



UNIVERSITÀ  
DI PISA

Progetto di Robotica Aerospaziale

# Design preliminare di una missione interplanetaria Terra-Urano

Ing. Robotica e dell'automazione

**Fabio D'Onofrio** n°556505  
*f.donofrio6@studenti.unipi.it*

18 Luglio 2019

## Indice

<b>1</b>	<b>Specifiche missione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Progetto</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Ipotesi semplificative</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Hohmann Transfer</b>	<b>3</b>
4.1	Traiettoria eliocentrica . . . . .	3
4.2	Iperbole di fuga . . . . .	5
4.3	Iperbole di cattura . . . . .	6
4.4	Analisi consumi e durata . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Traiettoria con i FlyBys</b>	<b>8</b>
5.1	Data di partenza . . . . .	8
5.2	Traiettoria Terra-Venere e Iperbole di fuga . . . . .	9
5.3	FlyBy su Venere . . . . .	10
5.4	Primo FlyBy sulla Terra . . . . .	12
5.5	Secondo FlyBy sulla Terra . . . . .	13
5.6	Iperbole di cattura . . . . .	14
5.7	Traiettorie eliocentriche . . . . .	15
5.8	Analisi consumi e durata . . . . .	18
<b>6</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>18</b>
<b>7</b>	<b>Guida al codice</b>	<b>19</b>

## Elenco delle figure

1	Hohmann Transfer Terra-Urano . . . . .	4
2	Fuga iperbolica dalla Terra per la Hohmann Transfer	6
3	Cattura iperbolica di Urano dopo la Hohmann Transfer	7
4	PorkChop plot C3L Varr . . . . .	9
5	Fuga iperbolica dalla Terra . . . . .	10
6	FlyBy su Venere . . . . .	11
7	Primo FlyBy sulla Terra . . . . .	12
8	Secondo FlyBy sulla Terra . . . . .	13
9	Cattura in orbita ellittica . . . . .	14
10	Cattura in orbita circolare . . . . .	15
11	Traiettorie eliocentriche . . . . .	16
12	Traiettoria per Urano . . . . .	17

## Elenco delle tabelle

1	Hohmann Transfer . . . . .	18
2	Traiettoria con i FlyBys . . . . .	18

## 1 Specifiche missione

Il progetto consiste nella pianificazione preliminare di una traiettoria interplanetaria dalla Terra a Urano, con le seguenti specifiche:

1. Partenza da un'orbita equatoriale circolare intorno alla Terra a 200 Km di altitudine
2. Data di partenza dalla Terra dopo il 1 Gennaio 2020
3. Utilizzo di almeno due FlyBy
4. Acquisizione di un'orbita polare circolare di 1000 Km di altitudine intorno a Urano

## 2 Progetto

Nella prima parte viene analizzata una traiettoria diretta di Hohmann Terra-Urano. Nella seconda parte viene progettata una traiettoria con il metodo delle "coniche raccordate" che utilizza più volte l'effetto fionda gravitazionale in modo da ridurre i costi in termini di  $\Delta V$  della missione.

## 3 Ipotesi semplificative

1. Le orbite planetarie sono approssimate a coplanari e circolari per la Hohmann Transfer, a coplanari per la traiettoria con i FlyBys.
2. La fuga iperbolica dalla Terra, i FlyBys, e la cattura iperbolica di Urano sono considerati istantanei.

La prima ipotesi viene correntemente utilizzata in fase di progettazione preliminare di una missione interplanetaria: assumere che le orbite dei pianeti siano coplanari al piano dell'eclittica risulta un'approssimazione accettabile se l'intento è quello di studiare una possibile traiettoria eliocentrica in modo da valutare a grandi linee il  $\Delta V$  e il TOF(time of flight) necessari a raggiungere il pianeta finale.

La seconda ipotesi permette di semplificare lo studio delle traiettorie eliocentriche "di raccordo", considerando nullo il tempo trascorso nell'uscire(partenza dalla Terra), attraversare(FlyBy) ed entrare(arrivo su Urano) nelle SOI(sfere di influenza) planetarie.

## 4 Hohmann Transfer

### 4.1 Traiettoria eliocentrica

La traiettoria di Hohmann è la manovra bi-impulsiva più efficiente per un trasferimento tra due orbite coplanari, circolari, con un fuoco in comune. In questo caso, l'orbita di trasferimento è un'ellisse con raggio di perielio pari al raggio dell'orbita Terrestre (considerata circolare) e raggio di afelio pari al raggio dell'orbita di Urano (anch'essa considerata circolare) :

$$rp_H = R_{Earth} = 149.6 * 10^6 Km$$

$$ra_H = R_{Uranus} = 2.872 * 10^9 Km$$

Pertanto il semiasse maggiore e il periodo dell'orbita di trasferimento sono :

$$a_H = \frac{rp_H + ra_H}{2} = 1.51 * 10^9 Km$$

$$T_H = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu_{Sun}}} * a_H^{\frac{3}{2}} = 32.1y$$

Il TOF (Time Of Flight) della traiettoria di Hohmann è quindi di circa 16 anni. Si calcolano poi il momento angolare specifico, e quindi le velocità di partenza e di arrivo della sonda, rispettivamente al perielio e all'afelio dell'orbita di trasferimento :

$$h_H = \sqrt{2\mu_{Sun} \frac{rp_H ra_H}{rp_H + ra_H}} = 6.14 * 10^9 \frac{Km^2}{s}$$

$$V_{dep} = \frac{h_H}{rp_H} = 41 \frac{Km}{s}$$

$$V_{arr} = \frac{h_H}{ra_H} = 2.13 \frac{Km}{s}$$

Infine, note le velocità della Terra e di Urano (considerate costanti in conseguenza dell'ipotesi semplificativa numero 1), si calcolano le velocità relative alla partenza e all'arrivo, dalle quali si ricaveranno poi i  $\Delta V$  delle due manovre impulsive, nei paragrafi 4.2 e 4.3

$$V_{dep_{\infty}} = V_{dep} - V_{Earth} = V_{dep} - \sqrt{\frac{\mu_{Sun}}{R_{Earth}}} = 11.28 \frac{Km}{s}$$

$$V_{arr_{\infty}} = V_{Uranus} - V_{arr} = \sqrt{\frac{\mu_{Sun}}{R_{Uranus}}} - V_{arr} = 4.66 \frac{Km}{s}$$

Tutte le precedenti variabili sono state ottenute tramite la funzione Matlab *Compute\_Direct\_Hohmann.m*. Si è poi cercato iterativamente la prima data nel 2020 in cui la fase tra la Terra e Urano fosse tale da consentire il trasferimento alla Hohmann, ovvero :

$$\phi = \pi - \Delta\theta_{Uranus} = \pi - n_{Uranus} * TOF_H = 1.94rad = 111^\circ$$

Dove  $n_{Uranus}$  è il moto medio di Urano, e  $\Delta\theta_{Uranus}$  è la variazione dell'anomalia vera del pianeta dalla partenza all'arrivo, la procedura è implementata nella funzione *Find\_Direct\_Hohmann\_Departure\_Date.m* e restituisce la data di partenza (12 Luglio 2020) e di arrivo (26 Luglio 2036). A questo punto si hanno a disposizione tutti gli elementi per generare, tramite la funzione *plot\_Hohmann\_Transfer.m*, la seguente figura :

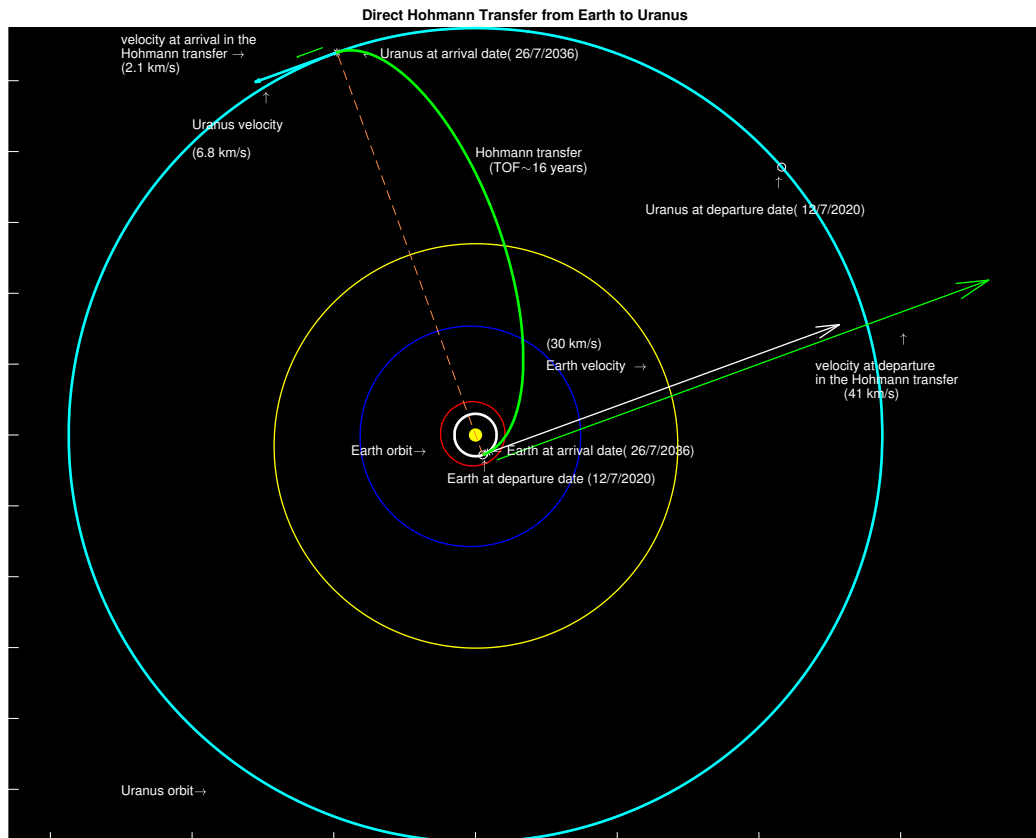


Figura 1: Hohmann Transfer Terra-Urano

## 4.2 Iperbole di fuga

Prima di poter immettere la sonda nella traiettoria eliocentrica diretta verso Urano, si deve cambiare il piano orbitale dell'orbita di parcheggio che, essendo equatoriale (specifica 1), va riportata sul piano dell'eclittica e quindi ruotata, tramite una manovra impulsiva, di un angolo di  $23.45^\circ$  :

$$\Delta V_{plane_{Earth}} = 2 * V_{park} * \sin \frac{23.45}{2} = 2 * \sqrt{\frac{\mu_{Earth}}{r_{park}}} * \sin \frac{23.45}{2} = 3.15 \frac{Km}{s}$$

essendo, sempre per la specifica 1 :

$$r_{park} = radius_{Earth} + z_{park} = 6378 + 200 = 6578 Km$$

La fuga iperbolica dalla Terra viene quindi realizzata tramite una manovra impulsiva che aumenti la velocità planetocentrica della sonda da quella di parcheggio alla velocità al periasse dell'orbita iperbolica, calcolata a partire dalla velocità relativa di partenza e dal raggio di periasse, pari al raggio dell'orbita circolare di parcheggio :

$$V_{p_{hyp_{dep}}} = \frac{h_{hyp_{dep}}}{r_{park}} = \frac{r_{park} * \sqrt{V_{dep_{\infty}}^2 + 2 * \frac{\mu_{Earth}}{r_{park}}}}{r_{park}} = 15.76 \frac{Km}{s}$$

Il  $\Delta V$  necessario quindi ad immettersi nell'orbita di fuga iperbolica è pari a

$$\Delta V_{dep} = V_{p_{hyp_{dep}}} - V_{park} = 7.98 \frac{Km}{s}$$

La funzione Matlab *EarthDeparture.m* esegue i precedenti calcoli e grafica, su un piano di riferimento geocentrico con asse x diretto nella direzione opposta al Sole e asse y diretto come la velocità della Terra, l'orbita circolare di parcheggio (già ruotata sul piano dell'eclittica) in rosso, e l'iperbole di fuga in verde :

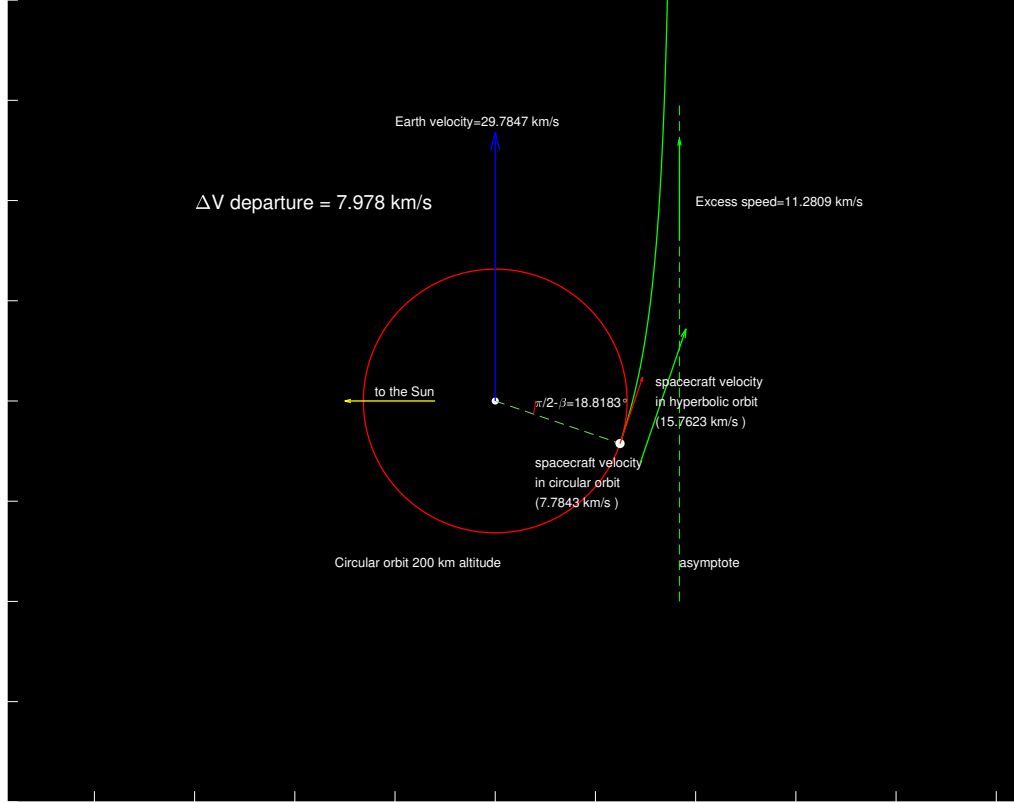


Figura 2: Fuga iperbolica dalla Terra per la Hohmann Transfer

### 4.3 Iperbole di cattura

Nota la velocità relativa di arrivo nella sfera d'influenza di Urano  $V_{arr\infty}$  si può calcolare, avendo imposto il raggio del periasse dell'iperbole di cattura dalla specifica 4, la velocità con cui la sonda giunge alla quota dell'orbita di cattura desiderata:

$$r_{capt} = radius_{Uranus} + z_{capt} = 25560 + 1000 = 26560 Km$$

$$V_{phyp_{arr}} = \frac{h_{hyp_{arr}}}{r_{capt}} = \frac{r_{capt} * \sqrt{V_{arr\infty}^2 + 2 * \frac{\mu_{Uranus}}{r_{capt}}}}{r_{capt}} = 21.4 \frac{Km}{s}$$

Il  $\Delta V$  necessario quindi per immettersi nell'orbita circolare richiesta intorno a Urano è:

$$\Delta V_{arr} = V_{p_{hyp_{arr}}} - V_{capt} = 6.6 \frac{Km}{s}$$

La funzione Matlab *UranusCapture.m* produce la seguente figura :

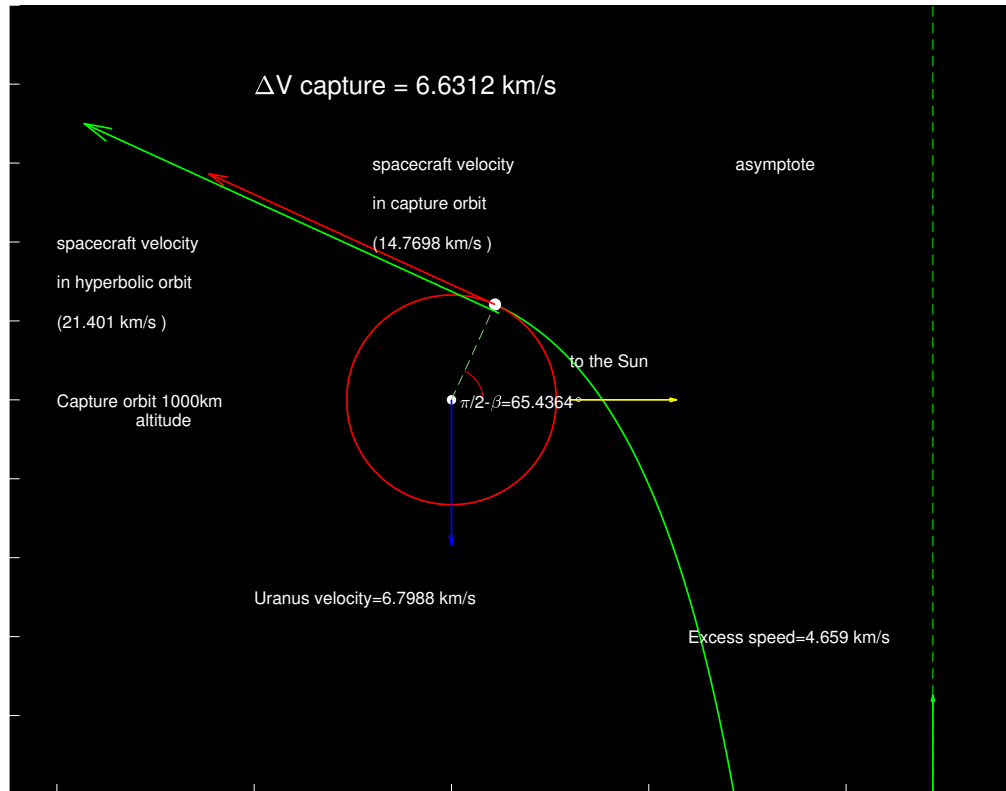


Figura 3: Cattura iperbolica di Urano dopo la Hohmann Transfer

Infine, viene effettuata un'ultima manovra impulsiva per ruotare il piano orbitale della sonda dal piano dell'eclittica al piano polare di Urano (come richiesto dalla specifica 4), inclinato di  $7.77^\circ$  :

$$\Delta V_{planeUranus} = 2 * V_{capt} * \sin \frac{7.7}{2} = 2 * \sqrt{\frac{\mu_{Uranus}}{r_{capt}}} * \sin \frac{7.7}{2} = 2 \frac{Km}{s}$$



#### 4.4 Analisi consumi e durata

Il costo totale per effettuare un trasferimento alla Hohmann Terra-Urano è quindi :

$$\Delta V_{tot} = \Delta V_{plane_{Earth}} + \Delta V_{dep} + \Delta V_{arr} + \Delta V_{plane_{Uranus}} = 19.77 \frac{Km}{s}$$

Un  $\Delta V$  di missione di questa entità è sicuramente eccessivo per le attuali tecnologie propulsive, rendendo di fatto un trasferimento alla Hohmann per Urano fisicamente irrealizzabile.

Il tempo della missione, approssimativamente (si trascurano i tempi di volo nelle sfere di influenza dei pianeti, ipotesi 2) , è di 16 anni. L'obiettivo del design con i FlyBys sarà allora quello di provare a ridurre il costo totale della missione, anche a scapito, eventualmente , di un tempo di volo maggiore.

### 5 Traiettoria con i FlyBys

In questo secondo design, si è cercato di ridurre il  $\Delta V$  totale della missione sfruttando il cosiddetto "effetto fionda gravitazionale" di alcuni pianeti. Dopo aver scelto come primo pianeta di FlyBy Venere (partendo verso un pianeta interno il  $\Delta V$  di fuga dalla Terra è minore), si è valutato la data di partenza migliore e, dopo aver valutato varie combinazioni dei pianeti per i successivi FlyBy, si è optato per effettuare due FlyBy consecutivi sulla Terra, per poi raggiungere Urano con una correzione di rotta che consumasse meno carburante possibile.

#### 5.1 Data di partenza

Tramite il codice reperito dal Matlab Central File Exchange<sup>[1]</sup> si produce, eseguendo lo script *Departure\_Date\_Patched\_conics.m* , la seguente figura :

## 5.2 Traiettoria Terra-Venere e Iperbole di fuga

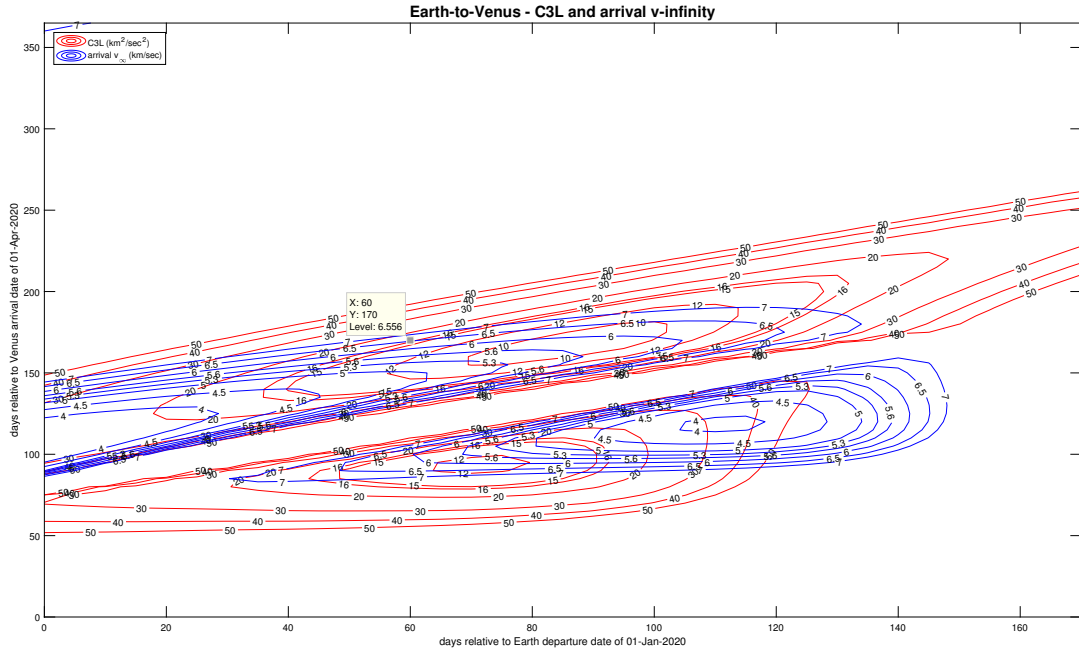


Figura 4: PorkChop plot  $C3L - V_{arr\infty}$

Si osservano le curve di livello dell'energia di lancio  $C3L = V_{dep\infty}^2$  e della velocità relativa di arrivo su Venere  $V_{arr\infty}$ . Viene scelta poi come data di partenza il Primo Marzo del 2020, in cui l'energia di lancio è di poco superiore al valore minimo per quell'anno, mentre la velocità relativa di arrivo è di  $6.5 \frac{Km}{s}$ , anch'essa maggiore rispetto al valore minimo, consentendo un guadagno di velocità maggiore dal FlyBy (a parità della quota del periasse dell'iperbole di attraversamento, maggiore è la velocità relativa di ingresso nella sfera d'influenza e maggiore sarà il guadagno di velocità ottenuto).

## 5.2 Traiettoria Terra-Venere e Iperbole di fuga

Scelte quindi le date di partenza dalla Terra e di arrivo nella SOI di Venere, si calcolano i rispettivi vettori di posizione della sonda, tramite la funzione Matlab *planet\_elements\_and\_sv.m*, la quale, come molte altre utilizzate in questo progetto, sono state riprese ed adattate, dall'appendice D del libro.<sup>[2]</sup> Si determina quindi l'orbita di trasferimento risolvendo il problema di Lambert, tramite la funzione *lambrert.m* e lo script Matlab *lambrert\_trajectory.m*, che disegna anche l'orbita.

Nota la velocità che deve avere la sonda alla partenza dalla Terra, è possibile ora risolvere l'iperbole di partenza, similmente a come fatto per la partenza per la Hohmann Transfer, tramite la funzione *EarthDeparture.m*, la quale restituisce  $\Delta V_{dep} = 4 \frac{Km}{s}$

(circa la metà di quello per la trasformata alla Hohmann diretta per Urano) e produce la seguente figura :

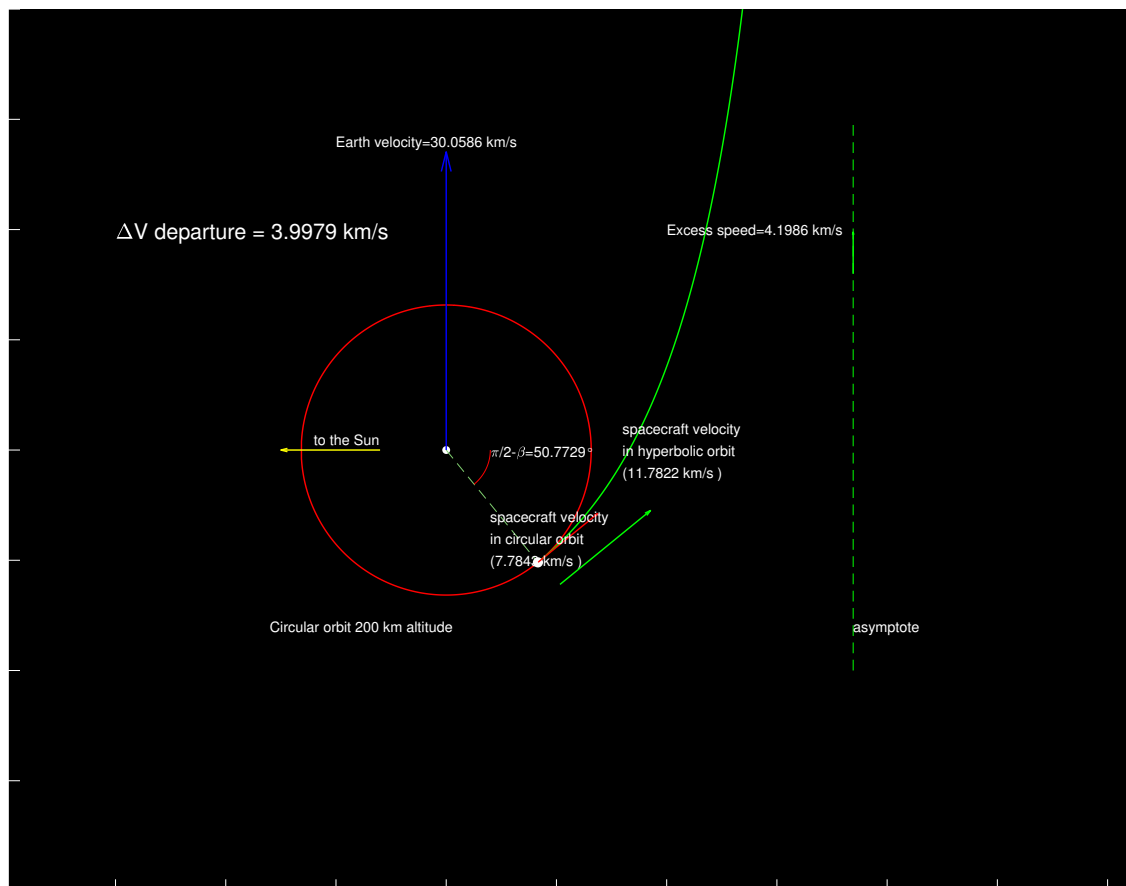


Figura 5: Fuga iperbolica dalla Terra

### 5.3 FlyBy su Venere

Si è cercato iterativamente, tramite la funzione *fb\_date\_and\_altitude.m* la quota del FlyBy tale da garantire un successivo incontro con la Terra. Tale quota è pari a  $zp\_fb\_V = 15462 Km$ , e il  $\Delta V$  guadagnato è pari a circa  $3.5 Km$ . Noti la velocità relativa di entrata nella SOI di Venere e la quota del FlyBy, si calcolano l'energia

specifica e l'eccentricità dell'iperbole di passaggio :

$$h = r_p * \sqrt{V_{arr_{\infty}}^2 + 2 * \frac{\mu_{Venus}}{r_p}} = 1.79 * 10^5 \frac{Km^2}{s}$$

$$e = 1 + r_p * \frac{V_{arr_{\infty}}^2}{\mu_{Venus}} = 3.584$$

Si ricavano poi i triangoli di velocità in ingresso e in uscita dalla SOI, noto il turn angle  $\delta = 2 * \arcsin(\frac{1}{e}) = 32^\circ$  ottenendo la velocità della sonda in uscita e quindi i parametri orbitali dell'orbita post-FlyBy. La funzione *FlyBy.m* effettua tutti i calcoli e produce la seguente figura :

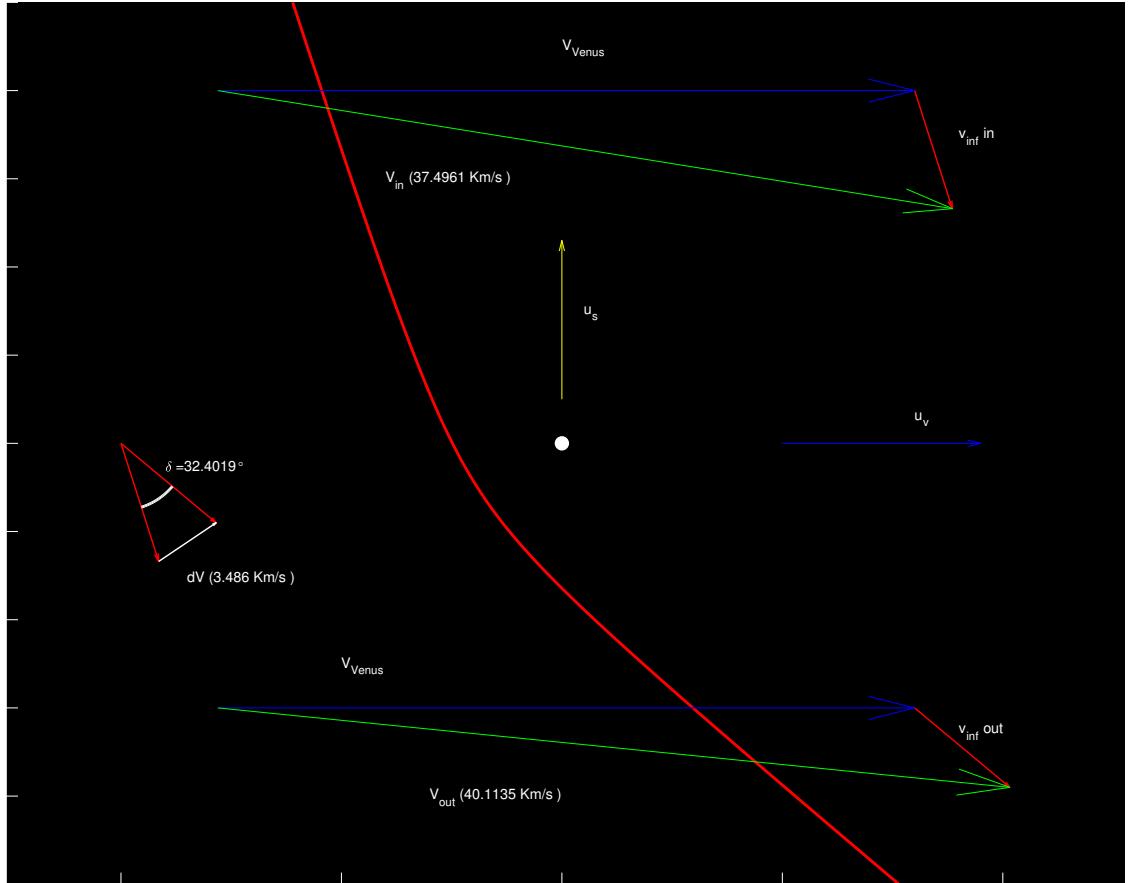


Figura 6: FlyBy su Venere

#### 5.4 Primo FlyBy sulla Terra5 TRAIETTORIA CON I FLYBYS

Quest'ultima funzione restituisce anche i parametri orbitali dell'orbita post-FlyBy, che porta la sonda ad incontrare la Terra il 21 Luglio del 2021, per effettuare un secondo FlyBy e guadagnare ulteriore velocità eliocentrica.

#### 5.4 Primo FlyBy sulla Terra

Con l'intento di ridurre il  $\Delta V$  totale di missione, si è optato per progettare il primo FlyBy sulla Terra in modo da reincontrarla una seconda volta, 3 anni dopo. Sono quindi stati calcolati la quota e la data di arrivo successiva nella SOI terrestre tramite la funzione *fb\_date\_and\_altitude.m* e, come nel paragrafo precedente, si riporta la dinamica dell'incontro tramite la funzione *FlyBy.m* :

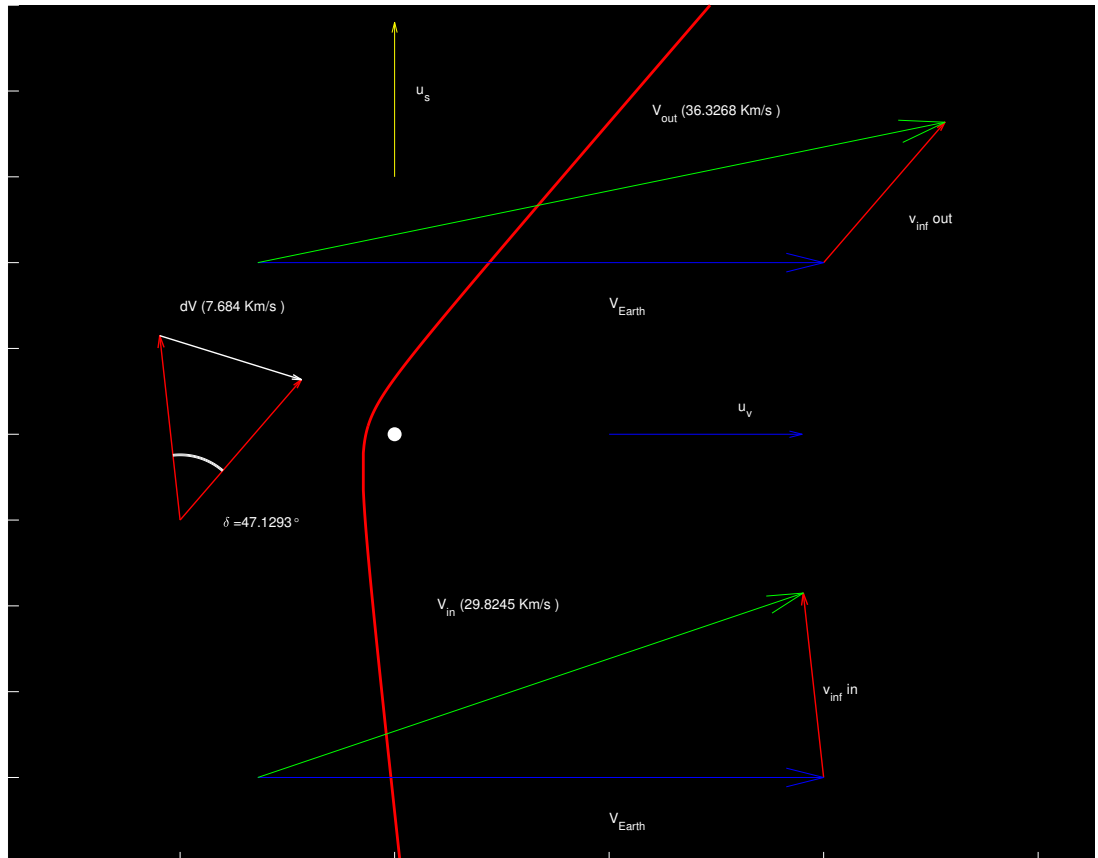


Figura 7: Primo FlyBy sulla Terra

## 5.5 Secondo FlyBy sulla Terra TRAIETTORIA CON I FLYBYS

Si può notare il notevole guadagno di velocità eliocentrica, tuttavia a partire dall'orbita post FlyBy non si avevano condizioni favorevoli in termini di  $\Delta V$  per immettere la sonda già in orbita per Urano, pertanto si effettua un terzo ed ultimo FlyBy, sempre sulla Terra, il 20 Luglio 2024.

### 5.5 Secondo FlyBy sulla Terra

Quest'ultimo FlyBy viene fatto ad una quota molto bassa, guadagnando quindi più velocità possibile dalla sfera d'influenza Terrestre.

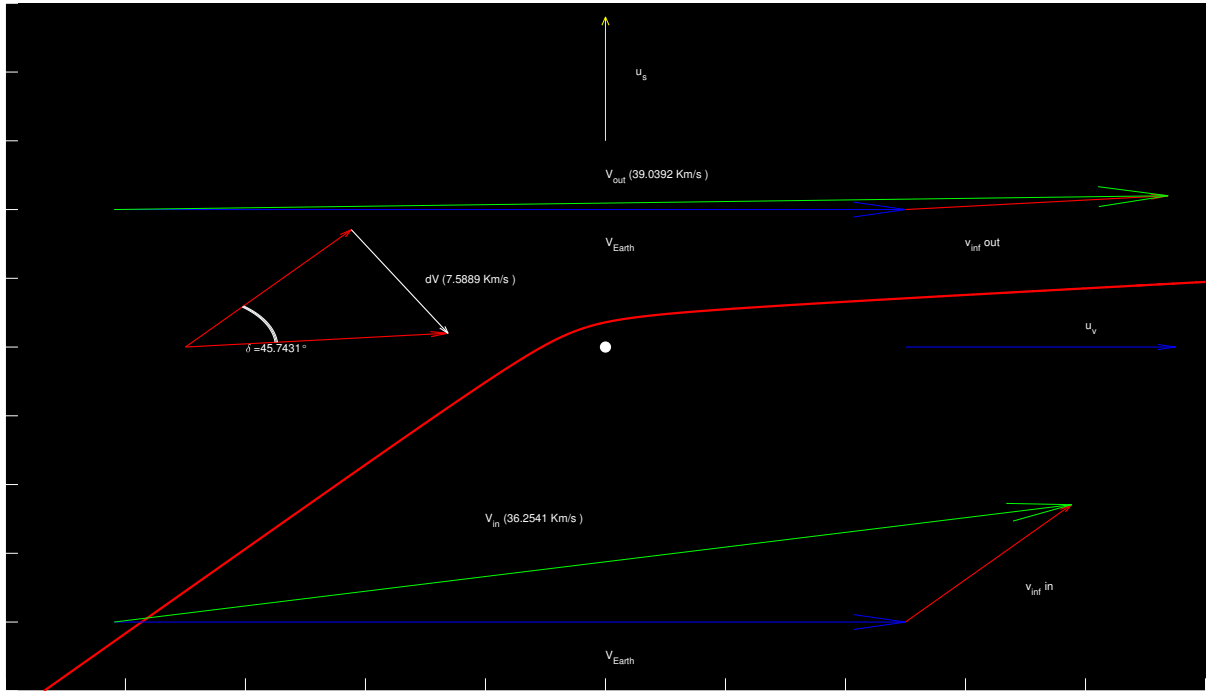


Figura 8: Secondo FlyBy sulla Terra

Stavolta però, invece di proseguire nell'orbita Post-FlyBy, si effettua una correzione di rotta, per immettersi in un'orbita diretta su Urano. Tramite lo script *lambert\_trajectory.m* si calcola la velocità eliocentrica che deve avere la sonda in uscita dalla SOI terrestre il 20 Luglio 2024, per immettersi nell'orbita per Urano. Si valuta quindi il  $\Delta V$  necessario (sempre nell'ipotesi di orbite coplanari) con la funzione *deltaV\_target.m*, che, grazie alla velocità

guadagnata dai FlyBys sulla Terra, risulta pari a soli  $2\frac{Km}{s}$ , se si sceglie come data di arrivo l'1 Giugno 2038, in modo da avere un tempo di volo simile a quello della traiettoria di Hohmann, ma con un costo minore. Ovviamente si poteva altrimenti pensare di anticipare la data di arrivo, aumentando il costo in termini di velocità della manovra, riducendo così il tempo di volo rispetto alla Hohmann Transfer.

## 5.6 Iperbole di cattura

Effettuando una cattura come da specifica, in orbita circolare alla quota di 1000 Km, si ha

$$\Delta V_{arr} = 6.68 \frac{Km}{s}$$

per cui si potrebbe pensare invece di effettuare prima una cattura in orbita ellittica, riducendone il costo, e poi tramite successive manovre cambiare via via l'orbita fino a che non diventi circolare, i due casi sono illustrati nelle figure seguenti :

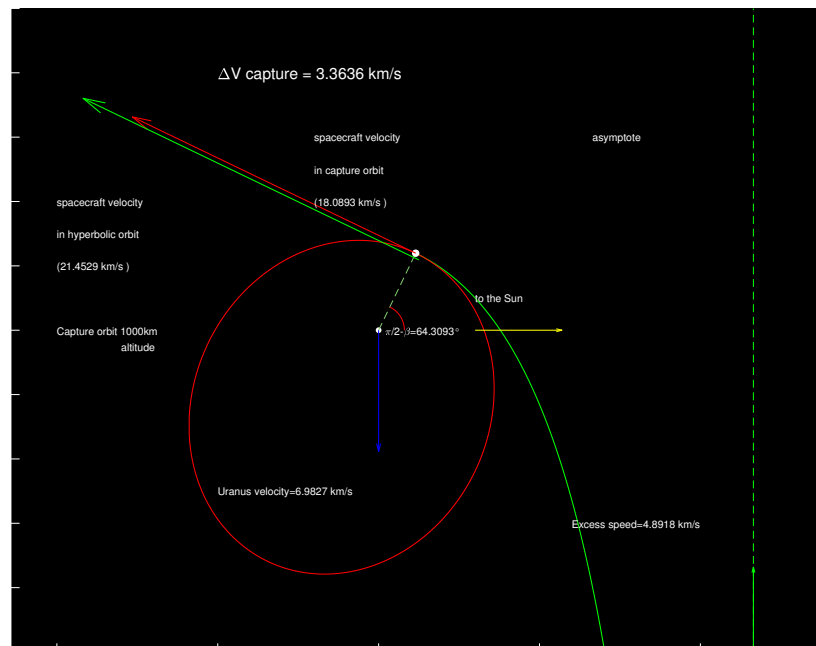


Figura 9: Cattura in orbita ellittica

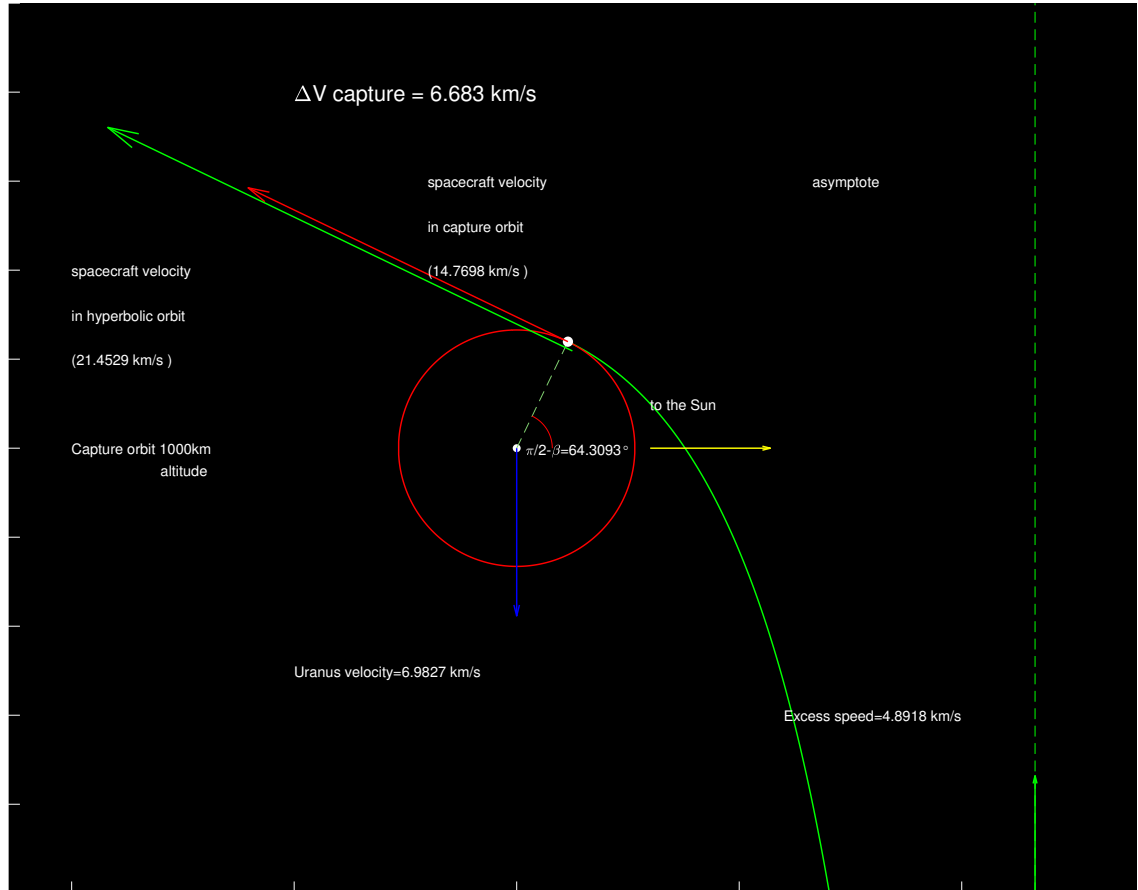


Figura 10: Cattura in orbita circolare

## 5.7 Traiettorie eliocentriche

Si mostrano infine le traiettorie eliocentriche, in due figure separate: nella prima si hanno la traiettoria Terra-Venere (in rosso), l'orbita successiva all'incontro con Venere (in blu) e quella successiva al primo FlyBy con la Terra (in giallo); ancora in blu, disegnata solo in parte, in quanto non percorsa dalla sonda, si nota quella che sarebbe stata l'orbita post-secondo-FlyBy sulla Terra, non molto diversa da quella invece ottenuta tramite la manovra correttiva, in rosso, diretta infine su Urano (visibile interamente nella seconda figura).



## 5.7 Traiettorie eliocentriche 5 TRAIETTORIA CON I FLYBYS

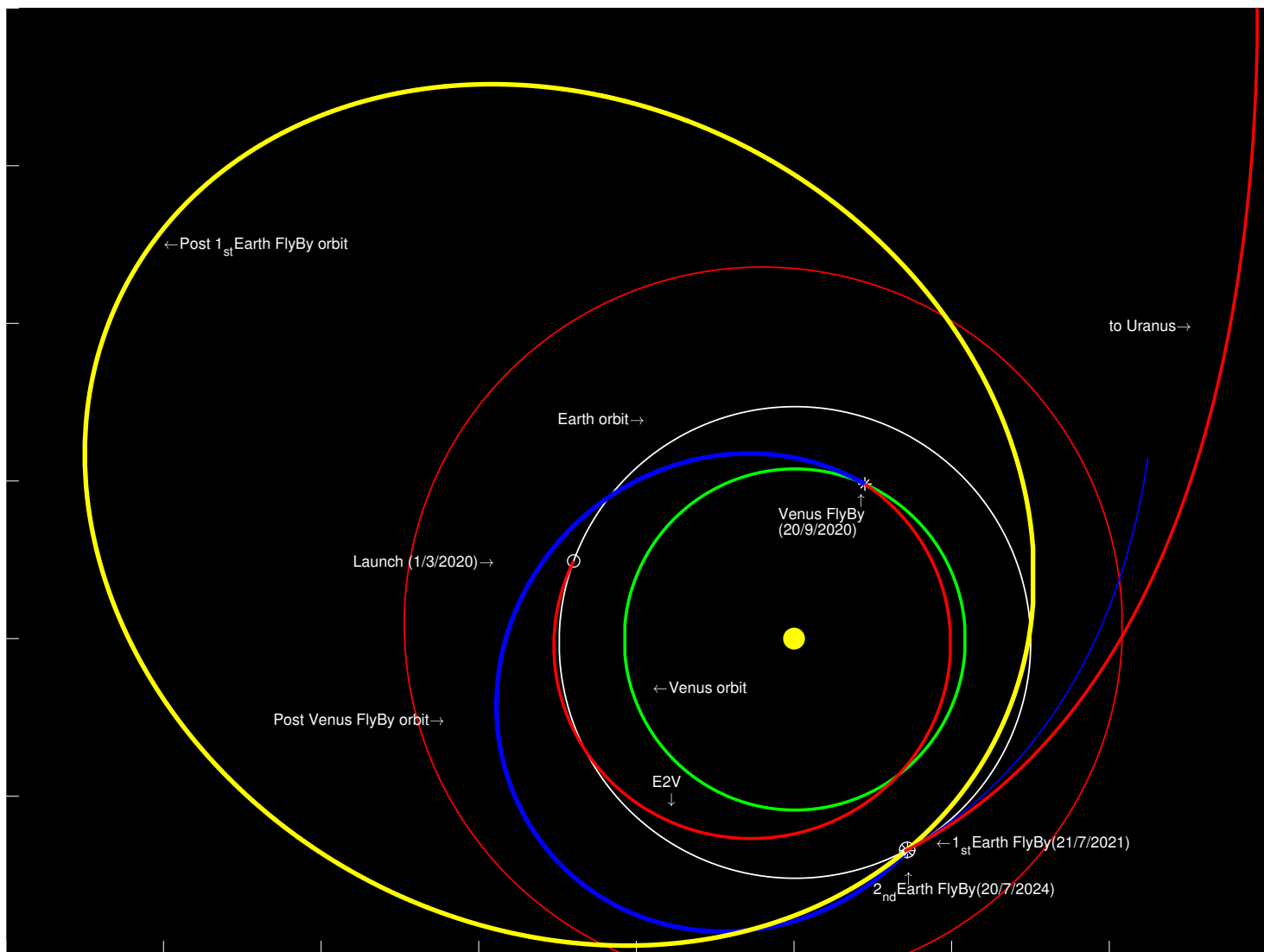


Figura 11: Traiettorie eliocentriche

5.7 Traiettorie eliocentriche 5 TRAIETTORIA CON I FLYBYS

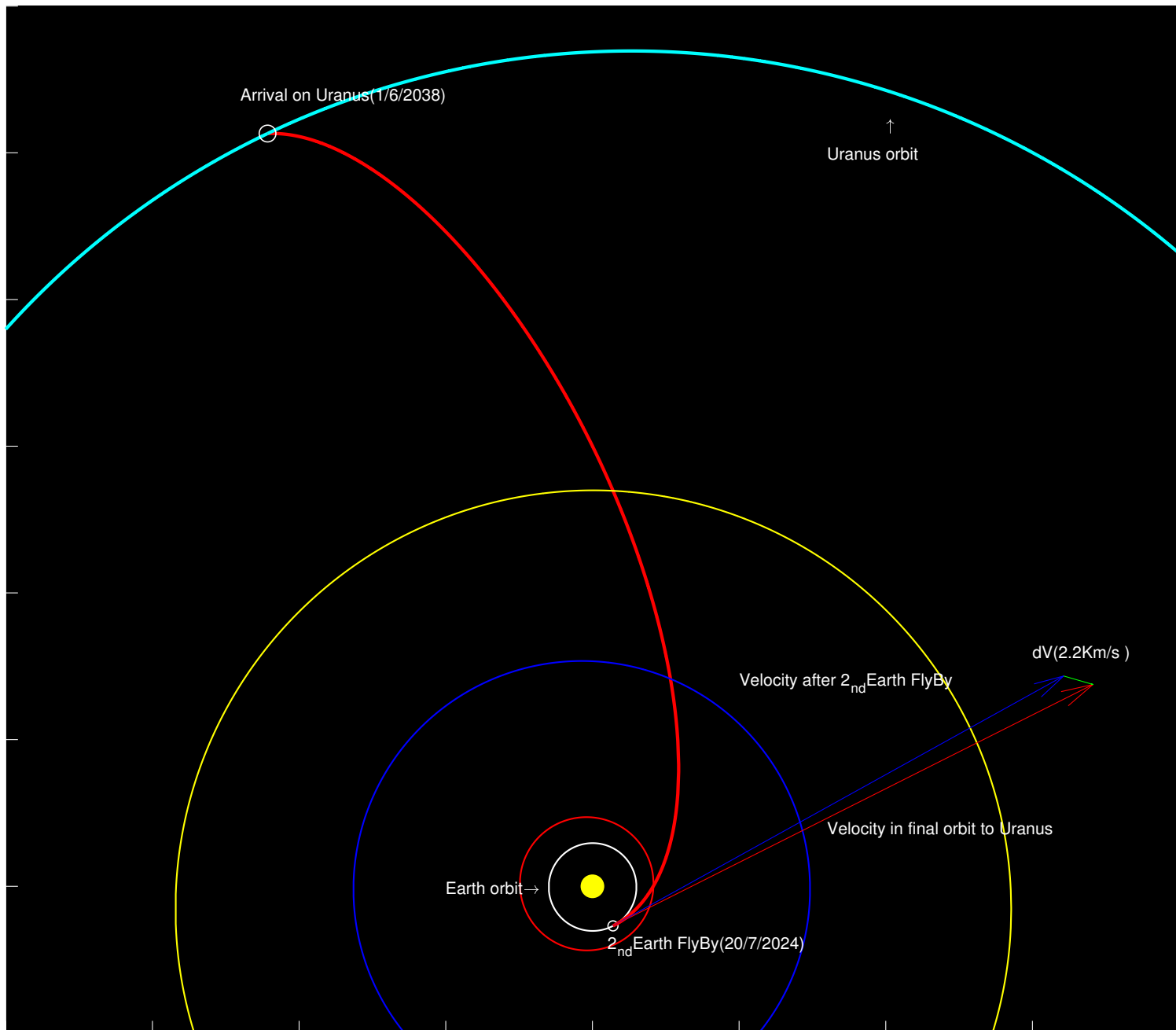


Figura 12: Traiettoria per Urano

## 5.8 Analisi consumi e durata

Il costo totale della missione, considerando anche i cambi di piano orbitale da equatoriale Terrestre al piano dell'eclittica e dal piano dell'eclittica al piano polare di Urano, uguali a quelli calcolati nella sezione della Hohmann Transfer, si ha :

$$\Delta V_{tot} = \Delta V_{plane_{Earth}} + \Delta V_{dep} + \Delta V_{arr} + \Delta V_{plane_{Uranus}} = 18 \frac{Km}{s}$$

che risulta quindi essere minore di quello relativo alla traiettoria di Hohmann.

La durata totale approssimativa (trascurando i tempi di attraversamento delle SOI planetarie) è di circa 18 anni, comparabile quindi alla durata della Hohmann Transfer, con la quale la sonda impiegherebbe due anni in meno per giungere direttamente su Urano dalla Terra.

## 6 Conclusioni

Tutte le considerazioni e i calcoli effettuati in questo lavoro valgono in un progetto preliminare e non hanno certo la pretesa di essere "realistici" : i costi di missione in termini di  $\Delta V$  oggi attualmente realizzabili sono molto minori di quelli ottenuti qui, e tempi di missione troppo lunghi sono proibitivi per il costo del controllo da Terra. Fatte queste premesse, si riportano i risultati principali nelle seguenti tabelle.

Manovra	Data	$\Delta V (Km/s)$
Cambio piano(Terra)	12/07/2020	3.15
Fuga iperbolica	12/07/2020	7.98
Cattura iperbolica	26/07/2036	6.6
Cambio piano(Urano)	26/07/2036	2
$\Delta V$ totale	/	19.77

Tabella 1: Hohmann Transfer

Manovra	Data	$\Delta V (Km/s)$
Cambio piano(Terra)	1/03/2020	3.15
Fuga iperbolica	1/03/2020	4
Correzione	20/07/2024	2
Cattura iperbolica	1/06/2038	6.7
Cambio piano(Urano)	1/06/2038	2
$\Delta V$ totale	/	18

Tabella 2: Traiettoria con i FlyBys

## 7 Guida al codice

Per riprodurre tutti i risultati e i grafici è sufficiente eseguire i 3 script *Direct\_Hohmann\_Transfer\_script.m* , *Departure\_Date\_Patched\_conics.m* , *Patched\_conics\_script.m* .

Il codice è strutturato come segue :

- Code/: funzioni e script per riprodurre tutti i risultati;
- Algorithms\_from\_Curtis/: funzioni prese(e alcune delle quali modificate) da<sup>[2]</sup> ;
- Graphics/: funzioni per la produzione dei grafici e animazioni;
- porkchop/: codice reperito da<sup>[1]</sup> ;

## Riferimenti bibliografici

<sup>1</sup> "PorkChops"

<https://it.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/39248-interplanetary-pork-chop-plots.html>.

<sup>2</sup> "Orbital Mechanics For Engineering Students" , Howard D. Curtis, Third Edition