ISPGAYA
instituto superior politécnico

AM I - Licenciatura - EI

Resposta da Lista 1.

Joana Becker Paulo

jbpaulo@ispgaya.pt

Questão 1

A partir das seguintes definições resolva, em seguida, o que se pede.

Definição 1 *Se elementos diferentes no domínio de uma função sempre possuirem imagens diferentes, esta função é chamada de* ***Injetiva****.*

Simbolicamente:

$f : A \to B$ *é injetora se* $\forall x_1, x_2 \in A \to x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dica: Portanto, basta verificar se existe ou não dois elementos do domínio que possuem a mesma imagem no contradomínio. Análise gráfica: basta observar que os valores diferentes do domínio geram sempre imagens diferentes.

a)Seja $f : R \to R$ com lei de formação $f(x) = 3x$ podemos dizer que é uma função injetiva, a partir da definição acima? Justifique sua resposta.

É injetiva, porque vemos que se pegarmos qualquer valor para x a sua imagem será sempre o seu triplo. Então se $x_1 \neq x_2$ temos $f(x_1) = 3x_1$, $f(x_2) = 3x_2$, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

b) Dada a função $f : R \to R$ com lei de formação $f(x) = x^2$ podemos dizer que é uma função injetiva ? Verifique.

Como é possível observar o domínio é o conjunto dos números reais $\mathbf{R}$, desta forma contempla-se também os números reais negativos. Esta é uma função não linear e se substituirmos um valor de x negativo (o seu oposto) temos que:

$f(-a) = (-a)^2 = a^2$ e $f(a) = a^2$. Portanto, a função não é injetiva. Podemos dar um contra-exemplo numérico: $f(-3) = (-3)^2 = 9$ e $f(3) = 9$

Questão 2

Chamamos de função **Sobrejetiva** quando o contradomínio da função é igual ao seu conjunto imagem, ou seja, todos os elementos do contradominio estão relacionados a um elemento do domínio. Dizemos que este é um caso especial de função.

Dica: As funções polinomiais do primeiro grau são sempre sobrejetoras quando definidas da forma: $f : R \to R$.

Será que as funções quadráticas, ou seja, funções polinomiais do segundo grau, são sobrejetivas?

a) Suponha a função quadrática $f : R \to R$ com lei de formação: $f(x) = x^2$ é sobrejetora? Justifique a sua resposta

$Domf$: $\mathbf{R}$ e Imf : R^+, portanto os valores negativos de y não possuem correspondentes no domínio. Por exemplo: $y = -2$ não existe nenhum valor real de x tal que $f(x) = -2$, logo a função não é sobrejetiva.

b) Agora considere a mesma função $f(x) = x^2$, mas estando definida da forma: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, o que se pode dizer desta função "nestas condições"? É sobrejetora?.

Como agora o conjunto imagem é igual ao contradominio, a função $f(x) = x^2$, já passa a ser sobrejetiva.

Portanto, temos sempre que prestar muita atenção na definição da função. Mas, de modo geral, as funções quadráticas não são sobrejetivas, desde que sempre se esteja atento a definição do domínio e contradomínio.

Questão 3

Uma função **bijetiva** é o tipo de função matemática que relaciona cada elemento do domínio A a um elemento diferente no contradomínio B e além disto, todo elemento do contradomínio B é imagem de A. Trata-se do que chamamos de correspondência biunívoca, pois os elementos do domínio A possuem correspondentes únicos no contradomínio B. Podemos observar que uma função bijetora é aquela que é injetora e sobrejetora.

Partindo, destas definições e considerando a função definida por

$$f(x) = 5x + 2.$$

Prove que f é bijetiva.

* **f é injetiva:**
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Se $f(a) = f(b)$, então

$$5a + 2 = 5b + 2 \quad \Rightarrow \quad a = b.$$

Logo, f é injetiva.

* **f é sobrejetiva:**
Seja $y \in \mathbb{R}$. Como

y = 5x + 2

Função polinomial do primeiro grau, existe sempre $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$. Assim, f é sobrejetiva.

* Como f é injetiva e sobrejetiva, conclui-se que f é **bijetiva**.

Questão 4 Como definido em sala de aula, sabemos que de maneira “nada formal” uma função inversa é encontrada algebricamente quando invertemos as variáveis na lei de formação. Ou seja, x passa a ser y e y passa a ser x, isto é x por $f(x)$ e $f(x)$ por x. A função $f^{-1}(x)$ é aquela que faz o oposto do que a função faz. Formalmente temos que:

Definição 2 *Seja $f : A \to B$ em que $f(a) = b$ então a sua inversa $f^{-1}(x) : B \to A$ tal que $f(b) = a$.*

Após esta lembrança, resolva os itens abaixo, indicando as suas funções inversas:

a) Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 6$ a sua inversa é?:

$y = 2x - 6 \to x = 2y - 6 \to -2y = -6 - x \to y = \frac{6+x}{2}$ ou ainda $y = 3 + \frac{x}{2}$

b) Utilizando a mesma função da questão 3: $f(x) = 5x + 2$, apresente a expressão de $f^{-1}(x)$.

$y = 5x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y-2}{5}$

c) Descreva a inversa da função exponencial: $f(x) = 3^x$.

$y = 3^x$ então $x = 3^y$, este é um caso “especial” que para conseguirmos “descer” o y temos que utilizar os nossos conhecimentos sobre logaritmos, uma vez que, estamos diante de uma função exponencial e ja sabemos que sua inversa é uma função logaritmica.

Vamos precisar aplicar o logaritmo de base 3 dos dois lados da igualdade: $log_3^x = log_3^{3^y}$. Por propriedades dos logaritmos temos que: $log_3^x = ylog_3^3 \rightarrow log_3^x = y.1 \Rightarrow y = log_3^x$.

Portanto, a inversa da função 3^x é $y = log_3^x$.

Questão 5 As funções f e g são dadas por $f(x) = 5x - 3$ e $g(x) = -2x + 3k$. Sabe-se que $f(0) = 1 + g(0)$. Qual o valor de $g(2)$?

Se $x = 0$ tem-se que: $f(0) = -3$, sendo assim: $f(0) = 1 + g(0)$ pode ser trabalhada algebricamente da seguinte maneira:

$$-4 + 0 = 3 \cdot k$$
$$3 \cdot k = -4$$
$$k = \frac{-4}{3}$$

Para a segunda pergunta da questão temos que:

$$g(2) = -2 \cdot 2 + 3 \cdot (\frac{-4}{3})$$
$$g(2) = -4 - 4$$
$$g(2) = -8$$

Questão 6 Considere a função:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se} \quad x \leq -1 \\ 3x + 2, & \text{se} \quad -1 < x \leq 7 \\ 1, & \text{se} \quad x > 7 \end{cases}$$

Determine o valor da expressão:

E $= g(-2) + g(-1) + g(5) + g(7) + g(10)$.

Basta observar os valores que são atribuídos a x na função g, verificar a que intervalo pertence este valor de x, para aplicar na ramificação correta da função g. Lembramos que esta função é conhecida pelo nome: função por partes ou função por ramos.

$$g(-2) = x^2 - 1$$

$$g(-2) = 4 - 1$$

$$g(-2) = 3$$

$$g(-1) = x^2 - 1$$

$$g(-1) = (-1)^2 - 1$$

$$g(-1) = 0$$

$$g(5) = 3x + 2$$

$$g(5) = 3 \cdot 5 + 2$$

$$g(5) = 15 + 2$$

$$g(5) = 17$$

$$g(7) = 3x + 2$$

$$g(7) = 3 \cdot 7 + 2$$

$$g(7) = 21 + 2$$

$$g(7) = 23$$

$$g(10) = 1$$

$$E = 3 + 0 + 17 + 23 + 1$$

$$E = 44$$

Questão 7 O gráfico de $f(x) = x^2 + bx + c$, onde b e c são constantes, passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 2)$. Então, $f(\frac{-2}{3})$ vale?

O ponto $P(0, 0)$ significa que $P(x, y)$, tem $x = 0$ e $y = 0$, então:

$$f(0) = 0$$

$$c = 0$$

O ponto $P(1, 2)$ significa que $P(x, y)$ tem $x = 1$ e $y = 2$:

$$f(1) = 1 + b + 0$$

$$2 = 1 + b$$

$$b = 1$$

Assim, $f(x) = x^2 + x$ e $f(\frac{-2}{3}) = -\frac{2}{9}$

Questão 8 Dada a função $y = -2x + 3$ de domínio $\mathbb{R}$:

a) Construa o gráfico da função.

Você pode fazer a seguinte análise:

* O coeficiente angular da função (quer trata-se de uma reta) é um número negativo, o que implica que a função será decrescente.

* O coeficiente independente b, indica o valor que "toca"o eixo das ordenadas.

* Porém, podes sempre criar uma tabela, atribuindo valores para x, descobrindo, assim, o valor de f(x) e por consequência desenhar o gráfico "ligando"os pontos. Vale lembrar que para a construção de uma reta, basta que se conheça apenas dois pontos.

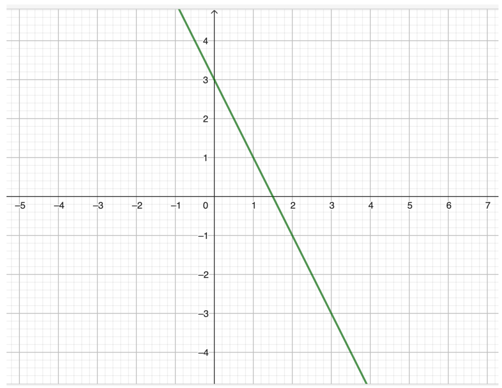


Figura 1: Figura encontrada utilizando o software GeoGebra.

b) Verifique qual é a raiz da função.

Fazendo $y = 0$, temos $-2x + 3 = 0$, $x = \frac{3}{2}$. Logo, a raiz da função é $\frac{3}{2}$ e o gráfico corta Ox em $(\frac{3}{2}, 0)$.

c) Analise a monotonicidade desta função.

Essa função é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$, porque, a medida que o valor de x, o valor de y diminui.

Questão 9 Utilizando mais uma vez, a função da questão 3: $f(x) = 5x + 2$, calcule as interseções do gráfico da função com os eixos coordenados.

Interseções com os eixos coordenados

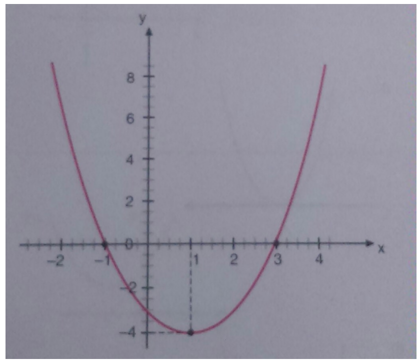
* **Eixo** $\boldsymbol{Oy}$**:** corresponde a $x = 0$.
$f(0) = 5 \cdot 0 + 2 = 2$.
Logo, o ponto de interseção é $(0, 2)$.

* **Eixo** $\boldsymbol{Ox}$**:** corresponde a $y = 0$.

$0 = 5x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{2}{5}$.
Logo, o ponto de interseção é $\left(-\frac{2}{5}, 0\right)$
.

Questão 10

Observe o gráfico e, em seguida, responda às questões:



a) Quais são as coordenadas do ponto em que a parábola intersecta o eixo das abscissas?

$(-1, 0)$ e $(3, 0)$

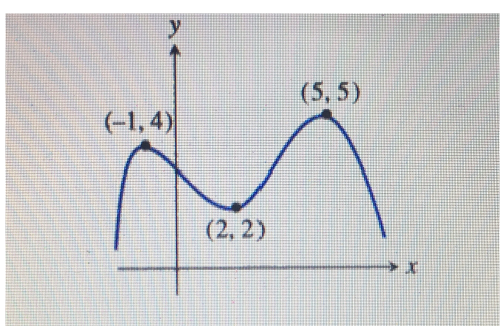
b) Quais são as coordenadas do ponto em que a parábola intersecta o eixo das ordenadas?

$(0, -3)$

c) A função tem valor máximo ou mínimo? Caso sua resposta seja sim, identifique esses valores e os pontos de máximo e/ou de mínimo.

A função tem valor mínimo -4 e seu ponto de mínimo é 1, isto é: $(1, -4)$.

Questão 11 No gráfico abaixo, identifique os pontos de máximo e mínimos locais (verifique e identifique, caso exista: máximo e/ou mínimo absoluto).



Máximos locais: $(-1, 4)$ e $(5, 5)$. Mínimo local: $(2, 2)$. Existe máximo absoluto: $(5, 5)$. Neste gráfico o mínimo local também é o mínimo absoluto da função, neste domínio.

Questão 12

a) f(x) $= 5x^3 - x^2 + 2$

Função Polinomial, sem restrição $D = \mathbb{R}$.

b) r(x) $= \frac{1}{x^2-4}$

Função Racional, restrição $(x^2 - 4 \neq 0)$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \ e \ x \neq 2\}$.

c) g(x) $= \frac{1}{4-x^2}$

Função Racional, restrição $(4 - x^2 \neq 0)$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \ e \ x \neq 2\}$.

d) h(x) $= \sqrt{3x-2}$

Função Irracional, $n = 2$, restrição $(3x - 2 \geq 0)$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{2}{3}\}$.

e) j(x) $= \sqrt{x+7}$

Função Irracional, $n = 2$, restrição $(x + 7 \geq 0)$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -7\}$.

f) k(x) $= \frac{2x+1}{\sqrt{x-3}}$

Função Racional e com Denominador Irracional, duas restrições $(x - 3 > 0)$, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

g) $y = \sqrt{2}$

É uma constante real (a raiz de 2 é um número fixo). Domínio: $\mathbb{R}$.

h) $y = -x + 2$

Função polinomial de grau 1. Domínio: $\mathbb{R}$.

i) $y = -x^2 - x + 2$

Função Polinomial de grau 2 (sinal invertido não altera domínio). Domínio: $\mathbb{R}$

j) $y = \sqrt{2-x}$

A raiz quadrada exige argumento não negativo: $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$. Domínio: $(-\infty, 2]$

l) $y = -\sqrt{2-x}$

A condição é a mesma da raiz anterior: $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$. O sinal menos multiplica o valor da raiz, não altera o domínio. Domínio: $(-\infty, 2]$.

m) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

Para que a expressão faça sentido precisamos que o denominador seja diferente de zero e o que está no interior da raiz não negativo: $2 - x > 0 \quad \Rightarrow \quad x < 2$

(Note que aqui usamos estrita $>$ porque se $2 - x = 0$, a raiz é zero e o denominador ficaria nulo.)

Domínio: $(-\infty, 2)$.

n) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$

Denominador $\neq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$. Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

o) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Exigimos $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) \geq 0$. Pela regra dos sinais: $x \leq -2$ ou $x \geq 2$. Domínio: $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$.

p) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$

Precisamos de $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow x < -2$ ou $x > 2$. Domínio: $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$.

q) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

Requeremos $-x^2 + 4x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow -(x^2 - 4x + 3) \geq 0$. Logo, $x^2 - 4x + 3 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) \leq 0$.

Intervalo entre as raízes: $1 \leq x \leq 3$.

Domínio: $[1, 3]$.

r) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x}$

Denominador $\neq 0 \Rightarrow x(x-2) \neq 0 \Rightarrow x \neq 0, 2$. Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

s) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - x - 6}}{x - 1}$

Precisamos de $x^2 - x - 6 \geq 0$. Resolvendo: $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2) \geq 0$. Logo $x \leq -2$ ou $x \geq 3$.

Além disso, $x \neq 1$ (denominador). Domínio: $(-\infty, -2] \cup [3, \infty)$.

t) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$

A raiz cúbica $\sqrt[3]{x-2}$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ (índice ímpar). Contudo, como está no denominador, não pode ser zero:

$\sqrt[3]{x-2} \neq 0 \iff x - 2 \neq 0 \iff x \neq 2.$

Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

u) $(f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$

Escrevendo $(x+1)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2$. Como o índice da raiz é 3 (ímpar), $\sqrt[3]{x+1}$ existe para todo (x). Logo a função está definida para todos os reais. Domínio: $\mathbb{R}$

v) $\mathrm{f}(x) = \sqrt[5]{x^2 - 4x + 3}$

Quinta- -ésima raiz (índice 5, ímpar) aceita radicando negativo ou positivo: a expressão está definida para todo (x). Domínio: $\mathbb{R}$.

x) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2 - 1}$

A raiz cúbica existe para todo x, mas o denominador não pode ser zero:

$x^2 - 1 \neq 0 \iff x \neq \pm 1$

Portanto excluímos $x = 1$ e $x = -1$. (Note que em $x = 1$ a raiz cúbica é $\sqrt[3]{0} = 0$, mas isso não compensa o denominador nulo.) Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

w) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$

Escrevendo $(x-2)^{2/3} = \left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2$. A raiz cúbica é definida para todo (x), mas o denominador não pode ser nulo. $\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^2 = 0$ acontece só quando $\sqrt[3]{x-2} = 0$, i.e. $x = 2$

Assim: $x \neq 2$

Não há restrição por sinal porque o índice 3 é ímpar. Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

z) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}}{\sqrt{x-1}}$

O numerador (raiz cúbica) está definido para todo (x). O denominador é uma raiz quadrada $\sqrt{x-1}$: exige-se $x - 1 \geq 0$ e, porque está no denominador, $\sqrt{x-1} \neq 0$.
Assim: $x - 1 > 0 \iff x > 1$

Adicionalmente não há outras exclusões (o numerador pode ser zero sem problema). Domínio: $(1, \infty)$

Questão 13: Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$$\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 \sqrt{x+1} = -1$$

As soluções da equação pertencem ao conjunto $\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge x + 1 > 0\}$

Como $x > 0 \wedge x + 1 > 0 \iff x > 0 \wedge x > -1 \iff x > 0$, temos que $x \in]0, +\infty[\cap]-1, +\infty[$ (ou seja, $x \in]0, +\infty[$), e resolvendo a equação, vem que:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 \sqrt{x+1} = -1 \\
\iff\ &\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 (x+1)^{1/2} = -1 \\
\iff\ &\frac{1}{2}\log_2 x - \frac{1}{2}\log_2 (x+1) = -1 \\
\iff\ &\frac{1}{2}(\log_2 x - \log_2 (x+1)) = -1 \\
\iff\ &\log_2 x - \log_2 (x+1) = -2 \\
\iff\ &\log_2 \left(\frac{x}{x+1}\right) = -2 \\
\iff\ &\frac{x}{x+1} = 2^{-2} \\
\iff\ &\frac{x}{x+1} = \frac{1}{4} \\
\iff\ &4x = x + 1 \quad (x + 1 \neq 0 \text{ no domínio}) \\
\iff\ &3x = 1 \\
\iff\ &x = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Assim, como $\frac{1}{3} \in]0, +\infty[$, o conjunto solução da equação é $\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Questão 14: Sabendo que para isolar o x em uma expressão do tipo: $e^x = a$, sendo a um número qualquer, aplica-se ln em ambos os lados e utiliza-se a propriedade $ln(e^x) = x$.

Esta propriedade que transforma uma exponencial em logaritmo natural (ln) é a inversa da função exponencial. Ou seja, de maneira mais formal temos que:

Definição 3 *Considere a função exponencial f:* $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$*, definida por:* $f(x) = e^x$*. A função inversa* f^{-1} *é o logaritmo natural, denotado por* $ln(x)$*, tal que:* $f^{-1}(x) = ln(x)$*. Então, por definição de função inversa, temos:* $ln(e^x) = x$*,* $\forall x \in \mathbf{R}$ *e* $e^{ln(x)} = x$*,* $\forall x \in \mathbf{R}^+$*.*

De maneira mais simplificada: O logaritmo natural é a função inversa da exponencial de base e, e portanto: $ln(e^x) = x$ e $e^{ln(x)} = x$.

Agora, partindo, desta revisão: Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{3}$$

Como $e^x > 0$ e $e^{-x} > 0$, então $e^x + e^{-x} \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, pelo que resolvendo a equação, temos:

$$\tfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \tfrac{1}{3}$$

$$\begin{aligned}
\iff 3(e^x - e^{-x}) &= e^x + e^{-x} \\
\iff 3e^x - 3e^{-x} &= e^x + e^{-x} \\
\iff 3e^x - e^x - 3e^{-x} - e^{-x} &= 0 \\
\iff 2e^x - 4e^{-x} &= 0 \\
\iff 2e^x - 4 \times \frac{1}{e^x} &= 0 \\
\iff 2e^x \times \frac{e^x}{e^x} - \frac{4}{e^x} &= 0 \\
\iff \frac{2(e^x)^2 - 4}{e^x} &= 0 \\
\iff 2(e^x)^2 - 4 = 0 \wedge \quad \underbrace{e^x \neq 0}_{\text{Cond. universal}} & \\
\iff 2e^{2x} &= 4 \\
\iff e^{2x} &= 2
\end{aligned}$$

Agora, vamos aplicar a propriedade descrita no enunciado:
$\iff 2x = \ln 2$
$\iff x = \frac{\ln 2}{2}$

$$\text{C.S.} = \left\{ \frac{\ln 2}{2} \right\}$$

Questão 15: Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + e^{bx}$, em que a e b são números reais.

Sabendo que o gráfico da função f contém os pontos de coordenadas $(1, 5)$ e $(2, 7)$, determine os valores de a e de b.

Substituindo as coordenadas dos pontos na expressão algébrica da função, temos que:

$$\begin{aligned} f(1) = 5 &\iff a + e^{b\times 1} = 5 \iff a = 5 - e^b \\ f(2) = 7 &\iff a + e^{b\times 2} = 7 \iff a = 7 - e^{2b} \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} 5 - e^b &= 7 - e^{2b} \\ \iff e^{2b} - e^b - 2 &= 0 \\ \iff (e^b)^2 - e^b - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Considerando $y = e^b$, temos que:

$$\text{y}^2 - y - 2 = 0 \iff y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2\times 1} \iff y = -1 \vee y = 2$$

Assim, como $y = e^b$, temos que:

$$\underbrace{e^b = -1}_{\text{Cond. impossível}} \vee e^b = 2 \iff b = \ln 2$$

É importante lembrar que, não consideramos nesta resposta como valida: $\underbrace{e^b = -1}$, porque por definição temos que: $e^x > 0$, $\forall x \in \mathbf{R}$, ou seja, a função exponencial, como já vimos em sala de aula, através de seus gráficos, nunca toma valores negativos, a sua imagem esta no intervalo $(0, +\infty)$

$a = 5 - e^b = 5 - 2 = 3$

Porém, nos falta "encontrar" o valor de b, para isto usamos a propriedade que já conhecemos, aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da igualdade: $e^b = 2$, temos por definição de logaritmo: $b = ln(2)$.

Observação: Algumas questões, abaixo, são de escolha múltipla, mas em todas, é preciso justificar a sua escolha.

Questão 16: Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_a\left(\frac{b}{a}\right) = 2$.

Qual é o valor de $\log_a\left(\sqrt{a^3} \times b^2\right)$?

$$\text{(A) } \frac{13}{2} \quad \text{(B) } \frac{15}{2} \quad \text{(C) } \frac{19}{2} \quad \text{(D) } \frac{21}{2}$$

Recorrendo às propriedades dos logaritmos, temos que:

$$\log_a\left(\frac{b}{a}\right) = 2 \iff \log_a b - \log_a a = 2 \iff \log_a b - 1 = 2 \iff \log_a b = 2 + 1 \iff \log_a b = 3$$

E assim:

$$\begin{aligned}\log_a\left(\sqrt{a^3} \times b^2\right) &= \log_a \sqrt{a^3} + \log_a b^2 \\ &= \log_a\left(a^{\frac{3}{2}}\right) + 2\log_a b \\ &= \frac{3}{2} \times \log_a a + 2 \times 3 \\ &= \frac{3}{2} \times 1 + 6 \\ &= \frac{3}{2} + \frac{12}{2} \\ &= \frac{15}{2}\end{aligned}$$

Resposta: **Opção B**

Questão 13: Na faculdade de Engenharia elétrica, Arquimedes perguntou sobre a existência de um instrumento para medir a intensidade de sons. A intensidade de um som é medida na unidade conhecida decibel, usando-se o instrumento Decibelímetro. Se um som tem intensidade I_d (em Watts por metro quadrado) seu valor correspondente, em decibeis é obtido pela fórmula

$$I_d = 10 \cdot log(\frac{I}{I_o}),$$

onde $I_o = 10^{-12} W/m^2$ representa a intensidade sonora de referência de um som muito fraco percebido pelo ouvido humano. Se um som é de intensidade $I = 10 w/m^2$, então o valor em decibeis desse som é:

a) 90

b) 100

c) 110

d) 120

e) 130

$Id = 10 \cdot log(\frac{10}{10^{-12}})$

$Id = 10 \cdot log 10 \cdot 10^{12}$

$Id = 10 \cdot log 10^{13}$

$Id = 10 \cdot 13 \cdot log_{10}^{10}$

Como se sabe log de logaritmando igual ao valor de sua base é 1, isto é: $log_{10}^{(10)}$

$Id = 130$

Opção E

Questão 14: Uma turma de uma escola recebeu a seguinte questão em sua prova: Um dos valores de x que soluciona a equação $log_2(-x^2 + 32) = 4$ é igual ao número de centros culturais localizados nas proximidades do centro da cidade. Esse número é:

a) 13

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

$log_2^{(-x^2+32)} = 4$

$2^4 = -x^2 + 32$

$x^2 = 32 - 16$

$x^2 = 16$

$x = \pm 4$

É preciso analisar o contexto do enunciado e verificar que não é possível ter número negativo. Portanto, vamos considerar apenas: $x = 4$

Opção B

Questão 15: A escala Richter mede a magnitude de um terremoto. Os terremotos originam-se do movimento das placas tectônicas. O atrito de uma placa com outra forma ondas mecânicas que são responsáveis pelas vibrações que causam o terremoto. O sismográfo mede a amplitude e a frequência dessas vibrações utilizando uma equação logarítmica. A partir da qual ele calcula a magnitude do terremoto. Suponha que a magnitude de um terremoto pode ser calculada pela expressão $M = 3,3 + log(A \cdot f)$, onde A é a amplitude da onda e f é a frequência da onda. Calcule a magnitude desse terremoto sabendo que ele teve amplitude 1000 micromêtros e frequência 0.1hz.

$M = 3.3 + log_{10}((1000).0.1)$

$M = 3.3 + log_{10}^{100}$

$M = 3.3 + log_{10}^{10^2}$

$M = 3.3 + 2$

$M = 5.3$

Questão 16: O montante M é a quantidade a ser recebida após a aplicação de um capital C, a taxa i, durante certo tempo t. No regime de juros compostos, esse montante é calculado pela relação $M = C \cdot (1 + i)^t$. Considere um capital de 10.000 euros, aplicado a uma taxa de 12% ao ano durante 4 anos. Qual seria o montante ao final dessa aplicação ?

$M = 10.000(1 + \frac{12}{100})^4$

$M = 10.000(1 + 0.12)^4$

$M = 10.000 \cdot (1.5735)$

$M = 15.735$

Questão 5: Certo tratamento médico consiste na aplicação de uma determinada substância a um paciente. Admita que a quantidade Q de substância que permanece no paciente, t horas após sua aplicação, é dada, em miligramas, por $Q(t) = 250^{1-0,1t}$. Após 10horas de sua aplicação, a quantidade que permanece no paciente é:

a) 250mg

b) 10mg

c) 5mg

d) 1mg

$Q(10) = 250^{1-0.1\cdot 10}$

$Q(10) = 250^{1-1}$

$Q(10) = 1\text{mg}$

Opção D

Questão 22: Num laboratório cuja temperatura ambiente é constante, aqueceu-se uma substância até atingir uma certa temperatura, superior à temperatura ambiente, e, a seguir, deixou-se arrefecer essa substância durante uma hora.

Admite que a temperatura dessa substância, em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento, é dada por

$$T(t) = 20 + 100e^{-kt}, \quad 0 \leq t \leq 60$$

em que k é uma constante real positiva.

Durante o arrefecimento, houve um instante t_1 em que a temperatura da substância foi 30°C.

Qual é o valor de k?

$$\text{(A) } \frac{\ln 10}{t_1} \quad \text{(B) } t_1 - \ln 10 \quad \text{(C) } \frac{\ln 10}{t_1} \quad \text{(D) } t_1 + \ln 10$$

Como no instante t_1 a temperatura da substância foi 30°C, temos que:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}(\mathrm{t}_1) = 30 \quad &\Longleftrightarrow \; 20 + 100e^{-k\cdot t_1} = 30 \\
\Longleftrightarrow \; 100e^{-k\cdot t_1} = 30 - 20 & \\
\Longleftrightarrow \; e^{-k\cdot t_1} = \frac{10}{100} & \\
\Longleftrightarrow \; e^{-k\cdot t_1} = \frac{1}{10} & \\
\Longleftrightarrow \; \ln\left(\frac{1}{10}\right) = -k \cdot t_1 & \\
\Longleftrightarrow \; k \cdot t_1 = -\ln\left(\frac{1}{10}\right) & \\
\Longleftrightarrow \; k = \frac{-(\ln 1 - \ln 10)}{t_1} & \\
\Longleftrightarrow \; k = \frac{-0 + \ln 10}{t_1} & \\
\Longleftrightarrow \; k = \frac{\ln 10}{t_1} &
\end{aligned}
$$

Resposta: **Opção C**