero de ISI por bit (abertura da *sinc* na origem de $2R_b$).

No caso dos códigos de linha PRZ e Manchester, estes são definidos por dois níveis de tensão por símbolo, necessitando para cada um destes níveis de um instante de zero de ISI, pelo que o símbolo é definido por dois pulsos que têm uma abertura de apenas R_b e a largura de banda vem o dobro da produzida pela equação 4.4:

$$B_T = R_b(1 + \alpha). \quad (4.6)$$

A largura de banda máxima ($\alpha=1$) em qualquer dos códigos de linha é dada pelo número máximo de transições por segundo e coincide com a largura de banda pelo critério de primeiro zero espectral.

Para os códigos sem retorno a zero como os códigos PNRZ, UNRZ, BNRZ e NRZI, a eficiência espectral, dada pela equação 2.6, vem:

$$\rho = \frac{2}{(1 + \alpha)}, \quad (4.7)$$

e para os códigos PRZ e Manchester a eficiência espectral vem:

$$\rho = \frac{1}{(1 + \alpha)}. \quad (4.8)$$

Para códigos de linha binários a melhor eficiência espectral é de 2 bits por segundo por Hertz, obtido para códigos NRZ com fator de *rolloff* de 0. A pior situação corresponde a uma eficiência espectral de 0,5 bits por segundo por Hertz, obtido para códigos RZ com fator de *rolloff* de 1.

4.4 Padrão de olho

Existem essencialmente dois factos no canal de comunicação que levam ao aumento da BER num sistema de comunicação: (1) a interferência intersimbólica; (2) e o ruído no canal. A influência destes dois factos pode ser aferida visualmente através do padrão de olho (*eyes pattern*). O padrão de olho tem o aspeto corresponde à figura apresentada por um osciloscópio, tendo como sinal de entrada o sinal recebido $s_R(t)$ e sincronizado no início do símbolo, mas em que a luminosidade de cada varrimento não desaparece. Este tem a aparência de um olho (ou dois caso o varrimento corresponda a dois bits), que está tanto mais aberto quanto melhor for o desempenho do sistema.

Na figura 4.6 é apresentado um padrão de olho de um código de linha PNRZ sem formatação de pulsos, em que o canal não tem ruído e a largura de banda corresponde à do primeiro zero espectral ($B_T = R_b$).

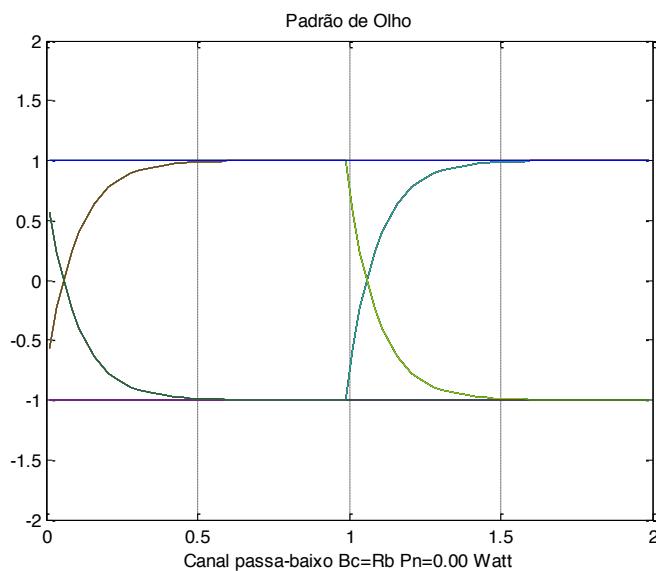


Figura 4.6

Padrão de olho com 2 bits consecutivos e 100 varrimento do código de linha PNRZ.
Canal não tem ruído do tipo passa-baixo de 1^a ordem, com $B_c=R_b$ (primeiro zero espectral).

O eixo das abcissas está normalizado em múltiplos de T_b ,

Os instantes de deteção correspondem a 0.5 e 1.5.

Pode-se verificar a interferência intersimbólica correspondente à transição lenta entre símbolos, mas o sinal a meio do bit, aonde se dá a deteção no receptor, está “perto” do nível correto.

Na figura 4.7 é apresentado um padrão de olho para o mesmo código da figura 4.6, mas de modo a se verificar o efeito da interferência intersimbólica o canal tem metade da largura de banda exigida pelo critério do primeiro zero espectral. O olho apresenta-se mais fechado devido às transições mais lentas entre símbolos, diminuindo a qualidade da comunicação e estando sujeito mais facilmente a erros de bit.

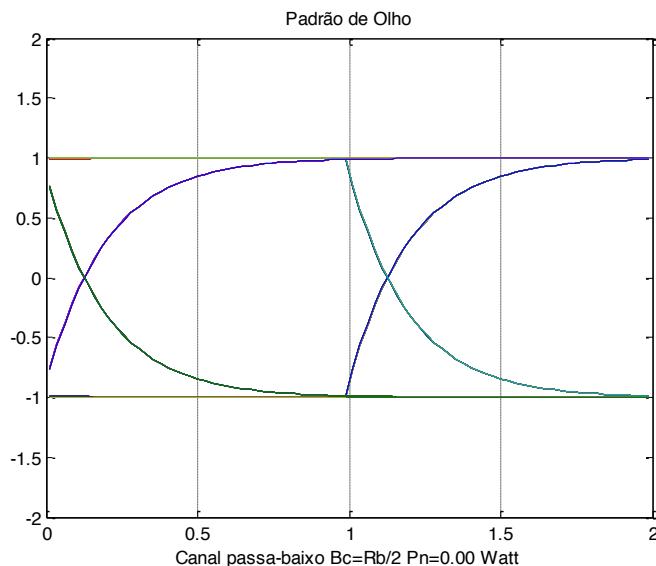


Figura 4.7

Padrão de olho com 2 bits consecutivos de um código de linha PNRZ.
Canal passa-baixo de 1^a ordem, com $B_c=R_b/2$ e sem ruído.

Comparando as figuras 4.6 e 4.7, verifica-se que quanto maior for a largura de banda do canal mais aberto se apresenta o olho e o pulso aproxima-se do pulso original sem interferência intersimbólica. Esta melhoria contudo é conseguida através do aumento da largura de banda.

De modo a verificar o efeito do ruído é apresentado na figura 4.8 um padrão de olho para o mesmo código e o mesmo canal da figura 4.6 ($B_c=R_b$), mas com uma relação sinal-ruído de 13 dB. Pode-se verificar também o fecho do olho, mas agora devido ao ruído e não devido ao efeito a interferência intersimbólica. Na figura 4.9 é apresentado o efeito conjunto da ISI e do ruído.

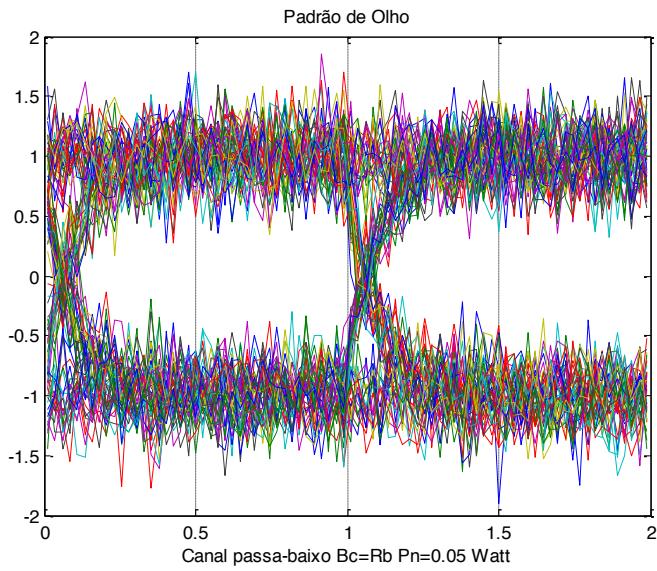


Figura 4.8

Padrão de olho com 2 bits consecutivos de um código de linha PNRZ.
Canal passa-baixo de 1^a ordem, com $B_c=R_b$ e 13 dB de *SNR*.

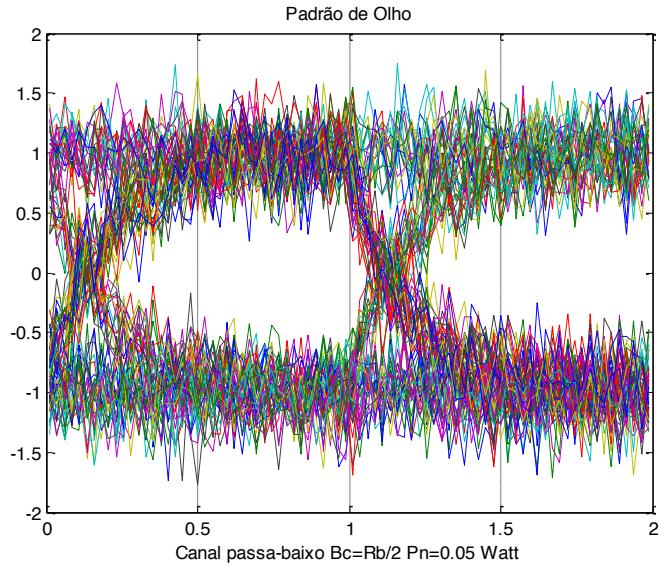


Figura 4.9

Padrão de olho com 2 bits consecutivos de um código de linha PNRZ.
Canal passa-baixo de 1^a ordem, com $B_c=R_b/2$ e 13 dB de *SNR*.

Na figura 4.10 é apresentado o padrão de olho para um código PNRZ com formatação de pulsos para $\alpha=0$. Pode-se verificar que a meio do bit não existe interferência intersímbólica. Contudo, com ruído, como apresentado na figura 4.11, o olho fecha-se deteriorando a qualidade da transmissão.

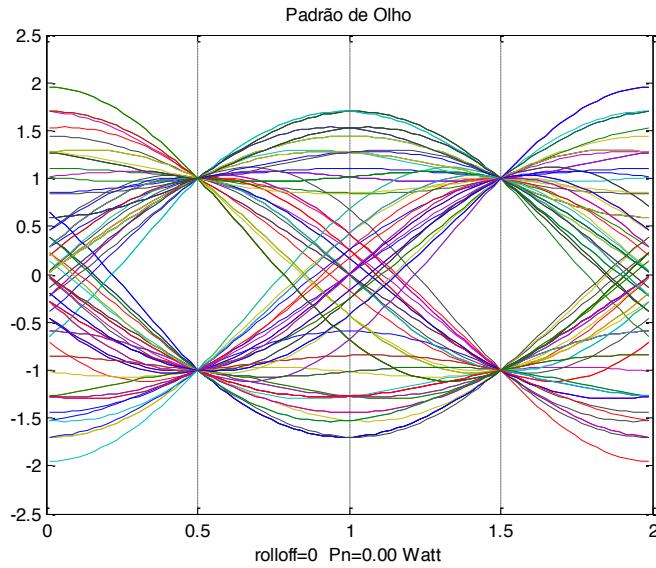


Figura 4.10

Padrão de olho com 2 bits consecutivos de um código de linha PNRZ.
Formatação de pulsos com fator de *rolloff* $\alpha=0$ e sem ruído.

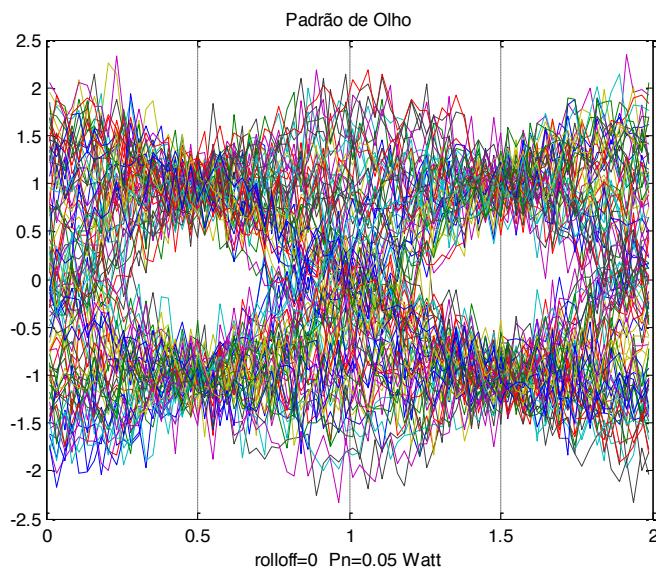


Figura 4.11

Padrão de olho com 2 bits consecutivos de um código de linha PNRZ.
Formatação de pulsos com fator de *rolloff* $\alpha=0$ e 13 dB de *SNR*.

Na figura 4.12 é apresentado o padrão de olho correspondente ao da figura 10 mas com $\alpha=1$. A variação a meio do bit não é tão acentuada, sendo mais robusto em relação a erros de sincronismo. Contudo o sinal tem o dobro da largura de banda. Na figura 4.13 ilustra-se o padrão de olho correspondente ao da figura 4.12 mas com 13 dB de relação sinal-ruído.

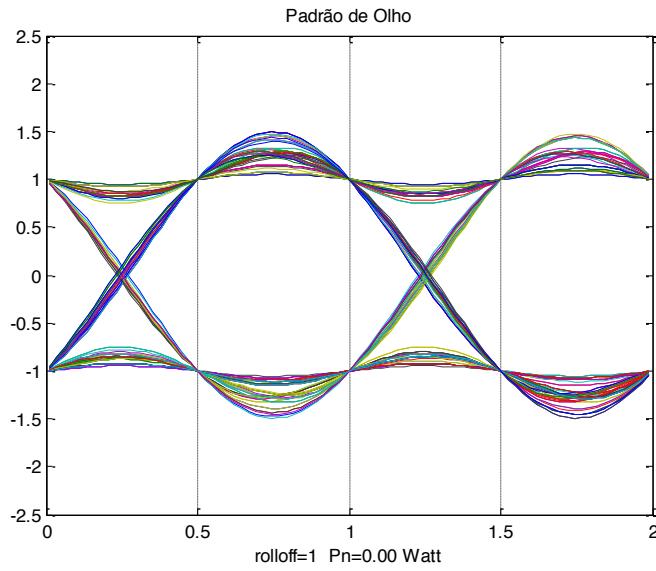


Figura 4.12

Padrão de olho com 2 bits consecutivos de um código de linha PNRZ.
Formatação de pulsos com fator de *rolloff* $\alpha=1$ e sem ruído.

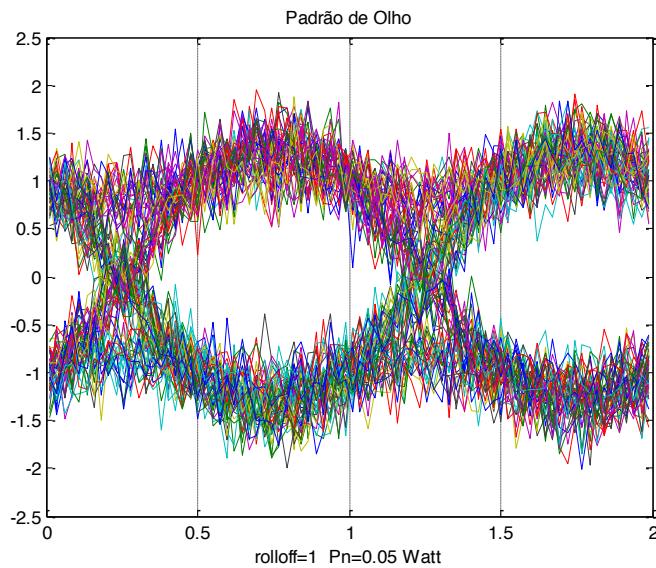


Figura 4.13

Padrão de olho com 2 bits consecutivos de um código de linha PNRZ.
Formatação de pulsos com fator de *rolloff* $\alpha=1$ e 13 dB de SNR.

5 Recetor ótimo

Num canal de comunicação AWGN, ao sinal transmitido é adicionado ruído branco e gaussiano. Esta situação é ilustrada na figura 5.1 para a mesma sequência binária da figura 4.2 e 4.5, com código PNRZ. São exemplificadas as situações sem formatação de bit, com formatação de bit com fator de *rolloff* $\alpha=0$, com e sem ruído.

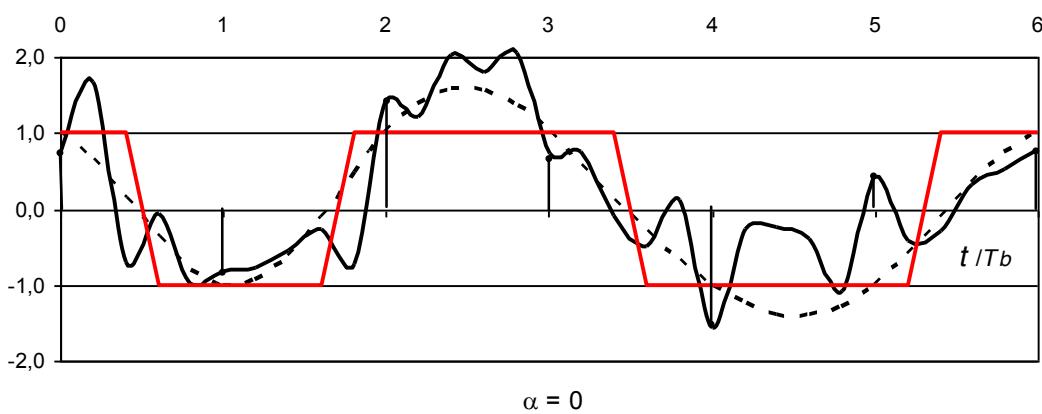


Figura 5.1
Sequência “1 0 1 1 0 0 1” em PNRZ com $A=1$ V, $\alpha=0$,
ao qual foi adicionado ruído gaussiano.

À entrada do recetor deve ser colocado um filtro passa-baixo que deixe passar o sinal mas que corte o ruído fora da sua banda, tendo por isso uma largura de banda B_T . Como deduzido adiante, a estimativa da probabilidade de erro de bit (*BER*) depende da relação entre a energia média por bit e a densidade espectral de potência do ruído, E_b/N_0 . Esta relação não tem em conta a eficiência espectral mas apenas a limitação de energia. A relação sinal-ruído entre a potência do sinal recebido e a potência do ruído na banda do sinal (SNR_c – equação 3.5) entra em conta com a eficiência espectral, já que estas são calculadas apenas na banda do sinal.

5.1 Descodificador de máximo a posteriori

Denominando por y o valor observado após filtragem nos instante de zero de interferência intersímbólica após o filtro de entrada do receptor, por y_1 e y_0 os valores correspondentes sem ruído quando enviados respetivamente o nível lógico “1” e “0” e assumindo que o filtro não afeta a amplitude do sinal (continuando o exemplo da figura 5.1, em PNRZ),

$$\begin{cases} y_1 = +A \\ y_0 = -A \end{cases}, \quad (5.1)$$

correspondendo A à amplitude do código à entrada do receptor. Note-se que, sendo esta descodificação efetuada no receptor, assume-se sempre nesta secção amplitudes e energias recebidas e não transmitidas.

Como ilustrado na figura 5.2, a função densidade de probabilidade das amplitudes após o filtro, dado enviado o símbolo “1”, é uma distribuição normal, $f(y|“1”) = N(y_1, \sigma_n^2)$, com média y_1 e variância $\sigma_n^2 = \sigma_c^2$ (equação 3.4). A função densidade de probabilidade $f(y|“0”) = N(y_0, \sigma_n^2)$, quando enviado o símbolo “0”, tem média y_0 e a mesma variância.

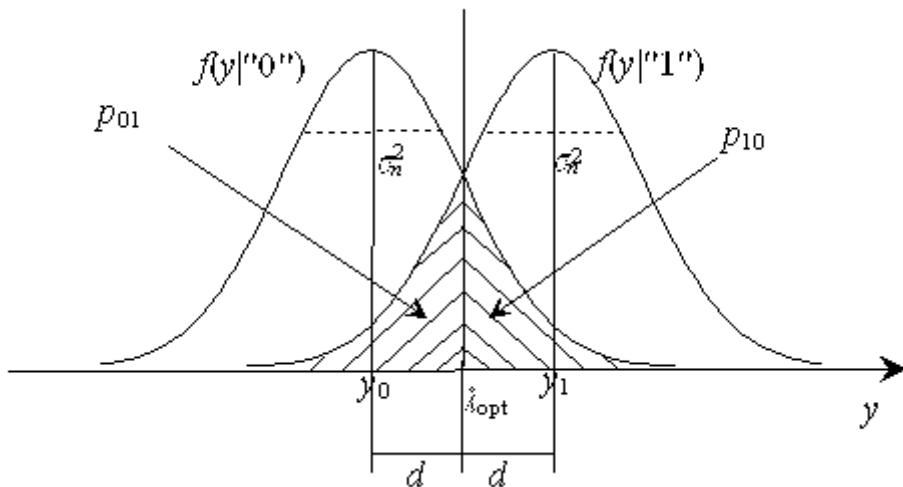


Figura 5.2
Funções densidade de probabilidade do ruído em códigos de linha binários.

As funções densidade de probabilidade condicionada (*a posteriori*) de ter sido transmitido cada um dos símbolos lógicos, dada a observação da tensão y após filtragem no instante de amostragem, segue a Lei de Bayes,

$$\begin{cases} f("1" | y) = \frac{f(y | "1")p_1}{f(y)} & \text{para o nível lógico "1"} \\ f("0" | y) = \frac{f(y | "0")p_0}{f(y)} & \text{para o nível lógico "0"} \end{cases}, \quad (5.2)$$

em que p_1 e p_0 são as probabilidades *a priori* de ocorrência dos níveis lógicos “1” e “0”, respectivamente. O critério ótimo de descodificação de qual o nível lógico emitido, pois minimiza a probabilidade de errar, corresponde a selecionar o nível lógico com a maior probabilidade *a posteriori* (MAP – Máximo *a posteriori*), ou seja,

$$\begin{cases} f("1" | y) > f("0" | y) & \text{detecta - se o nível lógico "1"} \\ f("1" | y) < f("0" | y) & \text{detecta - se o nível lógico "0".} \end{cases} \quad (5.3)$$

5.2 Descodificador de máxima verosimilhança

Assumindo que as probabilidades *a priori* são iguais ($p_1=p_0=0,5$) a descodificação MAP, que é ótima no sentido de minimizar a *BER*, é equivalente à descodificação com um critério de máxima verosimilhança (MV – Máxima verosimilhança) , dada por,

$$\begin{cases} f(y | "1") > f(y | "0") & \text{detecta - se o nível lógico "1"} \\ f(y | "1") < f(y | "0") & \text{detecta - se o nível lógico "0".} \end{cases} \quad (5.4)$$

Este critério, utilizado na maioria das aplicações, é assumido neste texto, simplificando a estimativa da probabilidade de erro de bit. Note-se que os valores das probabilidades *a priori*, necessárias no critério MAP, não são conhecidos no recetor antes de se começar a deteção, mas o valor de λ tem de ser conhecido nessa altura. No caso em análise da descodificação em duas classes

em que as distribuições de probabilidade são ambas normais com a mesma variância, este critério corresponde a assumir um limiar λ cujo valor ótimo λ_{ot} (figura 5.2) é o valor médio entre as tensões dos dois símbolos sem ruído,

$$\lambda_{ot} = \frac{y_0 + y_1}{2}. \quad (5.5)$$

A figura 5.3 apresenta o diagrama de blocos do receptor, com o filtro passa-baixo que atenua o ruído e o descodificador implementado através do comparador com λ_{ot} .

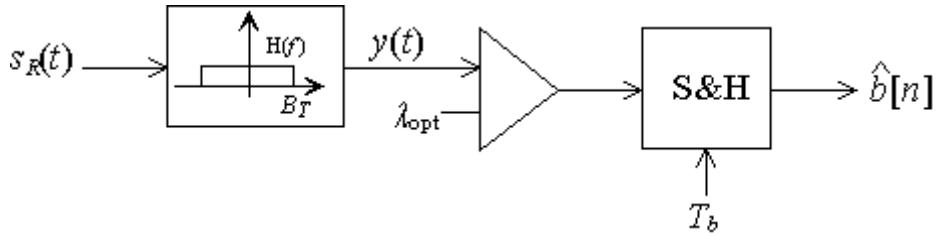


Figura 5.3
Diagrama de blocos do receptor binário.

Receptor constituído por filtragem passa-baixo na banda e descodificador MAP.

A decisão é efetuada uma vez por símbolo, sincronizado (sincronismo de símbolo) no instante de zero de ISI, sendo este implementado pelo circuito de amostragem e retenção (S&H – *sampling & hold*). A saída deste bloco conterá a sequência binária com eventuais erros de bit, em que cada nível lógico é representado pelas correspondentes tensões de saturação do comparador.

5.3 Probabilidade de erro de bit

A probabilidade de erro de bit, independentemente do critério utilizado (MAP, MV ou outro, nomeadamente utilizando um valor arbitrário de λ) é dada pela probabilidade de erro em cada nível lógico pesadas pelas respetivas probabilidades *a priori*, ou seja,

$$BER = p_1 p_{01} + p_0 p_{10}, \quad (5.6)$$

em que p_{01} é a probabilidade de errar o nível lógico “1” (enviar o nível lógico “1” mas descodificar o nível lógico “0”) e p_{10} é a probabilidade de errar o nível lógico “0”. Estas probabilidades são definidas por,

$$\begin{cases} p_{01} = f(y < \lambda | "1") \\ p_{10} = f(y > \lambda | "0") \end{cases}. \quad (5.7)$$

Utilizando o valor ótimo de λ , equidistante de y_0 e y_1 , determinado pela equação 5.5, tendo em conta a figura 5.2 e introduzindo a função complementar de erro (Apêndice 4):

$$\begin{cases} p_{01} = \int_{-\infty}^{\lambda_{opt}} f(y | "1") dy = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right) \\ p_{10} = \int_{\lambda_{opt}}^{+\infty} f(y | "0") dy = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right) \end{cases}. \quad (5.8)$$

Note-se que as probabilidades de errar os bits ao nível lógico “0” e ao nível lógico “1” são iguais. A probabilidade de erro de bit corresponderá à soma destas probabilidades pesadas pelas probabilidades *a priori*, ou seja:

$$BER = p_1 p_{01} + p_0 p_{10} = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right). \quad (5.9)$$

Assinale-se que a *BER* depende da diferença de tensão entre os símbolos e não dos seus valores absolutos, uma vez que,

$$d = \frac{|y_1 - y_0|}{2}. \quad (5.10)$$

Se em vez de um critério de máxima verosimilhança (MV) fosse utilizado um critério de máximo *a posteriori* (MAP) a figura 5.2 e as equações 5.5, 5.9 e 5.10 seriam as apresentadas no Apêndice 5.

5.3.1 Código PNRZ

Com o código PNRZ exemplificado na figura 5.1, $d = A$, a largura de banda é dada pela equação 4.4 e a energia média por símbolo dada pela equação 2.8 (assumindo a amplitude e a energia recebida), pelo que a *BER* vem:

$$BER = p_{01} = p_{10} = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{A^2}{2N_0B_T}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0(1+\alpha)}}\right). \quad (5.11)$$

Entrando com a relação sinal–ruído (equação 3.5) vem ainda:

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{SNR_c}{2}}\right). \quad (5.12)$$

5.3.2 Código UNRZ

Se o código for UNRZ, então os valores das tensões sem ruído no instante de amostragem resultam:

$$\begin{cases} y_1 = +A \\ y_0 = 0 \end{cases}. \quad (5.13)$$

Pela figura 5.2 $d = A/2$, a largura de banda é dada pela equação 4.4 e a energia média por símbolo dada pela equação 2.9 e obtém-se a *BER*:

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{A^2}{4 \times 2N_0B_T}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0(1+\alpha)}}\right). \quad (5.14)$$

Comparando as equações 5.11 e 5.14, para que a *BER* seja igual com os códigos PNRZ e UNRZ, a relação E_b/N_0 tem que ser o dobro (+3 dB) em UNRZ do que a do PNRZ. Isto deve-se ao facto de a componente DC dos códigos UNRZ consumirem metade da energia mas não servirem para distanciar os dois símbolos.

5.4 Filtro adaptado

O recetor estudado nos pontos anteriores assume filtragem passa-baixo ideal, com frequência de corte igual à largura de banda do sinal recebido, de modo a eliminar o ruído fora da banda. Assume ainda um instante de amostragem em que não existe interferência intersimbólica. Contudo, nem sempre é possível definir um instante de zero de ISI e a filtragem apenas tem em conta a largura de banda e não a forma do sinal transmitido.

Para resolver estes problemas, o Norte-americano Dwight North em 1943, concebeu o filtro ótimo (*matched filter*) para deteção de um sinal conhecido, corrompido por ruído branco e aditivo. Considere-se que o símbolo transmitido é $s_l(t)$, com l igual 0 ou 1, respetivamente para os símbolos correspondentes aos níveis lógicos “0” e “1”. A este sinal é adicionado ruído $w(t)$ no canal de comunicação, sendo recebido o sinal $s_R(t) = s_l(t) + w(t)$. Se for efetuada uma projeção sobre um sinal $ks_j(t)$, como mostrado na figura 5.4 ($j=l$), é anulada a componente do ruído perpendicular ao símbolo, permanecendo apenas a componente do ruído colinear ao símbolo.

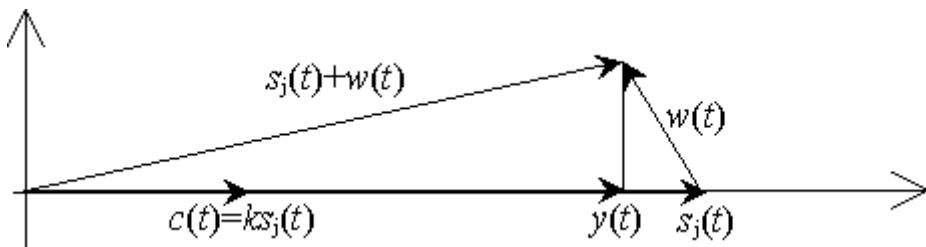


Figura 5.4
Interpretação vetorial do filtro adaptado.

Esta projeção é realizada através do produto interno entre o sinal recebido com ruído e um vetor de base, por exemplo proporcional ao símbolo “1”. $c(t)$ é então,

$$c(t) = ks_l(t). \quad (5.15)$$

O produto interno é determinado através do integral do produto entre o sinal de entrada $s_R(t)$ e o vetor de base $c(t)$. Se fosse possível integrar, como definido pelo produto interno, em tempo infinito e sendo o ruído ortogonal aos símbolos, o ruído seria todo eliminado. Não é no entanto possível que este integral seja efetuado em tempo infinito mas apenas no tempo de bit T_b , pois é necessária uma decisão por bit. Nestas circunstâncias o produto interno é definido por:

$$y(T_b) = \int_0^{T_b} c(t)s_R(t)dt, \quad (5.16)$$

que corresponde a uma filtragem em que a resposta impulsiva corresponde a:

$$h(t) = c(T_b - t) = ks_l(T_b - t), \quad (5.17)$$

pelo que se designa de filtro adaptado (ao símbolo 1). O diagrama de blocos completo do receptor, que é ótimo no sentido que minimiza a BER , é apresentado na figura 5.5. Com este filtro é retirado o ruído ortogonal ao sinal, que corresponde a todo o ruído fora da banda mas também algum ruído na banda do sinal.

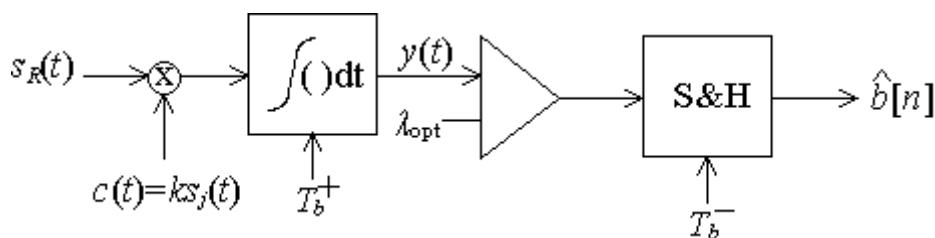


Figura 5.5
Diagrama de blocos do receptor ótimo.
Receptor constituído por filtro adaptado e deteção MAP.

O integrador é colocado a zero no início de cada símbolo, representado na figura 5.5 pela entrada T_b^+ , sendo tomada uma decisão no fim do símbolo, amostrando $y(t)$ nos instantes T_b^- , imediatamente antes de o integrador ser

recolocado a zero e se reiniciar o processo para descodificação do próximo símbolo.

Com a integração no tempo de bit, a função de verosimilhança para cada símbolo l tem uma distribuição normal $N(y_l, \sigma_n^2)$, sendo para a filtragem adaptada válida a figura 5.2. y_l , com l igual a 0 ou 1, corresponde às tensões sem ruído para os símbolos “0” e “1” respectivamente. A projeção obtém-se de,

$$\begin{aligned}
 y(T_b) &= \int_0^{T_b} c(t) s_R(t) dt \\
 &= \int_0^{T_b} k s_1(t) (s_l(t) + w(t)) dt \\
 &= \int_0^{T_b} k s_1(t) s_l(t) dt + \int_0^{T_b} k s_1(t) w(t) dt \\
 &= y_l + \int_0^{T_b} k s_1(t) w(t) dt
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

O segundo termo desta equação corresponde ao resultado da filtragem do ruído introduzido pelo canal. Note-se que para todos os códigos de linha o símbolo “0” ou é nulo (unipolar, bipolar) ou simétrico ao símbolo “1” (polar, bipolar). Deste modo os valores da projeção sem ruído correspondem a,

$$\begin{cases} y_1 = kE_1 \\ y_0 = -kE_1 & \text{polar} \\ y_0 = 0 & \text{unipolar} \end{cases}. \tag{5.19}$$

Definindo A_{eq} como a área equivalente do ruído no filtro adaptado (Apêndice 2), numericamente igual à energia do vetor de base e correspondente ao dobro da largura de banda de um filtro ideal passa-baixo de ganho unitário:

$$A_{eq} = \int_0^{T_b} c^2(t) dt = k^2 \int_0^{T_b} s_1^2(t) dt = k^2 E_1, \tag{5.20}$$

a componente filtrada do ruído tem uma distribuição normal com média nula e potência dada por (Apêndice 2):

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} A_{eq} = \frac{N_0}{2} E_c = \frac{N_0}{2} k^2 E_l. \quad (5.21)$$

5.5 Filtro adaptado normado

Assumindo que o vetor de base $c(t)$ tem energia unitária, a área equivalente do ruído é também unitária (filtro adaptado normado⁷):

$$A_{eq} = 1, \quad (5.22)$$

e da equação 5.20, o fator de escala k vem:

$$k = \frac{1}{\sqrt{E_l}}. \quad (5.23)$$

As tensões sem ruído no instante de amostragem, para o filtro adaptado normado (equações 5.19 e 5.23) resultam:

$$\begin{cases} y_1 &= +\sqrt{E_l} \\ y_0 &= -\sqrt{E_l} & polar \\ y_0 &= 0 & unipolar \end{cases}, \quad (5.24)$$

e a potência do ruído vem (equações 5.21 e 5.22),

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}. \quad (5.25)$$

Nesta situação a equação 5.9 pode ser reescrita como:

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{N_0}}\right). \quad (5.26)$$

⁷ Referencial ortogonal com vetores de base com norma unitária.

5.6 Código PNRZ

Retomando o exemplo com código PNRZ, os símbolos correspondem a tensões contínuas localizadas com amplitude A ou $-A$. Com o filtro adaptado ao símbolo “1”, $c(t)=kA=C$. O Valor de C , impondo que o filtro está normado, é determinado por⁸,

$$A_{eq} = 1 = \int_0^{T_b} C^2 dt = C^2 T_b \Rightarrow c(t) = C = \sqrt{R_b}. \quad (5.27)$$

Nesta situação y_1 é determinado por:

$$y_1 = \int_0^{T_b} c(t)s_1(t)dt = \int_0^{T_b} \sqrt{R_b} Adt = \sqrt{R_b} AT_b = \sqrt{A^2 T_b} = \sqrt{E_1} = \sqrt{E_b}, \quad (5.28)$$

como já definido pela equação 5.24. O valor de y_0 , também como na equação 5.24, é igual a $-y_1$, uma vez que os símbolos são simétricos e, pela mesma razão, $\lambda_{opt} = 0$ (equação 5.5). O valor de d é definido pela equação 5.10:

$$d = \frac{|y_1 - y_0|}{2} = \sqrt{E_b}, \quad (5.29)$$

A adaptação da figura 5.2 para a situação PNRZ com filtro adaptado normado é apresentada na figura 5.6. Desta figura, e das equações 5.26 e 5.29, a BER em PNRZ resulta:

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right). \quad (5.30)$$

⁸ O resultado da eq. 5.27 é válido para todos os códigos apresentados com exceção do código PRZ. Para este código o resultado é $C = \sqrt{2R_b}$ até $T_b/2$ e 0 de $T_b/2$ a T_b .

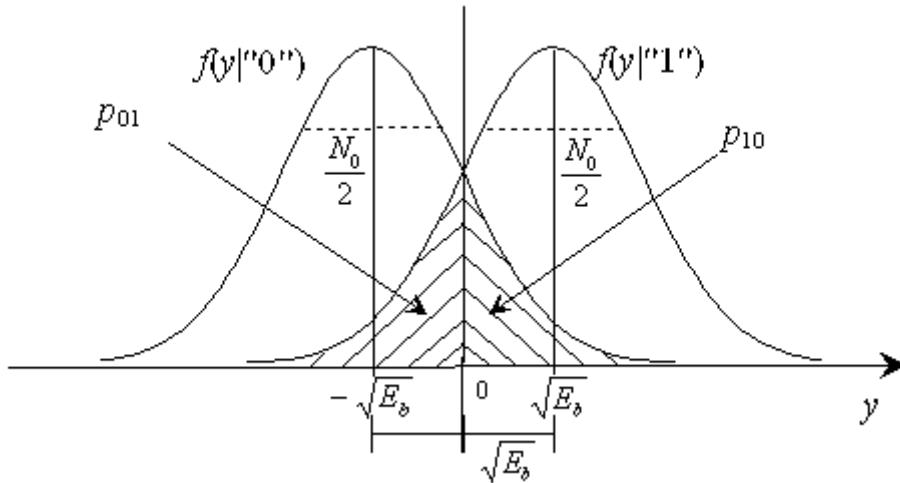


Figura 5.6
Funções densidade de probabilidade do ruído em PNRZ
com filtro adaptado normado.

Ao contrário da equação 5.11, deduzida com filtro de banda plana, mas sim com um filtro cuja resposta em frequência é dada (filtro adaptado) pela transformada de Fourier dos símbolos (símbolo “1”), ao utilizar o filtro adaptado a *BER* deixa de ser dependente do fator de *rolloff* e passa a ser função apenas da relação sinal–ruído entre energias E_b/N_0 , proporcional à SNR_c no canal (equação 3.5).

Mantendo a potência recebida e tendo em conta a equação 2.8, a equação 5.30 vem:

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{A^2 T_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{S_R}{R_b N_0}}\right). \quad (5.31)$$

Desta equação deduz-se que, desde que não se altere a potência recebida, ao aumento do débito binário e consequente diminuição da energia de bit, corresponde a um aumento na probabilidade de erro de bit. Para manter a probabilidade de erro de bit, ao aumento do débito binário terá que corresponder um aumento da potência recebida, ou seja, a um aumento da amplitude do código no canal, de modo a manter a energia por bit.

As formas de onda para o código PNRZ ao longo do recetor ótimo são apresentadas na figura 5.7.

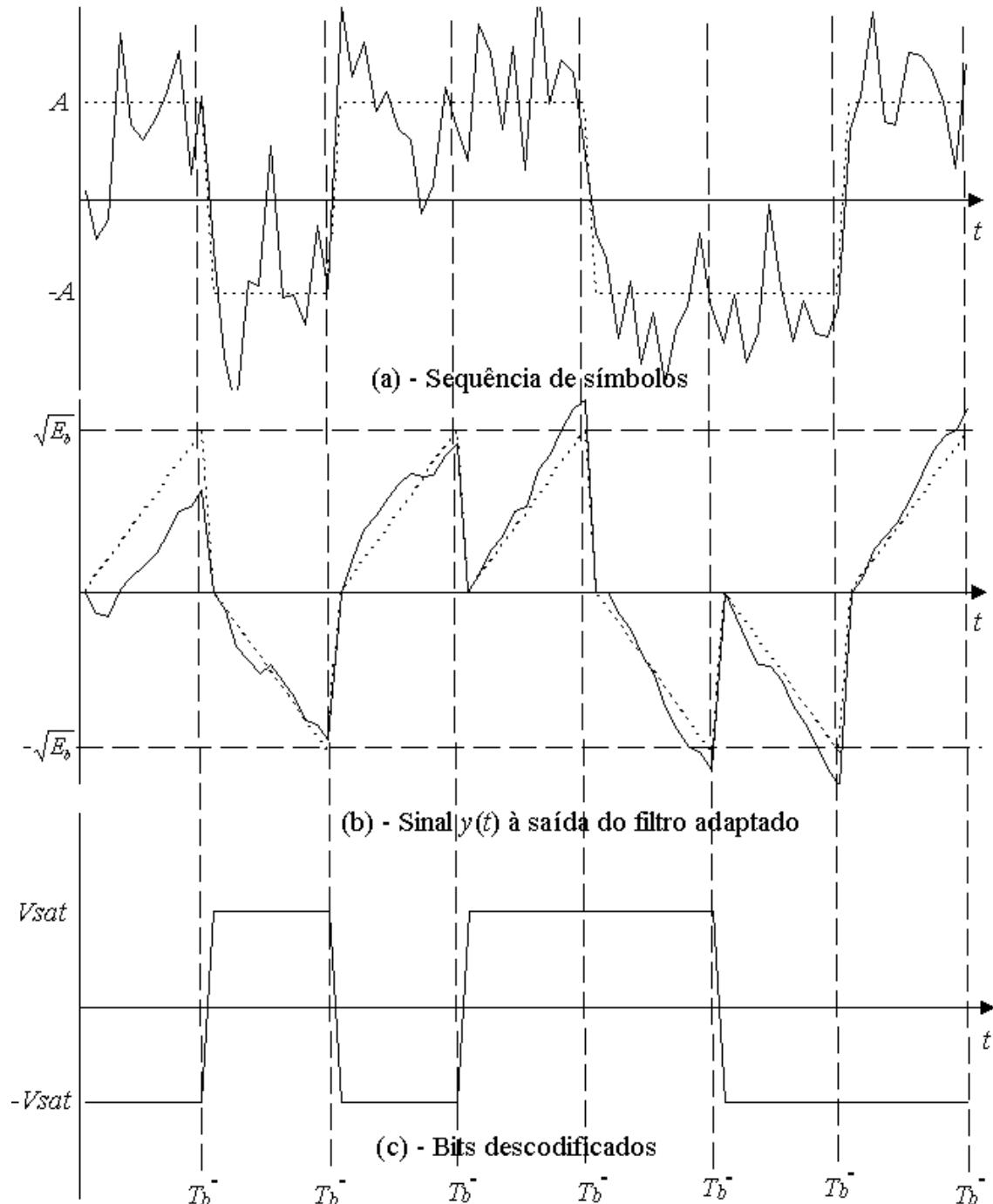


Figura 5.7
Formas de onda no recetor ótimo com código PNRZ com ruído.

5.7 Códigos polares

Genericamente para os casos dos códigos de linha polares (PNRZ, PRZ, Manchester), em que os símbolos estão relacionados por :

$$s_1(t) = -s_0(t). \quad (5.32)$$

As tensões no instante de amostragem correspondem a (equação 5.19):

$$\begin{cases} y_1 = +kE_1 = +kE_b \\ y_0 = -kE_1 = -kE_b \end{cases}. \quad (5.33)$$

Nesta situação o valor de comparação ótimo vem,

$$\lambda_{opt} = \frac{kE_b - kE_b}{2} = 0. \quad (5.34)$$

O valor de d é determinado por:

$$d = y_1 - \lambda_{opt} = kE_b. \quad (5.35)$$

A potência do ruído é dada pela equação 5.21 e a BER vem (equação 5.9)

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{k^2 E_b^2}{k^2 E_b N_0}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right). \quad (5.36)$$

A BER é apenas função da relação entre energias E_b/N_0 , deixando de depender, ao contrário da equação 5.11, do fator de *rolloff*.

5.8 Códigos unipolares

Para o caso dos códigos de linha unipolares (UNRZ), em que o símbolo “0” corresponde a 0 V, a adaptação da figura 5.2 ao filtro adaptado não normado é apresentada na figura 5.8. As tensões de observação de cada símbolo sem ruído no instante de amostragem são (equação 5.19):

$$\begin{cases} y_1 = +kE_1 = +2kE_b \\ y_0 = 0 \end{cases}. \quad (5.37)$$

Nesta situação o valor de comparação ótimo é determinado por,

$$\lambda_{ot} = \frac{2kE_b + 0}{2} = kE_b. \quad (5.38)$$

O valor de d é obtido de:

$$d = y_1 - \lambda_{opt} = 2kE_b - kE_b = kE_b. \quad (5.39)$$

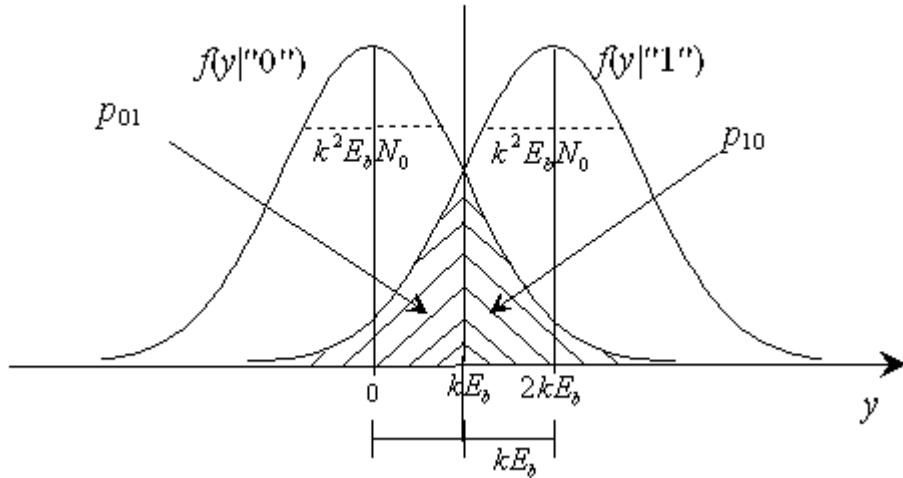


Figura 5.8
Funções densidade de probabilidade do ruído em UNRZ
com filtro adaptado não normado.

Uma vez que a potência do ruído é dada pela equação 5.20 e 5.21:

$$\sigma_n^2 = k^2 E_b N_0. \quad (5.40)$$

A BER vem (equação 5.9):

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{k^2 E_b^2}{2k^2 E_b N_0}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right). \quad (5.41)$$

Como nos códigos polares, a probabilidade de erro de bit depende apenas da relação sinal–ruído E_b/N_0 e não, como na equação 5.14, do fator de *rolloff*.

Se o filtro adaptado estiver normado, $c(t)$ é o mesmo que o deduzido na equação 5.27 pois os símbolos lógicos “1” em PNRZ e UNRZ são iguais.

5.9 Código BNRZ

Na situação do código de linha bipolar sem retorno a zero existem duas possibilidades quando se transmite o nível lógico “1”: ou se transmite o símbolo A ou se transmite o símbolo $-A$, situações que ocorrem alternadamente e portanto com a mesma probabilidade. A figura 5.2 é então adaptada para três símbolos, conforme mostrado na figura 5.9.

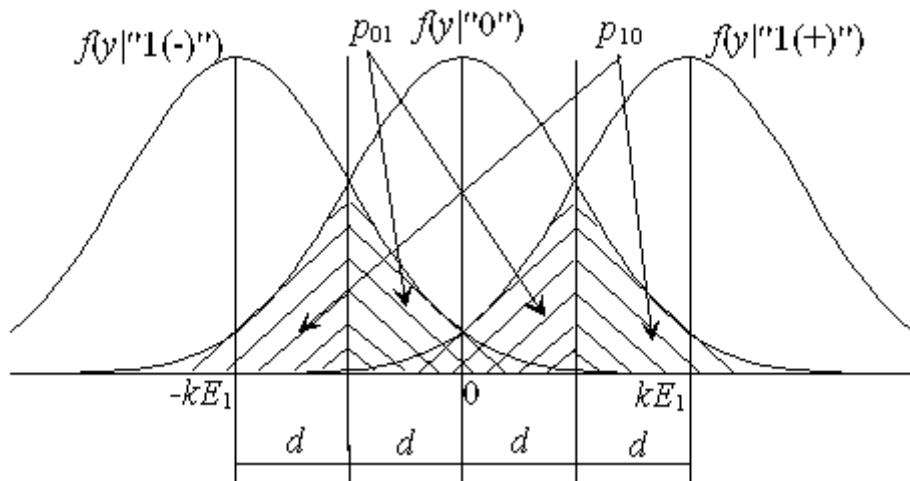


Figura 5.9
Funções densidade de probabilidade na receção do código BNRZ.

As tensões no instante de amostragem do filtro adaptado, denominadas respetivamente por y_{1+} e y_{1-} e y_0 , são dadas por:

$$\begin{cases} y_{1+} = +kE_1 = +2kE_b \\ y_{1-} = -kE_1 = -2kE_b \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad (5.42)$$

O valor de d é definido pela equação 5.10, pelo que:

$$d = \frac{kE_1 - 0}{2} = \frac{2kE_b}{2} = kE_b. \quad (5.43)$$

O nível lógico “0” é descodificado com erro se o valor de y for maior que d ou menor que $-d$ (2 vezes a área debaixo da curva de Gauss). Cada um dos

dois símbolos representando o nível lógico “1”, com polarização positiva ou negativa, tem probabilidade *a priori* de metade da probabilidade *a priori* deste nível lógico. O esquema de blocos do recetor BNRZ é apresentado na figura 5.10, em que o comparador que efetua a descodificação MV é substituído por um quantificador de três níveis.

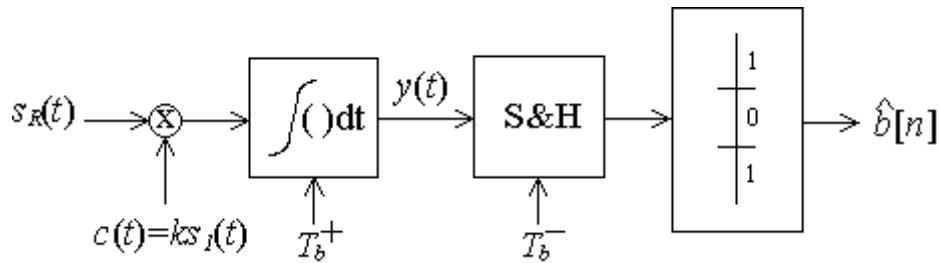


Figura 5.10
Recetor ótimo para o código BNRZ.

Deste modo resulta para a *BER*:

$$BER = 2p_0 \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right) + \frac{p_1}{2} \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right) + \frac{p_1}{2} \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right). \quad (5.44)$$

Assumindo os níveis lógicos equiprováveis esta equação reduz-se a:

$$BER = \frac{3}{4} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right), \quad (5.45)$$

pelo que, utilizando as equações 2.9, 5.21 e 5.43, vem:

$$BER = \frac{3}{4} erfc\left(\sqrt{\frac{k^2 E_b^2}{2k^2 E_b N_0}}\right) = \frac{3}{4} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right). \quad (5.46)$$

Este valor da *BER* não entra em conta com a capacidade deste código detetar erros por violação da regra de polaridade alternada quando do envio de níveis lógicos “1”. Se houver a capacidade do recetor informar o transmissor

destes erros, a informação poderá ser reenviada. Por exemplo, erros isolados conseguem sempre ser detetados se:

- O último nível lógico “1” foi codificado com determinada polaridade e um nível lógico “0” consequente é incorretamente descodificado para “1” com a mesma polaridade;
- O último nível lógico “1” foi codificado com determinada polaridade e um nível lógico “0” consequente é incorretamente descodificado para a polaridade contrária. No próximo nível lógico “1” haverá uma violação;
- Havendo erro num nível lógico “1” que foi entendido como nível lógico “0”, haverá uma violação no próximo nível lógico “1” transmitido.

5.10 Códigos diferenciais

Nos códigos diferenciais, um erro de símbolo isolado (antes da pós-codificação) origina dois erros de bit seguidos (após a pós-descodificação), uma vez que cada símbolo contém informação sobre o nível lógico presente e o imediatamente posterior. Uma vez que estes códigos são insensíveis à polaridade, se antes da pós-descodificação forem cometidos erros consecutivos de símbolos, apenas são produzidos dois erros de bit com pós-descodificação, na posição do primeiro erro de símbolo e na posição seguinte ao último símbolo errado. Os códigos diferenciais exibem então uma *BER* inferior ao do dobro da *BER* do respetivo código não diferencial. Para os códigos NRZI e Manchester diferencial tem-se que, da equação 5.36:

$$BER \leq erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right). \quad (5.47)$$

Desde que a probabilidade de erro de símbolo seja baixa a *BER* tende para a igualdade na equação 5.47. Esta é a situação mais realista que sendo um limite máximo vai ser adotada no resto do texto.

5.11 Comparação do desempenho

Na figura 6.8 são apresentados os valores da *BER* dos diversos códigos de linha, função da relação de energias E_b/N_0 em decibéis. A *SNR* no canal é dada pelo produto desta relação pela eficiência espectral (equações 2.6 e 3.5). Desta figura podem ser tiradas várias conclusões, tais como:

- Os códigos de linha “polares” (PNRZ, PRZ, Manchester), com símbolos simétricos, obtêm o melhor desempenho em termos da probabilidade de erro de bit, pois são os que têm a menor energia para o máximo afastamento entre símbolos.
- Os códigos “unipolares” (UNRZ) estão distanciados dos códigos “polares” de $10\log_{10}(1/2) = -3$ dB de relação E_b/N_0 , ou seja, têm o mesmo desempenho para +3 dB (o dobro em linear) de relação E_b/N_0 ;
- Para a mesma relação E_b/N_0 , os códigos diferenciais polares (NRZI, Manchester diferencial) têm o dobro da *BER* exibida pelos códigos polares. Este valor corresponde a um limite máximo, uma vez que a erros consecutivos de símbolos antes da pós-descodificação apenas correspondem 2 erros de bit após a pós-descodificação;
- O código BNRZ é o que tem pior desempenho em termos da *BER*, mas tem boa capacidade de sincronismo em BNZS, não tem componente DC nem sofre de desvanecimento. Esta comparação também não entra em consideração com sua a capacidade de deteção de erros isolados, embora necessite de mecanismos de reenvio.

Na tabela 5.1 indica, para cada atributo, os códigos que têm melhor e pior desempenho, conforme exposto nas secções anteriores.

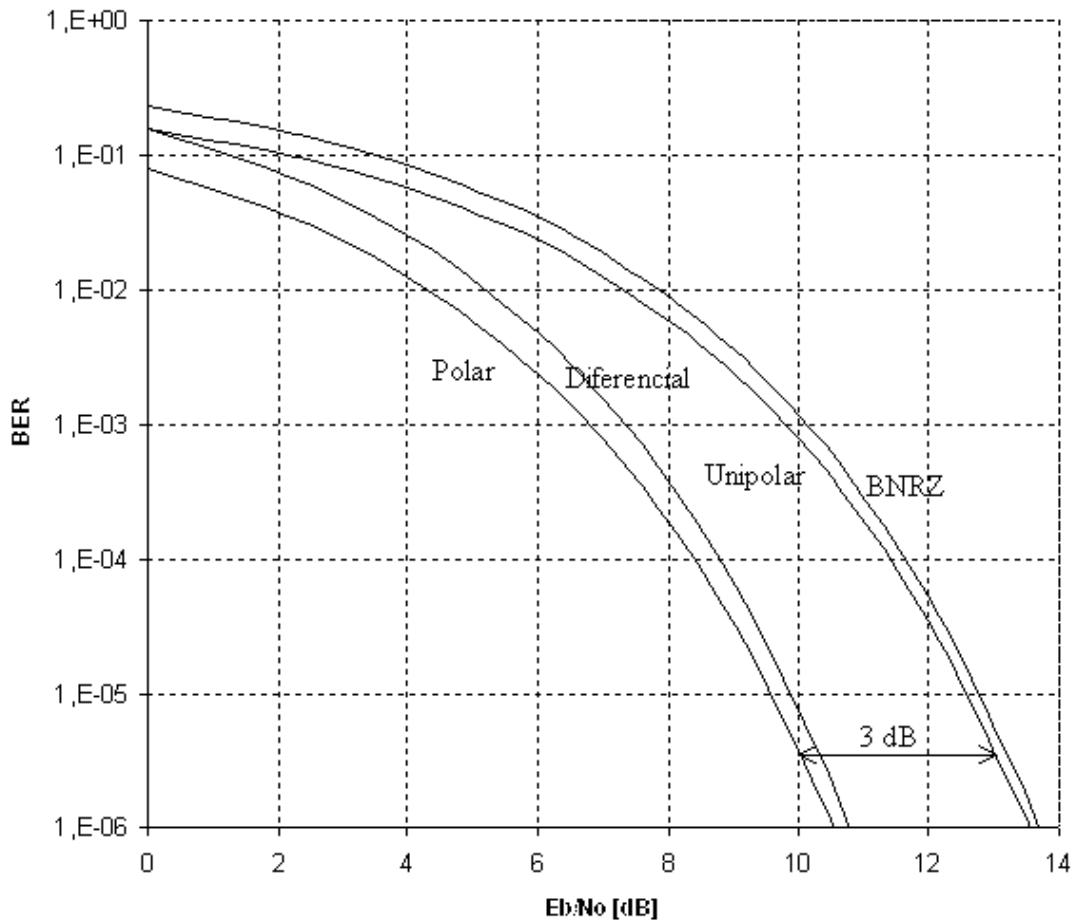


Figura 5.10
BER dos diversos códigos em função da relação sinal-ruído E_b / N_0 .

	PNRZ	PRZ	UNRZ	Manch.	BNRZ	NRZI	Manch. Dif
E_b (mesma BER)	↑	↑		↑	↓		
ρ	↑	↓	↑	↓	↑	↑	↓
DC			↓	↑			↑
BER (mesma E_b)	↑	↑		↑	↓		
Deteção de Erros					↑		
Capacidade de Sincronismo	↓	↑	↓	↑		↓	↑
Complexidade do transmissor			↑		↓		
Complexidade do receptor	↓	↑	↓	↑	↓	↓	
Inversão de polaridade					↑	↑	↑

Figura 5.1
Código com melhor, (↑) e pior (↓) desempenho em termos de atributos.

6 Transmissão *M*-ária em banda de base

Como visto na secção 4, a largura de banda depende do número máximo de transições por segundo produzido pelo código de linha. Uma maneira de diminuir o número de transições e consequentemente a largura de banda é fazer com que o símbolo contenha informação de mais do que 1 bit, diminuindo o débito de símbolos R_s (também denominado *baud rate* ou relação de modulação) sem diminuir o débito binário. O símbolo deixa de ser binário para ser *M*-ária, ou seja, com M formas de onda possíveis.

6.1 PAM Digital – Modulação por amplitude de impulsos

Um código de linha *M*-ária, em que os símbolos são representados por diferentes amplitudes, apresentado na figura 6.1, é denominado PAM (*pulse amplitude modulation*) digital (ou PNRZ *M*-ária).

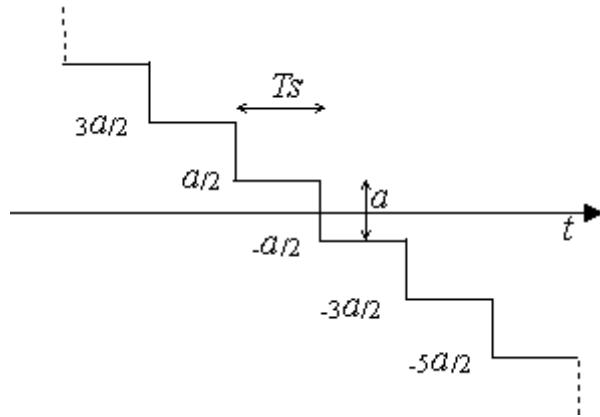


Figura 6.1
Código PAM digital.

M símbolos equidistantes, simétricos em torno do zero.
A distância entre símbolos adjacentes é de a . Exemplo de 4-PAM.

O número de bits por símbolo K e o número de símbolos M do código estão relacionados por:

$$M = 2^K. \quad (6.1)$$

O tempo de símbolo T_s e o tempo de bit estão relacionados por:

$$T_s = KT_b. \quad (6.2)$$

O débito de símbolos, R_s , está relacionado com o débito binário por:

$$R_s = \frac{R_b}{K}. \quad (6.3)$$

6.2 Energia média por símbolo

Denominando a como a tensão entre símbolos adjacentes, a energia média por símbolo, assumindo que estes são equiprováveis, é dada por,

$$E_s = T_s \frac{2a^2}{M} \sum_{k=1}^{M/2} (k - 0,5)^2 = T_s \frac{a^2}{4} \frac{(M^2 - 1)}{3} = \frac{(M^2 - 1)}{3} E_{\min}, \quad (6.4)$$

que aumenta com o quadrado de a e de M . E_{\min} é a energia do símbolo de menor energia, com amplitude $a/2$:

$$E_{\min} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 T_s. \quad (6.5)$$

A energia média por bit vem:

$$E_b = \frac{E_s}{K}. \quad (6.6)$$

6.3 Largura de banda

Assumindo o instante de zero de ISI a meio dos símbolos, a abertura dos pulsos formatados é de $2R_s$ e a largura de banda vem:

$$B_T = \frac{R_s}{2} (1 + \alpha) = \frac{R_b}{2K} (1 + \alpha). \quad (6.7)$$

Como se pretendia, a largura de banda diminui com o aumento do número de bits por símbolo. A equação 6.7 é um caso geral da equação 4.4,

substituindo R_b por R_s . A eficiência espectral (equação 2.6) também melhora com o aumento do número de bits por símbolo:

$$\rho = \frac{R_b}{B_T} = \frac{2K}{(1+\alpha)}. \quad (6.8)$$

6.4 Probabilidade de erro de símbolo

O recetor ótimo para códigos PAM digital é idêntico ao do recetor binário da figura 5.5, como mostrado na figura 6.2, mas em que o comparador é substituído por um quantificador/codificador de modo a detetar M níveis de saída do filtro adaptado.

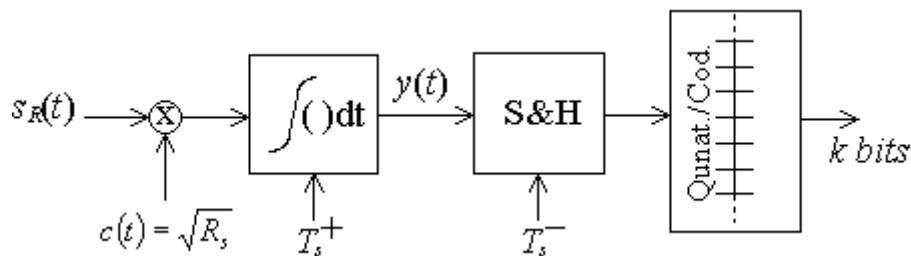


Figura 6.2
Recetor ótimo normado PAM digital.
Filtro adaptado normado seguido de quantificador/codificador.

Assumido que este filtro está normado, os símbolos correspondem a tensões contínuas localizadas, pelo que $c(t)=C$ e, pela equação 5.22:

$$A_{eq} = 1 = \int_0^{T_s} C^2 dt = C^2 T_s \Rightarrow c(t) = C = \sqrt{R_s}, \quad (6.9)$$

que é um caso particular da equação 5.27, outra vez substituindo R_b por R_s .

As funções densidade de probabilidade, para os diversos símbolos, à saída do filtro no momento de amostragem, são apresentadas na figura 6.3. O valor de d para o cálculo da probabilidade de erro de símbolo vem:

$$d = \int_0^{T_s} \frac{a}{2} c(t) dt = \frac{a}{2} \sqrt{R_s} T_s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 T_s} = \sqrt{E_{min}}. \quad (6.10)$$

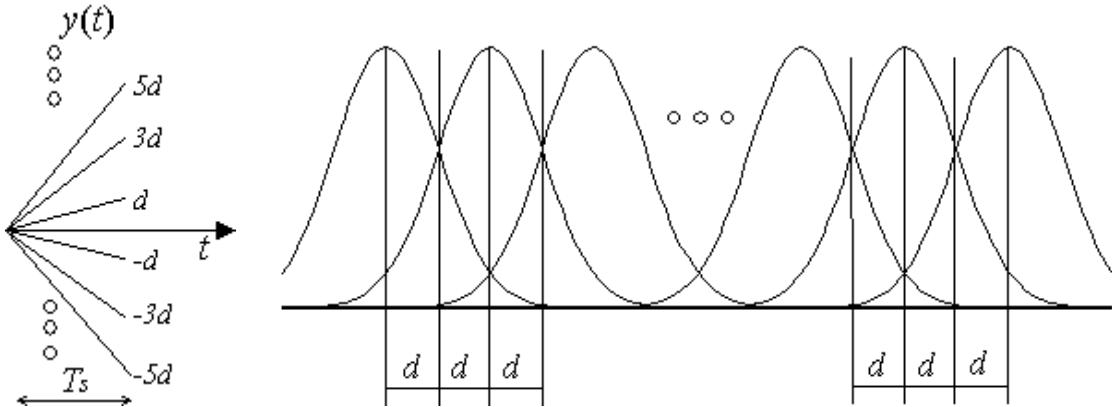


Figura 6.3
Funções densidade de probabilidade no código PAM digital.

No cálculo da probabilidade de erro de símbolo terá de se contar com as áreas acima de d à esquerda e à direita, a menos das duas funções densidade de probabilidade das “pontas”, em que esta área só contará uma vez. A probabilidade de erro de símbolo, *SER* (*Symbol Error Rate*), vem então, assumindo que todos os símbolos são equiprováveis:

$$SER = \frac{2(M-2)}{M} \frac{1}{2} ercf\left(\sqrt{\frac{d^2}{N_0}}\right) + \frac{2}{M} \frac{1}{2} ercf\left(\sqrt{\frac{d^2}{N_0}}\right). \quad (6.11)$$

Através das equações 5.26, 6.4, 6.10 e 6.11, chega-se a:

$$SER = \frac{(M-1)}{M} ercf\left(\sqrt{\frac{E_{\min}}{N_0}}\right) = \frac{(M-1)}{M} ercf\left(\sqrt{\frac{3K}{(M^2-1)} \frac{E_b}{N_0}}\right). \quad (6.12)$$

6.5 Probabilidade de erro de bit

Um símbolo representa um conjunto de K bits. Para o cálculo da probabilidade de erro de bit em função da probabilidade erro de símbolo irão admitir-se duas situações na disposição dos bits em cada símbolo: (1) disposição aleatória: 1 erro de símbolo corresponde a errar de 1 a K bits de um modo equiprovável; (2) código Gray: 1 erro de símbolo corresponde com maior probabilidade ao erro de apenas 1 bit.

6.5.1 Código aleatório

Se não houver qualquer preocupação no modo em como se define o código de K bits do símbolo, poderá assumir-se que quando se erra um símbolo estarão errados quaisquer número de bits entre 1 e K . Em média estarão errados $(K+1)/2$ bits, pelo que:

$$\frac{1}{SER} \text{ símbolos} \Leftrightarrow \frac{K}{SER} \text{ bits} \Leftrightarrow 1 \text{ símbolo errado} \Leftrightarrow \frac{K+1}{2} \text{ bits errados}, \quad (6.13)$$

e a BER é dada por:

$$BER = \frac{(K+1)/2}{K/SER} = \frac{K+1}{K} \frac{SER}{2}. \quad (6.14)$$

6.5.2 Código Gray

A probabilidade de quando existe um erro de símbolo ser descodificado um dos dois símbolos adjacente (amplitudes adjacentes) é muito maior do que ser descodificado qualquer outro símbolo. Se houver o cuidado de modo a que a símbolos adjacentes correspondam códigos apenas com 1 bit de diferença, como num código Gray, então quando se erra 1 símbolo apenas 1 bit estará errado. Nestas circunstâncias, vem:

$$\frac{1}{SER} \text{ símbolos} \Leftrightarrow \frac{K}{SER} \text{ bits} \Leftrightarrow 1 \text{ símbolo errado} \approx 1 \text{ bit errado}, \quad (6.15)$$

pelo que,

$$BER \approx \frac{SER}{K}. \quad (6.16)$$

A tabela 6.1 ilustra o código Gray para 4 bits.

0	0000	4	0110	8	1100	12	1010
1	0001	5	0111	9	1101	13	1011
2	0011	6	0101	10	1111	14	1001
3	0010	7	0100	11	1110	15	1000

Tabela 6.1
Código Gray de 4 bits.

Sendo esta uma situação mais favorável que a utilização de uma disposição aleatória, assumiremos desde que nada seja dito em contrário a utilização de um código Gray. Para uma transmissão M -ária a BER vem então, pelas equações 6.12 e 6.16:

$$BER = \frac{(M-1)}{KM} erfc\left(\sqrt{\frac{3K}{(M^2-1)N_0}} E_b\right). \quad (6.17)$$

6.6 Código 2B1Q

Um bom compromisso entre o desempenho e a complexidade corresponde a utilizar um código PAM digital com 2 bits por símbolo (2B1Q – 2 *binary* 1 *quaternary*) e código Gray, apresentado na figura 6.4.

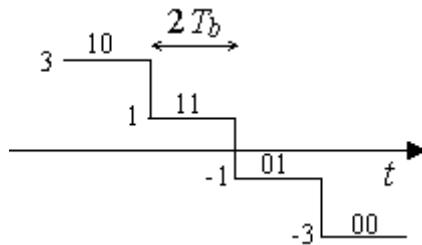


Figura 6.4
Código 2B1Q correspondente a PAM digital quaternário utilizando código Gray.

Aplicando a equação 6.17 com $K=2$ bits por símbolo, obtém-se:

$$BER = \frac{3}{8} erfc\left(\sqrt{\frac{2E_b}{5N_0}}\right). \quad (6.18)$$

A largura de banda vem, pela equação 6.7:

$$B_T = \frac{R_b}{4}(1+\alpha). \quad (6.19)$$

Obtém-se então metade da largura de banda comparando com um código PNRZ ($M=2$), com um aumento *razoável* da complexidade e da BER . O

receptor ótimo deste código corresponde ao da figura 6.2, mas em que o quantificador/codificador é de apenas 2 bits em código Gray.

Na figura 6.4 é apresentado o padrão de olho do código 2B1Q com fator de *rolloff* $\alpha=0$ e distância entre símbolos $a=2$ V. Pode-se verificar os instantes sem ISI a meio dos símbolos, com tensões ± 1 V e ± 3 V.

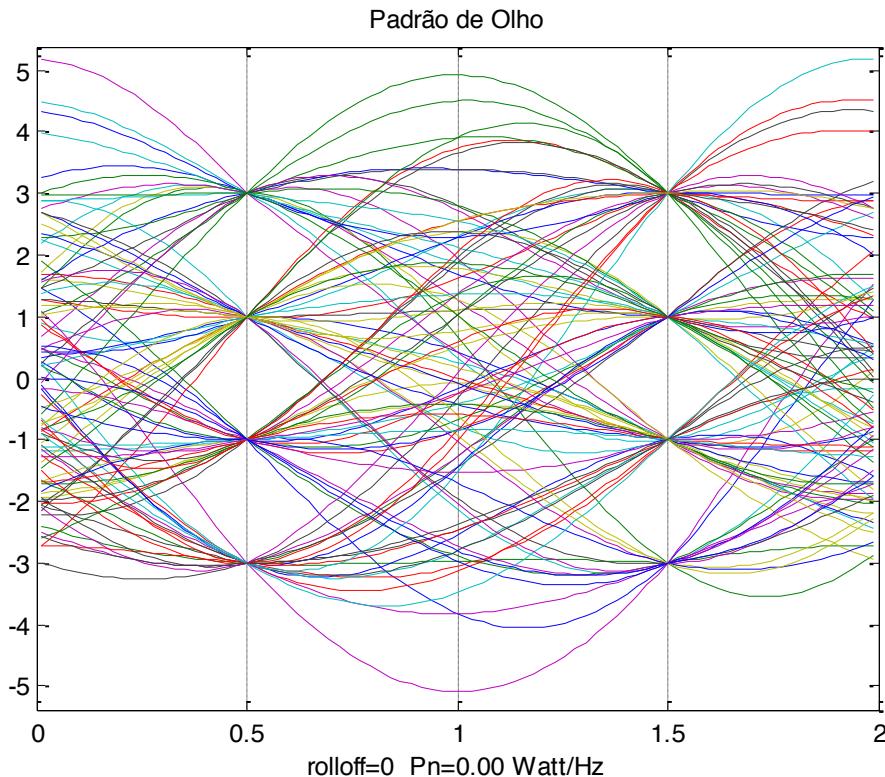


Figura 6.4
Padrão de olho no código 2B1Q com $\alpha=0$ e $a=2$.

O código 2B1Q é utilizado por exemplo em RDIS (Rede Digital Integrada de Serviços) entre a central telefónica e o equipamento de entrada que fará a distribuição. A RDIS utiliza o sistema telefónico, permitindo dois canais de 64 kbit/s mais um canal de 16 kbit/s para sinalização e controlo.

6.7 Comparação de desempenho

Na figura 6.5 e tabela 6.2 é apresentada uma comparação entre as probabilidades de erro para diversos números de bits por símbolo ($M=2, 4, 8, 16$). Pode-se verificar o aumento da BER à medida que se aumenta M , mas relembrar-se que se diminui a largura de banda ocupada (equação 6.7).

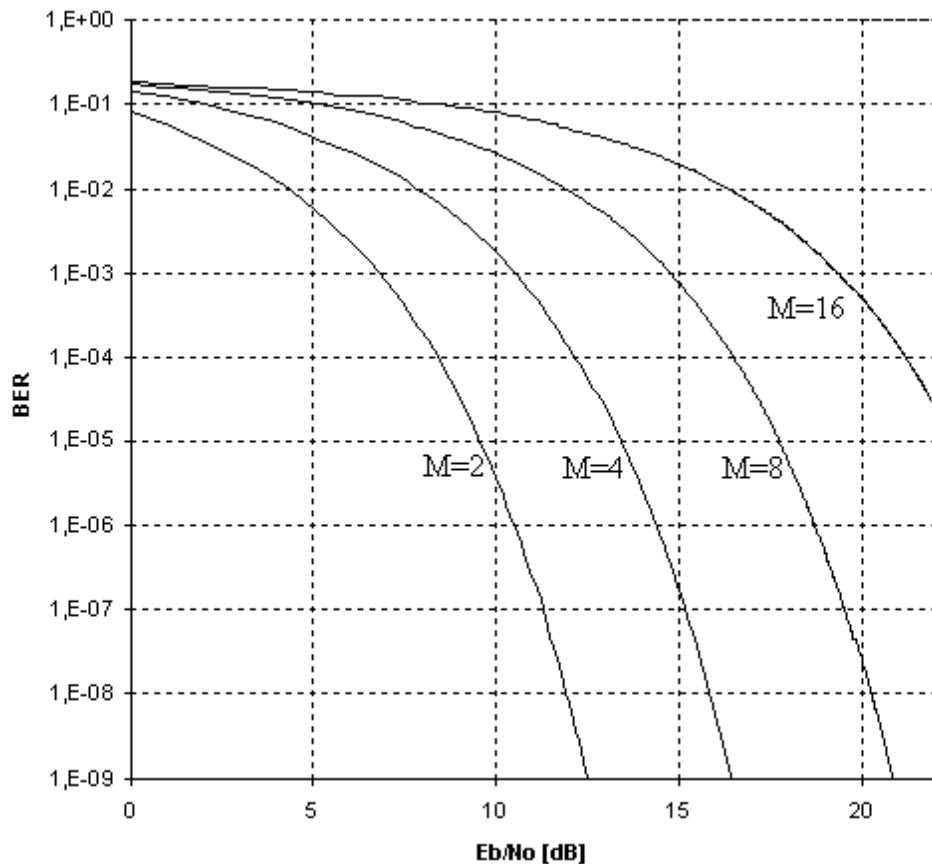


Figura 6.5
BER em função da relação E_b/N_0 , para PAM digital.
 Código Gray com M a variar de 2 a 16.

	$M=2$	$M=4$	$M=8$	$M=16$
eficiência espectral	2	4	6	8
E_b/N_0 dB ($BER=10^{-6}$)	10,5	14,4	18,8	23,5
BER ($E_b/N_0=15$ dB)	$8,9 \times 10^{-16}$	$1,8 \times 10^{-7}$	$7,7 \times 10^{-4}$	2×10^{-2}

Tabela 6.2
 Compromisso entre a eficiência espectral ($\alpha=0$) e BER para PAM digital.

6.8 Capacidade de canal

Assumindo a largura de banda mínima do critério de Nyquist ($\alpha=0$) para transmissão sem ISI, das equações 6.7 e 6.1 vem,

$$R_b = B_T 2K = B_T \log_2(M^2). \quad (6.20)$$

Das equações 6.4 e 6.5 vem,

$$\frac{E_s}{T_s} = S_R = \frac{a^2}{12}(M^2 - 1) \Leftrightarrow M^2 = 1 + \frac{12S_R}{a^2}. \quad (6.21)$$

E de 6.20 e 6.21,

$$R_b = B_T \log_2 \left(1 + \frac{12S_R}{a^2} \right). \quad (6.22)$$

Considerando um canal com ruído gaussiano e de banda limitada B_c , sendo recebido um sinal com potência S_R , Shannon demonstrou em 1949 que existe um débito binário máximo para transmissão com probabilidade de erro de símbolo arbitrariamente pequena, denominando-o de capacidade de canal. A equação da capacidade de canal (gaussiano) é semelhante à equação 6.22, fazendo a potência do ruído na banda σ_c^2 proporcional a a^2 :

$$C = B_C \log_2 \left(1 + \frac{S_R}{\sigma_c^2} \right) = B_C \log_2 \left(1 + \frac{S_R}{N_0 B_C} \right). \quad (6.23)$$

Este é um limite teórico, conhecido por Lei de Hartley-Shannon. Se o débito binário for superior à capacidade de canal não é possível transmitir sem erros. Shannon não especificou qual o método de codificação e descodificação capaz de atingir este limite, mas a Lei de Hartley-Shannon tem vindo a servir de referência de modo a verificar a eficiência de uma transmissão.

Para determinada capacidade de canal pode-se reduzir a largura de banda à custa do aumento da potência transmitida ou vice-versa. Note-se que a capacidade de canal depende linearmente da largura de banda mas para se obter o mesmo efeito é necessário alterar a potência transmitida exponencialmente. Estabelece-se ainda um número máximo de bits por símbolo para determinada SNR , de modo a que os níveis correspondentes aos diversos símbolos estejam suficientemente espaçados para que o ruído não interfira na sua descodificação.

7 Modulação digital

Na transmissão através de códigos de linha, apresentada nas secções anteriores, o sinal está em banda de base e é transmitido num canal do tipo passa-baixo. Em canais passa-banda um código de linha é modulado por uma portadora sinusoidal, produzindo uma modulação digital passa-banda centrada na frequência da portadora. Estes sinais são mais fáceis de propagar na atmosfera e podem ser multiplexados se forem modulados com portadoras de frequências diferentes e estiverem em bandas que não se sobreponham. Na figura 7.1 são apresentadas algumas das modulações binárias mais usuais.

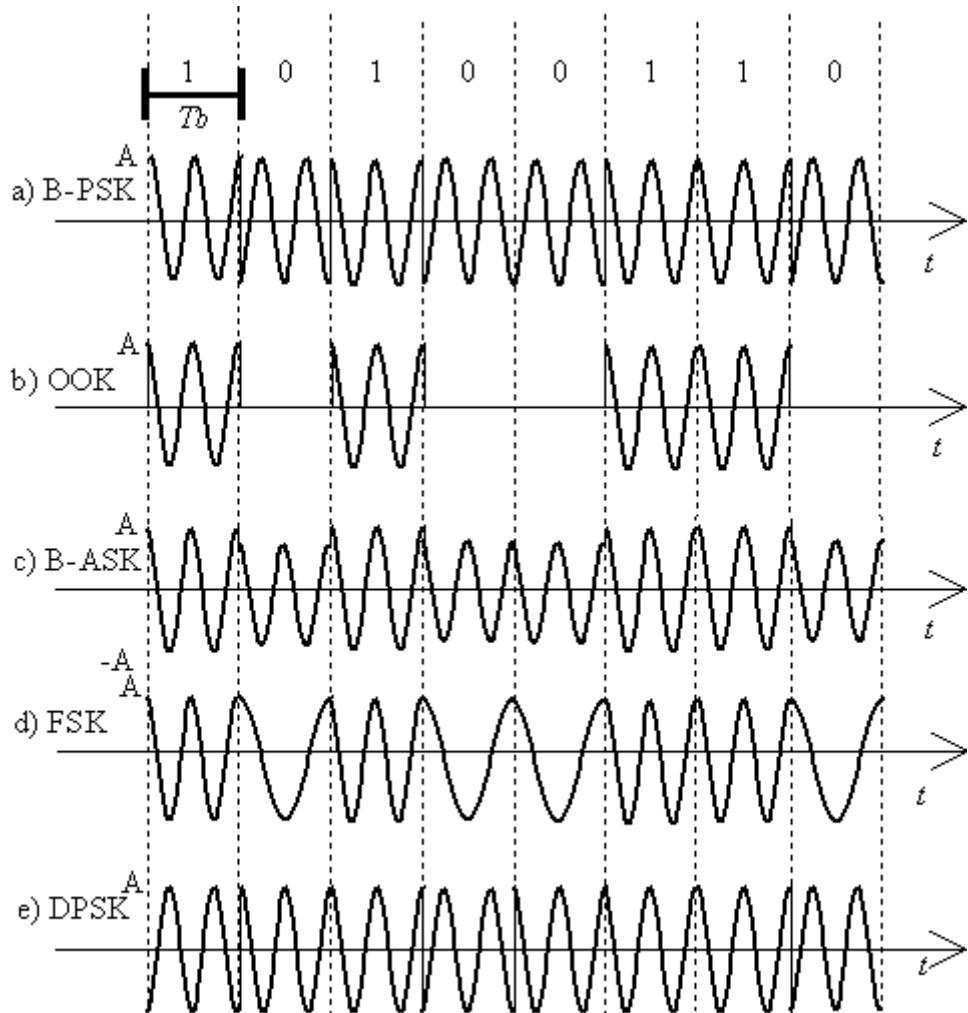


Figura 7.1
Modulações digitais binárias mais comuns.
B-PSK, OOK, B-ASK, FSK e DPSK.

7.1 Modulações B-PSK, OOK e B-ASK

Este conjunto de modulações é produzido através da modulação em duas bandas laterais DSB (*double side band*). Como ilustrado na figura 7.2, as modulações B-PSK, OOK e B-ASK são obtidas pelo produto de um código de linha por uma portadora sinusoidal.

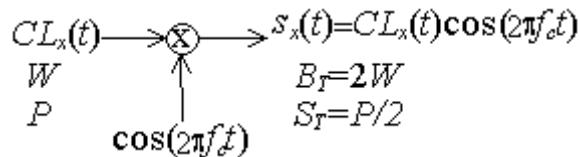


Figura 7.2
Modulação DSB para obtenção de modulações B-PSK, OOK e B-ASK.

7.1.1 Modulação B-PSK

Os símbolos na modulação de chave de desvio de fase B-PSK (*binary phase shift keying*) são definidos por:

$$\begin{cases} s_1(t) = A \cos(2\pi f_c t) & \text{para o nível lógico "1"} \\ s_0(t) = -A \cos(2\pi f_c t) & \text{para o nível lógico "0"} \end{cases}. \quad (7.1)$$

Esta modulação corresponde à modulação em DSB de um código de linha PNRZ. Os símbolos correspondem a uma sinusoide (portadora) com amplitude constante e fase 0 ou π .

A largura de banda em DSB é o dobro da largura de banda do sinal de entrada, pelo que, pela equação 4.4, considerando W como a largura de banda do código linha PNRZ, a largura de banda em PSK é dada por:

$$B_T = 2W = R_b(1 + \alpha). \quad (7.2)$$

A eficiência espectral com formatação de pulsos é dada por (equação 2.6):

$$\rho = \frac{R_b}{B_T} = \frac{1}{(1 + \alpha)}. \quad (7.3)$$

Com o critério do primeiro zero espectral a largura de banda vem:

$$B_T = 2W = 2R_b. \quad (7.4)$$

uma vez que, a largura de banda por este critério em PNRZ é $W = R_b$.

A potência e portanto a energia do sinal de saída em DSB são metade dos respetivos valores do sinal de entrada, pelo que, pela equação 2.8, a energia media por bit em B-PSK é dada por:

$$E_b = \frac{A^2}{2} T_b. \quad (7.5)$$

Os símbolos em B-PSK correspondem ao de um código polar (equações 5.32 e 7.1), pelo que a probabilidade de erro de bit é dada pela equação 5.36.

7.1.2 Modulação OOK

Os símbolos na modulação OOK (*on-off keying*) são definidos por:

$$\begin{cases} s_1(t) = A \cos(2\pi f_c t) & \text{para o nível lógico "1"} \\ s_0(t) = 0 & \text{para o nível lógico "0"} \end{cases} \quad (7.6)$$

Esta modulação corresponde à modulação DSB de um código de linha UNRZ. Os símbolos correspondem à presença ou ausência de uma portadora.

Tendo em consideração a largura de banda em UNRZ, a largura de banda e a eficiência espectral em OOK são dadas pelas equações 7.2, 7.3 e 7.4. A energia média por bit em UNRZ é dada pela equação 2.9, pelo que a energia media por bit em OOK é dada por:

$$E_b = \frac{A^2}{4} T_b. \quad (7.7)$$

Os símbolos em OOK correspondem ao de um código unipolar (equação 7.6), pelo que a probabilidade de erro de bit é dada pela equação 5.41.

7.1.3 Modulação B-ASK

Os símbolos na modulação binária de chave de desvio de amplitude B-ASK (*binary amplitude shift keying*) são definidos por:

$$\begin{cases} s_1(t) = A_1 \cos(2\pi f_c t) & \text{para o nível lógico "1"} \\ s_0(t) = A_0 \cos(2\pi f_c t) & \text{para o nível lógico "0"}, \end{cases} \quad (7.8)$$

ou seja, cada símbolo corresponde a uma amplitude diferente da portadora. Note-se que a modulação OOK é um caso particular da modulação B-ASK em que uma das amplitudes é 0.

O código de linha de entrada corresponde a um código sem retorno a zero mas em que cada símbolo é representado por uma tensão positiva diferente. A largura de banda e a eficiência espectral são iguais às dos códigos PNRZ e UNRZ, pelo que são dadas pelas equações 7.2, 7.3 e 7.4.

A energia média por bit em B-ASK é a média das energias das sinusoides de cada símbolo, dada por:

$$E_b = \frac{A_1^2 + A_0^2}{4} T_b. \quad (7.9)$$

O recetor ótimo com filtro normado (recetor ótimo normado) para receção de modulação B-ASK, mas também das modulações B-PSK e OOK, é mostrado na figura 7.3.

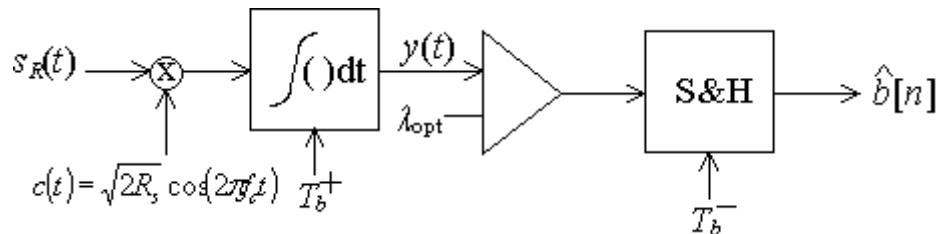


Figura 7.3
Recetor ótimo normado para modulações B-PSK, OOK e B-ASK.
A diferença entre os diversos recetores está no valor de λ ótimo.

O vetor de base $c(t)$ é uma sinusoide com a mesma frequência e fase da portadora, proporcional ao símbolo $s_1(t)$, $c(t) = C \cos(2\pi f_c t)$. Para um filtro normado C é determinado por,

$$\begin{aligned} A_{eq} = 1 &= \int_0^{T_b} c^2(t) dt = \int_0^{T_b} C^2 \cos^2(2\pi f_c t) dt \\ &= \frac{C^2}{2} \int_0^{T_b} [1 + \cos(4\pi f_c t)] dt = \frac{C^2}{2} T_b \Rightarrow C = \sqrt{2R_b} \end{aligned} \quad (7.10)$$

Este resultado só é válido se houver um número inteiro de ciclos da sinusoide de modulação por bit (no tempo de integração),

$$T_b = L T_c \Leftrightarrow f_c = L R_b, \quad (7.11)$$

ou seja, f_c é múltiplo de R_b . Assumindo um filtro adaptado normado, a figura 5.2 da função densidade de probabilidades da tensão para cada símbolo no momento de amostragem continua a ser válida e vem:

$$\begin{cases} y_1 = \int_0^{T_b} c(t) s_1(t) dt = \sqrt{E_1} \\ y_0 = \int_0^{T_b} c(t) s_0(t) dt = \sqrt{E_0} \end{cases}. \quad (7.12)$$

O valor de d é determinado pelas equações 7.10 e 5.10 e vem:

$$d = \frac{|y_1 - y_0|}{2} = \frac{\sqrt{E_1} - \sqrt{E_0}}{2} = \sqrt{T_b} \frac{A_1 - A_0}{\sqrt{8}}. \quad (7.13)$$

Pela equação 5.26 a BER vem:

$$BER = \frac{1}{2} erfc \left(\sqrt{\frac{T_b (A_1 - A_0)^2}{8N_0}} \right). \quad (7.14)$$

7.2 Modulação FSK

Na modulação de chave de desvio de frequência FSK (*frequency shift keying*) os símbolos correspondem, como mostrado na figura 7.1-d, a sinusoides com a mesma amplitude mas com frequências diferentes. Tendo os símbolos sempre a amplitude A , a energia média por bit é a energia de uma sinusoide no tempo T_b ,

$$E_b = \frac{A^2}{2}T_b. \quad (7.15)$$

Esta modulação corresponde à modulação FM de um código de linha PNRZ, estando a frequência da portadora a meio das frequências que definem os símbolos, f_1 para o símbolo “1”, e f_0 para o símbolo “0”, ou seja:

$$f_c = \frac{f_1 + f_0}{2}, \quad (7.16)$$

sendo provocado um desvio máximo de frequência em relação à portadora de:

$$\Delta_f = |f_1 - f_c| = |f_0 - f_c|. \quad (7.17)$$

Com formatação de bit a largura de banda vem:

$$B_T = 2\Delta_f + 2W = |f_1 - f_0| + R_b(1 + \alpha), \quad (7.18)$$

que é a pior (mais alta) das larguras de banda de todas as modulações e códigos apresentados, bem como é pior (mais baixa) a sua eficiência espectral:

$$\rho = \frac{R_b}{B_T} = \frac{R_b}{|f_1 - f_0| + R_b(1 + \alpha)}. \quad (7.19)$$

Utilizando o critério de primeiro zero espectral, a largura de banda vem:

$$B_T = 2\Delta_f + 2W = |f_1 - f_0| + 2R_b. \quad (7.20)$$

Os códigos estudados até agora têm como característica estarem sempre sobre a direção do vetor de base $c(t)$. São exemplos: os códigos polares, apresentados na figura 7.4-a, em que os símbolos são representados na direção do vetor de base normado $c(t)$ e em que a polaridade dá informação do sentido, sendo negativo se o símbolo for simétrico ao vetor de base; e os códigos unipolares, como apresentado na figura 7.4-b, em que a norma de um dos símbolos é zero. Ao contrário dos códigos polares e unipolares, na modulação FSK os símbolos são ortogonais entre si, como mostrado na figura 7.4-c.

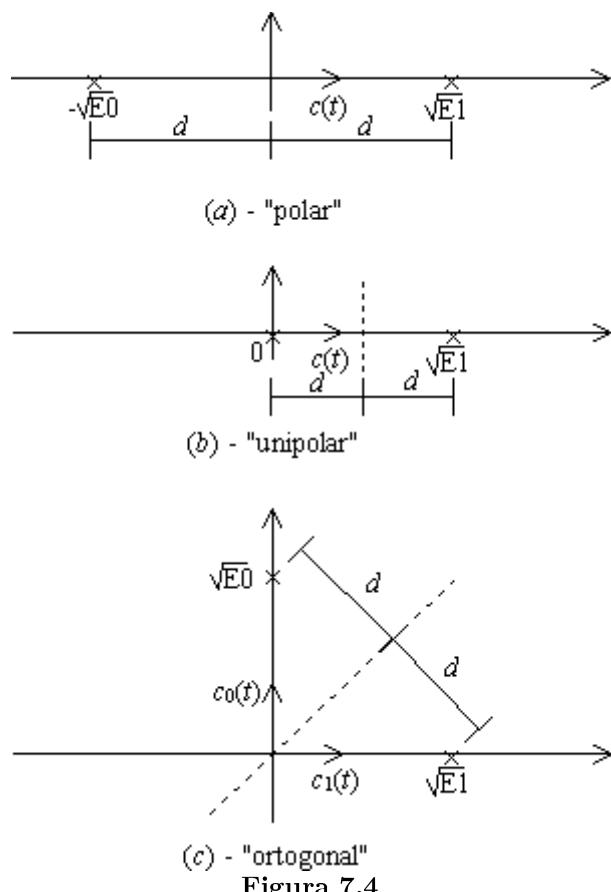


Figura 7.4
Representação vetorial dos códigos ou modulações binárias.

(a) – “polares”. (b) – “unipolares”. (c) – ortogonais.

Considerando que quer a frequência correspondente ao símbolo “1”, f_1 , quer a frequência correspondente ao símbolo “0”, f_0 , são múltiplas do débito binário, como imposto pela equação 7.11, estes símbolos são ortogonais entre si, pois o seu produto interno é nulo:

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_b} s_0(t)s_1(t)dt &= \int_0^{T_b} A^2 \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_1 t) dt \\
&= \frac{A^2}{2} \int_0^{T_b} [\cos(2\pi(f_1 - f_0)t) + \cos(2\pi(f_1 + f_0)t)] dt = 0
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Da figura 7.4, qualquer que seja o código ou modulação, é possível obter a *BER* assumindo que os símbolos são representados por pontos no espaço (unidimensional ou bidimensional) tendo como coordenadas os valores das raízes quadradas das energias dos símbolos, tomando a raiz positiva ou negativa conforme a direção do vetor de base. Neste caso o filtro está normado, sendo válida a equação 5.26. A distância d nesta equação corresponde a metade da distância entre os símbolos neste espaço. Para a situação polar, $d = \sqrt{E_b}$ e da equação 5.26 chega-se à equação 5.36. Para a situação unipolar, $d = \sqrt{E_b}/2$ e chega-se à equação 5.41.

Para a modulação FSK, ortogonal, a distância d (figura 7.4-c) vem:

$$d = \frac{\sqrt{E_1 + E_0}}{2} = \sqrt{\frac{E_b}{2}} \tag{7.22}$$

A *BER* vem, utilizando a equação 5.26:

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) \tag{7.23}$$

O receptor que realiza a descodificação de símbolos ortogonais tem que efetuar dois produtos internos, como mostrado na figura 7.5, na direção de cada um dos símbolos. O produto interno é efetuado com sinais com norma unitária (base ortonormada), que pelo mesmo raciocínio que levou à equação 7.10 valem:

$$\begin{cases} c_1(t) = \sqrt{2R_b} \cos(2\pi f_1 t) \\ c_0(t) = \sqrt{2R_b} \cos(2\pi f_0 t) \end{cases} \tag{7.24}$$

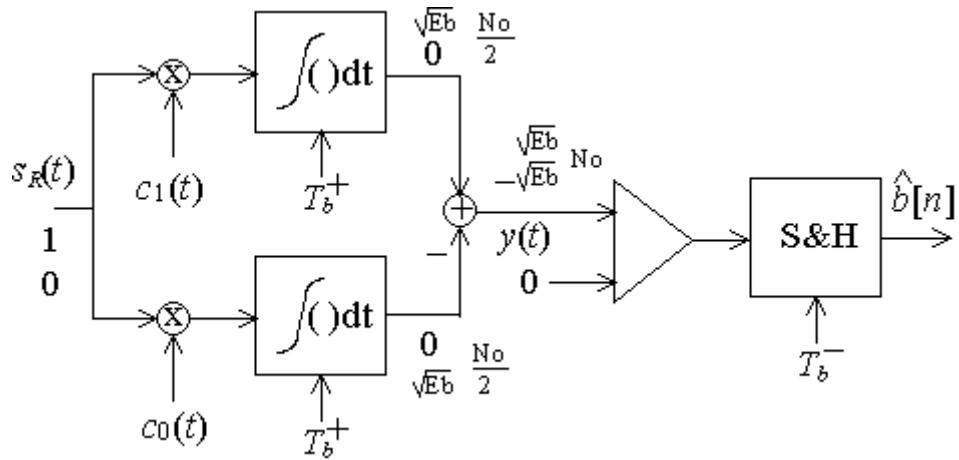


Figura 7.5
Receptor ótimo para deteção FSK.

O filtro adaptado ao símbolo “1” apresenta, no fim da integração:

$$\begin{cases} \sqrt{E_b} & \text{para o nível lógico "1"} \\ 0 & \text{para o nível lógico "0".} \\ \frac{N_0}{2} & \text{para potência do ruído} \end{cases} \quad (7.25)$$

No filtro adaptado ao símbolo “0” tem, no fim da integração:

$$\begin{cases} 0 & \text{para o nível lógico "1"} \\ \sqrt{E_b} & \text{para o nível lógico "0".} \\ \frac{N_0}{2} & \text{para potência do ruído} \end{cases} \quad (7.26)$$

O sinal $y(t)$ sobre o qual se toma a decisão vem, no fim da integração:

$$\begin{cases} y_1 = +\sqrt{E_b} & \text{para o nível lógico "1"} \\ y_0 = -\sqrt{E_b} & \text{para o nível lógico "0".} \\ N_0 & \text{potência do ruído} \end{cases} \quad (7.27)$$

Continua a ser válida a figura 5.6 com os valores obtidos pela equação 7.27 e continua a ser válida a equação 5.9, sendo a distância $d = \sqrt{E_b}$ e a variância do ruído N_0 , deduzindo-se daqui também a equação 7.23.

7.3 Receção não coerente

Uma das grandes dificuldades na implementação do filtro adaptado com sinais modulados é a realização do sinal $c(t)$, que tem que estar sincronizado quer em frequência quer em fase com a portadora (sincronismo de portadora). Este sincronismo deve ser extraído do próprio sinal de entrada, que poderá estar corrompido com ruído, tornando-se bastante complexo. Apresentaremos a receção não coerente de modulações B-PSK, OOK, B-ASK e FSK, ou seja, não utilizando filtros adaptados.

7.3.1 Modulação PSK diferencial

Em B-PSK existe ambiguidade da fase, ou seja, devido a atrasos na propagação dos sinais no canal de comunicação pode não ser possível determinar a fase e os bits serem descodificados com os níveis lógicos invertidos. Evitar o sincronismo de portadora, nomeadamente quando o nível de ruído é elevado, torna o receptor menos complexo. Uma solução é a utilização da modulação diferencial em B-PSK (DPSK). Nesta, ao contrário do código NRZI, os níveis lógicos a “1” são codificados mantendo a fase do símbolo anterior e os símbolos lógicos a “0” invertendo a fase do símbolo anterior, como mostrado na figura 7.1-e. Este código corresponde a um código PSK com pré-codificação $a[n] = \text{not}(a[n-1] \text{ xor } b[n])$, como se mostra na tabela 7.1.

b[n]		1	0	1	0	0	1	1	0
$a[n] = \text{not}(a[n-1] \text{ xor } b[n])$	0	0	1	1	0	1	1	1	0

Tabela 7.1
Exemplo de pré-codificação em DPSK
(correspondente à figura 7.1-d).

O desmodulador DPSK é idêntico ao desmodulador PSK, exceto no que respeita ao oscilador sincronizado que produz $c(t)$, aqui substituído por uma versão do próprio sinal de entrada, atrasado de T_b . A modulação DPSK corresponde assim à modulação não coerente em B-PSK, comparando a fase do

sinal com a fase no bit anterior, como mostrado na figura 7.6. À entrada do receptor é colocado um filtro passa-banda (BPF – *band-pass filter*), que deixa passar a banda do sinal eliminando o ruído fora da banda.

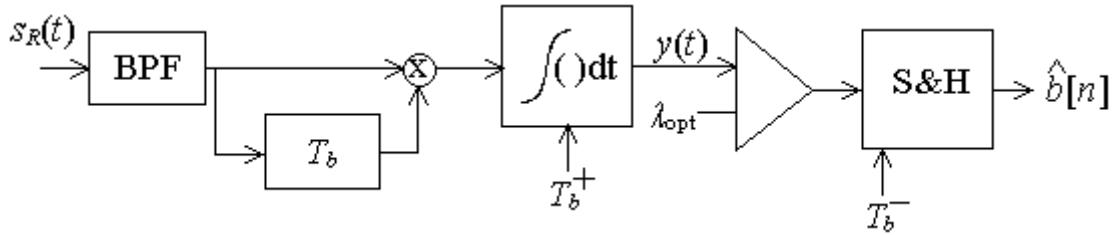


Figura 7.6
Desmodulador DPSK com filtro adaptado.

O produto interno é efetuado com o próprio sinal atrasado de T_b .

O filtro passa-banda à entrada elimina o ruído fora da banda do sinal.

A largura de banda e a energia deste código são as mesmas que no código B-PSK (equações 7.2 ou 7.4 e 7.5 respetivamente). A dedução da *BER* envolve cálculos com alguma complexidade e sai fora do contexto deste texto, sendo dada por:

$$BER = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_b}{N_o}}. \quad (7.28)$$

Uma outra vantagem dos códigos diferenciais é a possibilidade de se inverter a polaridade no cabo de ligação entre o transmissor e o receptor, deixando de existir ambiguidade de fase.

7.3.2 Recetores não coerentes OOK e B-ASK

Nas modulações OOK e B-ASK a informação do símbolo vai na amplitude. A modulação OOK é vista como um caso particular da modulação B-ASK, em que uma das amplitudes é 0. Como mostrado na figura 7.7, para detetar as variações de amplitude entre símbolos utiliza-se um detetor de envelopante (retificador de meia onda ou onda completa).

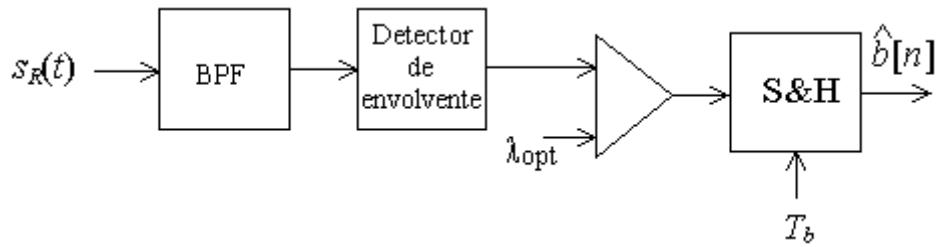


Figura 7.7
Recetor não coerente para modulações OOK e B-ASK.

Sem ruído, a tensão após este detetor corresponde à amplitude de cada um dos símbolos. O comparador tem uma tensão de referência equidistante das amplitudes dos dois símbolos, ou seja:

$$\lambda_{ot} = \frac{A_1 + A_0}{2}. \quad (7.29)$$

De modo a minimizar o ruído é colocado à entrada do recetor um filtro passa-banda à frequência da portadora com largura de banda igual à largura de banda transmitida B_T , como já utilizado em DPSK. Este filtro que não afeta o sinal e elimina o ruído fora da banda.

7.3.3 Recetor não coerente FSK

No caso do recetor binário FSK o diagrama de blocos do recetor não coerente é apresentado na figura 7.8. Neste, de modo a atenuar o efeito do ruído, são colocados dois filtros passa-banda em paralelo, à frequência de cada um dos símbolos, seguidos de detetores de envelopante.

Quando o símbolo de entrada corresponde à frequência f_1 e na ausência de ruído, o detetor de envelopante respetivo apresenta a amplitude do sinal de entrada e o detetor correspondente à frequência f_0 apresenta o valor zero e vice-versa. Comparando estas duas amplitudes descodifica-se o símbolo correspondente ao detetor de envelopante com maior amplitude.

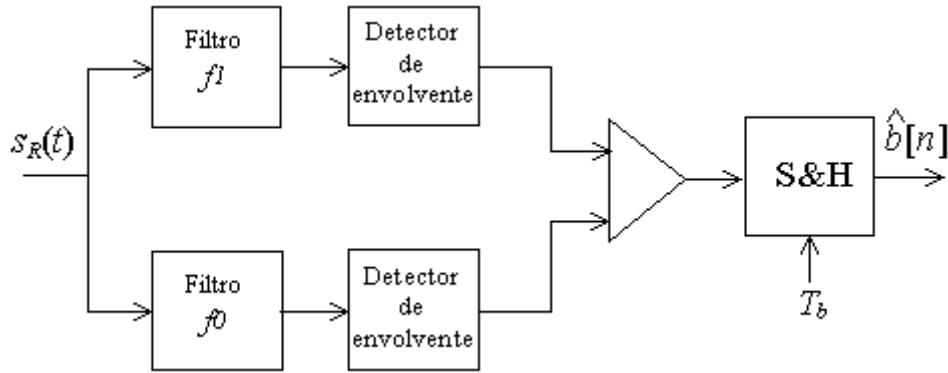


Figura 7.8
Receptor não coerente para sinais FSK.

7.4 Modulação M-PSK

Assim como nos códigos de linha, a utilização de código M -ária com modulação melhora a largura de banda dos sinais transmitidos. Na modulação M -PSK (*M-ary phase shift keying*), como em B-PSK, os símbolos são constituídos por sinusoides com a mesma amplitude e frequência, sendo a informação enviada através de diferentes fases. A figura 7.9 ilustra um exemplo de uma constelação 8-PSK. Denomina-se constelação porque os símbolos são representados por *estrelas* num espaço bidimensional, definido por duas dimensões correspondentes a dois vetores de base (base ortonormada):

$$\begin{cases} c_1(t) = \sqrt{2R_s} \cos(2\pi f_c t) \\ c_2(t) = -\sqrt{2R_s} \sin(2\pi f_c t) \end{cases}. \quad (7.30)$$

As fases relativas a cada um dos símbolos l são dadas por:

$$\phi_l = \frac{2\pi}{M} l \quad l = 0 : M - 1. \quad (7.31)$$

O símbolo correspondente é definido por:

$$s_l(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi_l) = A \cos(\phi_l) \cos(2\pi f_c t) - A \sin(\phi_l) \sin(2\pi f_c t). \quad (7.32)$$

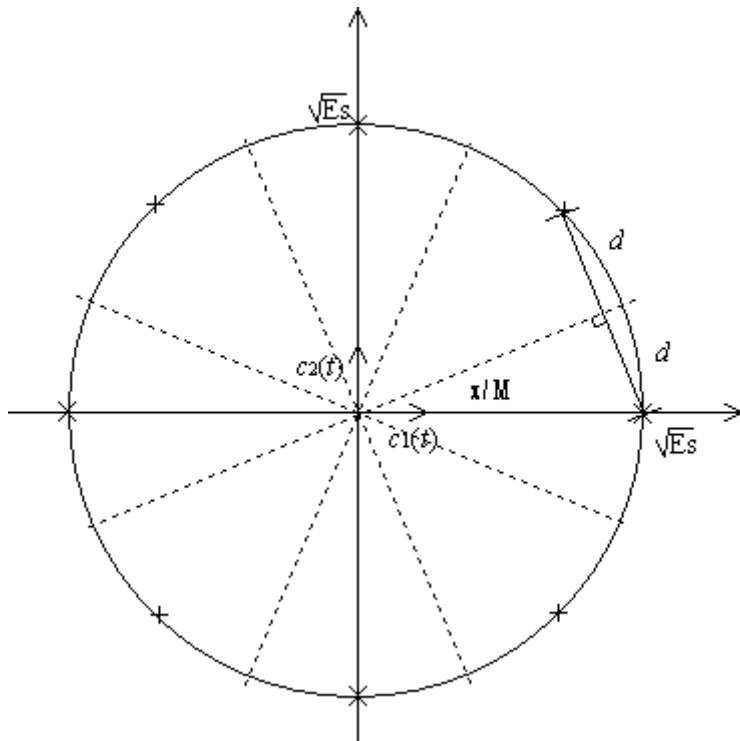


Figura 7.9
Constelação M -PSK (Exemplo $M=8$).

7.4.1 Energia média por símbolo

As equações 6.1, 6.2, 6.3 e 6.6, que relacionam grandezas entre bits e símbolos, continuam a ser válidas com modulação. Como todos os símbolos são compostos por sinusoides de igual amplitude, a energia média por bit vem:

$$E_b = \frac{A^2}{2} T_b. \quad (7.33)$$

7.4.2 Largura de banda

A modulação M -PSK pode ser vista como a soma de duas modulações DSB (equação 7.32), cada uma tendo como entrada um sinal PAM digital (embora de distância entre símbolos variável). Deste modo a largura de banda é o dobro da largura de banda correspondente à da equação 6.7:

$$B_T = R_s(1 + \alpha) = \frac{R_b}{K}(1 + \alpha). \quad (7.34)$$

A eficiência espectral vem:

$$\rho = \frac{R_b}{B_T} = \frac{K}{(1+\alpha)}. \quad (7.35)$$

Como nos códigos de linha M -ária, a largura de banda diminui e eficiência espectral aumenta com o número de bits por símbolo.

7.4.3 Probabilidade de erro de bit

Assumido um receptor ótimo com filtro adaptado normado, pela figura 7.9 tem-se:

$$d = \sqrt{E_s} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right). \quad (7.36)$$

Podem ser produzidos erros à direita ou à esquerda de cada símbolo. Pela equação 5.26 vem:

$$SER = erfc\left(\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \frac{E_s}{N_o}}\right). \quad (7.37)$$

Assumindo código Gray, aplica-se a equação 6.16 e a BER vem:

$$BER = \frac{1}{K} erfc\left(\sqrt{K \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \frac{E_b}{N_o}}\right). \quad (7.38)$$

7.4.4 Modulação QPSK

Um caso particular da modulação M -PSK é a 4-PSK em que cada bit corresponde à modulação B-PSK sobre cada um dos vetores de base. Esta modulação denominada QPSK, tem a constelação apresentada na figura 7.10. A modulação QPSK tem como vantagem a simplificação do transmissor e do receptor, como mostrado na figura 7.11. O receptor corresponde a dois filtros adaptados em paralelo, mas ao contrário da modulação B-FSK cada filtro dá diretamente informação de cada um dos bits do símbolo.

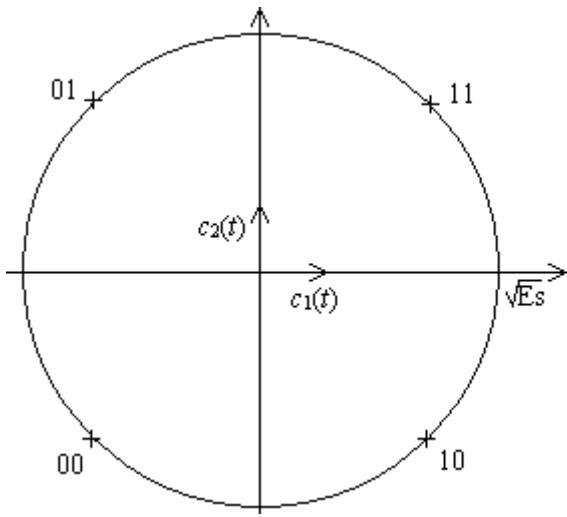
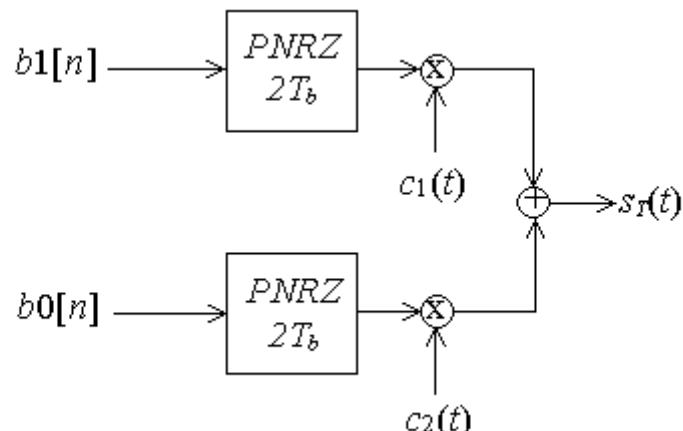
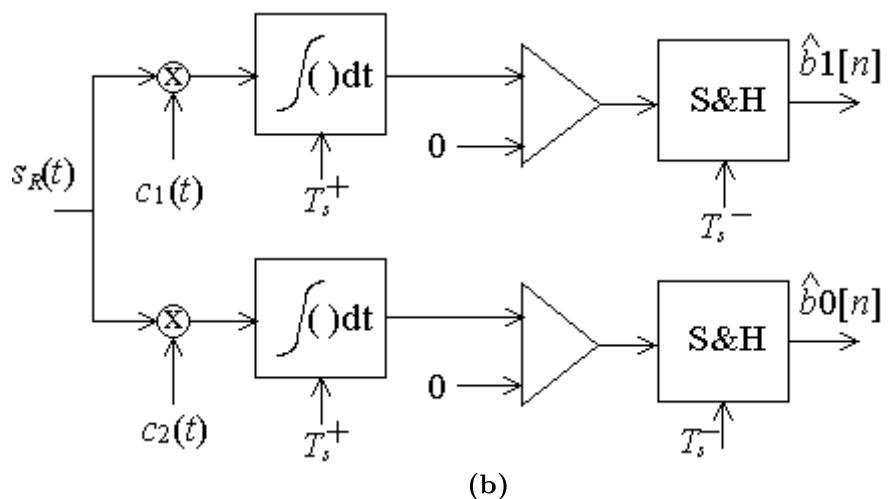


Figura 7.10
Constelação QPSK.



(a)



(b)

Figura 7.11
(a) Transmissor QPSK (b) Recetor QPSK.

Aplicando a equação 7.38 com $M=4$, a BER vem:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right), \quad (7.39)$$

e a largura de banda vem (equação 7.34):

$$B_T = \frac{R_b}{2} (1 + \alpha). \quad (7.40)$$

A modulação QPSK figura assim como um bom compromisso em relação ao B-PSK, entre o aumento moderado da complexidade do transmissor e receptor e uma redução da largura de banda para metade, mas obtendo a mesma BER . Esta é utilizada por exemplo em difusão de sinais de televisão através de satélite (DVB-S - *digital video broadcasting – satellite*), com fator de *rolloff* de 0,35.

7.5 Modulação QAM

A modulação QAM (*quadrature amplitude modulation*) é idêntica à modulação M -PSK, mas deixa de se impor, conforme mostrado na figura 7.12, a restrição de os símbolos terem todos a mesma energia.

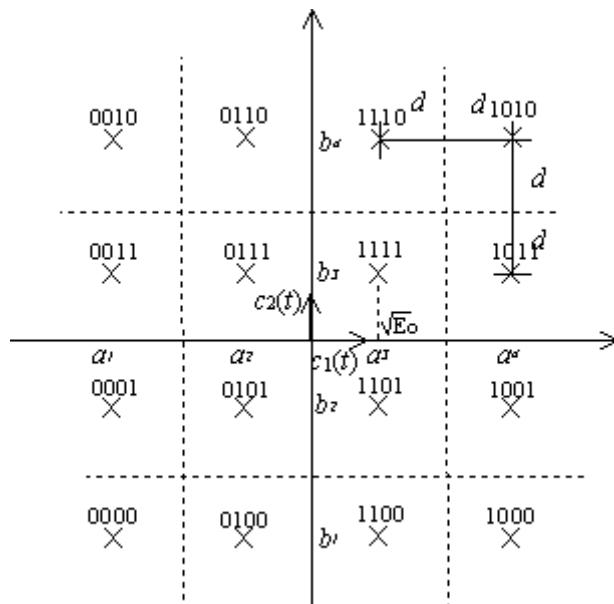


Figura 7.12
Constelação QAM

Exemplo com 16 símbolos. Cada símbolo difere dos adjacentes de 1 bit (código Gray).

A modulação QAM corresponde a duas modulações DSB sobre uma base ortonormada a duas dimensões, cujos vetores de base são descritos pela equação 7.30 (*seno/cosseno*), tendo como sinal de entrada códigos PAM digital com \sqrt{M} símbolos cada um. Esta constelação, com forma quadrada, só é válida para um número par de bits por símbolo. Quando o número de bits é ímpar a análise efetuada seguidamente é aproximada. Definindo E_0 como a energia da projeção do vetor de base do símbolo com menor energia numa das direções a energia média por símbolo vem o dobro (duas direções ortogonais) da energia dada pela equação 6.4 (substituindo M por \sqrt{M} e E_{\min} por E_0):

$$E_s = \frac{2(M-1)}{3} E_0. \quad (7.41)$$

A largura de banda e a eficiência espectral são dadas respetivamente pelas equações 7.34 e 7.35, pois em relação à modulação M -PSK só variam as amplitudes dos códigos de linha antes das modulações DSB.

A probabilidade de erro de símbolo corresponde (aproximadamente) a duas vezes (duas direções) a probabilidade de erro de símbolo em PAM digital dada pela equação 6.12:

$$SER \approx 2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) erfc \left(\sqrt{\frac{E_0}{N_0}} \right). \quad (7.42)$$

Assumindo código Gray, pela equação 6.16 a BER vem:

$$BER = \frac{SER}{K} = \frac{2}{K} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) erfc \left(\sqrt{\frac{E_0}{N_0}} \right). \quad (7.43)$$

Das equações 6.6, 7.41 e 7.43, vem:

$$BER = \frac{2}{K} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) erfc \left(\sqrt{\frac{3K}{2(M-1)} \frac{E_b}{N_0}} \right). \quad (7.44)$$

As equações da *BER* em QAM (equação 7.44) e em PAM digital (equação 6.12) dão o mesmo resultado para a mesma eficiência espectral, equações 7.35 para QAM e 6.8 para PAM digital. Por exemplo a *BER* em 4-PAM é igual à *BER* em 16-QAM, ambas com eficiência espectral 4 ($\alpha=0$).

Na figura 7.13 são apresentados o esquema de blocos do transmissor e do receptor QAM. No transmissor, o conjunto de K bits do símbolo são transformados em duas tensões, a e b , que correspondem às tensões a multiplicar pelos versores de base, $c_1(t)$ e $c_2(t)$ respectivamente. No receptor ótimo, como em M-PSK, continuam a figurar dois filtros adaptados em paralelo, e as suas duas saídas, em conjunto, determinam qual o conjunto de bits recebidos.

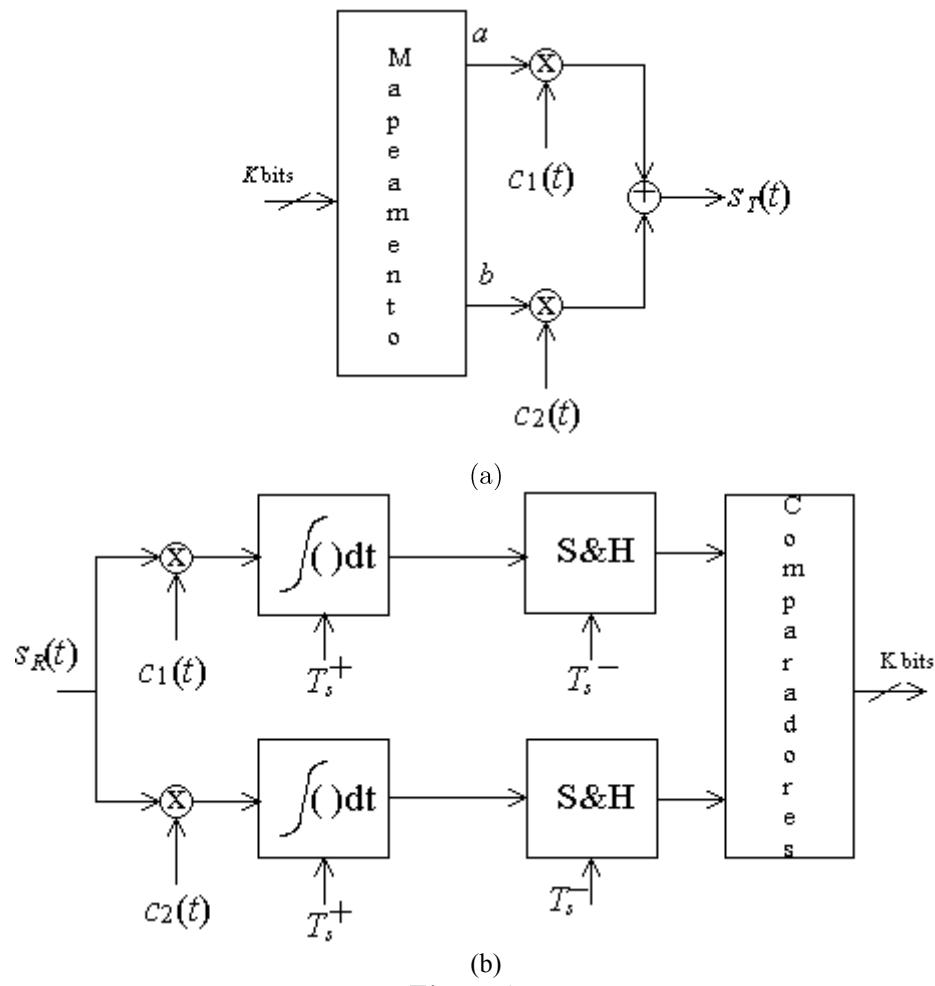


Figura 7.13
Modulação QAM.
(a) – Transmissor QAM. (b) – Receptor QAM.

A escolha dos bits correspondentes a cada símbolo, para além de seguir um código Gray, pode ser feita de modo a que só alguns bits influenciem cada uma das componentes (*cosseno* ou *seno*). Por exemplo na figura 7.12, os 2 bits mais à esquerda influenciam apenas a componente em *cosseno* em código Gray e os outros 2 bits apenas influenciam a componente em *seno*. Como em QPSK esta escolha leva a uma simplificação do transmissor e do receptor, como mostrado na figura 7.14.

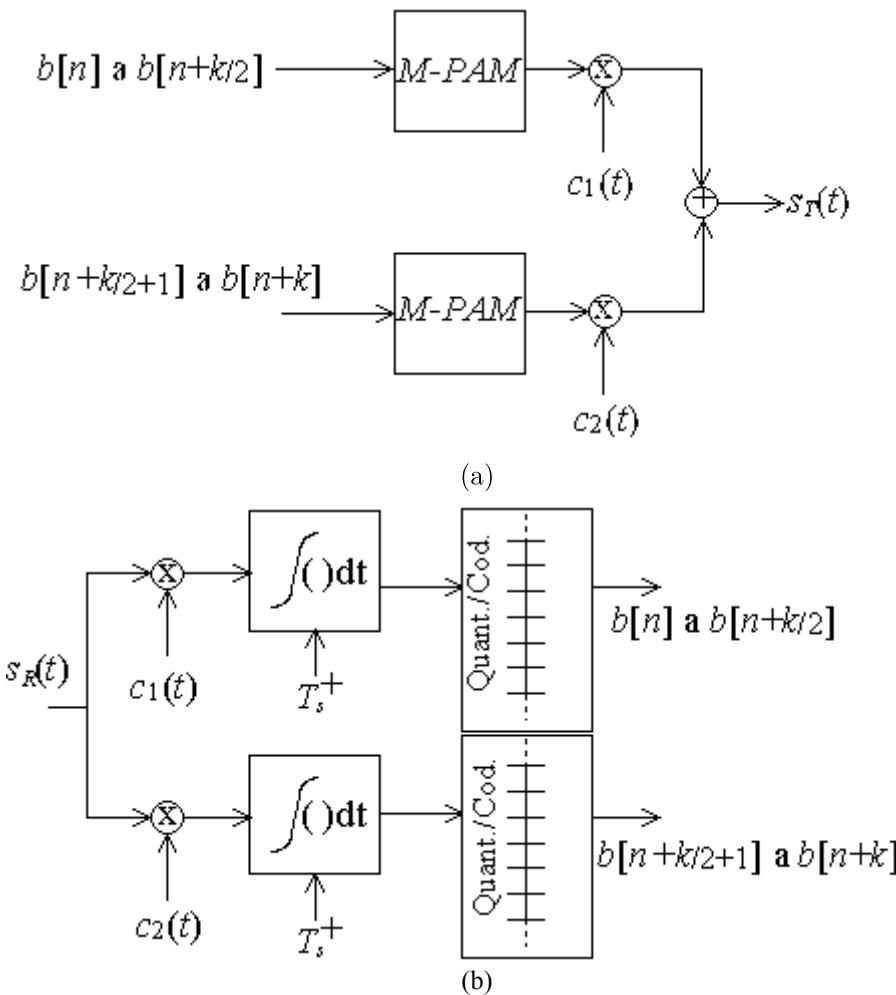


Figura 7.14
Modulação QAM com simplificação devida à
escolha dos bits correspondentes a cada símbolo.

(a) – Transmissor QAM. (b) – Recetor QAM.

7.6 Comparação de desempenho

A modulação QAM, ao alterar quer a fase quer a amplitude dos símbolos, consegue um melhor aproveitamento da energia que a modulação *M*-PSK, resultando uma menor distância entre símbolos e uma diminuição da *BER*. Por outro lado o aumento do número de símbolos aproxima-os, embora melhorando a eficiência espectral. Estes efeitos são apresentados na figura 7.15 e tabela 7.2.

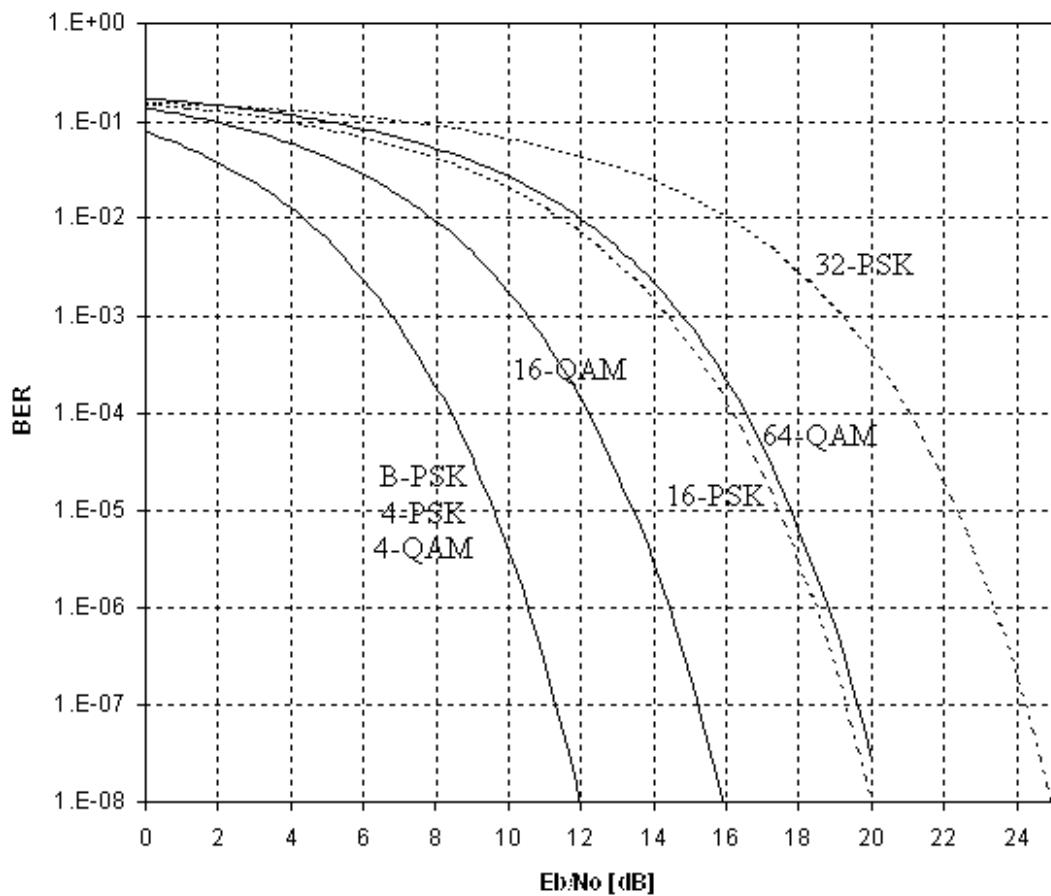


Figura 7.15
BER em função da relação E_b/N_0 , para QAM e M-PSK.

	B-PSK	4-QAM	16-QAM	16-PSK	32-PSK	64-QAM
eficiência espectral	1	2	4	4	5	6
E_b/N_0 dB ($BER=10^{-6}$)	10,5	10,5	14,4	18,4	23,3	18,8
BER (E_b/N_0 15 dB)	$8,9 \times 10^{-16}$	$8,9 \times 10^{-16}$	$1,8 \times 10^{-7}$	$4,8 \times 10^{-4}$	$1,6 \times 10^{-2}$	$7,7 \times 10^{-4}$

Tabela 7.2
Compromisso entre a eficiência espectral e *BER* para QAM e M-PSK.

8 Codificação para controlo de erros

Num sistema de comunicação digital existem dois tipos de erros de bit: os erros devido aos efeitos do canal AWGN; e os erros devido a interferências eletromagnéticas esporádicas ou a variações rápidas das condições do próprio canal. Os primeiros correspondem a erros aleatórios independentes, como apresentado anteriormente. Os segundos correspondem a erros em rajada.

Dependendo do tipo de erros existem estratégias diferenciadas para, no recetor, os detetar ou mesmo corrigir. Em qualquer dos casos, como ilustrado na figura 8.1, é necessário no transmissor introduzir bits com informação redundante (codificação para controlo de erros), produzindo um aumento do débito binário de R_b' (débito binário da informação) para R_b (débito binário no canal de comunicação). O efeito da codificação para o controlo de erros é a diminuição da probabilidade de erro de bit de BER para BER' (descodificação para controlo de erros).

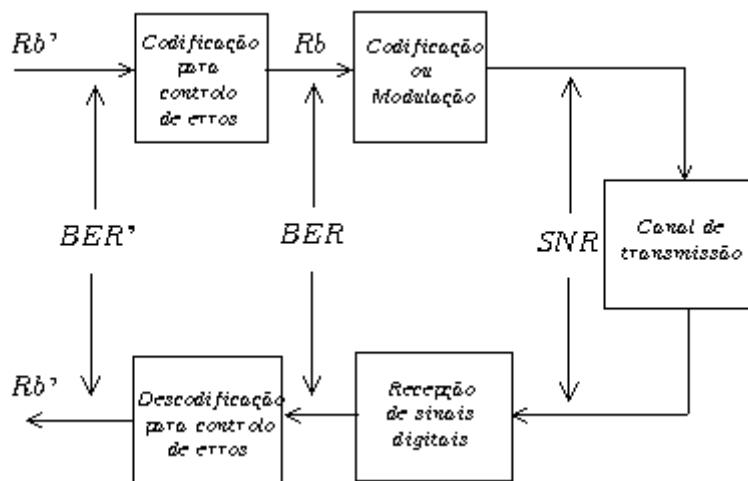


Figura 8.1
Cadeia transmissor–canál–recetor com codificação para controlo de erros.

8.1 Atributos dos códigos de controlo de erros

Seguidamente descrevem-se os atributos dos códigos de controlo de erros, que devem ser ponderados face ao tipo de aplicação desejada.

8.1.1 Códigos de deteção e correção

Existem códigos de controlo de erros em que é possível afirmar que num conjunto de bits alguns estarão errados, mas não se sabe em quais. Estes códigos denominam-se de códigos de deteção de erros. Existem aplicações em que o recetor descarta esta informação mas consegue continuar a operar. Noutras aplicações, contudo, tem que existir um mecanismo para que o recetor informe o transmissor da presença desses erros, para que a informação seja retransmitida (ARQ – *automatic repeat request*). Para que haja retransmissão o sistema tem que ser bidirecional (ligações *half-duplex* ou *full-duplex*). Numa ligação *half-duplex* pode haver transmissão no canal nos dois sentidos, mas não simultaneamente. Numa ligação *full-duplex* pode haver transmissão no canal nos dois sentidos simultaneamente.

Caso se consiga encontrar a posição dos erros, estes poderão ser corrigidos (FEC – *forward error correction*) por inversão do valor lógico (negação) do respetivo bit. Estes códigos denominam-se códigos correctores de erros. Estes códigos não necessitam de ligações bidireccionais e não necessitam, ou não podem, esperar que a informação seja retransmitida, como no caso dos códigos de deteção. Note-se ainda que todos os códigos de correção podem funcionar como códigos de deteção, mas não o contrário. Contudo, os códigos correctores necessitam de colocar maior redundância no canal do que os códigos que apenas são capazes de detetar erros.

8.1.2 Razão do código

Um código composto por um bloco de dimensão fixa é denominado código de bloco. Ao contrário, existem códigos, denominados códigos convolucionais, que estendem a sua atuação a todos os bits transmitidos em vez de estarem limitados a dimensões fixas. Este texto focará apenas os códigos de bloco. A dimensão do bloco é denominada n , com k ($k < n$) bits de informação, sendo referido como código de bloco (n, k) . Este código contém 2^k palavras de código

(blocos válidos) diferentes. Quando os k bits de informação são transmitidos sem qualquer alteração o código é denominado de código sistemático. Os códigos apresentados neste texto são todos sistemáticos, sendo mais fáceis de tratar do que os códigos não sistemáticos.

A razão do código, R_c , é uma medida da eficiência do código no sentido em que mede a porção de bits de informação em relação ao número total de bits do código (e não no sentido do que é que o código é capaz de detetar ou corrigir), sendo dada por:

$$R_c = \frac{k}{n} = \frac{R'_b}{R_b} \quad 0 < R_c < 1. \quad (8.1)$$

Tendo em conta a figura 8.1 e o aumento do número de bits devido ao código de controlo de erros, a relação entre o débito binário no canal de comunicação, R_b , e o débito binário da informação, R'_b , é dada por:

$$R_b = \frac{n}{k} R'_b = \frac{R'_b}{R_c}. \quad (8.2)$$

Com o aumento do número de bits, duas situações (ou uma situação intermédia) podem ocorrer em relação à situação sem codificação:

1) Mantém-se o tempo de transmissão da informação. Aumenta-se o débito binário no canal de comunicação de modo a transmitir a informação com o mesmo débito binário R'_b . diminui a energia por bit, que por sua vez aumenta a BER . Espera-se contudo que, após deteção ou correção, o valor da BER' seja melhor que o valor da BER inicial sem codificação.

2) Mantém-se o débito binário R_b no canal de comunicação. Diminui-se o débito binário da informação e demora-se mais tempo a transmitir:

$$T_{\text{com codificação}} = \frac{T_{\text{sem codificação}}}{R_c}. \quad (8.3)$$

8.1.3 Capacidade de deteção e correção

A capacidade de deteção de bits errados mede-se através do número máximo de bits errados capazes de ser sempre detetados. A capacidade de correção mede-se através do número máximo de bits errados capazes de ser sempre corrigidos. Na situação de correção, se estes números forem ultrapassados duas situações podem acontecer: manter a informação recebida; ou inverter bits corretos originando mais erros.

Não sendo possível detetar ou corrigir todos os erros é importante medir a diminuição da probabilidade de erro após correção, BER' em relação a BER , que mede o ganho efetivo da introdução destes códigos.

A razão do código e a capacidade de deteção e correção são de difícil optimização em conjunto. Como exposto adiante, quanto menor for a razão do código maior a capacidade de deteção e/ou correção de bits que o código tem e vice-versa. A solução a implementar corresponde assim a um compromisso entre estes dois atributos.

8.1.4 Controlo de erros aleatórios e erros em rajada

Algumas perturbações, como por exemplo descargas eletromagnéticas, podem corromper um bloco de dados com vários erros, sendo este efeito denominado de rajada de erros. Define-se dimensão de uma rajada como o número de bits entre o primeiro e o último erro, inclusive. Dentro da rajada os bits podem ou não estar errados. Haverá entre rajadas pelo menos determinado número de bits corretos que fará parte da definição da rajada.

Alguns códigos têm apenas a capacidade de detetar ou corrigir erros aleatórios independentes, e não rajadas de erros. Outros, contudo, são capazes de detetar rajadas de erros, sendo esta capacidade medida através do comprimento máximo da rajada que é sempre detetada e pela relação total de rajadas não detetadas. Não é possível corrigir todos os erros da rajada.

8.2 Probabilidade de erro de bloco

Assume-se neste texto que a probabilidade de geração dos símbolos lógicos e a respetiva probabilidade de os descodificar erradamente, BER , é a mesma (canal binário simétrico). Num bloco de n bits, a probabilidade de errar l bits, independentemente da posição no bloco, é dada pela função de probabilidade binomial (apêndice 7):

$$f(l|n, BER) = C_l^n BER^l (1 - BER)^{n-l}. \quad (8.4)$$

A probabilidade de errar l ou mais bits é dada pela soma das respetivas probabilidades:

$$f(l \text{ ou mais}|n, BER) = \sum_{j=l}^n C_j^n BER^j (1 - BER)^{n-j}. \quad (8.5)$$

Para $l \neq 0$, valores típicos de BER pequenos e $nBER \ll 1$ ($nBER$ corresponde ao valor médio), a equação 8.5 simplifica-se para:

$$f(l \text{ ou mais}|n, BER) \approx f(l|n, BER) \approx C_l^n BER^l. \quad (8.6)$$

O número médio de erros num bloco de n bits iguala a média (A7.3):

$$\overline{\text{erros}} = nBER. \quad (8.7)$$

A probabilidade de um bloco de n bits não conter erros vem:

$$f(0|n, BER) = (1 - BER)^n. \quad (8.8)$$

Havendo bits com erros aleatórios com probabilidade BER , é produzido em média 1 erro de $1/BER$ em $1/BER$ bits. O tempo médio entre erros vem igual a esse valor multiplicado pelo tempo de cada bit, ou seja:

$$T_e = \frac{1}{BER} T_b = \frac{1}{R_b BER}. \quad (8.9)$$

8.3 Código de paridade

A paridade de um bloco de bits é considerada par se o número de bits com valor lógico “1” for par e ímpar se este número for ímpar. Um código de paridade é constituído por n bits, dos quais $n-1$ são bits de informação, sendo adicionado um bit de modo a garantir a paridade desejada. Ao conjunto dos bits de informação e bit de paridade denomina-se palavra de código.

Este texto assume sempre paridade par. Para $n=3$, as palavras de código válidas são “0 0 0”, “0 1 1”, “1 0 1” e “1 1 0”, correspondendo o último bit ao bit de paridade colocado pelo transmissor. No recetor, caso se receba um bloco com paridade ímpar, como por exemplo 010, conclui-se que foi produzido entre o transmissor e o recetor pelo menos 1 erro e o bloco deve ser retransmitido.

Caso se produzam dois erros a paridade vem novamente correta. Por exemplo, caso se transmita “1 1 0” e se receba “0 1 1”, são produzidos erros nos primeiro e terceiro bits, mas o bloco corresponde a uma palavra de código válida. De facto só é possível detetar um número ímpar de erros. Assumindo a aproximação da equação 8.6, a probabilidade do recetor não detetar erros corresponderá à probabilidade de errar 2 bits no bloco de n bits:

$$P_b \approx f(2|n, BER) = C_2^n BER^2 = \frac{n(n-1)}{2} BER^2. \quad (8.10)$$

Nesta situação estarão errados apenas 2 bits em n bits, pelo que a probabilidade de erro de bit vem, aproximadamente:

$$BER' \approx \frac{2}{n} P_b = (n-1) BER^2. \quad (8.11)$$

Este código tem uma fraca capacidade de deteção (1 bit errado), não sendo capaz de corrigir qualquer bit. Pelo contrário, dado que os bits de informação são $k = n-1$, a razão do código é a melhor possível para o mesmo n :

$$R_c = \frac{n-1}{n}, \quad (8.12)$$

O tempo médio entre erros corresponde à aplicação da equação 8.9, substituindo BER por BER' e com um débito binário R_b' sem os bits de redundância. Este é um tempo médio entre erros mas note-se que os erros sucedem-se aos pares no mesmo bloco.

A melhoria na probabilidade de erro de bit é conseguida à custa da implementação de um sistema de retransmissão e de um maior número de bits transmitidos (bits de paridade e bits retransmitidos). A probabilidade de retransmissão, que iguala a probabilidade de errar um número ímpar de bits, é aproximadamente igual à probabilidade de errar 1 bit no bloco, ou seja:

$$P_r = f(1|n, BER) = C_1^n BER(1 - BER)^{n-1} \approx nBER. \quad (8.13)$$

Relembre-se da equação 8.6 que a aproximação da equação 8.13 só é válida para $nBER \ll 1$.

8.4 Carácter de verificação de bloco (BCC)

Um bloco de bits pode ser subdividido em sub-blocos, em que cada sub-bloco está protegido através de um bit de paridade. Por exemplo, na transmissão de caracteres ASCII (7 bits), cada carácter está protegido por 1 bit de paridade (p_x). Este procedimento está ilustrado na figura 8.2, em que cada carácter é apresentado em cada linha. Por sua vez cada coluna, correspondente ao bit com o mesmo peso de cada carácter, está também protegida por 1 bit de paridade, produzindo um carácter de verificação (c_x), que dá o nome ao código de carácter de verificação de bloco (BCC – *block check character*).

m_{71}	m_{61}	m_{51}	m_{41}	m_{31}	m_{21}	m_{11}	p_1
m_{72}	m_{62}	m_{52}	m_{42}	m_{32}	m_{22}	m_{12}	p_2
m_{73}	m_{63}	m_{53}	m_{43}	m_{33}	m_{23}	m_{13}	p_3
m_{74}	m_{64}	m_{54}	m_{44}	m_{34}	m_{24}	m_{14}	p_4
m_{75}	m_{65}	m_{55}	m_{45}	m_{35}	m_{25}	m_{15}	p_5
m_{76}	m_{66}	m_{56}	m_{46}	m_{36}	m_{26}	m_{16}	p_6
m_{77}	m_{67}	m_{57}	m_{47}	m_{37}	m_{27}	m_{17}	p_7
c_7	c_6	c_5	c_4	c_3	c_2	c_1	c_0

Figura 8.2
Código de carácter de verificação de bloco.

m – bits de mensagem; p – bits de paridade; c – carácter de verificação de bloco.

A relação de código para o código BCC é função do número de colunas (cl) e linhas (li):

$$R_c = \frac{(cl - 1)(li - 1)}{cl \times li} \quad (8.14)$$

A vantagem deste código é a de que, embora 2 bits errados possam escapar à deteção numa linha, não passarão na deteção de bloco (coluna) e vice-versa. Dois erros, desde que não na mesma linha ou na mesma coluna, serão também detetados, mas não é possível corrigi-los porque a posição dos erros fica indefinida entre duas hipóteses (duas diagonais). Três erros são também sempre detetados. No caso de número ímpar de erros na mesma linha (ou na mesma coluna) é mesmo possível encontrar a posição dos bits errados e corrigi-los por inversão do seu valor lógico. Uma situação de erros não detetados corresponde a quatro erros nos vértices de um retângulo.

8.5 Interleaving

Outra vantagem do código BCC é a robustez na presença de erros em rajada. Uma rajada de erros de dimensão máxima igual ao número de colunas produzirá apenas 1 bit errado por coluna e esta situação é verificada através do carácter de verificação de bloco. Se o número de linhas for maior que o número de colunas os bits têm que ser intercalados de modo a serem transmitidos por

coluna e não por linha, para permitir detetar rajadas com maior dimensão. A dimensão máxima da rajada detetada coincide assim com o número de linhas.

Intercalar (*interleaving*) bits de diferentes blocos antes de serem transmitidos, de modo a que os erros em rajada se transformem em erros isolados, tem como vantagem estes erros serem mais facilmente detetados ou corrigidos, quando no receptor os blocos forem reconstituídos. Este procedimento pode ser utilizado no código BCC ou outro código qualquer.

Código original:	aaaaabb bbbcccccddddd eeeeeeffffff
Código intercalado transmitido:	abcde fabcd efabcde fabcd efabcde
Código com erro em rajada em ==:	abcde fabcd efabcde fabcd efabcde
Código com erros após reconstrução:	aaa aabb bbb ccc ddd eee efffff

Figura 8.3

Exemplo de código com interleaving.

Os erros em rajada são transformados em erros isolados para mais fácil deteção.

8.6 Distância de Hamming e capacidade de deteção e correção

Dado um bloco (palavra de código com ou sem erros) recebido, br , a função de probabilidade condicionada (probabilidade *a posteriori*) de ter sido transmitida a palavra de código c_j , é dada por:

$$f(c_j | br) = \frac{f(br | c_j) p_{c_j}}{f(br)}. \quad (8.15)$$

Como código corrector e utilizando um critério de máximo *a posteriori* é descodificada a palavra de código c_j com maior probabilidade *a posteriori* (MAP). Assumindo que todas as palavras de código são equiprováveis, o critério de máximo *a posteriori* é equivalente ao critério de máxima verosimilhança (MV), pelo que é descodificada a palavra de código c_j que maximiza a função de verosimilhança:

$$f(br | c_j). \quad (8.16)$$

Pela análise da função de probabilidade binomial (equação 8.4 com BER muito pequeno e $nBER \ll 1$), verifica-se que a função de verosimilhança é tanto maior quanto menor for o número de bits diferentes entre br e c_j . Define-se distância de Hamming entre dois blocos, $d(br, c_j)$, como o número de bits diferentes entre br e c_j , em igual posição. Por exemplo os blocos 001 e 010 terão uma distância de Hamming de 2, porque os 2º e 3º bits são diferentes. Para correção de erros, o critério de máxima verosimilhança é equivalente a:

Descodificar a palavra de código que diste a menor distância de Hamming em relação ao bloco recebido.

Define-se distância mínima de Hamming de um código, d_{\min} , como a menor distância de Hamming entre todas as palavras desse código. Este é um parâmetro que limita a capacidade de deteção e de correção. Se o número de erros for igual a d_{\min} o bloco recebido pode corresponder a outra palavra de código. Consequentemente, para deteção de erros o número de erros tem que ser inferior a d_{\min} . Para correção, se o número de erros for superior a metade de d_{\min} pode existir outra palavra de código com distância de Hamming menor. Neste caso, a tentativa de correção dá origem a descodificar uma palavra de código errada.

A capacidade de deteção e correção vêm, como ilustrado na figura 8.4:

$$\text{Deteção até } l \text{ erros} \quad l < d_{\min} \quad (8.17-a)$$

$$\text{Correção até } t \text{ erros} \quad t \leq \frac{d_{\min} - 1}{2} \quad (8.17-b)$$

O código de paridade tem uma distância mínima de Hamming de apenas 2 bits, não conseguindo corrigir qualquer erro e só conseguindo detetar a existência de 1 bit errado, pois ocorrem sempre pelo menos duas palavras de código com a mesma distância de Hamming. Em contrapartida tem a razão do código (equação 8.1) a maior possível para o mesmo valor de n . O código BCC

tem uma distância mínima de 4 bits, já que consegue sempre corrigir no máximo 1 bit errado e detetar sempre 3 bits errados.

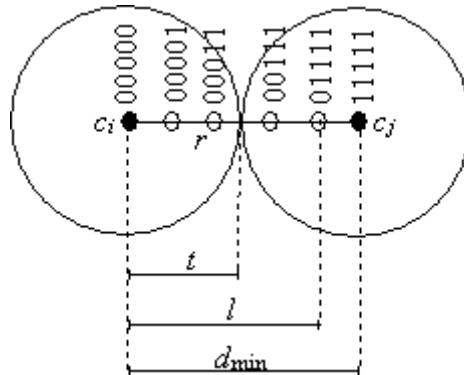


Figura 8.4
Capacidade de deteção e correção.

Exemplo de código com $d_{\min} = 5$. Bloco recebido r a $d=2$ bits de c_i e $d=3$ bits de c_j . Se receber o bloco r como código de deteção, uma vez que não é uma palavra de código, são detetados erros. Se receber o bloco r como código de correção este é descodificado como c_i , já que é esta palavra de código que lhe fica mais próxima (menor distância de Hamming).

Para um código de dimensão n ser capaz de corrigir 1 bit, tem que haver por cada uma das 2^k palavras de código pelo menos mais n blocos não válidos, correspondendo cada um a 1 erro em cada uma das n posições. Como ao todo existem 2^n blocos diferentes de n bits:

$$2^n \geq (n+1) \times 2^k. \quad (8.18)$$

Para que o código consiga corrigir até 2 bits tem que ser acrescentado ao lado direito desta inequação o número de combinações de n bits 2 a 2. De um modo geral, para se poder corrigir até t bits tem-se:

$$2^{n-k} \geq (n+1) + C_2^n + \dots + C_t^n = \sum_{j=0}^t C_j^n. \quad (8.19)$$

Pela análise desta inequação depreende-se que para uma maior capacidade de correção maior terá que ser o número de bits de redundância, $n-k$. Contudo, nem todos os códigos que satisfaçam esta inequação conseguem de

facto corrigir t bits errados, sendo necessário também que o código tenha uma distância mínima de Hamming que respeite a equação 8.17-b.

8.7 Códigos lineares

Um código linear é aquele em que a adição em aritmética de módulo-2 de quaisquer duas das suas palavras⁹ de código dá origem a outra palavra do código. Contém ainda a palavra de código nula, com todos os bits ao nível lógico “0”.

Se o código for também sistemático a palavra de código nula corresponde à situação em que todos os bits de informação e todos os bits de redundância estão ao nível lógico “0”.

Caso haja erros, definidos por um padrão de erro E , em que:

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{quando é produzido um erro na posição } i \\ 0 & \text{quando não existe erro na posição } i \end{cases}, \quad (8.20)$$

o efeito do canal corresponde a somar (módulo-2) os bits transmitidos com o padrão de erro. Se o padrão de erro coincidir com uma palavra de código o bloco recebido corresponde a outra palavra de código e os erros não serão detetados. Esta é uma propriedade importante dos códigos lineares.

O peso de Hamming de uma palavra de código é definido como o número de elementos não “0” dessa palavra. A distância mínima de Hamming de um código linear corresponde ao menor peso de Hamming de todas as palavras do código, com exceção da palavra de código nula.

⁹ Aritmética de módulo-2 ($0+0=0$; $0+1=1$; $1+0=1$; $1+1=0$; $0-0=0$; $0-1=1$; $1-0=1$; $1-1=0$). Equivalente à operação *ou exclusivo* bit a bit ou \oplus . Corresponde ainda à paridade par.

8.8 Código de repetição

Um código de repetição corresponde a repetir um bit de informação $n-1$ vezes, produzindo um código $(n, 1)$ (também denominado $R(n)$), com n ímpar. Por exemplo para $n=5$, as duas palavras de código são “0 0 0 0 0” e “1 1 1 1 1”.

A distância de Hamming entre as palavras de código é de n , pelo que se corrige até $(n-1)/2$ bits errados (regra por maioria). Se, para $n=5$, for recebido o bloco “0 0 0 1 1” é descodificado o nível lógico “0” (figura 8.4), pois existem uma maioria de “0” recebidos. Para $(n+1)/2$ ou mais bits errados a descodificação produzirá um erro. A probabilidade destes erros vem:

$$BER' \approx C_{\frac{n+1}{2}}^n BER^{\frac{n+1}{2}}. \quad (8.21)$$

A razão do código de repetição ($k=1$) é a menor para determinado n ,

$$R_c = \frac{1}{n}, \quad (8.22)$$

mas é o código que consegue corrigir o maior número de erros. Ao contrário, o código de paridade cuja razão é a maior possível para o mesmo n , consegue apenas detetar 1 erro de bit, encontrando-se estes códigos nos dois extremos de razão do código *versus* capacidade de deteção e correção.

Embora com uma razão do código muito baixa, o código de repetição é utilizado no armazenamento de dados que necessitem de alta proteção, como por exemplo os dados de clientes num banco, colocando n discos em paralelo. Quando da escrita a mesma informação é gravada em todos os discos e quando lida é aplicada uma regra por maioria de modo a corrigir eventuais erros.

Na figura 8.5 apresentam-se os blocos possíveis de 3 bits num espaço tridimensional, em que cada bloco corresponde a um vértice de um cubo. Os pontos a cheio representam as palavras de código. Blocos separados de uma

aresta têm distância de Hamming de 1 bit. Errar 1 bit corresponde ao deslocamento numa aresta.

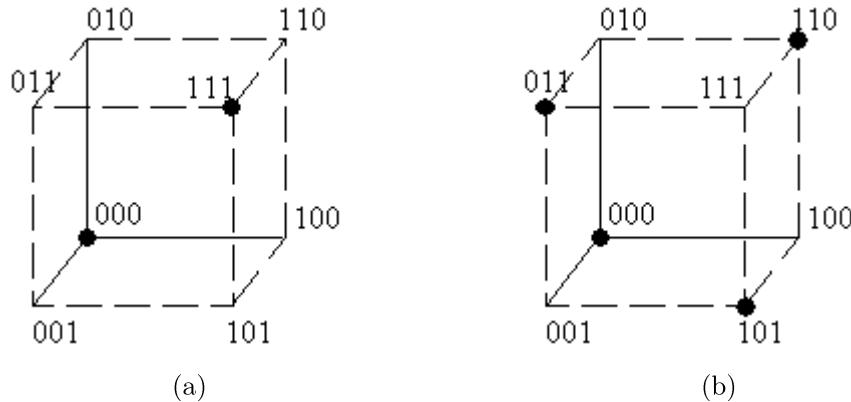


Figura 8.5
Blocos de 3 bits num espaço tridimensional.

- (a) Código de repetição (b) Código de paridade.
- Palavras de código.

Errar 1 bit corresponde ao deslocamento numa aresta.

O código de repetição tem maior separação entre palavras de código (3 arestas ou distância de Hamming de 3) do que o código de paridade (2 arestas ou distância de Hamming de 2). Utilizando o código de paridade, quando existe 1 erro o bloco recebido fica posicionado num vértice, à distância de 1 aresta de 3 palavras de código diferentes, todas com a mesma probabilidade. No código de repetição o bloco recebido fica a uma aresta da palavra original e a duas da outra palavra de código, corrigindo-se para a palavra de código correta.

8.9 Código de Hamming

Um código perfeito com uma distância de Hamming mínima de 3, capaz de corrigir 1 bit ou detetar 2 bits errados, é o código de Hamming. Para ilustrar este código considere-se uma mensagem de 4 bits, por exemplo “1 0 0 1”. Este código requer 3 bits de paridade, num total de 7 bits (equação 8.18 com código perfeito), correspondendo a um código H(7,4) (Hamming (7,4)). Coloque-se os bits de informação da esquerda para a direita, respetivamente nas posições m :

$$\begin{array}{ccccccc}
 m7 & m6 & m5 & p4 & m3 & p2 & p1 \\
 1 & 0 & 0 & x & 1 & x & x
 \end{array}$$

Os 3 bits marcados com x, que estão nas posições condizentes com as potências de 2, corresponderão aos bits de paridade. Coloque-se agora os bits de mensagem nas posições indicadas na figura 8.6-a, como ilustrado na figura 8.6-b.

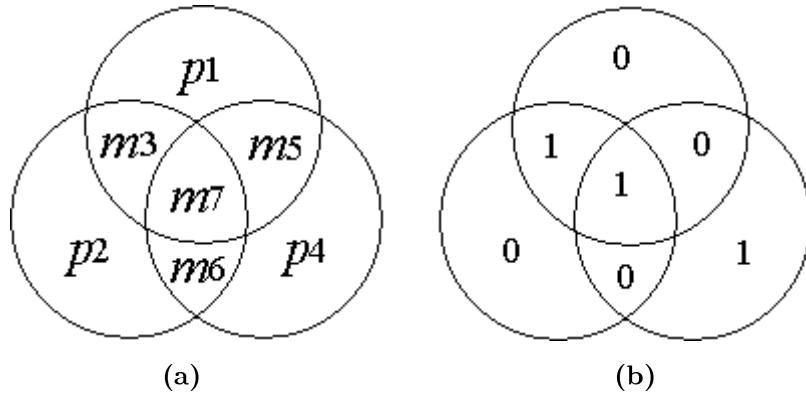


Figura 8.6
Cálculo do código de Hamming (7,4)
(a) Diagrama genérico (b) Exemplo.

Os bits de paridade correspondem ao cálculo da paridade par dentro do mesmo círculo. Os bits enviados, incluindo os bits de paridade, serão então:

m_7	m_6	m_5	p_4	m_3	p_2	p_1
1	0	0	1	1	0	0

Caso haja um erro, por exemplo em m_6 , os bits recebidos são:

bits recebidos	m_7	m_6	m_5	p_4	m_3	p_2	p_1
	1	1	0	1	1	0	0

O procedimento de correção a ser efetuado no receptor é o seguinte:

- 1) Recalcula-se os bits de paridade, sem ter em conta os bits de paridade.

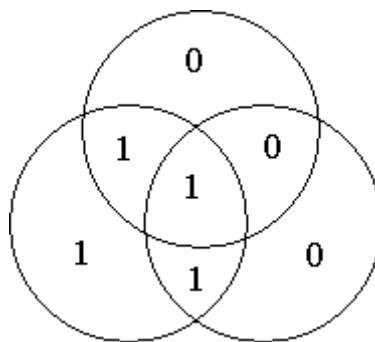


Figura 8.7
Cálculo do código de Hamming (7,4).

- 2) Adiciona-se (módulo-2) os bits de paridade recebidos e calculados (ou, de um modo equivalente, calcula-se a paridade par), produzindo um número denominado síndrome;

	$m7$	$m6$	$m5$	$p4$	$m3$	$p2$	$p1$
bits recebidos	1	1	0	1	1	0	0
bits calculados	1	1	0	0	1	1	0
Síndrome					1	1	0

- 3) Lendo os bits da síndrome da esquerda para a direita, e transformando-a em decimal $110 \leftrightarrow 6$, então o bit errado é o bit $m6$;
- 4) Inverte-se o nível lógico do bit errado e retiram-se os bits de paridade, descodificando os bits $m7, m6, m5, m3 = "1\ 0\ 0\ 1"$, os bits corretos;
- 5) Se não houvesse erros os bits de paridade recebidos e calculados seriam iguais, pelo que a síndrome seria “0 0 0”, indicando não haver erros.

Note-se pelo diagrama da figura 8.6-a, que o bit $m6$ influênciava as paridades ($p4, p2$) exatamente as posições com nível lógico “1” da conversão para binário do seu índice ($6 \leftrightarrow "1\ 1\ 0"$), assumindo as posições pela ordem ($p4, p2, p1$). Esta situação repete-se para todos os outros bits de informação e é por este facto que a síndrome corresponde ao bit errado.

Uma alternativa ao cálculo dos bits de paridade no código de Hamming corresponde a adicionar em módulo-2 (paridade par) as posições em binário dos bits de informação ao nível lógico “1”. Com o exemplo da sequência binária “1 0 0 1”.

		$p4$	$p2$	$p1$
7	111	1	1	1
3	011	0	1	1
Paridade		1	0	0

No receptor, repete-se o procedimento, incluindo os bits de paridade. Resultando na síndrome 0, não existem erros.

		<i>p4</i>	<i>p2</i>	<i>p1</i>
7	111	1	1	1
4	100	1	0	0
3	011	0	1	1
Síndrome		0	0	0

Assumindo um erro na posição m₆, a síndrome corresponde novamente à posição errada, bastando para corrigir o bit inverter o seu nível lógico.

		<i>p4</i>	<i>p2</i>	<i>p1</i>
7	111	1	1	1
6	110	1	1	0
4	100	1	0	0
3	011	0	1	1
Síndrome	6	1	1	0

Em alternativa ao diagrama da figura 8.6, um código em que os bits de redundância são definidos por paridades de subconjuntos do bits de entrada estes podem também ser definido com a operação *ou exclusivo* ou \oplus . Para o código de Hamming (7,4) tem-se (figura 8.6):

$$p4 = m5 \oplus m6 \oplus m7 \quad p2 = m3 \oplus m6 \oplus m7 \quad p1 = m3 \oplus m5 \oplus m7. \quad (8.23)$$

Num código de Hamming, qualquer que seja o número de bits de paridade, é apenas possível corrigir 1 bit, pois a distância mínima de Hamming é sempre 3. A relação entre o número de bits de informação e a dimensão do código torna o código de Hamming perfeito, ou seja, corresponde ao menor valor de n da inequação 8.18, é dado pela equação:

$$2^{n-k} = n+1. \quad (8.24)$$

Segundo a equação 8.24 aplicada para 2 bits de paridade, é gerado um código (3,1), corresponde a um código de repetição de 3 bits. Embora gozando das propriedades dos códigos de Hamming este não é considerado como tal:

$$m3 \quad p2 \quad p1$$

Com 4 bits de paridade o código corresponde a um código H(15,11):

$m_{15} \ m_{14} \ m_{13} \ m_{12} \ m_{11} \ m_{10} \ m_9 \ p_8 \ m_7 \ m_6 \ m_5 \ p_4 \ m_3 \ p_2 \ p_1$

A probabilidade de errar um bloco corresponde a errar 2 bits (ou mais):

$$P_b = f(2|n, BER) = C_2^n BER^2 = \frac{n(n-1)}{2} BER^2. \quad (8.25)$$

Nesta situação o bit “corrigido” é sempre um terceiro bit (mal corrigido), o que corresponde no final a 3 bits errados, pelo que:

$$BER' = \frac{3}{n} P_b = \frac{3}{2}(n-1)BER^2. \quad (8.26)$$

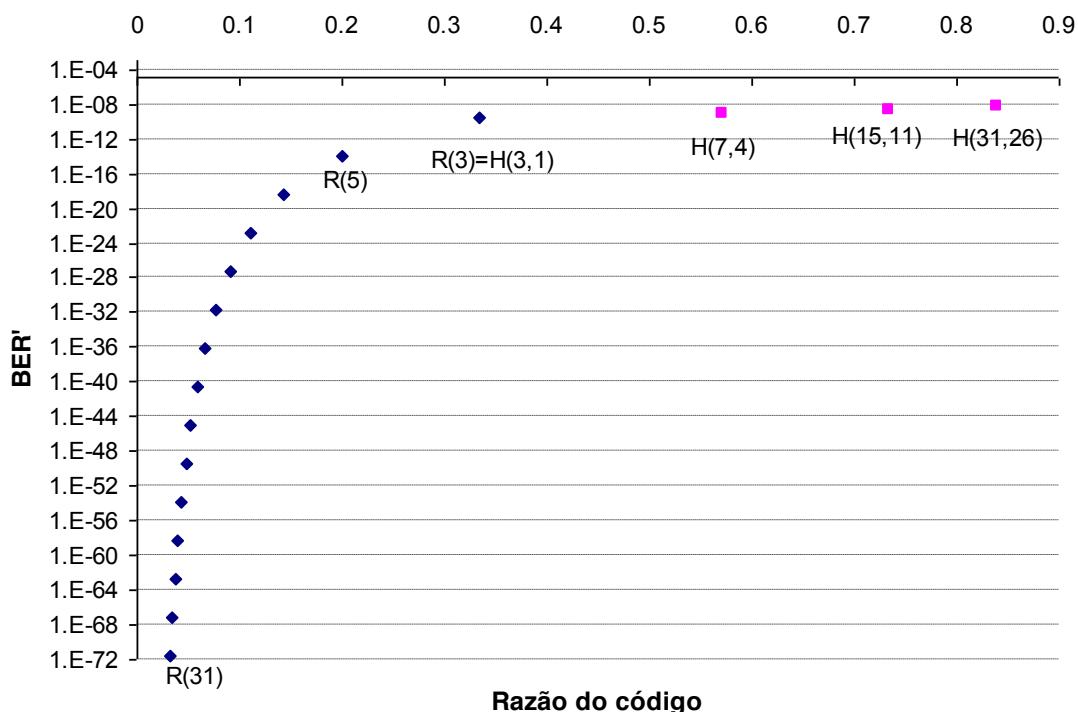


Figura 8.8

Desempenho dos códigos de repetição e códigos de Hamming.
Exemplo com para $BER=10^{-5}$. A probabilidade de erro após correção é tanto maior (pior) quanto maior (melhor) for a razão do código.

Na figura 8.8 é apresentada uma comparação entre os códigos de repetição e de Hamming, para $BER=10^{-5}$. Realça-se o compromisso entre a

razão do código e a capacidade de correção. Num código de repetição, quanto maior for o número de bits de repetição mais bits se conseguem corrigir mas a razão do código decai também muito rapidamente. Os códigos de Hamming, mantendo constante a capacidade de corrigir 1 bit, melhoram a razão do código à medida que vão protegendo maior número de bits de informação.

8.10 Matriz geradora

Códigos lineares e sistemáticos podem ser gerados através de um produto matricial em aritmética de módulo-2. Considere-se um conjunto de bits de informação representados sob a forma de um vetor linha m ($1, k$):

$$m = [m_k \quad \dots \quad m_2 \quad m_1], \quad (8.27)$$

e uma matriz geradora do código G (k, n), definida por:

$$G = [I_k \quad | \quad P], \quad (8.28)$$

em que I_k (k, k) é uma matriz identidade e P ($k, n-k$) é uma matriz que define os bits de paridade.

O vetor linha c ($1, n$) representado as palavras de código é definido por:

$$c = mG. \quad (8.29)$$

Devido à matriz identidade, os bits de informação são copiados para o código, tornando-o sistemático. Note-se que a soma de duas palavras de código origina outra palavra de código, tornando-o linear:

$$c_i + c_j = m_i G + m_j G = (m_i + m_j) G. \quad (8.30)$$

Cada linha da matriz geradora corresponde a uma palavra de código. Esta é gerada quando apenas um e um só bit de informação se apresenta ao nível lógico “1”. Da esquerda para a direita, se o bit j for o único bit ao nível

lógico “1”, a palavra de código correspondente é dado pela linha j . Todas as outras palavras de código correspondem à combinação linear (módulo-2) das respetivas linhas da matriz geradora. Por exemplo, se o bit i e o bit j estiverem ao nível lógico “1”, a palavra de código correspondente é dada pela combinação linear das linhas i e j .

De modo a que no recetor se consiga perceber se houve erros na transmissão, assume-se a matriz de verificação de paridade, $H^T(n, n-k)$:

$$H^T = \begin{bmatrix} P \\ I_{n-k} \end{bmatrix}, \quad (8.31)$$

em que $I_{n-k}(n-k, n-k)$ é uma matriz identidade. Verifica-se que:

$$S = cH^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0]. \quad (8.32)$$

O produto com a matriz P recalcula a paridade (linha) e o produto com a matriz I_{n-k} compara este resultado com a paridade, que sendo a mesma dá resultado 0 em todas as colunas.

Caso haja erros representados pelo padrão de erro da equação 8.20, o que é recebido é $c + E$. Multiplicando por H^T obtém-se:

$$S = (c + E)H^T = cH^T + EH^T = EH^T. \quad (8.33)$$

O resultado, S , da verificação, depende apenas do padrão de erro e não do código enviado. Caso este resultado seja 0 não há erros. Se o número de bits de paridade (equação 8.19) e a distância de Hamming (equação 8.17-b) forem suficientes, este resultado corresponde a uma síndrome capaz de indicar quais os bits errados. Caso haja apenas 1 bit errado na posição j (da esquerda para a direita), a síndrome corresponde à linha j da matriz de verificação. Caso haja mais do que 1 erro a síndrome corresponde à combinação linear das respetivas linhas da matriz de verificação.

Como em qualquer código linear, caso o padrão de erro coincida com uma palavra de código a síndrome anula-se e embora existam erros estes não são detetados.

8.10.1 Código de paridade

Num código de paridade todos os bits de informação influenciam o único bit de paridade, pelo que a matriz de paridade $P(k, 1)$ corresponde a um vetor coluna com todos os elementos iguais a 1. Apresenta-se seguidamente a matriz geradora e a matriz de verificação de paridade para um código de dimensão 5:

$$G = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad H^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (8.34)$$

8.10.2 Código de repetição

Num código de repetição de n bits, $(n, 1)$, existe apenas 1 bit de informação e duas palavras de código. Todos os bits de paridade são iguais ao bit de informação. A matriz $P(1, n-1)$ e a matriz geradora $G(1, n)$ correspondem a vetores linha com todos os elementos iguais a 1. Apresenta-se seguidamente a matriz geradora e a matriz de verificação de paridade para um código de repetição de 5 bits.

$$G = [1 \mid 1 1 1 1] \quad H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.35)$$

8.10.3 Código de Hamming H(7, 4)

Para um código de Hamming H(7,4), em que os 4 bits de informação são representados pelo vetor linha:

$$m = [m_7 \ m_6 \ m_5 \ m_3], \quad (8.36)$$

e o código representado por,

$$c = [m_7 \ m_6 \ m_5 \ m_3 \ p_4 \ p_2 \ p_1], \quad (8.37)$$

a matriz geradora é definida por (equação 8.23 ou figura 8.6-a):

$$G = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]. \quad (8.38)$$

Note-se que o bit m_7 influencia os 3 bits de paridade (1^a linha), o bit m_6 influencia os bits de paridade p_4 e p_2 (2^a linha), o bit m_5 influencia os bits de paridade p_4 e p_1 (3^a linha) e o bit m_3 influencia os bits de paridade p_2 e p_1 (4^a linha). Caso o vetor de entrada estivesse representado por outra ordem na equação 8.36 as linhas da matriz P estariam também por outra ordem. Da mesma forma, se a ordem dos bits de paridade fosse diferente na equação 8.37 a matriz P teria também colunas trocadas.

Visto a partir das colunas, o bit de paridade p_4 é função dos correspondentes bits ao nível lógico “1” da primeira coluna desta matriz, bits m_7 , m_6 e m_5 , pelo que as três primeiras posições desta coluna são 1 e a última posição que depende do bit m_3 está a 0. O bit de paridade p_2 é função dos correspondentes bits ao nível lógico “1” da segunda coluna desta matriz, bits m_7 , m_6 e m_3 , pelo que as respetivas posições da 2^a coluna são 1 e a 3^a posição que depende do bit m_5 está a 0. O mesmo raciocínio se aplica para p_1 .

A matriz de verificação de paridade (equações 8.28 e 8.31 e 8.38) vem:

$$H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.39)$$

Existindo um erro, por exemplo na posição 6, o padrão de erro vem:

$$E = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0], \quad (8.40)$$

dando origem a uma síndrome:

$$S = EH^T = [1 \ 1 \ 0], \quad (8.41)$$

que corresponde à segunda linha da matriz de verificação de paridade, estando por isso errado o segundo bit a contar da esquerda no padrão de erro. Generalizando este raciocínio, para um código de correção de 1 bit, o bit errado corresponde ao índice da linha coincidente com a síndrome. Estas linhas têm que ser todas diferentes para que o bit errado seja inequívoco.

8.11 Códigos cílicos

Os códigos cílicos são uma subclasse dos códigos lineares, simples de implementar e com uma estrutura algébrica bem definida. O princípio dos códigos cílicos é o seguinte: suponha-se um número a enviar entre o transmissor e o recetor. No transmissor, faça-se a divisão inteira deste número por um dividendo conhecido no transmissor e no recetor. É enviado o número original e o resto da divisão inteira. No recetor é novamente efetuada a divisão e os restos são comparados. Caso sejam iguais é considerado que não há erros. Contudo, erros em que resulte um resto igual não serão detetados.

Aplicando este princípio para transmissão binária, considerando:

$m(x)$ – polinómio de grau $k-1$ (k bits ou coeficientes do polinómio, tomando valores 0 ou 1, correspondentes à mensagem a enviar¹⁰);

$g(x)$ – divisor ou polinómio gerador, de grau $n-k$;

$r(x)$ – polinómio correspondente aos resto da divisão inteira com $g(x)$, de grau $n-k-1$ (com $n-k$ coeficientes, sendo $k > n-k$);

tem-se que,

$$\frac{m(x)x^{n-k}}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}, \quad (8.42)$$

e,

$$\frac{m(x)x^{n-k} - r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} - \frac{r(x)}{g(x)} = q(x). \quad (8.43)$$

As palavras de código correspondem a $T(x) = m(x)x^{n-k} - r(x)$, equivalente a colocar os $n-k$ bits de $r(x)$ nos bits à direita de $m(x)x^{n-k}$ (somar ou subtrair é idêntico). $m(x)$ tem exatamente k bits e são adicionados $n-k$ bits de redundância (resto) pelo que este código corresponde a um código (n, k) .

No receptor o polinómio recebido é também dividido por $g(x)$, não se obtendo resto como resulta da equação 8.43. Como consequência todas as palavras de código são múltiplas (módulo-2) do polinómio gerador $g(x)$.

Havendo erros representados pelo padrão de erro da equação 8.20, o que é recebido é $T(x) + E(x)$. Este polinómio é dividido pelo polinómio gerador para se verificar o resto:

$$\frac{T(x) + E(x)}{g(x)} = \frac{T(x)}{g(x)} + \frac{E(x)}{g(x)}. \quad (8.44)$$

¹⁰ Para $x=2$ os polinómios correspondem à leitura dos bits em binário.

Como $T(x)/g(x)$ não produz resto, os erros só não são detetados se $E(x)/g(x)$ não produzir resto. Esta situação dá-se quando o padrão de erro é múltiplo do polinómio gerador, coincidindo com uma das palavras de código. A mesma conclusão é tirada da propriedade dos códigos lineares segundo a qual os padrões de erro correspondentes às palavras de código não são detetados.

Se uma palavra de código for rodada para a esquerda, colocando o coeficiente de ordem $n-1$ na posição do coeficiente de ordem 0, o resultado é outra palavra de código. É esta característica que dá o nome de códigos cíclicos. É também a estrutura cíclica que torna este código fácil de implementar. Contudo, para se garantir que um código com dimensão n é cíclico, duas condições devem ser satisfeitas:

- (1) $g(x)$ tem que ser um fator de $x^n - 1$;
- (2) O coeficiente de ordem 0 de $g(x)$ tem que ser 1.

Se a condição (2) não fosse satisfeita, o bit mais à direita do resto e portanto das palavras de código seria sempre 0, independentemente dos bits a transmitir, o que para além de tornar o código não cíclico é inútil.

8.11.1 Códigos cíclicos como códigos de correção

Para além das condições para que o código seja cíclico, para corrigir t bits o número de bits de redundância a introduzir deverá satisfazer a equação 8.19. Uma escolha apropriada do polinómio gerador deverá ainda atender à distância mínima de Hamming, satisfazendo a equação 8.17-b. A informação sobre quais os bits errados é dada pelo resto, que opera como síndrome.

Apresentam-se três exemplos de polinómios geradores: os polinómios dos códigos $H(7, 4)$ e $H(15,11)$, com distância mínima de Hamming de 3; e o polinómio do código de Goley $(23, 12)$, com distância mínima de Hamming de 7, único código perfeito conhecido para correção de 3 bit.

- Hamming (7,4) ($m_5 \ m_7 \ m_6 \ m_3$) x^3+x+1
 - Hamming (15,11) x^4+x+1 (8.45)
 - Código de Goley (23, 12) $x^{11}+x^9+x^7+x^6+x^5+x+1$

8.11.2 Códigos cílicos e matriz geradora

Os códigos lineares podem ser implementados através de diversos métodos. A divisão pelo polinómio gerador $g(x)$ aqui descrita e a geração através de multiplicação por uma matriz geradora G , descrita anteriormente, são dois destes métodos. Relacionando-os e relembrando que a j -ésima linha da matriz geradora corresponde à palavra de código com apenas 1 bit de informação na posição j (da esquerda para a direita) ao nível lógico “1”:

- (1) A última linha (k) da matriz G é igual aos coeficientes de $g(x)$, pois este corresponde à palavra de código com apenas o bit de informação na coluna k ao nível lógico “1” e com zeros à esquerda;
 - (2) A linha $(k - 1)$ de G corresponde à linha k rodada para a esquerda (estrutura cílica), desde que a nova coluna k não seja 1, de modo a manter a matriz identidade da equação 8.28. Caso contrário soma-se a linha k (código linear) forçando esta posição a zero;
 - (3) Repete-se o procedimento (2) para as linhas acima seguintes, partindo sempre da linha anterior, até se chegar à linha 1.

8.11.3 CRC – Verificação cíclica de redundância

Na transmissão de pacotes em redes de computadores estes atingem uma dimensão de centenas ou mesmo milhares de bits, sendo de dimensão variável. A implementação de códigos corretores para estas dimensões é uma tarefa complexa, nomeadamente na presença de erros em rajada. Contudo, para o

código funcionar apenas como detetor de erros, basta verificar se o resto é diferente de zero. O resto não opera como síndrome, pelo que não há qualquer restrição ao número de bits de informação em relação à dimensão total do código. Note-se que o código deixe de ser cíclico uma vez que $g(x)$ deixa de ser um fator de $x^n - 1$. Daqui se conclui que, quando se pretende apenas detetar erros, qualquer polinómio gerador pode ser utilizado qualquer que seja a dimensão dos bits a transmitir. Neste contexto os códigos cíclicos tomam o nome de códigos de verificação cíclica de redundância (CRC – *cyclic redundancy check*).

Uma das grandes vantagens do código CRC é como detetor de rajadas de erros. Segundo a equação 8.44, não se deteta erros se o padrão de erro for múltiplo do polinómio gerador. Relembrando que uma rajada começa e acaba sempre com um erro, existem três casos a serem considerados:

- (1) Rajadas de dimensão menor ou igual ao grau ($n-k$) do polinómio $g(x)$ não poderão corresponder aos seus múltiplos e são todas detetadas;
- (2) Para rajadas com dimensão ($n-k+1$) existe apenas um padrão de erro múltiplo de $g(x)$, que condiz exatamente com $g(x)$, em $2^{(n-k-1)}$ padrões de erro possíveis, devidas a $(n-k+1)-2$ bits no interior da rajada. Assumindo que estes padrões são equiprováveis, obtém-se para a relação de rajadas não detetadas:

$$\frac{1}{2^{(n-k-1)}} = 2^{-(n-k-1)}, \quad (8.46)$$

definindo relação de rajadas não detetadas como a relação entre o número de rajadas não detetadas e o número total de rajadas transmitidas;

(3) Para rajadas de dimensão $(n-k+2)$ existe apenas um múltiplo de $g(x)$ em $2^{(n-k)}$ padrões de erro possíveis, devidas a $(n-k+2)-2$ bits no interior da rajada. Por cada bit que se aumenta na rajada o número de padrões de erro diferentes duplica mas também duplica o número de múltiplos de $g(x)$, mantendo-se a mesma relação $2^{-(n-k)}$.

A relação total de rajadas não detetadas numa trama, *BFER*, (*burst frame error rate*) entre o número de rajadas não detetadas e o número total de rajadas, corresponde ao valor médio das três situações anteriores. Dado que o somatório de padrões de erro da situação (1) iguala os da situação (2), a sua média iguala a da situação (3), a relação de rajadas não detetadas, assumindo que todas as dimensões de rajadas de erros e todos os padrões de erro são equiprováveis, vem:

$$BFER = \frac{\text{rajadas não detectadas}}{n^o \text{ total de rajadas}} = 2^{-(n-k)}. \quad (8.47)$$

Apesar da dimensão do polinómio gerador não estar à partida definido, este é um parâmetro importante que determina a dimensão das rajadas de erros a detetar. Com o aumento da dimensão $(n-k)$ do polinómio gerador, a razão do código diminui. Contudo, aumenta a dimensão mínima $(n-k)$ da dimensão das rajadas sempre detetadas e diminui, segundo a equação 8.47, a relação de rajadas não detetadas. Note-se ainda que, mesmo para um polinómio gerador com uma ordem moderada, são detetados a maioria dos padrões de erro.

Alguns exemplos de polinómios utilizados como CRC são:

- Paridade $x+1$
- CRC-5 USB x^5+x^2+1

– CRC8 ITU-T	$x^8 + x^7 + x^3 + x^2 + 1$	(8.48)
– CRC16 ITU-T	$x^{16} + x^{12} + x^5 + 1$	
– CRC16 (USA)	$x^{16} + x^{15} + x^2 + 1$	

Os códigos CRC são utilizados por exemplo na interface USB e em redes de computadores, ou na escrita e leitura de ficheiros em computadores.

8.12 IP Checksum

Um código robusto de deteção de erros, embora não linear, é o código IP *checksum*, utilizado na deteção de erros dos cabeçalhos do protocolo TCP/IP.

Considere-se que se divide os bits de informação em sub-blocos, M_i , com dimensão $(n-k)$ bits. O código IP *checksum* utiliza sub-blocos de dimensão de 16 bits. O *checksum* corresponde ao *complemento para um* (negação) da adição a $(n-k)$ bits em *complemento para um* de todos os sub-blocos.

$$CS = \sim X = \sim (M_1 + M_2 + \dots + M_j). \quad (8.49)$$

A adição em *complemento para um* tem a mesma dimensão das parcelas, qualquer que seja o número de parcelas, pois, ao contrário da adição *vulgar*, os bits de arrasto são adicionados aos bits menos significativos. CS tem portanto $(n-k)$ bits correspondendo aos bits de redundância. O código é sistemático, sendo a palavra de código constituída pelos bits de informação e pelo *checksum*.

A adição em *complemento para um* goza das propriedades comutativa e associativa da adição *vulgar*. Estas propriedades podem ser utilizadas para diminuir a complexidade na implementação, quer em *hardware* quer em *software*, nomeadamente efetuando a adição aos pares ou em paralelo.

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + \dots + M_j &= (((M_1 + M_2) + M_3) + M_4) + \dots + M_j \\ &= (M_1 + M_2) + (M_3 + M_4) + \dots + M_j \end{aligned} \quad (8.50)$$

No receptor, repete-se o procedimento do transmissor, incluindo o *checksum*. Correspondendo o *checksum* ao *complemento para um* da adição em *complemento para um*, o resultado final é zero:

$$\sim(X + CS) = \sim(X + \sim X) = 0. \quad (8.51)$$

Caso este valor não seja 0 é porque foram produzidos erros entre o transmissor e o receptor e o pacote deve ser retransmitido.

9 Conclusões

Este texto corresponde a uma introdução sobre a interface elétrica da camada física do modelo OSI e os algoritmos de controlo de erros de bit das camadas superiores dependentes da rede e da camada de transporte. Estes são apresentados como solução para lidar com as limitações do canal de comunicação, otimizando recursos importantes como a energia e a largura de banda disponível.

Foram descritos os principais códigos de linha, binários e M -ária, para transmissão em canais passa-baixo. Para transmissão em canais passa-banda foram descritas as principais modulações digitais, nas versões binária e M -ária.

Constituem atributos dos códigos e modulações digitais o débito binário, a energia média por bit, a eficiência espectral, a presença de componente DC (só para códigos de linha), a probabilidade de erro de bit, a capacidade de deteção de erros, a facilidade de sincronismo de símbolo e de portadora (esta última só para modulações) e a complexidade de implementação dos transmissores e receptores. Existem claramente compromissos em relação a estes atributos, já que, por exemplo, para diminuir a largura de banda ocupada diminui-se o número de transições, o que dificulta o sincronismo de símbolo, que por sua vez aumenta a complexidade do receptor. Num outro exemplo, para melhorar a probabilidade de erro de bit poderá ter que se aumentar a energia de bit.

Para todos os códigos de linha e modulações foram deduzidas as expressões da energia média por bit, da probabilidade de erro de bit e da largura de banda segundo o critério de primeiro zero espectral, já razoável para atenuar a interferência intersimbólica, e segundo o critério de Nyquist, que a evita completamente.

Foram apresentados os receptores ótimos, realizados com filtro adaptado e deteção segundo o critério de máxima verosimilhança. Tendo sido assumido que

os símbolos são equiprováveis, a deteção de máxima verosimilhança é de facto equivalente à deteção ótima com critério de máximo *a posteriori*.

Nos casos das modulações o filtro adaptado necessita de sincronismo de portadora (deteção coerente). Para evitar este sincronismo, que encarece os receptores, foram apresentadas as versões dos receptores binários não coerentes, embora apresentem um desempenho inferior.

Os códigos ou modulações *M-ária* correspondem também a compromissos, já que a sua implementação tem maior complexidade e para a mesma relação entre a energia média por bit e potência de ruído por Hertz, apresentam a probabilidade de erro de bit maior, mas conseguem uma melhor eficiência espectral, ou seja, transmitem um maior débito binário numa menor largura de banda.

Devido ao ruído no canal de comunicação é impossível evitar erros de bit entre o transmissor e o receptor. Inserindo bits de redundância é contudo possível detetar ou, se o número de bits de redundância introduzidos for suficientes, corrigir estes erros. Para os códigos de deteção de erros é necessário um mecanismo que informe o transmissor destes erros, para que a informação seja retransmitida. São apresentados alguns dos principais códigos de deteção e correção de erros e suas limitações. São deduzidas as probabilidades de erro após retransmissão no caso da utilização de códigos detetores, ou correção no caso da utilização de códigos corretores.

É ainda apresentado o *interleaving*, procedimento para lidar com erros em rajada mas utilizando códigos de controlo de erros para erros aleatórios. Como código de lidar diretamente com os erros em rajada é apresentado o CRC e calculada a sua relação de rajadas não detetadas, que funciona como medida de qualidade da transmissão na presença deste tipo de erros.

Principais Equações

Transmissão binária

T_b	Tempo de símbolo [s]
R_b	Débito binário [bit/s] [Hz]
A	Amplitude do código de linha/modulação [V] ou [A]
$s_l(t)$	Símbolo lógico l , $l=0$ ou 1 [V] ou [A]
E_l	Energia (normalizada) do símbolo l , $l=0$ ou 1 [J]
E_b	Energia (normalizada) média por bit [J]
S_T	Potência (normalizada) transmitida [W]
S_R	Potência (normalizada) recebida [W]
ρ	Eficiência espectral
B_T	Largura de banda de sinal transmitido [Hz]
α	Fator de <i>rolloff</i>
σ_c^2	Potência do ruído na banda do sinal [W]
$N_{o/2}$	Potência por Hertz do ruído no canal de comunicação [W/Hz] [J]
B_C	Largura de banda do canal de comunicação [Hz]
SNR_c	Relação sinal-ruído no canal de comunicação na banda do sinal
$c(t)$	Vetor de base no receptor [V] ou [A]
k	Fator de escala no vetor de base
A_{eq}	Área equivalente do ruído do filtro ótimo [Hz]
σ_n^2	Potência do ruído no receptor após filtragem [W]
y_l	Valor após filtragem sem ruído para o símbolo l , $l=0$ ou 1 [V] ou [A]
d	Metade da distância entre símbolos após filtragem [V] ou [A]
λ_{opt}	Valor ótima de comparação na detecção binária [V] ou [A]
BER	Probabilidade de erro de bit

$$R_b = \frac{1}{T_b} \quad (2.1) \qquad \rho = \frac{R_b}{B_T} \quad (2.6)$$

$$E_l = \int_0^{T_b} s_l^2(t) dt \quad (2.2) \qquad E_b = \frac{E_0 + E_1}{2} \quad (2.4)$$

$$S_T = \frac{E_b}{T_b} = E_b R_b \quad (2.5)$$

Canal de comunicação:

$$At = \frac{S_T}{S_R}, \quad (3.1)$$

$$At_{dB} = 10 \times \log_{10} \left(\frac{S_T}{S_R} \right) \quad (3.2)$$

$$\sigma_c^2 = N_0 B_T \quad (3.4)$$

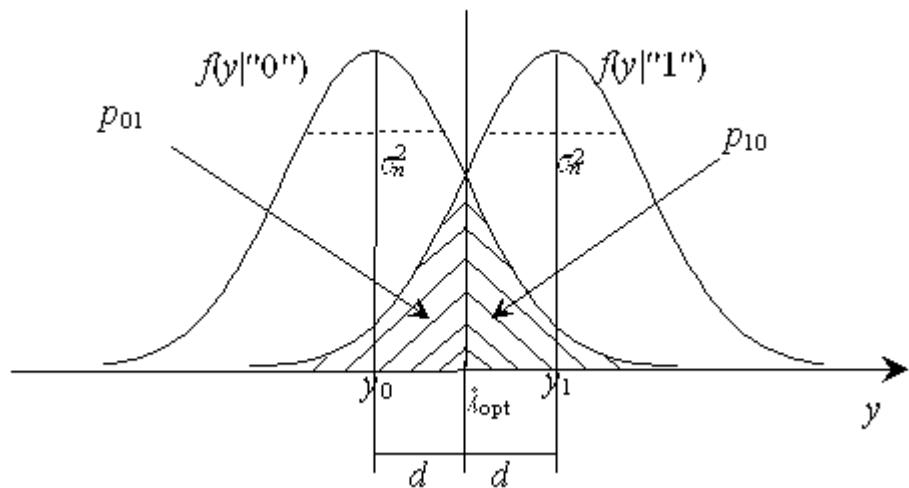
$$SNR_c = \frac{S_R}{\sigma_c^2} = \frac{E_b}{N_0} \frac{R_b}{B_T} = \frac{E_b}{N_0} \rho \quad (3.5)$$

$$B_T \leq B_C \quad (3.11)$$

Descodificador de máxima verosimilhança:

$$\lambda_{ot} = \frac{y_0 + y_1}{2} \quad (5.5) \quad d = \frac{|y_1 - y_0|}{2} \quad (5.10)$$

$$BER = p_1 p_{01} + p_0 p_{10} = \frac{1}{2} erfc \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}} \right). \quad (5.9)$$



Filtro adaptado:

$$c(t) = k s_i(t) \quad (5.15)$$

$$\begin{cases} y_1 &= k E_1 \\ y_0 &= -k E_1 & polar \\ y_0 &= 0 & unipolar \end{cases} \quad (5.19)$$

$$A_{eq} = \int_0^{T_b} c^2(t) dt = k^2 \int_0^{T_b} s_i^2(t) dt = k^2 E_i \quad (5.20)$$

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} A_{eq} \quad (5.21)$$

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{d}{\sqrt{2\sigma_n^2}}\right) \quad (A.4.3)$$

Filtro adaptado normado:

$$A_{eq} = 1 \quad (5.22) \qquad k = \frac{1}{\sqrt{E_1}} \quad (5.23)$$

$$\begin{cases} y_1 &= +\sqrt{E_1} \\ y_l &= -\sqrt{E_1} \quad polar \\ y_l &= 0 \quad unipolar \end{cases} \quad (5.24) \qquad \sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \quad (5.25)$$

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{N_0}}\right) \quad (5.26)$$

Códigos de linha binários

Código Binário	Energia média por bit E_b	DC	Fácil Sincronismo	1º zero espacial B_T	Largura de Banda B_T	BER
PNRZ	$A^2 T_b$	Não ⁽¹⁾	Não	R_b	$\frac{R_b}{2}(1+\alpha)$	$\frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$
PRZ	$\frac{A^2}{2} T_b$	Não ⁽¹⁾	Sim	$2R_b$	$R_b(1+\alpha)$	$\frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$
UNRZ	$\frac{A^2}{2} T_b$ ⁽¹⁾	Sim	Não	R_b	$\frac{R_b}{2}(1+\alpha)$	$\frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$
Manchester (Split-Phase)	$A^2 T_b$	Não	Sim	$2R_b$	$R_b(1+\alpha)$	$\frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$
BNRZ	$\frac{A^2}{2} T_b$ ⁽¹⁾	Não	Não ⁽²⁾ Sim (BNZS)	R_b	$\frac{R_b}{2}(1+\alpha)$	$\frac{3}{4} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$
NRZI	$A^2 T_b$	Não	Não Sim (<i>stuffing</i>)	R_b	$\frac{R_b}{2}(1+\alpha)$	$erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$
Manchester Diferencial	$A^2 T_b$	Não	Sim	$2R_b$	$R_b(1+\alpha)$	$erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$

1 – Desde que com 50% de ocorrência de bits a cada nível lógico.

2 – Sim, mas apenas nas sequências de bits ao nível lógico “1”.

Transmissão M -ária

a	Distância entre símbolos adjacentes [V] ou [A]
K	Número de bits por símbolo
M	Número de níveis
R_s	Débito de símbolos [símbolo/s] [baud]
T_s	Tempo de símbolo [s]
E_s	Energia média por símbolo [J]
E_{\min}	Energia do símbolo com menor energia [J]
SER	Probabilidade de erro de símbolo
C	Capacidade de canal [bit/s] [Hz]

$$M = 2^K \quad (6.1)$$

$$T_s = KT_b \quad (6.2)$$

$$R_s = \frac{R_b}{K} \quad (6.3)$$

$$E_b = \frac{E_s}{K} \quad (6.6)$$

$$BER = \frac{K+1}{K} \frac{SER}{2} \quad \text{para código aleatório} \quad (6.14)$$

$$BER \approx \frac{SER}{K} \quad \text{para código Gray} \quad (6.16)$$

PAM

$$E_s = T_s \frac{a^2}{4} \frac{(M^2 - 1)}{3} = \frac{(M^2 - 1)}{3} E_{\min}. \quad (6.4)$$

$$E_{\min} = \left(\frac{a}{2} \right)^2 T_s \quad (6.5)$$

$$B_T = \frac{R_s}{2} (1 + \alpha) = \frac{R_b}{2K} (1 + \alpha). \quad (6.7)$$

Capacidade de canal (Lei de Hartley-Shannon)

$$C = B_C \log_2 \left(1 + \frac{S_R}{\sigma_c^2} \right) = B_C \log_2 \left(1 + \frac{S_R}{N_0 B_C} \right) \quad (6.23)$$

Código	Largura de Banda B_T	Energia média por bit E_b	BER (Código Gray)
2B1Q	$\frac{R_b}{4} (1 + \alpha)$	$\frac{5a^2}{4} T_b$	$\frac{3}{8} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{2E_b}{5N_0}} \right)$
M-PAM	$\frac{R_b}{2K} (1 + \alpha)$	$\frac{(M^2 - 1)a^2}{12} T_b$	$\frac{(M-1)}{KM} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{3K}{(M^2 - 1)N_0}} \frac{E_b}{2} \right)$

Modulações

 E_0

Energia da projeção do símbolo com menor energia [J]

Modulações binárias

Modulações Binárias	Largura de Banda B_T	Energia média por bit E_b	BER
B-PSK	$R_b(1+\alpha)$	$\frac{A^2}{2}T_b$	$\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$
OOK	$R_b(1+\alpha)$	$\frac{A^2}{4}T_b^{(1)}$	$\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$
B-ASK	$R_b(1+\alpha)$	$\frac{A1^2 + A0^2}{4}T_b^{(1)}$	$\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{T_b(A1 - A0)^2}{8N_0}}\right)$
DPSK	$R_b(1+\alpha)$	$\frac{A^2}{2}T_b$	$\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{E_b}{N_0}\right)$
B-FSK	$f_1 - f_0 + R_b(1+\alpha)$	$\frac{A^2}{2}T_b$	$\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$

Modulações M -árias

Modulações M -ária	Largura de Banda B_T	Energia média por bit E_b	BER (Código Gray)
QPSK	$\frac{R_b}{2}(1+\alpha)$	$\frac{A^2}{2}T_b$	$\frac{1}{2}erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$
M-PSK	$\frac{R_b}{K}(1+\alpha)$	$\frac{A^2}{2}T_b$	$\frac{1}{K}erfc\left(\sqrt{K \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \frac{E_b}{N_o}}\right)$
QAM	$\frac{R_b}{K}(1+\alpha)$	$\frac{2(M-1)}{3} \frac{E_0}{K}$	$\frac{2}{K} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) erfc\left(\sqrt{\frac{3K}{2(M-1)} \frac{E_b}{N_0}}\right)$

$$s_l(t) = A \cos(2\pi f_c t + \phi_l) = A \cos(\phi_l) \cos(2\pi f_c t) - A \sin(\phi_l) \sin(2\pi f_c t). \quad (7.32)$$

Receptor normado

$$c(t) = \sqrt{2R_s} \cos(2\pi f_c t)$$

Controlo de erros

BER	Probabilidade de erro de bit sem correção
T_e	Tempo médio entre erros de bit sem correção [s]
n	Dimensão em número de bits das palavras de código
k	Dimensão em número de bits antes da aplicação do código
R_c	Razão do código
R_b	Débito binário no canal (com aplicação do código) [bit/s] [Hz]
R'_b	Débito binário da informação (sem aplicação do código) [bit/s] [Hz]
P_r	Probabilidade de deteção de erro e retransmissão
d_{\min}	Distância mínima de Hamming [bit] []
BER'	Probabilidade de erro de bit após correção ou retransmissão
T'_e	Tempo médio entre erros de bit após correção ou retransmissão [s]
$RRND$	Relação de rajadas não detetadas

$$R_c = \frac{k}{n} = \frac{R'_b}{R_b} \quad (8.1)$$

Distribuição Binomial (Valores aproximados, assumindo $BER \ll 1$ e $nBER \ll 1$)

$$f(l|n, BER) = C_l^n BER^l (1 - BER)^{n-l} \approx C_l^n BER^l \quad (8.4)$$

$$f(l \text{ ou mais}|n, BER) \approx f(l|n, BER) \approx C_l^n BER^l \quad (8.6)$$

$$C_l^n = \frac{n!}{(n-l)!l!} \quad (A7.2)$$

Gerais

Número médio de erros num bloco de n bits: $\overline{\text{erros}} = nBER$ (8.7)

Probabilidade de bloco de n bits sem erro: $f(0|n, BER) = (1 - BER)^n$ (8.8)

$$T_e = \frac{1}{R_b BER} \quad T'_e = \frac{1}{R'_b BER'} \quad (8.9)$$

Probabilidade de retransmissão (1 erro) $P_r = nBER$ (8.13)

$$\text{Deteção até } l \text{ erros} \quad l < d_{\min} \quad (8.17-\text{a})$$

$$\text{Correção até } t \text{ erros} \quad t \leq \frac{d_{\min} - 1}{2} \quad (8.17-\text{b})$$

$$2^{n-k} \geq 1 + n + C_2^n + \dots + C_t^n = \sum_{j=0}^t C_j^n \quad (8.19)$$

Códigos de paridade e repetição

Código	k	R_c	P_b	BER'	d_{\min}
Paridade	$n-1$	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n(n-1)}{2} BER^2$	$\frac{2}{n} P_b = (n-1) BER^2$	2
Repetição de n bits	1	$\frac{1}{n}$	$C_{\frac{n+1}{2}}^n BER^{\frac{n+1}{2}}$	$P_b = C_{\frac{n+1}{2}}^n BER^{\frac{n+1}{2}}$	n
Repetição de 3 bits	1	$\frac{1}{3}$	$3BER^2$	$3BER^2$	3
Repetição de 5 bits	1	$\frac{1}{5}$	$10BER^3$	$10BER^3$	5

Código de Hamming

Distância mínima de 3 bits; Corrigé 1 bit ou deteta até 2 bits errados;

$n-k$	n	k	R_c	P_b	BER'
$n-k$	$2^{n-k} - 1$	$n-(n-k)$	$\frac{k}{n}$	$\frac{n(n-1)}{2} BER^2$	$\frac{3}{n} P_b = \frac{3(n-1)}{2} BER^2$
$2^{(1)}$	3	1	0,33	$3BER^2$	$3BER^2$
3	7	4	0,57	$21BER^2$	$9BER^2$
4	15	11	0,73	$105BER^2$	$21BER^2$
5	31	26	0,84	$465BER^2$	$45BER^2$
6	63	57	0,91	$1953BER^2$	$93BER^2$

(1)Equivalente ao código de repetição de 3 bits

CRC – Deteção de rajadas de erros

$BFER$ rajadas de dimensão inferior a $(n-k+1)$: 0

$BFER$ rajadas de dimensão $(n-k+1)$: $2^{-(n-k-1)}$ (8.46)

$BFER$ rajadas de dimensão superior a $(n-k+1)$: $2^{-(n-k)}$

$BFER$ valor médio:

$$BFER = 2^{-(n-k)} \quad (8.47)$$

Apêndices

Apêndice 1 – Código ASCII

ASCII – American Standards Committee for Information Interchange

			7	0	0	0	0	1	1	1	1
			6	0	0	1	1	0	0	1	1
			5	0	1	0	1	0	1	0	1
4	3	2	1								
0	0	0	0	NUL	DLE	SP	0	@	P	\	p
0	0	0	1	SOH	DCI	!	1	A	Q	a	q
0	0	1	0	ST	DC2	"	2	B	R	b	r
0	0	1	1	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0	1	0	0	EOT	DC4	\$	4	D	T	d	t
0	1	0	1	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0	1	1	0	AVK	SYN	&	6	F	V	f	v
0	1	1	1	BEL	ETB	'	7	G	W	g	w
1	0	0	0	BS	CAN	(8	H	X	h	x
1	0	0	1	HT	EM)	9	I	Y	i	y
1	0	1	0	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1	0	1	1	VT	ESC	+	;	K	[k	{
1	1	0	0	FF	FS	,	<	L	\	l	
1	1	0	1	CR	GS	-	=	M]	m	}
1	1	1	0	SO	RS	.	>	N	^	n	~
1	1	1	1	SI	US	/	?	O	_	o	DEL

Este código inclui:

Caracteres prensáveis, *e.g.* “c”, “%”.

Caracteres de controlo, *e.g.* CR (*carriage return*), DEL (*delete*).

Letras maiúsculas e minúsculas a que corresponde apenas o 6º bit diferente (premir da tecla *caps lock*).

Apêndice 2 – Largura de banda equivalente do ruído

Função densidade espectral de potência do sinal de entrada: $G_x(f)$ [W/Hz]

Função densidade espectral de potência do sinal de saída: $G_y(f)$ [W/Hz]

Potência do sinal de saída: P_y [W]

Resposta em frequência do filtro: $H(f)$ []

Densidade espectral de potência do ruído branco: $G_w(f)$ [W/Hz]

Potência do ruído na saída do filtro: σ_n^2 [W]

Largura de banda equivalente do ruído: B_{eq} [Hz]

Área equivalente do ruído: A_{eq} [Hz]

Das relações de densidade espectral de potência num SLIT tem-se:

$$G_y(f) = G_x(f) |H(f)|^2, \quad (\text{A2.1})$$

$$P_y = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f) |H(f)|^2 df. \quad (\text{A2.2})$$

O ruído branco é caracterizado por ter uma função densidade espectral de potência constante para todas as frequências:

$$G_w(f) = \frac{N_0}{2}. \quad (\text{A2.3})$$

Tendo o sinal de entrada uma distribuição de amplitudes normal, a distribuição das amplitudes do sinal de saída é também normal. Tendo o filtro à entrada ruído branco, obtém-se para a potência do ruído filtrado:

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} G_y(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} G_w(f) |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df. \quad (\text{A2.4})$$

Se o filtro tiver uma característica passa-baixo ideal de banda B e ganho g ,

$$\sigma_n^2 = \int_{-B}^{B} \frac{N_0}{2} g^2 df = N_0 B g^2. \quad (\text{A2.5})$$

Define-se largura de banda equivalente do ruído, B_{eq} , de um filtro de ganho g e resposta em frequência arbitrária $H(f)$, como sendo a largura de banda de um filtro ideal com o mesmo ganho g e cuja saída gere a mesma potência do ruído. Igualando as equações A2.4 e A2.5 tem-se que:

$$B_{eq} = \frac{1}{2g^2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df. \quad (\text{A2.6})$$

Define-se a área equivalente do ruído como:

$$A_{eq} = 2B_{eq}g^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)^2 dt, \quad (\text{A2.7})$$

correspondente ao dobro da largura de banda (bilateral) de um filtro ideal com ganho unitário cuja saída gere a mesma potência do ruído que um filtro com ganho g . Da equação A2.4 vem, para a potência do ruído à saída do filtro:

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)^2 dt = N_0 B_{eq} g^2 = \frac{N_0}{2} A_{eq}. \quad (\text{A2.8})$$

Note-se que A_{eq} , como B_{eq} , correspondem a uma largura de banda e têm como unidades Hertz. Note-se ainda que o valor de A_{eq} equivale (A2.7) à energia da resposta impulsiva do SLIT.

Apêndice 3 – Funções densidade espectral de potência em códigos de linha

PNRZ

$$G(f) = \frac{A^2}{R_b} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{R_b}\right) \quad (\text{A3.1})$$

PRZ

$$G(f) = \frac{A^2}{4R_b} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{2R_b}\right) \quad (\text{A3.2})$$

UNRZ

$$G(f) = \frac{A^2}{4R_b} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{R_b}\right) + \frac{A^2}{4} \delta(f) \quad (\text{A3.3})$$

BNRZ

$$G(f) = \frac{A^2}{R_b} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{R_b}\right) \sin^2\left(\frac{\pi f}{R_b}\right) \quad (\text{A3.4})$$

Manchester

$$G(f) = \frac{A^2}{R_b} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{2R_b}\right) \sin^2\left(\frac{\pi f}{2R_b}\right) \quad (\text{A3.5})$$

NRZI

$$G(f) = \frac{A^2}{R_b} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f}{R_b}\right) \quad (\text{A3.6})$$

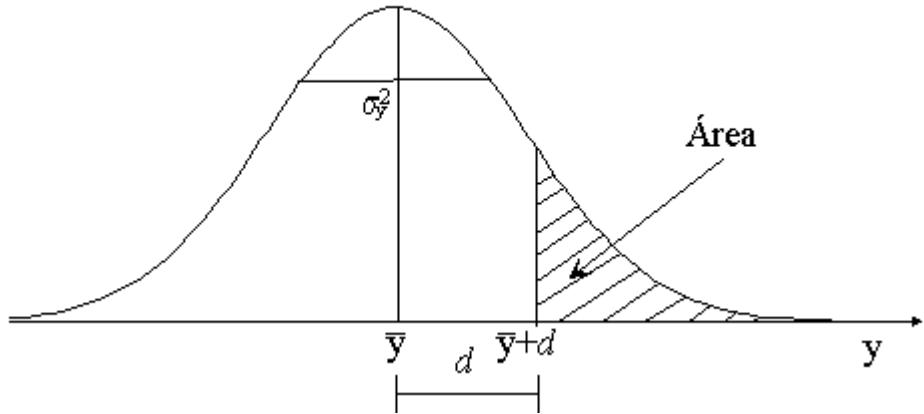
Apêndice 4 – Função complementar de erro

$$\frac{1}{2} \operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu$$

X	1/2 erfc(x)
0	5,000E-01
0,05	4,718E-01
0,1	4,438E-01
0,15	4,160E-01
0,2	3,886E-01
0,25	3,618E-01
0,3	3,357E-01
0,35	3,103E-01
0,4	2,858E-01
0,45	2,623E-01
0,5	2,398E-01
0,55	2,183E-01
0,6	1,981E-01
0,65	1,790E-01
0,7	1,611E-01
0,75	1,444E-01
0,8	1,289E-01
0,85	1,147E-01
0,9	1,015E-01
0,95	8,955E-02
1	7,865E-02
1,05	6,878E-02
1,1	5,990E-02
1,15	5,194E-02
1,2	4,484E-02
1,25	3,855E-02
1,3	3,300E-02
1,35	2,812E-02
1,4	2,386E-02
1,45	2,015E-02
1,5	1,695E-02
1,55	1,419E-02
1,6	1,183E-02
1,65	9,812E-03
1,7	8,105E-03
1,75	6,664E-03
1,8	5,455E-03
1,85	4,444E-03
1,9	3,605E-03
1,95	2,910E-03

X	1/2 erfc(x)
2	2,339E-03
2,05	1,871E-03
2,1	1,490E-03
2,15	1,181E-03
2,2	9,314E-04
2,25	7,314E-04
2,3	5,716E-04
2,35	4,446E-04
2,4	3,443E-04
2,45	2,653E-04
2,5	2,035E-04
2,55	1,553E-04
2,6	1,180E-04
2,65	8,924E-05
2,7	6,717E-05
2,75	5,031E-05
2,8	3,751E-05
2,85	2,783E-05
2,9	2,055E-05
2,95	1,510E-05
3	1,105E-05
3,05	8,040E-06
3,1	5,824E-06
3,15	4,199E-06
3,2	3,013E-06
3,25	2,151E-06
3,3	1,529E-06
3,35	1,081E-06
3,4	7,610E-07
3,45	5,330E-07
3,5	3,715E-07
3,55	2,577E-07
3,6	1,779E-07
3,65	1,222E-07
3,7	8,358E-08
3,75	5,686E-08
3,8	3,850E-08
3,85	2,594E-08
3,9	1,740E-08
3,95	1,161E-08

x	1/2 erfc(x)
4	7,709E-09
4,05	5,094E-09
4,1	3,350E-09
4,15	2,192E-09
4,2	1,428E-09
4,25	9,253E-10
4,3	5,967E-10
4,35	3,830E-10
4,4	2,446E-10
4,45	1,554E-10
4,5	9,831E-11
4,55	6,187E-11
4,6	3,875E-11
4,65	2,415E-11
4,7	1,498E-11
4,75	9,243E-12
4,8	5,676E-12
4,85	3,469E-12
4,9	2,109E-12
4,95	1,277E-12
5	7,687E-13
5,05	4,606E-13
5,1	2,747E-13
5,15	1,630E-13
5,2	9,626E-14
5,25	5,657E-14
5,3	3,308E-14
5,35	1,926E-14
5,4	1,116E-14
5,45	6,439E-15
5,5	3,664E-15
5,55	2,109E-15
5,6	1,166E-15
5,65	6,661E-16
5,7	3,886E-16
5,75	2,220E-16
5,8	1,110E-16
5,85	5,551E-17
5,9	5,551E-17
5,95	0,000E+00



Sabendo que a função $erfc(x)$ está tabelada e é definida por:

$$erfc(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu \quad (\text{A4.1})$$

e sabendo que a área a tracejado é dada por:

$$\text{Área} = \int_{\bar{y}+d}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma_y^2}} dy \quad (\text{A4.2})$$

Fazendo a mudança de variável:

$$\mu = \frac{y - \bar{y}}{\sqrt{2\sigma_y^2}} \quad dy = \sqrt{2\sigma_y^2} d\mu \quad \left. \frac{y - \bar{y}}{\sqrt{2\sigma_y^2}} \right|_{y=\bar{y}+d} = \frac{d}{\sqrt{2\sigma_y^2}}$$

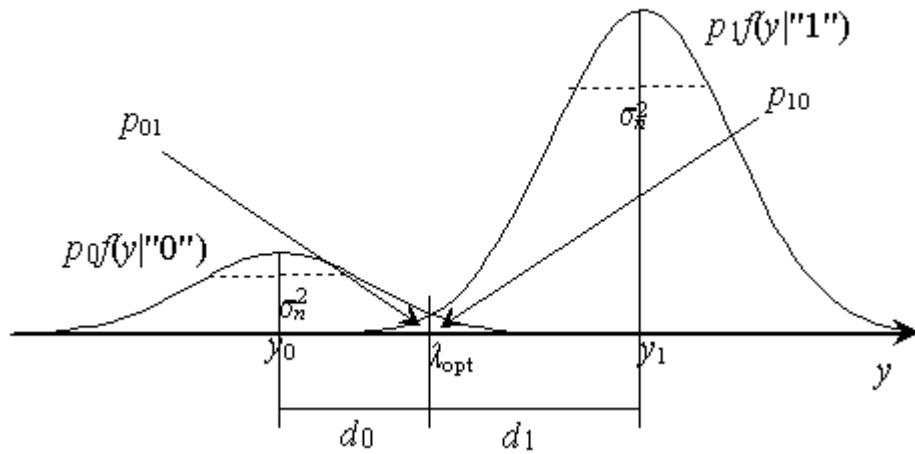
$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_{\frac{d}{\sqrt{2\sigma_y^2}}}^{\infty} \frac{\sqrt{2\sigma_y^2}}{\sqrt{2\pi\sigma_y^2}} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{d}{\sqrt{2\sigma_y^2}}}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu \\ \text{Área} &= \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_y^2}}\right) = \frac{1}{2} erfc(x), \end{aligned} \quad (\text{A4.3})$$

$$x = \sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_y^2}}. \quad (\text{A4.4})$$

$$\text{Nota: } Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\lambda^2/2} d\lambda = \frac{1}{2} erfc\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (\text{A4.5})$$

Apêndice 5 – BER com critério MAP

Numa transmissão binária num canal AWGN em que os símbolos não têm a mesma probabilidade, a distribuição do ruído no instante de amostragem com critério de máximo *a posterior* (MAP) é ilustrado pela figura:



Sendo da figura evidente que:

$$d_1 = |y_1 - \lambda_{opt}| \quad d_0 = |y_0 - \lambda_{opt}|, \quad (\text{A5.1})$$

$$BER = p_1 p_{01} + p_0 p_{10} = \frac{p_1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d_1^2}{2\sigma_n^2}}\right) + \frac{p_0}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d_0^2}{2\sigma_n^2}}\right). \quad (\text{A5.2})$$

O valor ótimo da tensão de comparação, λ_{opt} , é o ponto y intersecção das densidades espaciais de potência do ruído, distribuições normal, com variância idêntica σ_n^2 , pesadas pelas respectivas probabilidades *a priori*:

$$p_1 f(y|1) = p_0 f(y|0) \Rightarrow y = \lambda_{opt}. \quad (\text{A5.3})$$

Desta expressão, após alguma manipulação algébrica, obtém-se:

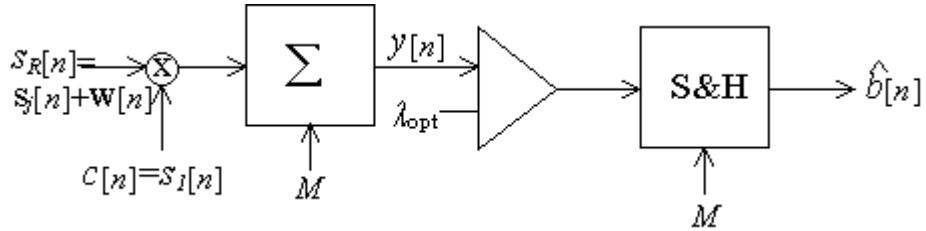
$$\lambda_{opt} = \frac{(y_1 + y_0)}{2} + \frac{\sigma_n^2}{(y_1 - y_0)} \ln\left(\frac{p_0}{p_1}\right). \quad (\text{A5.4})$$

Apêndice 6 – *BER* em sistemas discretos

- 1) Num canal AWGN simulado discretamente, assumindo uma sequência de ruído gaussiano¹¹ $w[n] = Xu[n]$ com potência σ_w^2 e em que $u[n]$ tem média nula e variância unitária, então:

$$\sigma_w^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X^2 u^2[n] = X^2 \Rightarrow X = \sqrt{\sigma_w^2}. \quad (\text{A6.1})$$

- 2) O receptor ótimo discreto, com os símbolos definidos por M pontos, é representado pelo diagrama de blocos seguinte:



- 3) Para um código de linha PNRZ ou UNRZ, $c(t) = s_1(t) = A$ e a potência do ruído σ_n^2 (figura 5.2) após a filtragem é dada por:

$$\sigma_n^2 = \sum_{n=1}^M (Aw[n])^2 = MA^2 \sum_{n=1}^M w^2[n] = E_c \sigma_w^2 = E_b \sigma_w^2. \quad (\text{A6.2})$$

- 4) A potência do ruído após filtragem também é dada por:

$$\sigma_n^2 = E_c \frac{N_o}{2}, \quad \text{pelo que} \quad \sigma_w^2 = \frac{N_o}{2} \quad (\text{A6.3})$$

- 5) *BER* para qualquer código de linha polar.

$$\begin{aligned} y_1 &= E_1 = E_b & y_0 &= -E_b & d &= E_b & \sigma_n^2 &= E_1 \sigma_w^2 = E_b \sigma_w^2 \\ BER &= \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_o}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2\sigma_w^2}}\right) \end{aligned} \quad (\text{A6.4})$$

- 6) *BER* para qualquer código de linha unipolar:

$$\begin{aligned} y_1 &= E_1 = 2E_b & y_0 &= 0 & d &= E_b & \sigma_n^2 &= E_1 \sigma_w^2 = 2E_b \sigma_w^2 \\ BER &= \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_o}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{4\sigma_w^2}}\right) \end{aligned} \quad (\text{A6.5})$$

¹¹ $\sigma_w^2 = \frac{N_0}{2} f_s$. Assume-se uma frequência de amostragem normalizada $f_s = 1$ Hz.

7) BER para código de linha PNRZ e Manchester:

$$y_1 = \sum_{n=1}^M A^2 = MA^2 = E_b \quad y_0 = -E_b \quad d = E_b \quad \sigma_n^2 = E_1 \sigma_w^2 = E_b \sigma_w^2$$

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2\sigma_w^2}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{MA^2}{2\sigma_w^2}}\right) \quad (\text{A6.6})$$

8) *BER* para código de linha UNRZ:

$$y_1 = \sum_{n=1}^M A^2 = MA^2 = 2E_b \quad y_0 = 0 \quad d = E_b \quad \sigma_n^2 = E_1 \sigma_w^2 = 2E_b \sigma_w^2$$

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{4\sigma_w^2}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{MA^2}{8\sigma_w^2}}\right) \quad (\text{A6.7})$$

9) Para uma modulação, $c[n] = s_1[n] = A \cos(2\pi f_c n T_s)$ e a potência do ruído

σ_n^2 (figura 5.2) após a filtragem é dada por:

$$\sigma_n^2 = \sum_{n=1}^M (A \cos(2\pi f_c n T_s) w[n])^2 = \frac{MA^2}{2} \sum_{n=1}^M w^2[n] = E_1 \sigma_w^2 \quad (\text{A6.8})$$

10) BER para modulação PSK:

$$y_1 = \sum_{n=1}^M A^2 \cos^2(2\pi f_c n T_s) = \frac{MA^2}{2} = E_b; \quad y_0 = -E_b; \quad d = E_b; \quad \sigma_n^2 = E_1 \sigma_w^2 = E_b \sigma_w^2$$

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2\sigma_w^2}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{MA^2}{4\sigma_w^2}}\right) \quad (\text{A6.9})$$

11) *BER* para modulação OOK:

$$y_1 = \frac{MA^2}{2} = 2E_b \quad y_0 = 0 \quad d = E_b \quad \sigma_n^2 = E_1 \sigma_w^2 = 2E_b \sigma_w^2$$

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{4\sigma_w^2}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{MA^2}{16\sigma_w^2}}\right) \quad (\text{A6.10})$$

Apêndice 7 – Distribuição de probabilidade binomial

A distribuição binomial de probabilidades é a distribuição do número de *sucessos* em n provas independentes, provas realizadas sempre nas mesmas condições, em que em cada prova só há 2 resultados possíveis: sucesso ou insucesso. Dada a probabilidade, p , de sucesso numa prova, a função binomial é definida por:

$$f(l|n, p) = C_l^n p^l (1-p)^{n-l}, \quad l=0:n \quad (\text{A7.1})$$

C_l^n corresponde ao número de maneiras diferentes, ou combinações, em que podem ocorrer l sucessos em n provas e é definida por:

$$C_l^n = \frac{n!}{(n-l)!l!} \quad (\text{A7.2})$$

p^l corresponde à probabilidade de l provas com sucesso e $(1-p)^{n-l}$ corresponde à probabilidade das restantes $n-l$ provas não terem sucesso.

A média e a variância da distribuição binomial são dadas respetivamente por:

$$\bar{l} = np \quad (\text{A7.3}) \qquad \sigma_l^2 = np(1-p) \quad (\text{A7.4})$$

A probabilidade de não ocorrer qualquer sucesso em n provas vem:

$$f(0|n, p) = (1-p)^n, \quad (\text{A7.5})$$

e a probabilidade de ocorrer apenas 1 sucesso vem:

$$f(1|n, p) = C_1^n p^1 (1-p)^{n-1} = np(1-p)^{n-1}. \quad (\text{A7.6})$$

A probabilidade de acontecerem até r provas com sucesso iguala a soma das respetivas probabilidades e é dada pela função de distribuição:

$$F(r) = f(l \leq r | n, p) = \sum_{l=0}^r f(l|n, p) = \sum_{l=0}^r C_l^n p^l (1-p)^{n-l}. \quad (\text{A7.7})$$

Quando a probabilidade de sucesso da prova, p , é muito pequena, o termo $(1-p)^{n-l} \approx 1$, pelo que a função de probabilidade, desde que $l \neq 0$, simplifica-se para:

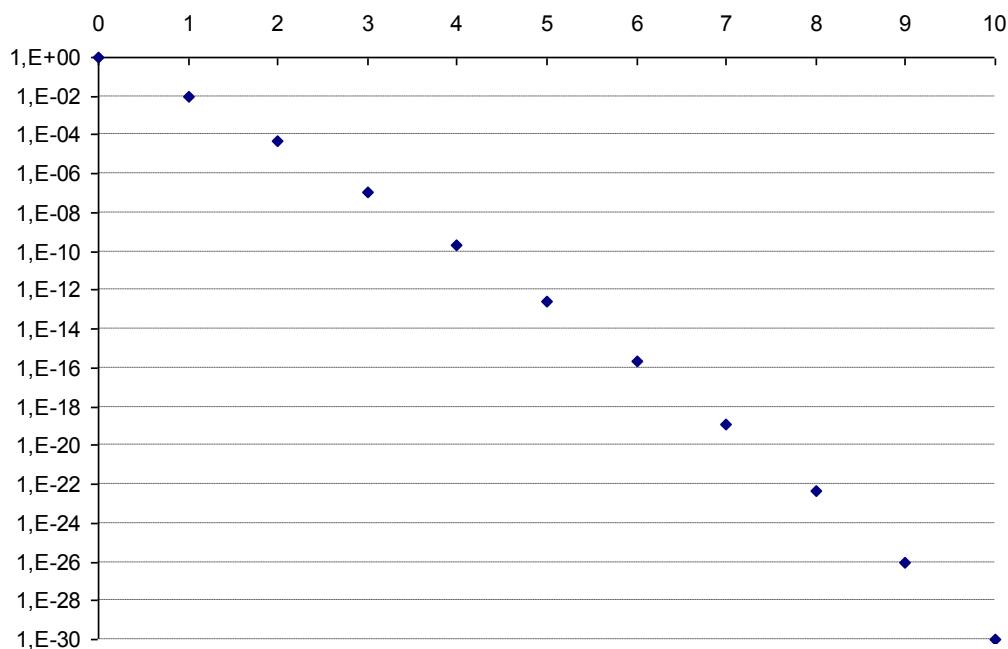
$$f(l|n, p) \approx C_l^n p^l, \quad l=1:n. \quad (\text{A7.8})$$

Quando, para além da probabilidade do sucesso ser pequena, a média $np \ll 1$, a probabilidade de $l+1$ provas com sucesso é muito menor que a probabilidade de l provas com sucesso:

$$C_{l+1}^n p^{l+1} \ll C_l^n p^l, \quad (\text{A7.9})$$

pelo que a probabilidade de sucesso de mais do que r provas é aproximadamente igual à probabilidade de sucesso em r provas (aproximação ao primeiro termo), pelo que:

$$f(l \geq r | n, p) \approx f(l = r | n, p) \approx C_r^n p^r. \quad (\text{A7.10})$$



Exemplo da função de probabilidade binomial com média $np=0,01$.
Probabilidade de sucesso $p=0,001$ e número de provas $n=10$.

Perguntas teóricas

1. (secção 2) Que atributos deve ter em conta num código de linha?
2. Sabendo que na linha telefónica não podem ser transmitidas componentes DC, comente a utilização do código Manchester por exemplo comparando com um PNRZ ou um UNRZ.
3. (secção 3) Como e que efeitos do canal de comunicação limitam a comunicação de sinais digitais?
4. (secção 4) Existe algum compromisso entre a eficiência espectral e a capacidade de sincronismo de símbolo?
5. (secção 4) Quais as vantagens e desvantagens de utilizar, para definição da largura de banda, o critério de primeiro zero espectral ou o critério de Nyquist?
6. (secção 4) Que efeito se evita com um filtro de formatação de pulsos? Como é conseguido?
7. (secção 4) Para que serve o padrão de olho?
8. (secção 5) Quais as causas que leva a haver erros de bit numa transmissão digital? Como podem ser estes erros evitados/minimizados?
9. (secção 5) Diga se são verdadeiras ou falsas, justificando, as seguintes afirmações:
 - a) O aumento do débito de símbolos faz diminuir a *BER*;
 - b) A medida de qualidade de um sistema de comunicação digital é a *SNR*;
 - c) O filtro adaptado de receção é implementado através de um produto interno entre o sinal recebido e uma réplica (a menos de um fator de escala) do sinal transmitido.
 - d) Um código de linha com componente DC tem sempre um pior desempenho (maior *BER*) que o correspondente código sem componente DC. Estude duas situações distintas: 1) mantendo a potência recebida; 2) mantendo a “distância” entre símbolos.

10. (secção 5) Explique o objetivo e o funcionamento do filtro adaptado de receção.
11. (secção 5) Em que limites se situa a probabilidade de erro de bit?
12. (secção 5) Compare os atributos dos códigos PRZ e PNRZ.
13. (secção 6) Quais as vantagens e desvantagens de uma transmissão binária em relação a uma transmissão M -ária?
14. (secção 7) Quando deve utilizar uma modulação em vez de um código de linha?
15. (secção 7) Quais as vantagens e desvantagens de utilizar uma receção não coerente na deteção de modulações digitais?
16. (secção 8) Qual a vantagem e desvantagens da introdução de códigos de controlo de erros numa transmissão digital?
17. (secção 8) Existe algum compromisso entre a razão de um código de correção de erros e a BER após correção?
18. (secção 8) Compare as vantagens e desvantagens entre os códigos de (1 bit) de paridade e de Hamming.
19. (secção 8) Compare as vantagens e desvantagens entre os códigos de correção e de deteção de erros. Existe alguma gama de valores da BER para a qual é preferível utilizar um ou outro método?

Exercícios resolvidos

1. (secção 2) Considere um sinal com débito binário de 10 kbit/s, transmitido em PNRZ com amplitude 4 V.
- Calcule a energia por bit à saída do transmissor;
 - Calcule a potência do sinal transmitido;
 - Qual o tempo que leva a serem transmitidos 10 milhões de bits?

Resolução:

- a) A energia por bit em PNRZ é dada pela equação 2.8, pelo que $E_b = A^2 T_b = 4^2 / 10000 = 1,6 \text{ mJ}$.
- b) A potência do sinal transmitido é obtida da equação 2.5, $S_T = E_b / T_b = A^2 = 16 \text{ W}$.
- c) Se $R_b = 10 \text{ kbit/s}$, 10 Mbit demoram:

$$10 \times 10^6 T_b = \frac{10 \times 10^6}{R_b} = \frac{10 \times 10^6}{10 \times 10^3} = 1000 \text{ s} \quad 16,7 \text{ minutos.}$$

- 2.** (secção 3) Considere um sinal com débito binário de 10 kbit/s, transmitido em PNRZ com potência 16 W, num canal com dimensão 2 km, atenuação de 3,01 dB/km (ver exercício 1) e atraso de propagação de 5 µs/km.
- Calcule a potência do sinal recebido;
 - Calcule a energia por bit à entrada do recetor;
 - Calcule a amplitude do código à entrada do recetor.
 - Calcule o atraso de propagação.
 - Qual o atraso de transmissão de um pacote com 2000 bits?

Resolução:

- i. a) A atenuação em 2 km é (equação 3.3) de $At_{dB/km} = 3,01 \times 2 = 6,02$ dB. Em relação linear a atenuação é obtida da equação 3.1,

$$At = \frac{S_T}{S_R} = 10^{6/10} = 4.$$

- ii. Sendo a potência transmitida de 16 W (exercício 1) a potência recebida resulta,

$$S_R = 16/4 = 4 \text{ W.}$$

- iii. b) A energia recebida por bit corresponde a:

$$E_b = S_R T_b = 4/10000 = 400 \mu\text{J}.$$

- iv. Alternativamente pode-se afetar a energia transmitida (exercício 1) da atenuação, pelo que,

$$E_b = 1,6 \times 10^{-3} / 4 = 400 \mu\text{J}.$$

- v. c) A amplitude do sinal recebido é de:

$$A = \sqrt{S_R} = 2 \text{ V.}$$

- vi. d) O atraso de propagação em 2 km vem:

$$T_p = L \times 5 \times 10^{-6} = 10 \times 10^{-6} \text{ s.}$$

- vii. d) O atraso de transmissão vem:

$$T_t = \frac{N}{R_b} = \frac{2000}{10000} = 0,2 \text{ s,}$$

sendo neste caso o atraso dominante.

- 3.** (secção 4) Considere um sinal com débito binário de 10 kbit/s, transmitido em PNRZ (ver exercícios 1 e 2).
- Calcule a largura de banda utilizando o critério de primeiro zero espectral;
 - Calcule o valor mínimo e máximo da largura de banda utilizando o critério de Nyquist (com filtro de formatação de pulsos);
 - Qual a eficiência espectral?

Resolução:

- a) Pela figura 4.1, o primeiro zero espectral dá-se, para o código PNRZ, em $R_b=10$ kHz, pelo que é este o valor de B_T .
- b) A largura de banda é definida pela equação 4.4, com $\alpha=0$ para o valor mínimo e $\alpha=1$ para o valor máximo:
- $B_T = \frac{R_b}{2}(1+\alpha) = \frac{10000}{2}(1+\alpha) = \begin{cases} 5000 \text{ Hz} & \text{valor mínimo } \alpha = 0 \\ 10000 \text{ Hz} & \text{valor máximo } \alpha = 1 \end{cases}$
- c) A eficiência espectral, para o critério do primeiro zero espectral vem, pela equação 2.6:

$$\rho = R_b/B_T = 1 \text{ bit/s/Hz (não tem unidades).}$$

- Com filtro de formatação de pulsos,

$$\rho = R_b/B_T = \begin{cases} 2 & \text{valor mínimo } \alpha = 0 \\ 1 & \text{valor máximo } \alpha = 1 \end{cases}$$

- Note-se que a largura de banda e consequentemente a eficiência espectral são idênticas para os critérios do primeiro zero espectral e critério de Nyquist com $\alpha=1$.

4. (secção 5) Considere um sinal com débito binário de 10 kbit/s, codificado em PNRZ e recebido com amplitude 2 V, num canal AWGN com densidade espectral de potência de $10 \mu\text{W}/\text{Hz}$. Assuma para a definição da largura de banda o critério de 1º zero espectral. Considere que no receptor o sinal é filtrado com um filtro passa-baixo de ganho unitário (figura 5.3) para cancelar o ruído fora da banda do sinal (ver exercícios 1, 2 e 3).
- Qual a largura de banda do filtro?
 - Calcule a potência do ruído após o filtro.
 - Qual a relação sinal-ruído no canal de comunicação?
 - A seguir ao filtro coloca um comparador (figura 5.3) para detetar qual o bit transmitido. Qual o valor ótimo de λ ?
 - Qual a BER deste sistema?

Resolução:

- i. a) A largura de banda do filtro é o da largura de banda do sinal. Com o critério de primeiro zero espectral, $B_T = R_b = 10 \text{ kHz}$ (exercício 3).
- ii. b) A potência do ruído após este filtro vem, (equação 3.4)
 $\sigma_n^2 = \sigma_c^2 = N_0 B_T = 0,2 \text{ W}.$
- iii. c) A SNR no canal, relação entre a potência do sinal recebido e a potência do ruído na banda do sinal, vem (equação 3.5),
 $SNR_c = S_R / \sigma_c^2$. $S_R = A^2 = 4 \text{ W}$, pelo que $SNR_c = 4/0,2 = 20$ ou 13 dB.
Através de $SNR_c = E_b \rho / N_0$ chega-se ao mesmo resultado.
- iv. d) O valor ótimo de λ vem, pela equação 5.5, equidistante dos valores correspondentes aos símbolos lógicos sem ruído, $\pm A = \pm 2 \text{ V}$, correspondendo, como em qualquer código polar, $\lambda_{opt} = 0 \text{ V}$.
- v. e) Tendo em conta a figura 5.2, utilizando a equação 5.9 com o valor de d determinado pela equação 5.10, $d = 2 \text{ V}$, a BER vem:

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{4}{2 \times 0,2}}\right) = \frac{1}{2} erfc(3,16) \approx 4 \times 10^{-6} \quad (\text{Apêndice 4}).$$

5. (secção 5) Considere uma transmissão binária em PNRZ com um débito binário de 10 kbit/s, em que o sinal recebido tem uma amplitude de 2 V. O sinal é corrompido com ruído branco, gaussiano e aditivo, com densidade espectral de potência de 10 $\mu\text{W}/\text{Hz}$ (ver exercícios 1, 2, 3, 4).

- a) Desenhe o receptor ótimo normado;
- b) Calcule as tensões sem ruído, à saída do filtro adaptado, no instante de amostragem;
- c) Calcule a potência do ruído à saída do filtro adaptado, no instante de amostragem;
- d) Calcule a probabilidade de erro de bit através da equação geral 5.9;
- e) Calcule a relação E_b/N_0 ;
- f) Calcule a probabilidade de erro de bit pela equação 5.36.

Resolução:

- i. a) O receptor ótimo binário corresponde à figura 5.5 (filtro adaptado e deteção MAP, equivalente a MV desde que $p_0=p_1$).
- ii. $\lambda_{opt} = 0$ V (equação 5.5, polar, $y_0=y_1$)
- iii. Pela equação 5.15, $c(t)=ks_1(t)$. (adaptado ao símbolo “1”), que é um sinal constante (PNRZ) com amplitude $c(t)=\sqrt{R_b}$ V=100V, de modo a que $A_{eq}=1$ Hz (filtro normado, equação 5.27).
- iv. b) Sendo um código polar as tensões sem ruído à saída do filtro adaptado normado, no momento de amostragem, são dadas por (equação 5.24): $y_1=+\sqrt{E_b}=A\sqrt{T_b}=20$ mV e $y_0=-\sqrt{E_b}=-20$ mV.
- v. c) A potência do ruído à saída do filtro adaptado é definida pela equação 5.21:

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} A_{eq}.$$

- vi. Com o receptor normado, $A_{eq}=1$ Hz,

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} = 10 \text{ } \mu\text{W}.$$

- vii. d) É válida a figura 5.2, com $d = y_1 - \lambda_{opt} = 20$ mV e, pela equação geral 5.9:

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}}\right) = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{(20 \times 10^{-3})^2}{20 \times 10^{-6}}}\right) = \frac{1}{2} erfc(4,47) \approx 1,3 \times 10^{-10}.$$

- viii. e) A relação sinal-ruído, E_b/N_0 , vem:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{400 \times 10^{-6}}{20 \times 10^{-6}} = 20 \text{ ou } 13 \text{ dB.}$$

- ix. Este valor é igual à SNR_c pois $\rho=1$.

- x. f) Através da equação 5.36, a BER vem:

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = \frac{1}{2} erfc(4,47) \approx 1,3 \times 10^{-10}$$

6. (secção 5) Considere uma transmissão binária em PNRZ com um débito binário de 10 kbit/s, em que o sinal recebido tem uma amplitude de 2 V. O sinal é corrompido com ruído branco, gaussiano e aditivo, com densidade espectral de potência de 10 $\mu\text{W}/\text{Hz}$ (ver exercícios 1, 2, 3, 4, 5).

- Calcule as tensões sem ruído, à saída do filtro adaptado, no instante de amostragem, assumindo que a amplitude do sinal com que se está a fazer o produto interno é de 10 V;
- Calcule a potência do ruído à saída do filtro adaptado;
- Calcule a probabilidade de erro de bit através da equação geral 5.9;
- Compare com os resultados obtidos no exercício anterior.

Resolução:

xi. a) Com $c(t)=10\text{ V}$,

$$y_1 = \int_0^{T_b} c(t)s_1(t)dt = \int_0^{T_b} 10 \times 2 dt = 20T_b = 2 \text{ mV},$$

e, por ser um código polar, $y_0 = -2\text{ mV}$.

xii. b) A área equivalente do ruído vem $A_{eq} = 10^2 T_b = 0,01 \text{ Hz}$, pelo que a potência do ruído vem:

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} A_{eq} = 10 \times 10^{-6} \times 0,01 = 10^{-7} \text{ W}.$$

xiii. c) É ainda válida a figura 5.2, com $d = y_1 - \lambda_{opt} = 2\text{ mV}$ e, pela equação geral 5.9:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{d^2}{2\sigma_n^2}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{(2 \times 10^{-3})^2}{2 \times 10^{-7}}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(4,47) \approx 1,3 \times 10^{-10}.$$

xiv. d) A BER calculada das três maneiras é sempre a mesma, sendo nomeadamente independente da amplitude do vetor de base com que se efetua o produto interno.

7. (secção 5) Considere uma transmissão binária com código NRZI. A amplitude do sinal recebido é de 3 V. O canal de comunicação é AWGN com densidade espectral de potência do ruído de 10^{-6} W/Hz, uma atenuação de 6,02 dB/km e mede 3 km. Pretende-se uma probabilidade de erro de bit de $2,2 \times 10^{-5}$.

- a) Calcule a energia por bit.
- b) Calcule o débito binário.
- c) Suponha o critério do primeiro zero espectral. Qual a relação sinal-ruído no canal de comunicação?
- d) Qual a potência do sinal transmitido?
- e) Qual a amplitude do sinal transmitido?
- f) Qual a energia média por bit à saída do transmissor?

Resolução:

- i. a) Para o código NRZI,

$$BER = erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = 2,2 \times 10^{-5} \Rightarrow \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} = 3,$$

ii. pelo que $E_b = 9 \times N_0 = 9 \times 2 \times 10^{-6} = 18 \text{ } \mu\text{J}$.

iii. b) $R_b = \frac{A^2}{E_b} = \frac{3^2}{18 \times 10^{-6}} = 500 \text{ kbit/s.}$

iv. c) Com o critério do 1º zero espectral $B_T = R_b = 500 \text{ kHz.}$

v. Pela equação 3.5 $SNR_c = \frac{S_R}{N_0 B_T} = \frac{3^2}{2 \times 10^{-6} \times 500 \times 10^3} = 9 \quad (9,54 \text{ dB}).$

vi. d) 6,02 dB de atenuação/km correspondem em relação linear a 4 atenuações/km. Em 3 quilómetros a atenuação é de $4^3 = 64$.

vii. A potência recebida vem $S_R = A^2 = 9 \text{ W.}$

viii. Pela equação 3.1, $S_T = 64 S_R = 576 \text{ W.}$

ix. e) A amplitude no transmissor vem, $A = \sqrt{S_T} = 24 \text{ V}$

x. f) A energia no transmissor vem, $E_b = S_T T_b = \frac{576}{500000} = 1,15 \text{ mJ.}$

8. (secção 6) Uma transmissão digital num canal AWGN passa-baixo de largura de banda 1,5 MHz e densidade espectral de potência do ruído de 10^{-9} W/Hz. O débito binário é de 10 Mbit/s e pretende-se uma probabilidade de erro de bit de 4×10^{-13} .

- Qual o número mínimo de bits por símbolo?
- Qual o valor máximo do fator de *rolloff*?
- Calcule o débito de símbolos;
- Qual a energia mínima por bit do sinal recebido?
- Qual a energia mínima por símbolo?
- Qual a tensão mínima entre símbolos adjacentes?
- Se o método de disposição de bits por símbolo não seguisse um código Gray mas fosse aleatório, qual o aumento da probabilidade de erro de bit?
- Qual a capacidade do canal, assumindo a mesma relação sinal-ruído?

Resolução:

- a) Uma vez que o canal é passa-baixo e assumindo mais do que 1 bit por símbolo, a transmissão tem de ser *M*-ária polar.
- O número de bits por símbolo vem (equação 6.7 com $\alpha=0$):

$$K \geq \frac{R_b}{2B_c} = \frac{10 \times 10^6}{2 \times 1,5 \times 10^6} = 3,3 \text{ bit/símbolo}$$

e sendo o número de bits por símbolo um número inteiro, vira o valor mínimo de $K=4$ bits por símbolo.

- b) O fator de *rolloff* máximo é calculado de modo a não ser ultrapassada a largura de banda B_c do canal de comunicação:

$$\alpha = \frac{2KB_c}{R_b} - 1 = \frac{2 \times 4 \times 1,5 \times 10^6}{10 \times 10^6} - 1 = 0,2$$

- c) O débito de símbolos vem:

$$R_s = \frac{R_b}{K} = \frac{10 \times 10^6}{4} = 2,5 \times 10^6 \text{ símbolos/s (baud).}$$

v. d) A energia por bit do sinal recebido é calculada de:

$$\begin{aligned}
 BER &= \frac{(M-1)}{KM} erfc\left(\sqrt{\frac{3K}{(M^2-1)N_0}} \frac{E_b}{N_0}\right) = \\
 &= \frac{15}{32} \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{12}{255}} \frac{E_b}{N_0}\right) = 0,46875 \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{0,047059} \frac{E_b}{N_0}\right) = 4 \times 10^{-13} \\
 &\frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{0,047059} \frac{E_b}{N_0}\right) = 8,53 \times 10^{-13} \\
 \sqrt{0,047059} \frac{E_b}{N_0} &\approx 5 \\
 0,047059 \frac{E_b}{N_0} &= 25 \\
 \frac{E_b}{N_0} &= 531 \quad (27,25 \text{ dB}) \\
 E_b &= 1,063 \mu J.
 \end{aligned}$$

vi. e) Da equação 6.6, a energia por símbolo corresponde a:

$$E_s = KE_b = 4,25 \mu J$$

vii. f) Da equação 6.4:

$$E_s = \frac{a^2}{4} \frac{(M^2-1)}{3} T_s \quad \text{e} \quad a = \sqrt{\frac{12E_s R_s}{(M^2-1)}} = 0,7 \text{ V.}$$

viii. g) Comparando as equações 6.14 e 6.16, o aumento da probabilidade de erro de bit vem:

$$\frac{K+1}{2} = 2,5$$

ix. ou seja,

$$BER = 2,5 \times 4 \times 10^{-13} = 10^{-12}.$$

x. h) Pela equação 6.23,

$$C = B_c \log_2 \left(1 + \frac{S_R}{\sigma_c^2} \right) = B_c \log_2 \left(1 + \frac{E_b R_b}{N_0 B_c} \right) = 17,6 \text{ Mbit/s.}$$

xi. Este é o máximo débito binário neste canal.

9. (secção 7) Considere uma transmissão em B-FSK, para funcionar sobre banda telefónica (300 Hz a 3300 Hz), com um débito de 300 bit/s. As frequências correspondentes aos dois símbolos são, respetivamente, 1200 Hz e 2400 Hz para os símbolos “0” e “1”. Considere o critério para a largura de banda do 1º zero espectral.

- a) Calcule a largura de banda utilizada;
- b) Calcule a eficiência espectral;
- c) Calcule a frequência da portadora;
- d) Calcule a banda (frequências mínima e máxima) utilizada e verifique se corresponde às especificações do canal;
- e) Dada a banda utilizada, esta modulação pode ser utilizada para armazenamento de informação numa cassette de áudio analógico. Quantos bits se conseguem armazenar numa cassette de 60 minutos?
- f) Se a probabilidade de erro de bit na receção deste sinal for de 10^{-6} , quantos erros espera ter numa cassette de 60 minutos?
- g) Qual a relação E_b/N_o ?
- h) Qual a relação sinal ruído no canal de comunicação?

Resolução:

- i. a) A largura de banda vem, pela equação 7.18,

$$B_T = f_1 - f_0 + 2R_b = 2400 - 1200 + 2 \times 300 = 1800 \text{ Hz}$$

- ii. b) A eficiência espectral é determinada por:

$$\rho = \frac{R_b}{B_T} = \frac{300}{1800} = 0,16(6)$$

- iii. c) A frequência da portadora está a meio entre as frequências dos símbolos (equação 7.16):

$$f_c = \frac{f_1 + f_0}{2} = 1800 \text{ Hz}$$

- iv. d) A banda utilizada vai de:

$$f_c - \frac{B_T}{2} = 900 \text{ Hz} \quad \text{até} \quad f_c + \frac{B_T}{2} = 2700 \text{ Hz}$$

- v. estando dentro das especificações do canal (banda telefónica).

- vi. e) Sendo 300 o número de bits por segundo, numa cassette de 1 hora (ou 3600 segundos) consegue-se armazenar $300 \times 3600 = 1080$ kbit.

- vii. f) É produzido em média 1 erro em cada $1/BER = 10^6$ bits, pelo que em cada 1080 kbit é produzido em média aproximadamente 1 bit errado.

- viii. g) A BER é dada por,

$$BER = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) = 10^{-6},$$

- ix. pelo que,

$$\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}} = 3,35 \Rightarrow \frac{E_b}{N_0} = 22,445 \quad (13,5 \text{ dB}).$$

- x. h) A relação sinal ruído no canal é dada por,

$$SNR_c = \frac{S_R}{\sigma_c^2} = \frac{E_b}{N_0} \frac{R_b}{B_T} = \frac{E_b}{N_0} \rho = 22,45 \times 0,16 = 3,74 \quad (5,7 \text{ dB}).$$

10. (secção 7) Considere uma transmissão digital, com um débito binário de 5 kbit/s, num canal AWGN passa-banda de largura de banda 1300 Hz, densidade espectral do ruído de $1\mu\text{W}/\text{Hz}$ e uma relação sinal-ruído de 25 dB.

- a) Calcule o número mínimo de bits por símbolo.
- b) Calcule o débito de símbolos.
- c) Calcule o máximo valor de α .
- d) Calcule a eficiência espectral.
- e) Calcule a relação E_b/N_0 .
- f) Verifique que a modulação QAM tem um melhor desempenho (melhor BER) que a modulação M -PSK.
- g) Calcule a potência do ruído no canal, na banda do sinal.
- h) Calcule a potência do sinal recebido.
- i) Calcule a energia média por bit.
- j) Desenhe a constelação e respetiva alocação de bits em código Gray e bits independentes em cada vetor de base;
- k) Qual a energia da projeção do símbolo com menor energia?
- l) Calcule a amplitude em cada direção correspondente aos diversos símbolos.
- m) Calcule a energia do símbolo com maior energia.
- n) Desenhe o esquema de blocos do transmissor.
- o) Calcule os valores das amplitudes em PAM para gerar os diversos símbolos.
- p) Calcule a equação do símbolo transmitido correspondente ao símbolo cujos bits são “1 0 1 1”.
- q) Calcule a energia deste símbolo.
- r) Desenhe o esquema de blocos do receptor;
- s) Calcule as tensões sem ruído após os filtros ótimos.
- t) Calcule os valores de decisão e refira quais os correspondentes bits descodificados.

Resolução:

- i. a) Sendo uma modulação passa-banda, tem que ser M -PSK ou QAM. A largura de banda do canal relaciona-se com o número de bits por símbolo através das equações 3.11 e 7.34. Com $\alpha=0$ vem:

$$K \geq \frac{R_b}{B_c} = \frac{5000}{1300} = 3,85 \text{ bit/símbolo}$$

pelo que o número mínimo de bits por símbolo vem $K=4$.

- ii. b) O débito de símbolos vem, pela equação 6.3:

$$R_s = \frac{R_b}{K} = \frac{5000}{4} = 1250 \text{ baud}$$

iii. c) pelo que $\alpha \leq \frac{B_c}{R_s} - 1 = \frac{1300}{1250} - 1 = 0,04$.

- iv. d) A eficiência espectral, dada pela equação 2.6, vem:

$$\rho = \frac{R_b}{B_T} = \frac{5000}{1300} = 3,85$$

- v. e) Pela equação 3.5, e equivalendo 25 dB a 316,23 em relação linear,

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{SNR_c}{\rho} = \frac{316,23}{3,85} = 82,22 \quad (19,15 \text{ dB})$$

- vi. f) A BER em M -PSK é determinada pela equação 7.38,

$$BER = \frac{1}{K} erfc \left(\sqrt{K \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right) \frac{E_b}{N_o}} \right) = \frac{0,5}{2} erfc(3,54) = 1,4 \times 10^{-7}$$

- vii. e a BER em QAM é determinada pela equação 7.44,

$$BER = \frac{2}{K} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) erfc \left(\sqrt{\frac{3K}{2(M-1)} \frac{E_b}{N_0}} \right) = \frac{0,75}{2} erfc(5,73) = 2 \times 10^{-16}$$

- viii. pelo que o desempenho (BER) em QAM, nas mesmas condições de largura de banda, débito binário e energia, é bastante superior.

- ix. g) A potência do ruído na banda vem, pela equação 3.4:

$$\sigma_c^2 = N_0 B_T = 2 \times 10^{-6} \times 1300 = 2,6 \text{ mW}$$

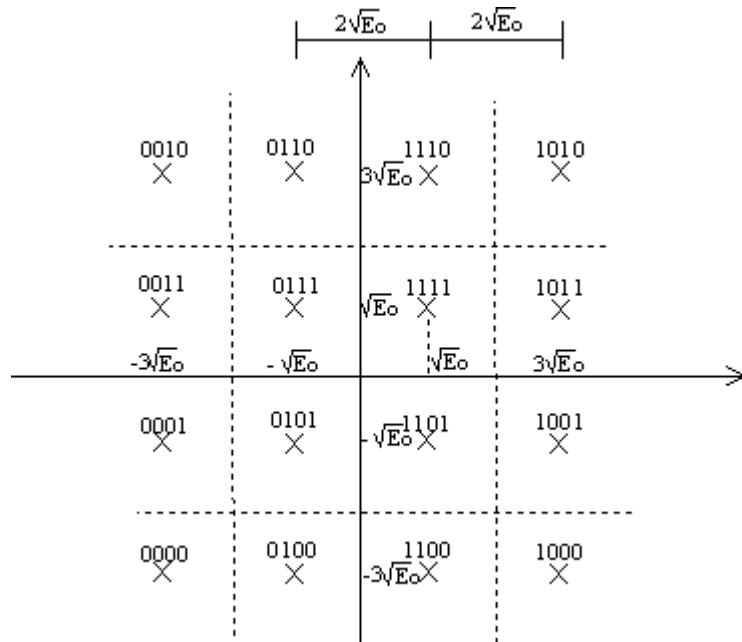
x. h) A potência do sinal recebido vem, pela equação 3.5:

$$S_R = SNR_c \times \sigma_c^2 = 822 \text{ mW}$$

xi. i) A energia por bit do sinal recebido vem, pela equação 2.5:

$$E_b = S_R T_b = 164 \mu\text{J}$$

xii. j) A constelação com alocação de bits assumindo código Gray e bits independentes em cada vetor de base, é:



xiii. k) A energia do símbolo com menor energia em QAM vem, em cada um dos vetores de base (equação 7.41):

$$E_0 = \frac{3KE_b}{2(M-1)} = 65,8 \mu\text{J}$$

xiv. l) A amplitude correspondente à energia mínima vem:

$$\frac{A_{\min}^2}{2} T_s = E_0 \quad \Rightarrow \quad A_{\min} = \sqrt{2E_0 R_s} = 0,4 \text{ V.}$$

xv. O próximo símbolo tem amplitude 1,2 V (0,4+2x0,4). Os outros valores são apresentados na tabela síntese apresentada adiante.

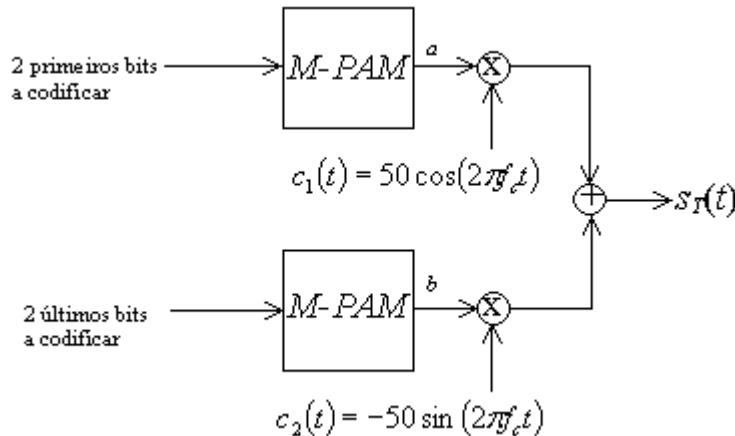
xvi. m) A energia da projeção máxima vem:

$$\frac{A_{\max}^2}{2} T_s = \frac{1,2^2}{2 \times 1250} = 592 \mu\text{J}$$

- xvii. A energia do símbolo com maior energia corresponde ao dobro (2 direções) da energia da projeção máxima:

$$2 \frac{A_{\max}^2}{2} T_s = \frac{1,2^2}{1250} = 1,184 \text{ mJ}$$

- xviii. n) O esquema de blocos do transmissor é o mesmo da figura 7.14 (a).



- xix. $\sqrt{2R_s}$ corresponde à amplitude do vetor de base de modo a que este esteja normado (equação 7.30), $c_k(t) = \sqrt{2R_s} \cos(2\pi f_c t)$:

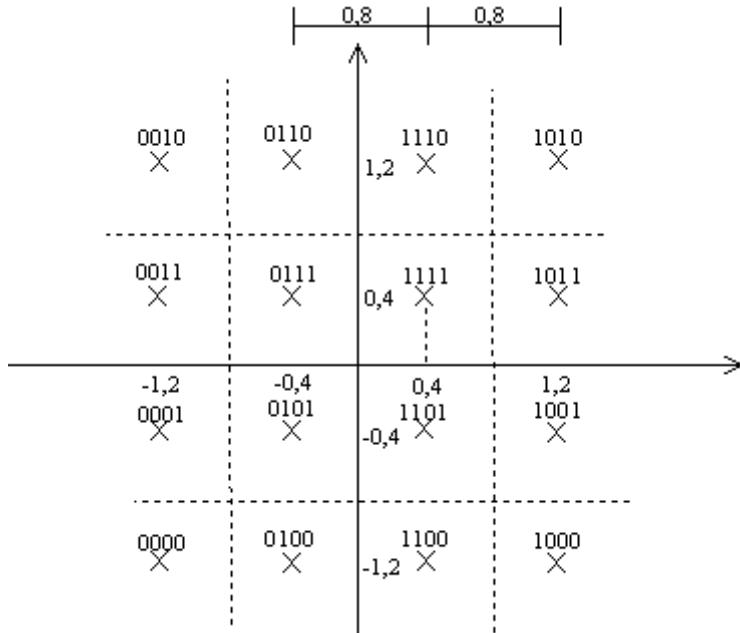
$$c_1(t) = 50 \cos(2\pi f_c t) \quad c_2(t) = -50 \sin(2\pi f_c t).$$

- xx. o) Os valores das amplitudes em PAM no transmissor são dados por $A_n = 50a_n$ para a projeção em *cosseno* e o mesmo raciocínio se aplica para a projeção em *seno*. Assume-se por simplicidade que não existe atenuação no canal de comunicação. Os valores de a e b são apresentados no quadro síntese.

- xxi. Quadro síntese de amplitudes, energias e valores de a e b .

bits a codificar	00	01	11	10
Energia PAM [μJ]	592	65,8	65,8	592
Raiz quadrada da energia PAM [mV]	24,3	8,1	8,1	24,3
Amplitude PAM [V]	-1,2	-0,4	0,4	1,2
a ou b [mV]	-24	-8	8	24

xxii. Apresenta-se seguidamente a constelação desta modulação, em que são apresentados os valores das amplitudes das projeções e não a raiz quadrada da energia. Relembre-se que se assume por simplicidade que não existe atenuação no canal de comunicação.



xxiii. p) O símbolo corresponde à equação 7.32 com a amplitude em cada uma das direções dadas no quadro síntese, pelo que:

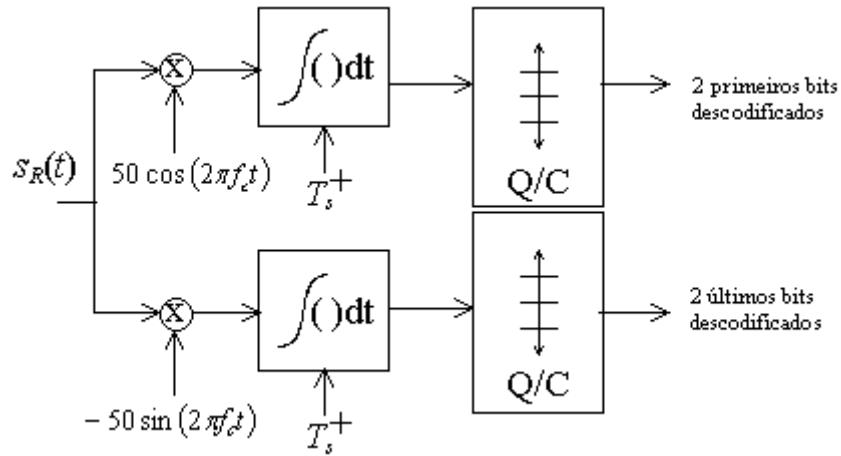
$$s_{1011}(t) = 1,2 \cos(2\pi f_c t) - 0,4 \sin(2\pi f_c t) = \sqrt{1,2^2 + 0,4^2} \cos\left(2\pi f_c t + \arctg\left(\frac{0,4}{1,2}\right)\right)$$

$$s_{1011}(t) = 1,28 \cos(2\pi f_c t + 0,1 \times \pi).$$

xxiv. q) A energia deste símbolo é dada por,

$$\frac{A_{1011}^2}{2} T_s = \frac{1,28^2}{2 \times 1250} = 658 \text{ } \mu\text{J} \text{ ou } 3^2 \times E_0 + E_0 = 10 \times E_0 = 658 \text{ } \mu\text{J}.$$

xxv. r) O esquema de blocos do receptor corresponde ao da figura 7.14 (b).



xxvi. s) A tensão correspondente ao símbolo com menor energia em cada direção, sem ruído e após o filtro ótimo vem:

$$\begin{aligned} \int_0^{T_s} c_1(t) \times A_{\min} \cos(2\pi f_c t) dt &= \int_0^{T_s} \sqrt{2R_s} \sqrt{2E_0 R_s} \cos^2(2\pi f_c t) dt \\ &= \int_0^{T_s} 2R_s \sqrt{E_0} \cos^2(2\pi f_c t) dt = \frac{2R_s T_s \sqrt{E_0}}{2} = \sqrt{E_0} = 8,1 \text{ mV} \end{aligned}$$

xxvii. A tensão correspondente ao símbolo com maior energia em cada direção é 3 vezes maior que o valor anterior:

$$3 \times 8,1 \times 10^{-3} = 24,3 \text{ mV}.$$

xxviii. Para os símbolos simétricos aos referidos anteriormente a tensão correspondente após o filtro ótimo é simétrica (raiz negativa da energia).

xxix. t) Os valores de decisão encontram-se a meio dos valores devido aos símbolos sem ruído. A tabela seguinte mostra todos os valores das tensões sem ruído y_j , dos valores de decisão para cada símbolo e os bits descodificados, válidos para cada um dos vetores de base, correspondentes aos comparadores da figura 7.14 (b).

y_j [mV]	-24,3		-8,1		8,1		24,3
Valores de decisão [mV]		-16,2		0		16,2	
bits descodificados	00		01		11		10

11.(secção 8) Considere uma transmissão digital binária polar, com um débito binário de 10 kbit/s (no canal de comunicação, com ou sem código de correção de erros) com uma relação $E_b/N_0 = 9$. Calcule o tempo médio entre erros de bit nas seguintes condições:

- a) Sem código de correção ou deteção;
- b) Com código de repetição de 3 bits;
- c) Com código de repetição de 5 bits;
- d) Com código de Hamming H(7,4);
- e) Compare os resultados anteriores.

Resolução:

- i. A BER desta transmissão (polar) é determinada por:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} (\sqrt{9}) \approx 10^{-5}$$

- ii. a) Sem códigos de correção de erros, o tempo médio entre erros (equação 8.9) vem:

$$T_e = \frac{1}{R_b BER} = \frac{1}{10^4 10^{-5}} = 10 \text{ s}$$

- iii. b) Para um código (de correção) de repetição de 3 bits, a probabilidade de erro de bit (equação 8.21) após correção vem:

$$BER' = C_{\frac{n+1}{2}}^{n+1} BER^{\frac{n+1}{2}} = C_2^3 BER^2 = 3 \times 10^{-10}.$$

- iv. A razão do código e o débito binário dos bits da informação virão:

$$R_c = \frac{k}{n} = \frac{1}{3} = 0,33 \quad R_b' = \frac{kR_b}{n} = \frac{1}{3} 10^4 = 3,33 \text{ kbit/s.}$$

- v. O tempo entre erros vem (equação 8.9):

$$T_e' = \frac{1}{R_b' BER'} = \frac{1}{3,33 \times 10^3 3 \times 10^{-10}} = 10^6 \text{ s} \quad (11,6 \text{ dias}).$$

- vi. c) Para um código de correção de repetição de 5 bits, a probabilidade de erro de bit após correção vem:

$$BER' = C_{\frac{n+1}{2}}^{n+1} BER^{\frac{n+1}{2}} = C_3^5 BER^3 = 10 \times 10^{-15}$$

vii. A razão do código e o débito binário dos bits da informação virão:

$$R_c = \frac{k}{n} = \frac{1}{5} = 0,2 \quad R_b' = \frac{kR_b}{n} = \frac{1}{5} 10^4 = 2 \text{ kbit/s.}$$

viii. O tempo entre erros vem:

$$T_e' = \frac{1}{R_b' BER'} = \frac{1}{2 \times 10^3 10^{-14}} = 5 \times 10^{10} \text{ s} \quad (15,9 \text{ séculos}).$$

ix. d) Para um código de Hamming H(7,4), a probabilidade de erro de bit após correção vem:

$$BER' = 9BER^2 = 9 \times 10^{-10}$$

x. A razão do código (equação 8.1) e o débito binário dos bits de informação (equação 8.2) virão:

$$R_c = \frac{k}{n} = \frac{4}{7} = 0,57 \quad R_b' = \frac{kR_b}{n} = \frac{4}{7} 10^4 = 5,71 \times 10^3 \text{ bit/s,}$$

xi. e o tempo entre erros após correção vem:

$$T_e' = \frac{1}{R_b' BER'} = \frac{1}{5,71 \times 10^3 \times 9 \times 10^{-10}} = 1,94 \times 10^5 \text{ s} \quad (54 \text{ horas})$$

xii. e) A diminuição da razão do código, devido ao aumento do número de bits de paridade introduzidos, faz diminuir o número de erros e portanto aumenta o tempo médio entre erros. No entanto o débito binário dos bits da informação também diminui, sendo necessário mais tempo para transmitir a mesma informação.

	Razão do código	Débito dos bits da informação [kbit/s]	BER'	T_e [s]
Sem código	1	10	10^{-5}	10
H(7,4)	0,57	5,71	9×10^{-10}	$1,94 \times 10^5$
R3	0,33	3,33	3×10^{-10}	10^6
R5	0,2	2	10×10^{-15}	5×10^{10}

Tabela síntese dos resultados.

12.(secção 8) Considere uma transmissão digital binária polar, com um débito binário de 10 kbit/s e uma relação $E_b/N_0 = 9$. Calcule o tempo médio entre erros de bit nas seguintes condições:

- Sem código de correção ou deteção;
- Com código de Hamming H(7,4) mas mantendo o débito binário dos bits de informação;
- Compare o resultado anterior com o resultado obtido mantendo o débito binário no canal (problema anterior);
- Qual a variação de amplitude do sinal que deve produzir de modo a que o tempo médio entre erros mantendo o débito binário dos bits de informação seja o mesmo que mantendo o débito binário no canal (problema anterior).

Resolução:

- A BER desta transmissão é dada por:

$$BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} (\sqrt{9}) \approx 10^{-5}$$

- Sem códigos de correção ou deteção o tempo médio entre erros (equação 8.9) vem:

$$T_e = \frac{1}{R_b BER} = \frac{1}{10^4 10^{-5}} = 10 \text{ s}$$

- A razão do código, R_c , e débito binário no canal, virão:

$$R_c = \frac{k}{n} = \frac{4}{7} = 0,57 \quad R_b = \frac{n R_b'}{k} = \frac{7 \times 10^4}{4} = 17,5 \text{ kbit/s}$$

- A variação do débito binário muda o tempo de bit, que vem agora (equação 8.2) $T_b = \frac{4}{7} T_b'$, o que muda da mesma proporção a energia de bit. A nova relação sinal-ruído vem $\frac{E_b}{N_o} = \frac{4}{7} \frac{E_b}{N_o} (\text{anterior}) = 5,14$ e a nova BER vem:

$$BER = \frac{1}{2} erfc(\sqrt{5,14}) = 67 \times 10^{-5}$$

- v. Para um código H(7,4), a probabilidade de erro de bit após correção vem:

$$BER' = 9BER^2 = 9 \times (67 \times 10^{-5})^2 = 4 \times 10^{-6}$$

- vi. E o tempo entre erros de bit após correção vem:

$$T'_e = \frac{1}{R_b BER'} = \frac{1}{10^4 \times 4 \times 10^{-6}} = 25 \text{ s}$$

- vii. c) Comparando o resultado anterior com o resultado obtido no problema 7 alínea b), verifica-se que se aumenta o débito binário dos bits da informação mas aumenta-se a probabilidade de erro de bit e, consequentemente, diminui-se o tempo entre erros.
- viii. d) Para manter o tempo entre erros é preciso manter a BER e consequentemente manter a energia média por bit, pelo que a potência do sinal com um binário no canal maior (mesmo débito binário dos bits da informação) deve compensar a diminuição do tempo de bit de R_c . Consequentemente a potência do sinal deve aumentar da mesma quantidade. Como a potência é proporcional ao quadrado da amplitude, então o aumento da amplitude vem:

$$\frac{A_{novo}}{A_{anterior}} = \sqrt{\frac{1}{R_c}} = 1,32$$

- ix. A BER é a mesma que na alínea b) do exercício anterior mas com débito binário dos bits da informação de 10 kbit/s, pelo que o tempo médio entre erros vem:

$$T'_e = \frac{1}{R_b BER'} = \frac{1}{10^4 \times 9 \times 10^{-10}} = 1,1 \times 10^5 \text{ s}$$

	Razão do código	$\frac{A_{novo}}{A_{anterior}}$	Débito binário dos bits da informação [kbit/s]	BER'	T_e [s]
Sem código	1	1	10	10^{-5}	10
H(7,4)	0,57	1	10	4×10^{-6}	25
H(7,4)	0,57	1,32	10	9×10^{-10}	$1,1 \times 10^5$
H(7,4)	0,57	1	5,71	9×10^{-10}	$1,94 \times 10^5$

Tabela síntese dos resultados.

13.(secção 8) Considere um código de Hamming H(7,4) gerado através de uma matriz geradora (equação 8.38)

- Qual o código para os bits de informação (1 0 0 1);
- Verifique a situação de uma transmissão sem erros;
- Considere um padrão de erro $E = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$. Qual os bits recebidos?
- Verifique a situação de erro e a sua posição.

Resolução:

- O código é calculado através da equação 8.29:

$$c = mG = [1 \ 0 \ 0 \ 1] \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$$

- Os primeiros 4 bits do código são a cópia dos bits de informação (matriz identidade).
- p4 é determinado pelo produto do vetor dos bits de informação com a primeira coluna da matriz P , $p4 = 1x1 + 0x1 + 0x1 + 1x0 = 1$.
- $p2 = 1x1 + 0x1 + 0x0 + 1x1 = 0$.
- $p1 = 1x1 + 0x0 + 0x1 + 1x1 = 0$.
- b) Não existem erros se a síndrome (equação 8.32) for 0. Por exemplo, pela equação 8.39, o 3º bit da síndrome é determinado pelo produto do vetor do código com a terceira coluna da matriz H^T :

$$1x1 + 0x0 + 0x1 + 1x1 + 1x0 + 0x0 + 0x1 = 0.$$

$$S = cH^T = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0] \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [0 \ 0 \ 0]$$

- Os bits recebidos são a soma do código com o padrão de erro:

$$E+c = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0] + [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0]$$

viii.d) Existe erro se a síndrome for diferente de 0.

ix. O primeiro ponto da síndrome é determinado pelo produto dos bits recebidos pela 1^a linha da matriz de verificação de paridade,

$$1x1+1x1+0x1+1x0+1x1+0x0+0x0 = 1$$

x. Segundo bit da síndrome

$$1x1+1x1+0x0+1x1+1x0+0x1+0x0 = 1$$

xi. Terceiro bit da síndrome

$$1x1+1x0+0x1+1x1+1x0+0x0+0x1 = 0$$

$$S = (E + c)H^T = [1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0] \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} = [1 \ 1 \ 0]$$

xii. A síndrome corresponde à segunda linha da matriz de verificação de paridade, pelo que o bit errado é o 2º a contar da esquerda, o que está conforme o padrão de erro.

xiii. A mesma síndrome é obtida fazendo a verificação de paridade apenas com o padrão de erro (equação 8.33).

xiv. O primeiro ponto da síndrome é o produto dos bits recebidos pela 1^a linha da matriz de verificação de paridade,

$$0x1+1x1+0x1+0x0+0x1+0x0+0x0 = 1$$

xv. Segundo bit da síndrome

$$0x1+1x1+0x0+0x1+0x0+0x1+0x0 = 1$$

xvi. Terceiro bit da síndrome

$$0x1+1x0+0x1+0x1+0x0+0x0+0x1 = 0$$

$$S = EH^T = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array} = [1 \ 1 \ 0]$$

14.(secção 8) Considere um código cíclico com polinómio gerador do código de H(7,4), equação 8.45, $g(x)=x^3+x^1+1$ (“1 0 1 1”).

- Calcule os bits transmitidos $T(x)=m(x)x^{n-k}+r(x)$ para os bits de informação “0 1 0 1” ($m_5\ m_7\ m_6\ m_3$);
- Qual a dimensão máxima da rajada sempre detetada?
- Qual a relação de rajadas não detetadas?
- Verifique a situação de uma transmissão sem erros;
- Considere um padrão de erro $E(x)=x^4$ (“0 0 1 0 0 0 0”). Qual os bits recebidos?
- Verifique a situação de erro.

Resolução:

- a) Com 4 bits de informação $k=4$ e o grau máximo de $m(x)$ é $k-1=3$. O grau de $g(x)$ é 3, pelo que o resto da divisão terá $n-k=3$ bits. Conclui-se que $n=7$, correspondendo a um código (7,4).
- $m(x)=x^2+1$ (“0 1 0 1”), $m(x)x^{n-k}=m(x)x^3=x^5+x^3$ (“0 1 0 1 0 0 0”).
- $r(x)$ e $q(x)$ são calculados de:

$$\begin{array}{r}
 m(x)x^{n-k} = 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 - 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 \hline
 1 \ 0 \ 1 \ 0 \\
 - 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\
 \hline
 0 \ 0 \ 1 \ 0 \\
 - 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 \hline
 0 \ 1 \ 0 \ 0 \\
 - 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\
 \hline
 \mathbf{1} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \\
 p4 \quad p2 \quad p1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 g(x) = 1 \ 0 \ 1 \ 1 \\
 q(x) = 0 \ 1 \ 0 \ 0
 \end{array}
 = R(x)$$

- Pelo que $T(x)=m(x)x^{n-k}+r(x)$ vem $x^5+x^3+x^2$ (“0 1 0 1 1 0 0”) ($m_5\ m_7\ m_6\ m_3\ p_4\ p_2\ p_1$)
- b) A dimensão máxima da rajada sempre detetável é 3, igual ao grau do polinómio gerador. Esta situação está conforme o código de Hamming, pois embora a distância mínima de Hamming deste código seja 3, não existem 3 bits consecutivos trocados entre palavras de código na sequência ($m_5\ m_7\ m_6\ m_3\ p_4\ p_2\ p_1$).
- c) Pela equação 8.47, $BFER=0,125$.

vii. d) No receptor, calcula-se o resto de $T(x)/g(x)$ e, caso este seja igual a 0, não houve erros na transmissão.

$$\begin{array}{r}
 T(x) = 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\
 - \quad \underline{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\
 \hline
 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\
 - \quad \underline{1 \quad 0 \quad 1 \quad 1} \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 - \quad \underline{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\
 \hline
 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 - \quad \underline{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\
 \hline
 \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}
 \end{array}
 \quad
 \left| \begin{array}{l} g(x) = 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ q(x) = 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \end{array} \right.$$

viii. e) $T(x)+E(x)$ serão os bits recebidos.

$$\begin{array}{r}
 T(x) = 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\
 E(x) = 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 \hline
 T(x) + E(x) = 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0
 \end{array}
 \quad \oplus$$

$$T(x)+E(x)=x^5+x^4+x^3+x^2 \text{ ("0 1 1 1 1 0 0")}, \text{ bit } m6 \text{ errado.}$$

ix. f) Verifica-se se $(T(x)+E(x))/g(x) \neq 0$, detetando erros:

$$\begin{array}{r}
 T(x)+E(x) = 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\
 - \quad \underline{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\
 \hline
 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\
 - \quad \underline{1 \quad 0 \quad 1 \quad 1} \\
 \hline
 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 - \quad \underline{1 \quad 0 \quad 1 \quad 1} \\
 \hline
 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\
 - \quad \underline{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\
 \hline
 \mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0} \\
 p4 \quad p2 \quad p1
 \end{array}
 \quad
 \left| \begin{array}{l} g(x) = 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ q(x) = 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \end{array} \right.$$

x. Pela equação 8.44, o resto de $(T(x)+E(x))/g(x)$ é igual ao resto de $E(x)/g(x)$. Também o quociente de $(T(x)+E(x))/g(x)$ é igual à soma dos quocientes de $T(x)/g(x)$ e $E(x)/g(x)$.

$$\begin{array}{r}
 E(x) = 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 - \quad \underline{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\
 \hline
 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \\
 - \quad \underline{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\
 \hline
 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\
 - \quad \underline{1 \quad 0 \quad 1 \quad 1} \\
 \hline
 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\
 - \quad \underline{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \\
 \hline
 \mathbf{1} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{0}
 \end{array}
 \quad
 \left| \begin{array}{l} g(x) = 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \\ q(x) = 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \end{array} \right.$$

15.(secção 8) Em relação ao código Hamming H(7,4).

- Qual o polinómio gerador correspondente?
- A partir do polinómio gerador obtido na alínea anterior, recalcule a matriz geradora.

Resolução:

- a) Este código, sendo H(7,4), tem $k=4$ e $n=7$.
- Relembre-se que, para manter a estrutura cíclica, $g(x)$ tem que ser um fator de $x^n - 1 = x^7 + 1$ e,

$$x^7 + 1 = (x + 1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1).$$

- Como a ordem do polinómio gerador tem que ser $n-k=3$, duas hipóteses são possíveis:

$$g(x) = x^3 + x + 1 \quad \text{ou} \quad g(x) = x^3 + x^2 + 1$$

- b) A linha $k=4$ (última linha) da matriz G é igual aos coeficientes de $g(x)$, pois este corresponde à palavra de código com apenas o bit de informação na coluna k ao nível lógico “1” e com zeros à esquerda. Considerando a primeira situação para $g(x)$:

$$g(x) = x^3 + x + 1 \Rightarrow \text{linha 4 de } G = 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1$$

- Pelo que se obtém, para a matriz geradora com a matriz identidade e linha 4 completa:

$$G = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

- Para se obter a linha 3 de G roda-se a linha 4 para a esquerda (estrutura cíclica): linha 4 de G rodada = 0 0 1 0 1 1 0
- Como a coluna $k=4$ tem valor 0 mantém-se a estrutura da matriz identidade e esta linha corresponde à linha 3. Obtém-se então para a matriz geradora com a matriz identidade e linhas 3 e 4 completas:

$$G = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & \end{array} \right]$$

viii. Para se obter a linha 2 de G roda-se a linha 3 para a esquerda:

$$\text{linha 3 de } G \text{ rodada} = 0101100$$

ix. Como a coluna 4 tem valor 1, soma-se em módulo-2 a linha 4:

$$\begin{array}{rcl} \text{linha 3 de } G \text{ rodada} & 0101100 \\ \text{linha 4 de } G & + 0001011 \\ \hline \text{linha 2} & 010\mathbf{0}111 \end{array}$$

x. Pelo que se obtém, para a matriz geradora com a matriz identidade e linhas 2, 3 e 4 completas:

$$G = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

xi. Para se obter a linha 1 de G roda-se a linha 2 para a esquerda:

$$\text{linha 2 de } G \text{ rodada} = 1001110$$

xii. Como a coluna 4 tem valor 1, soma-se em módulo-2 a linha 4:

$$\begin{array}{rcl} \text{linha 2 de } G \text{ rodada} & 1001110 \\ \text{linha 4 de } G & + 0001011 \\ \hline \text{linha 1} & 100\mathbf{0}101 \end{array}$$

xiii. Pelo que se obtém, para a matriz geradora:

$$G = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

xiv. Comparando a matriz de paridades P da matriz geradora agora obtida com a matriz da equação 8.38, verifica-se que a linha 3 (m_5) da matriz da equação 8.38 corresponde agora à linha 1, a linha 1 (m_7) corresponde agora à linha 2 e a linha 2 (m_6) corresponde agora à linha 3, pelo que a ordem dos bits de informação terá que vir, $m = [m_5 \ m_7 \ m_6 \ m_3]$. Esta é também a ordem quando se utiliza o polinómio gerador $g(x) = x^3 + x^1 + 1$, conforme equação 8.45.

16.(secção 8) Calcule o *checksum* do código IP *checksum* tendo como bits de informação a sequência 100EF3459ABC A892 (em hexadecimal) com sub-blocos de 4 dígitos (16 bits). Verifique a soma do conjunto dos sub-blocos, em sequência e aos pares.

Resolução:

- xv. Divide-se a sequência a codificar em subconjuntos de 4 dígitos hexadecimais, resultando nos números 100E, F345, 9ABC e A892.
- xvi. A adição destes números é: $100E+F345+9ABC+A892=246A1$
- xvii. A adição em *complemento para um* requer que se adicione o último arrasto (2) à soma sem esse arrasto: $46A1+2=46A3$.
- xviii. Somando 2 a 2 em sequência, obtém-se o mesmo resultado:

$$\begin{array}{ll} 100E+F345=10353 & 0353+1=0354 \\ 0354+9ABC=9E10 & 9E10 \\ 9E10+A892=146A2 & 46A2+1=46A3 \end{array}$$

- xix. Adicionando aos pares com soma final obtém-se o mesmo resultado:

$$\begin{array}{ll} 100E+F345=10353 & 0355+1=0354 \\ 9ABC+A892=1434E & 434E+1=434F \\ 0354+434F=46A3 & 46A3 \end{array}$$

- xx. O *complemento para um* de 46A3 é FFFF–46A3=B95C.

- xxi. É transmitida a informação inicial mais o código *checksum*:

100EF3459ABC A892 B95C.

- xxii. O receptor repete este procedimento incluindo o código *checksum*:

$$100E+F345+9ABC+A892+B95C=2FFFD;$$

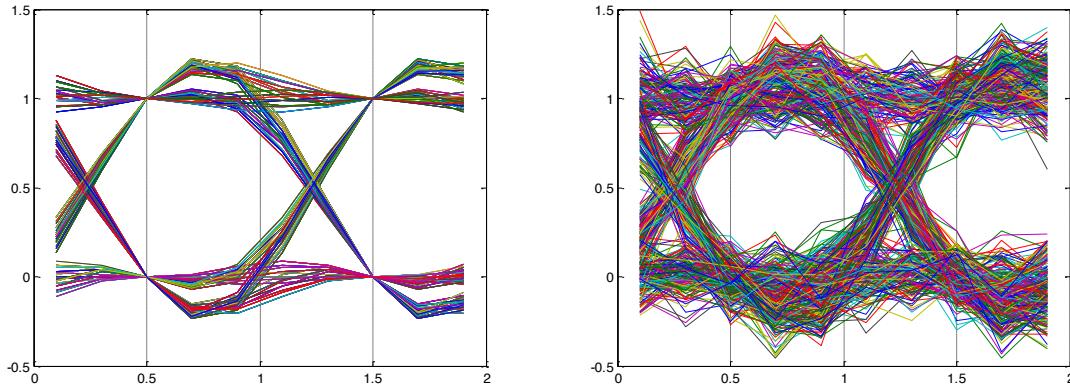
- xxiii. Adicionando o arrasto (2) dará $2FFFD+2=FFFF$

- xxiv. Este valor é sempre FFFF (todos os bits a 1), cujo *complemento para um* é 0000, indicando que não existem erros. Qualquer outro valor indicaria que foram cometidos erros no canal de comunicação e os dados deveriam ser retransmitidos.

Exercícios propostos

-
1. (secção 2) Considere uma transmissão digital com código BNRZ. Diga em que sequências se conseguem detetar erros na transmissão e comente.
- a) + 0 0 + b) + 0 - + c) + 0 --
-
2. (secção 2) Considere uma transmissão em NRZI.
- a) Transmite os bits com os níveis lógicos “0 1 0 1 1 0 0 1”. A polaridade do último símbolo transmitido antes desta sequência é negativa ($a[-1]=0$). Qual a polaridade dos símbolos transmitidos?
 - b) Recebe os símbolos com polaridade + - - + + - + - e a polaridade do último símbolo transmitido é negativa ($a[-1]=0$). Qual os níveis lógicos dos bits transmitidos?
-
3. (secção 3) Considere um canal de fibra ótica, de comprimento 275 km (Distância entre Lisboa e Porto), utilizado no comprimento de onda 1550 nm (características na tabela 3.1).
- a) Calcule o atraso de propagação.
 - b) Se a transmissão fosse feita por satélite, quantas vezes mais demoraria o sinal a propagar-se?
 - c) Se o sinal for transmitido a um débito de 50 Mbit/s em pacotes de 2000 bits, qual o tempo de transmissão de cada pacote?
 - d) Supondo que os equipamentos utilizados originam um atraso de 60 μ s, qual o atraso total?
 - e) Numa conversa telefónica, qual o tempo mínimo entre uma eventual pergunta de um dos oradores e a correspondente resposta?
 - f) Qual a atenuação?

4. (secção 4) As figuras abaixo representam o padrão de olho, com varrimento de 2 bits, da transmissão de um código de linha.



Numa das figuras o canal tem ruído e noutro não.
Diga, justificando,

- Que tipo de código é representado?
- Existe interferência intersimbólica?
- Está à espera de muitos erros nesta transmissão?

5. (secção 5) Considere uma transmissão digital binária em PNRZ, num canal com largura de banda 1 GHz e em que o ruído tem uma densidade espectral de potência de 10^{-9} W/Hz. A probabilidade de erro de bit deve ser inferior a $7,7 \times 10^{-9}$.

- Qual o débito binário com critério de primeiro zero espectral?
- Qual a energia por bit?
- Qual a amplitude do sinal transmitido?

6. (secção 5) Considere uma transmissão binária em PNRZ com um débito binário de 10 kbit/s e com tensões de ± 3 V. O sinal é transmitido num canal AWGN com densidade espectral de potência de $100 \mu\text{W}/\text{Hz}$.

- Calcule as tensões sem ruído e a potência do ruído após o filtro adaptado;
- Desenhe o diagrama de blocos receptor ótimo normado;
- Determine o valor da *BER* deste sistema;
- Considere que a amplitude do sinal de base do produto interno é de 10 V; Calcule as tensões sem ruído e a potência do ruído após o filtro adaptado e determine o valor da *BER*.

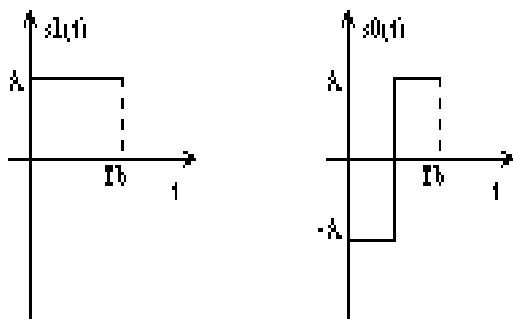
7. (secção 5) Considere uma transmissão digital binária UNRZ, com débito binário de 24 kbit/s. A amplitude do símbolo “1” é de 2 V. O canal é AWGN (ruído branco, gaussiano e aditivo) com densidade espectral de potência de $1\mu\text{W}/\text{Hz}$.

- Calcule as tensões sem ruído à saída do filtro adaptado do receptor ótimo normado, para cada símbolo, bem como a potência do ruído;
- Desenhe o diagrama de blocos do receptor ótimo;
- Calcule a BER .

8. (secção 5) Considere uma transmissão binária num canal com uma largura de banda de 3300 Hz (banda telefónica). O canal é AWGN com densidade espectral de potência de $200 \mu\text{W}/\text{Hz}$. O código de linha usado é Manchester, mas as amplitudes recebidas são 2 V para o símbolo “0” e 3 V para o símbolo “1”.

- Determine o máximo valor do débito binário se o filtro de formatação de pulsos tiver um fator de *rolloff* de 0,5;
- Desenhe o diagrama de blocos de um receptor ótimo adaptado ao símbolo “1”, normado (Considere R_b da alínea anterior);
- Calcule as tensões correspondentes aos dois símbolos lógicos após o filtro adaptado;
- Calcule a BER desta transmissão;
- Em média, em quanto tempo é cometido um erro de bit?

9. (secção 5) Considere uma transmissão binária com os símbolos:



E em que o canal tem uma densidade espectral de potência $G_W(f) = N_0/2 \text{ W/Hz}$.

- Qual a energia média por bit (função de A e T_b)?

- b) Desenhe o recetor ótimo normado adaptado ao símbolo “1”;
- c) Calcule, função de E_b , as tensões y_1 e y_0 , correspondentes ao símbolo “1” e “0” sem ruído, no momento de amostragem;
- d) Qual o valor da BER (função E_b , e N_0)?
- e) Se o símbolo “0” fosse representado por $S_0(t)=0$ V (unipolar) e não alterasse o valor de A, a BER seria alterada? Ganharia alguma coisa com esta mudança?

10. (secção 6) Considere uma transmissão digital, com débito binário de 40 kbit/s. A largura de banda do canal é de 10 kHz, e o filtro de formatação de pulsos tem um fator de *rolloff* de 0,2. O sinal transmitido é PAM, sendo a diferença entre símbolos adjacentes de 1 V. O canal é do tipo AWGN, com densidade espectral de potência de 10^{-6} W/Hz.

- a) Calcule o máximo débito de símbolos;
- b) Desenhe o recetor ótimo com filtro adaptado normado;
- c) Calcule a potência do ruído à saída do filtro;
- d) Calcule as tensões à saída do filtro adaptado para distinguir as diversas hipóteses;
- e) Calcule a probabilidade de erro de bit.

11. (secção 7) Considere uma modulação PSK binária com um débito binário de 2400 bit/s, em que a portadora tem uma amplitude de 1 V e frequência de 1 MHz.

- a) Calcule a energia por bit;
- b) Calcule o valor mínimo e máximo da largura de banda;
- c) Desenhe o recetor com filtro adaptado em que o vetor de base é um sinal com amplitude de 10 V;
- d) Calcule as tensões sem ruído, à saída do filtro adaptado;
- e) Suponha que o canal de comunicação é do tipo AWGN, com densidade espectral de potência de $10 \mu\text{W}/\text{Hz}$. Calcule a potência do ruído após o filtro adaptado;
- f) Calcule a probabilidade de erro de bit.

12. (secção 7) Numa transmissão digital em OOK, o sinal no recetor tem uma amplitude de 2 V. O canal tem uma densidade espectral de potência de $0,5 \mu\text{W}/\text{Hz}$.

- a) Calcule a potência recebida;

- b) Qual o débito binário para obter uma BER de $7,709 \times 10^{-9}$?
- c) Qual a largura de banda com um fator de *rolloff* de 0,5?
- d) Desenhe o diagrama de blocos do recetor ótimo normado;

13. (secção 7) Considere uma transmissão ASK, em que as amplitudes no recetor são respetivamente de 3 V para o símbolo “0” e 5 V para o símbolo “1”. O fator de *rolloff* é de 0,2. O canal de comunicação é AWGN com banda entre os 10 kHz e os 20 kHz e com uma densidade espectral de potência do ruído de 5 $\mu\text{W}/\text{Hz}$.

- a) Calcule a frequência da portadora e o débito binário máximo;
- b) Calcule a potência do sinal recebido;
- c) Esboce o recetor ótimo normado para este sinal;
- d) Calcule a BER .

14. (secção 7) Considere uma transmissão digital binária, de débito binário de 300 bit/s, em que os símbolos são representados em FSK, pelas frequências 1200 Hz e 2400 Hz, respetivamente para o símbolo “0” e “1”. O fator de *rolloff* do filtro de formatação de pulsos é de 0,5, sendo a potência recebida de 12,5 W. O canal é AWGN, com densidade espectral de potência de $8 \times 10^{-3} \text{ W/Hz}$.

- a) Calcule a largura de banda e a banda ocupada;
- b) Desenhe o esquema de blocos do recetor, assumindo que as correlações são efetuadas com sinais de amplitude 1 V;
- c) Qual o valor das tensões sem ruído correspondentes a cada nível lógico, à entrada do bloco de decisão?
- d) Qual a potência do ruído à entrada do bloco de decisão?
- e) Calcule a probabilidade de erro de bit.

15. (secção 7) Uma transmissão digital utiliza a banda dos 95 MHz aos 105 MHz. Pretende-se transmitir com débito binário de 10 Mbit/s e factor de *rolloff* de 1. A BER máxima admissível é de 10^{-6} .

- a) Calcule o débito de símbolos;
- b) Que tipo de código/modulação propõe para esta transmissão?
- c) Calcule a relação sinal-ruído E_b/N_0 .
- d) Qual a eficiência espectral ?

16. (secção 7) Considere um sistema DVB (*digital video broadcasting*) para transmissão de televisão digital (MPEG-2) via satélite (DVB-S). A largura de banda de cada canal de comunicação é de 33 MHz. A modulação utilizada é QPSK com um fator de *rolloff* de 0,35.

a) Calcule o débito binário;

b) Calcule a eficiência espectral;

c) Para uma BER de 10^{-2} , calcule a relação sinal-ruído no canal;

Suponha agora que o canal de comunicação é um cabo (DVB-C), em que cada canal tem largura de banda de 10 MHz. A modulação utilizada é a 64-QAM com um fator de *rolloff* de 0,15;

d) Calcule o débito binário;

e) Calcule a eficiência espectral;

f) Compare e comente os dois sistemas em termos da eficiência espectral, sabendo que o ruído via satélite é maior que em cabo.

17. (secção 8) Considere uma transmissão com $BER = 10^{-3}$, de blocos de 10 bits, incluindo 1 bit de paridade.

a) Qual a probabilidade de retransmissão?

b) Qual a probabilidade de erro de bit?

18. (secção 8) Considere o seguinte código BCC, em que os bits m correspondem aos bits de informação, os bits p_n aos bits de paridade de linha e os bits c_n ao carácter de verificação de bloco, sendo utilizada em ambos os casos paridade par.

m_{31}	m_{21}	m_{11}	p_1
m_{32}	m_{22}	m_{12}	p_2
m_{33}	m_{23}	m_{13}	p_3
c_3	c_2	c_1	c_0

0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1

bits recebidos situação 1

0	0	1	0
0	1	1	0
1	0	1	1
0	1	0	1

bits recebidos situação 2

a) Qual a razão do código?

b) (situação 1) Existem bits errados? Se sim, é possível corrigi-los? Se sim, corrija-os. Se não, é possível perceber em que subconjunto de bits foram produzidos os erros?

c) Repita a alínea anterior para a situação 2.

19. (secção 8) Considere uma transmissão binária em PNRZ com um débito binário de 10 kbit/s e com tensões de ± 3 V. Adicionalmente considere que o sinal é corrompido por ruído branco, gaussiano e aditivo (canal AWGN), com densidade espectral de potência de $100 \mu\text{W}/\text{Hz}$.

- a) Determine o valor da BER deste sistema;
- b) Considere que se utiliza um código de repetição de 3 bits e que não altera o débito binário no canal. Qual o débito binário dos bits da informação?
- c) Considere que não altera a amplitude do sinal transmitido. Qual a nova BER deste sistema?
- d) Se mantiver o débito binário dos bits da informação igual ao débito binário sem codificação, qual a nova BER do sistema?
- e) Compare os resultados anteriores e comente.

20. (secção 8) Uma transmissão em PRZ com um débito total de 24 kbit/s, protegida por um código de repetição de 3 bits, tem em média 1 erro em cada 1000 s antes da correção.

- a) Qual o débito binário dos bits da informação?
- b) Qual a probabilidade de erro de bit antes da correção?
- c) Calcule a relação sinal-ruído E_b/N_0 ;
- d) Qual o tempo médio entre erros após correção?
- e) Se gerar a sequência de dados binária “1 0”, qual a sequência a transmitir após a aplicação do código de correção?
- f) Recebendo a sequência de bits aos níveis lógicos “1 0 1 1 1”, quais os bits descodificados?

21. (secção 8) Numa transmissão protegida com um código $H(7,4)$,

- a) Qual o resultado da aplicação da sequência binária “1 0 1 0” ($m_7 m_6 m_5 m_3$)?
- b) Qual o resultado da aplicação da sequência binária “0 1 0 1” ($m_7 m_6 m_5 m_3$)?
- c) Suponha que durante a transmissão dos bits correspondentes à alínea anterior erra o bit m_3 e p_4 . Quais os bits descodificados?
- d) Recebendo a sequência de bits aos níveis lógicos “1 1 1 0 1 0 1”, qual a sequência de bits de informação após correção?

22. (secção 8) Uma transmissão binária polar tem um débito binário de 40 kbit/s e uma BER de 10^{-5} .

- Calcule, em média, em quanto tempo é cometido um erro;
- Se esta transmissão passar a ser protegida com um código de correção de erros Hamming $H(15,11)$, mantendo o débito binário dos bits da informação, qual o débito binário no canal?
- Qual o aumento da amplitude do sinal transmitido, de modo a que se mantenha a mesma energia por bit?
- Qual a BER deste sistema (após correção)?
- De quanto em quanto tempo é cometido um erro?
- Supondo que mantêm a amplitude do sinal transmitido inalterada em relação à alínea a), qual a nova BER ?
- De quanto em quanto tempo é cometido um erro no sistema?
- Qual o resultado da aplicação da sequência de bits ao nível lógico “0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1” a um código de correção $H(15,11)$ ($m_{15} m_{14} m_{13} m_{12} m_{11} m_{10} m_9 m_7 m_6 m_5 m_3$)?
- Quais os bits descodificados se for recebida a sequência binária com os níveis lógicos “0 1 0 1 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0”?

23. (secção 8) Num código com distância de Hamming mínima de 5.

- Quantos bits errados se conseguem detetar?
- Quantos bits se conseguem corrigir?

24. (secção 8) Considere o código de controlo de erros cujas palavras estão organizadas na forma $c=[m_2 \ m_1 \ p_0 \ p_1]$, tal que $p_0=m_2+m_1$ e $p_1=m_1$.

- Qual a matriz de geração e de verificação para este código?
- Apresente todas as palavras de código.
- Calcule a distância mínima de Hamming e as capacidades de deteção e correção de erros.
- Suponha que se transmite a mensagem “0 1” e que sobre a palavra de código resultante é aplicado o padrão de erro “1 0 1 0”. O que resulta no receptor?
- Suponha que se transmite a mensagem “0 1” e que sobre a palavra de código resultante é aplicado o padrão de erro “1 0 0 1”. O que resulta no receptor?

25. (secção 8) Para um código CRC com polinómio gerador $g(x)=x^2 + 1$. Suponha um código com palavras de 6 bits.

- a) Este polinómio gera um código cíclico?
 - b) Pretende-se codificar os bits “1 0 0 1”. Quais os bits enviados?
 - c) São recebidos os bits “1 0 0 0 1 1”. Verifique se existem erros.
 - d) Qual a dimensão da rajada capaz de ser sempre detetada?
 - e) Qual a relação de rajadas não detetadas?
-

26. (secção 8) Para um código CRC com polinómio gerador $g(x)=x^2 + 1$. Suponha um código com palavras de 6 bits. Ver o exercício anterior.

- a) Qual a matriz geradora correspondente a este código?
 - b) É possível corrigir erros? Porquê?
 - c) Utilizando a matriz geradora, quais os bits enviados quando com os bits de informação “1 0 0 1”?
 - d) São recebidos os bits “1 0 0 0 1 1”. Verifique se existem erros.
 - e) Qual a equação através de operações ou-exclusivo que relacionam os bits de paridade com os bits de informação?
-

27. (secção 8) Considere um código IP *checksum* tendo como bits de informação a sequência hexadecimal 75A38B0CFFEE em sub-blocos de 4 dígitos hexadecimais.

- a) Qual a razão do código?
- b) Qual o *checksum*?
- c) Recebem-se os bits 75A38B0CFF60FF60. Existem erros?

Soluções (não inclui comentários nem figuras):

1. a) Tem erros; b) Não tem erros; c) Tem erros.
2. a) $- + + - + + -$; b) $c[n] = "1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1"$.
3. a) 1,375 ms; b) 174,5; c) 40 μ s; d) 1,475 ms; e) 2,95 ms; f) 55 dB.
4. a) UNRZ; b) Não; c) Não.
5. a) $R_b = 1 \text{ Gbit/s}$; b) $E_b = 32 \text{ nJ}$; c) $A = 5,66 \text{ V}$.
6. a) $y_0 = -30 \text{ mV}$, $y_1 = 30 \text{ mV}$; b) Figura 5.5; c) $c(t) = 100 \text{ V}$, $\lambda_{ot} = 0 \text{ V}$; c) $BER = 1,35 \times 10^{-3}$; d) $y_0 = -3 \text{ mV}$, $y_1 = 3 \text{ mV}$, $\sigma_n^2 = 10^{-6} \text{ W}$, $BER = 1,35 \times 10^{-3}$.
7. a) $y_0 = 0 \text{ V}$, $y_1 = 12,9 \text{ mV}$; b) Figura 5.5; c) $c(t)$ bit a 1 = 154,9 V, $\lambda_{ot} = 6,45 \text{ mV}$; c) $BER = 5,4 \times 10^{-11}$.
8. a) $R_b = 2200 \text{ bit/s}$; b) $c(t)$ bit a “1” Manchester com amplitude 46,9 V, $\lambda_{ot} = 10,66 \text{ mV}$; c) $y_0 = -42,64 \text{ mV}$, $y_1 = 63,96 \text{ mV}$; d) $BER = 8,2 \times 10^{-5}$; e) $T_e = 5,5 \text{ s}$
9. a) $E_b = A^2 T_b$; b) $c(t) = \sqrt{R_b}$; c) $y_1 = \sqrt{E_b}$; $y_0 = 0$; d) $BER = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{4N_0}} \right)$; e) A BER não seria alterada. Sim, pois diminuiria a energia por bit sem alterar a BER .
10. a) $R_s = 13,3(3) \text{ kbaud}$; b) $c(t) = 115,47 \text{ V}$; c) $\sigma_n^2 = 1 \mu\text{W}$; d) $\lambda = 0 \text{ V}$, $\pm 8,66 \text{ mV}$, $\pm 17,32 \text{ mV}$, $\pm 25,98 \text{ mV}$; e) $BER = 4,35 \times 10^{-6}$.

11. a) $E_b=208 \mu J$; b) $B_{T(\min)}=2400 \text{ Hz}$; $B_{T(\max)}=4800 \text{ Hz}$.

c) $c(t)=10 \cos(2\pi 10^6 t) \text{ V}$; d) $y_1=2 \text{ mV}$; $y_0=-2 \text{ mV}$;

e) $\sigma_n^2 = 0,208 \mu W$; f) $BER=2,5 \times 10^{-6}$.

12. a) $S_R=1 \text{ W}$; b) $R_b=62,5 \text{ kHz}$; c) $B_T=93,750 \text{ kHz}$.

d) $c(t)=353,5 \cos(2\pi f_c t)$; $\lambda_{ot}=2,83 \text{ mV}$;

13. a) $f_c=15 \text{ kHz}$; $R_b=8,3(3) \text{ kbit/s}$; b) $S_R=8,5 \text{ W}$;

c) $c(t)=129 \cos(2\pi 15000t) \text{ V}$; $\lambda_{ot}=31 \text{ mV}$; d) $BER=2,66 \times 10^{-4}$.

14. a) $B_T=1650 \text{ Hz}$; $f_{min}=975 \text{ Hz}$; $f_{max}=2625 \text{ Hz}$;

b) Figura 7.5; $c_0(t)=\cos(2\pi 1200t)$; $c_1(t)=\cos(2\pi 2400t)$;

c) $y_1=8,3(3) \text{ mV}$; $y_0=-8,3(3) \text{ mV}$; d) $\sigma_n^2 = 26,67 \mu W$;

d) $BER=0,05$.

15. a) $R_s=5 \text{ Mbaud}$; b) QPSK; c) $10 \log_{10}(E_b/N_0)=10,5 \text{ dB}$; d) $\rho=1$.

16. a) $R_b=48,9 \text{ Mbit/s}$; b) $\rho=1,48$; c) $SNR_c=5,79 \text{ dB}$;

d) $R_b=52,173913 \text{ Mbit/s}$; e) $\rho=5,217$;

17. a) $P_r=10^{-2}$; b) $BER'=9 \times 10^{-6}$.

18. a) $R_c=9/16$; b) sim; sim; bit $m_{31}=\text{"1"}$;

c) sim; não; os bits (m_{31} e m_{13}) ou (m_{11} e m_{33}) estão errados.

19. a) $BER=1,35 \times 10^{-3}$ b) $R_b'=3,3(3) \text{ kbit/s}$;

c) $BER'=5,5 \times 10^{-6}$; d) $BER'=5,2 \times 10^{-3}$.

20. a) $R_b'=8 \text{ kbit/s}$; b) $BER=4,17 \times 10^{-8}$; c) $10 \log_{10}(E_b/N_0)=11,6 \text{ dB}$;

d) $T_e=2,4 \times 10^{10} \text{ s}$ (7,6 séculos); e) “1 1 1 0 0 0”; f) “1 1”.

21. a) “1 0 1 0 0 1 0” (m7 m6 m5 p4 m3 p2 p1); b) “0 1 0 1 1 0 1”;
 c) “1 1 0 0” (m7 m6 m5 m3); d) “1 0 1 1” (m7 m6 m5 m3).

22. a) $T_e = 2,5$ s; b) $R_b = 54,545$ kbit/s; c) Aumento de 1,168;
 d) $BER' = 2,1 \times 10^{-9}$; e) $T_e' = 11,9$ ks (3 horas e 1100 s);
 f) $BER' = 3,6 \times 10^{-7}$; g) $T_e' = 70$ s; h) “0 1 0 1 0 0 1 1 1 0 1 0 1 1 0”.
 i) Síndrome=“1 1”; “0 1 0 1 0 0 1 1 0 1 1”;

23. a) $l=4$; b) $t=2$.

24. a)

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- b) $c_0 = [0 0 0 0]$, $c_1 = [0 1 1 1]$, $c_2 = [1 0 1 0]$, $c_3 = [1 1 0 1]$.
 c) $d_{min}=2$, $t=0$, $l=1$. d) Descodifica c_3 .
 e) Corrige para c_2 ou deteta erro.

25. a) Para um código ser cíclico $g(x) = x^2 + 1$ tem que ser raiz de
 $x^n + 1 = x^6 + 1$, o que se verifica, pois $\frac{x^6 + 1}{x^2 + 1} = x^4 + x^2 + 1$ e resto 0.
 b) “1 0 0 1 1 1”; c) $r(x) = “0 1”$. Existem erros;
 d) 2, ordem de $g(x)$; e) $BFER = 0,25$.

26. a)

$$G = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

- b) Não, porque a matriz de paridade tem linhas iguais.
 c) “1 0 0 1 1 1”; d) $S = 0 1$ Existem erros;
 e) $p_2 = m_4 + m_2$, $p_1 = m_3 + m_1$.

27. a) $R_c = 3/4$; b) FF60. c) Soma igual a 008E. Existe erro.

Exercícios propostos em Matlab

Transmissão binária num Canal AWGN

(secção 5)

Funções a desenvolver em Matlab:

1. Uma função que gere uma sequência binária, e que tenha como entradas:

- O número de bits a gerar.
 - A probabilidade *a priori* do nível lógico “0”.
-

2. Uma função que gere o símbolo a “1” do código de linha Manchester (Manchester) e o código correspondente a uma sequência binária, e que tenha como entradas:

- A sequência binária a codificar.
 - A amplitude A do código de linha.
 - O número M de pontos de simulação por símbolo (M é par).
-

3. Uma função que implemente um canal AWGN. Esta função devolve o código de linha com ruído e tem como entradas:

- O código de linha correspondente à sequência binária.
 - A potência do ruído.
-

4. Uma função que implemente um recetor ótimo para o código de linha com ruído. Esta função devolve a sequência binária descodificada, e tem como entradas:

- O código de linha com ruído.
 - O símbolo ao nível lógico “1” utilizado no filtro adaptado.
 - O valor do limiar de decisão λ .
-

5. Uma função que gere o símbolo a “1” da modulação OOK e o código correspondente a uma sequência binária, e que tenha como entradas:

- A sequência binária a codificar.
 - A amplitude A da modulação.
 - O número M de pontos de simulação por símbolo.
-

Problemas

1. Simule um sistema de transmissão digital num canal AWGN em *Matlab*. O sistema deve converter uma sequência binária num código de linha Manchester ou modulação OOK, simular um canal AWGN adicionando ruído branco e gaussiano ao sinal a transmitir e implementar um descodificador com filtro ótimo.

O sistema tem como entradas (e valor de referência):

- O número de bits a simular (100k bit).
- A amplitude A , do código de linha/modulação (1 V).
- O número, M , de pontos de simulação por símbolo (4 pontos).
- A potência do ruído ou a SNR no canal de comunicação (1 W).
- O valor do limiar de decisão λ (valor ótimo).

e tem como saídas:

- A sequência binária recebida.
- A percentagem de bits errados.
- O valor teórico da BER .

Determine a BER real e teórica (apêndice 6), faça um gráfico dos resultados e comente a evolução da BER nas situações seguintes:

- a) Para $A = [0,5 \ 0,75 \ 1 \ 1,5 \ 2]$ V.
 - b) Para $M = [4 \ 6 \ 8 \ 10 \ 12]$.
 - c) Para $\sigma_w^2 = [0,25 \ 0,5 \ 1 \ 1,5 \ 2]$ W
 - d) Para $Eb/No = [1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9]$ dB ($No = 2\sigma_w^2$). Coloque a BER em escala logarítmica.
 - e) Para $\lambda = [-2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2]$ V.
2. Repita o problema anterior para uma modulação OOK. Faça as adaptações nos testes que achar necessário.
3. Compare os dois métodos.

Tenha em atenção as seguintes funções do MATLAB:

<code>rand</code> , <code>randn</code> - gera números aleatórios	<code>cumsum</code> - soma cumulativa
<code>gt (>)</code> - operador relacional <i>maior que</i>	<code>filter</code> - filtragem digital
<code>ones</code> - gera uma matriz de uns	
<code>erfc</code> - função complementar do erro	
<code>semilogy</code> - Escala logarítmica em ordenadas	

Códigos de Controlo de Erro

(secção 8)

Funções a desenvolver em *Matlab*:

1. Uma função que gere uma sequência binária em que os símbolos sejam equiprováveis, e que tenha como entrada:

- O número de bits a gerar.
 - A probabilidade dos bits ao nível lógico “0”.
-

2. Uma função que implemente um codificador por repetição e que tenha como entradas:

- A sequência binária a codificar.
 - O número de repetições
-

3. Uma função que simule um canal digital gerando erros numa sequência binária e que tenha como entradas:

- A sequência binária sujeita a erros.
 - A probabilidade de erro de bit.
-

4. Uma função que implemente um descodificador por repetição e que tenha como entrada:

- A sequência binária a descodificar.
-

5. Uma função que implemente um codificador Hamming H(7,4) e que tenha como entrada:

- A sequência binária a codificar.

.....

6. Uma função que implemente um descodificador Hamming H(7,4) e que tenha como entrada:

- A sequência binária a descodificar.
-

Problemas

1. Pretende-se simular um sistema de controlo de erros num canal digital. O sistema deve codificar uma sequência binária através de um código por repetição, sujeitar a sequência resultante a erros e descodificar corrigindo os erros.

a) Para o número de repetições de 3, avalie o codificador para diversos valores da BER e compare os valores obtidos com os valores teóricos.

b) Para uma BER de 0,1, avalie o codificador para diversos valores de repetições compare os valores obtidos com os valores teóricos.

2. Pretende-se simular um sistema de controlo de erros num canal digital. O sistema deve codificar uma sequência binária através de um código de Hamming H(7,4), sujeitar a sequência resultante a erros e descodificar corrigindo os erros.

a) Avalie o codificador para diversos valores da BER e compare os valores obtidos com os valores teóricos.

b) Compare os resultados com os obtidos com o codificador por repetição.

Tenha em atenção as seguintes funções do MATLAB:

`nhchoosek` – Cálculo de combinações

Glossário

2B1Q – *2 binary 1 quaternary*

AC – Corrente alternada

ADSL – *Asymmetric Digital Subscriber Line*

ARQ – *Automatic repeat request*

ASCII – *American Standards Committee for Information Interchange*

AWGN – *Additive White Gaussian Noise*

B-ASK – *Binary Amplitude Shift Keying*

BCC – *Block (sum) check character*

BER – *Bit Error Rate*

BFER – *Burst Frame Error Rate*

bit – *binary digit*

BNRZ – *Bipolar No Return to Zero*

BNZS – *Bipolar with N Zero Substitution*

BPF – *Band-Pass Filter*

B-PSK – *Binary Phase Shift Keying*

CRC – *Cyclic redundancy check*

DC – *Direct current* (corrente continua)

DPSK – *differential PSK*

DSB – *Double Side Band*

erfc – *complementary error function*

FEC – *Forward error correction*

FSK – *Frequency Shift Keying*

IP – *Internet protocol*

ISI – *Inter-symbolic Interference*

ISO – *International Organization for Standardization*

MAP – Máximo *a posteriori*

MV – Máxima Verosimilhança

NRZ – *No Return to Zero*

NRZI – *No Return to Zero Invert*

NRZ-L – *No Return to Zero - Level*

NRZ-M – *No return to Zero - Mark*

NRZ-S – *No return to Zero - Space*

OOK – On-Off Keying

OSI – *Open System Interconnection*

PAM – *Pulse Amplitude Modulation*

PNRZ – *Polar no Return to Zero*

PRZ – *Polar Return to Zero*

PSK – *Phase Shift Keying*

QAM – *Quadrature Amplitude Modulation*

RAM – *Random Access Memory*

RDIS – Rede Digital Integrada de Serviços

RZ – *Return to zero*

S&H – *Sampling & Hold*

SNR – *Signal to Noise Ratio*

UNRZ – *Unipolar no Return to Zero*

USB – *Universal Serial Bus*

Bibliografia

- A. Bruce Carlson, Paul B. Crilly, Janet C. Rutledge, “Communications and Systems”, 4th Ed., *McGrawHill*, 2001.
- B. Skalar, “Digital Communication – Fundamentals and Applications”, Prentice Hall, 2001.
- C. E. Shannon, “Communication in the presence of noise”, Proc. IRE, vol. 37, pp. 10-21, January. 1949.
- S. Haykin, Michel Moher, “Communication Systems”, 4th Ed., *Willey*, 2001.
- S. Haykin, Michel Moher, “Communication Systems”, International Students Version, 5th Ed., *Willey*, 2009.
- B. P. Lahti, “Sistemas de Comunicação”, Editora Guanabara, 1968.
- J. L. LoCicero, B. P. Patel, Chapter 6 of Mobile Communication Handbook (J. Gibson) – “Line Coding”, Chapman & Hall/CRCnetBASE, 1999.
- H. P. Hsu – “Comunicação Analógica e Digital”, 2^a Ed., Coleção Schaum, 2006.
- F. Halsall – “Data Communication, Computer Networks and Open Systems”, 4th Ed., *Addison-Wesley*, 1996.
- F. Hassal – “Computer Network and the Internet”, 5th Ed., *Addison-Wesley*, 2005.
- M. Schwartz – “Information Transmission Modulation and Noise”, 4th Ed., *Mc Graw Hill*, 1990.