

II. Álgebra de matrizes

II.1. Operações com matrizes

Convenções de escrita

Se A é uma matriz de ordem $m \times n$, podemos escrever A como

$$A = (\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \cdots \quad \vec{a}_n)$$

onde $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ são as colunas de A , ou

como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

onde $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ são os elementos (ou entradas) da matriz.

Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, temos

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_{21} = 0, \quad a_{13} = 8.$$

Alguma terminologia

Matriz linha: matriz com uma só linha

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matriz coluna: matriz com uma só coluna

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Matriz quadrada: matriz com tantas linhas como colunas

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz nula: matriz com todos os elementos nulos

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Adição de matrizes

Só se podem somar matrizes da mesma ordem.

Somam-se os elementos nas mesmas posições.

Exemplo 1.1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Se $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, a operação $A + C$ não está definida, pois A e C não são de mesma ordem. (48)

Multiplicação de matriz por escalar

Multiplicam-se todos os elementos da matriz pelo escalar.

Exemplo 8.2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = -1 \quad \gamma = -2$$

$$\alpha A = 2 \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\beta A = (-1)A = -A = - \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A + \gamma B = A + (-2)B = A - 2B =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -6 & -1 \\ 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

Notações

$-A$ é o mesmo que $(-1)A$.

$A - B$ é o mesmo que $A + (-B)$.

Teorema 1

Sejam A, B e C matrizes da mesma ordem. Sejam α

e β escalares. Temos:

$$\text{i)} A + B = B + A$$

$$\text{ii)} (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$\text{iii)} A + 0 = \cancel{0} A$$

$$\text{iv)} \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$\text{v)} (\alpha + \beta) A = \alpha A + \beta A$$

$$\text{vi)} \alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$$

Observação

No propriedade iii) deste teorema, " 0 " denota a matriz nula da ordem apropriada (ou seja, da mesma ordem da matriz A).

Multiplicação de matrizes

(50)

Já conhecemos a multiplicação de matriz por vetor: $A\vec{x}$.

A multiplicação de duas matrizes, A e B , é concebida de modo a que a equação $A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}$ seja satisfeita.

Deste modo, a multiplicação de matrizes é equivalente à composição de transformações lineares:

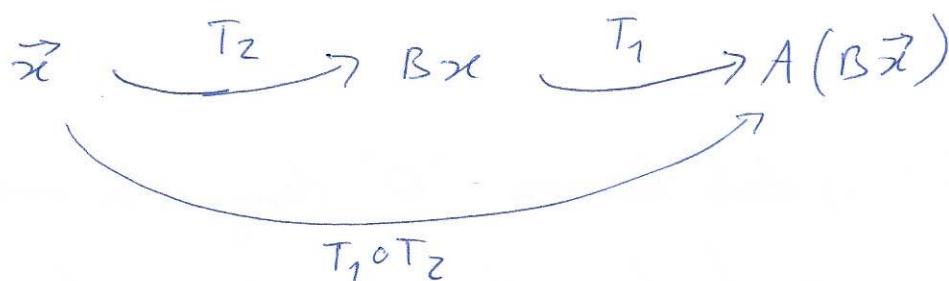
Sejam A e B as matrizes canônicas das transformações T_1 e T_2 , respectivamente.

$$T_1: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$
$$\vec{x} \mapsto A\vec{x}$$

$$T_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$$
$$\vec{x} \mapsto B\vec{x}$$

$$T_1(\vec{x}) = A\vec{x}$$

$$T_2(\vec{x}) = B\vec{x}$$



$$(T_1 \circ T_2)(\vec{x}) = A(B\vec{x})$$

$$\text{Se } A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}, \text{ então } (T_1 \circ T_2)(\vec{x}) = (AB)\vec{x}$$

e a matriz canônica da transformação $T_1 \circ T_2$ será AB .

A multiplicação de A por B é então dada por

$$AB = (A\vec{b}_1 \quad A\vec{b}_2 \cdots A\vec{b}_p)$$

onde $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p$ são as colunas da matriz B .

Exemplo 1.3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = (A\vec{b}_1 \quad A\vec{b}_2 \quad A\vec{b}_3) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

Observações

- a) Esta definição generaliza a nossa anterior definição de multiplicação de matriz por vetor.
- b) A multiplicação AB só está definida se A tiver tantas colunas como B tem linhas. Se A é de ordem $m \times n$, B deve ser de ordem $n \times p$. Neste caso, AB será de ordem $m \times p$.

Regras práticas para o cálculo de AB

(52)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix}$$

$$AB = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im}} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccccc} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{ij}} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{mp} \end{array} \right)$$

O elemento na posição i, j da matriz AB é obtido fazendo o produto escalar da linha i de A com a coluna j de B .

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{mj}$$

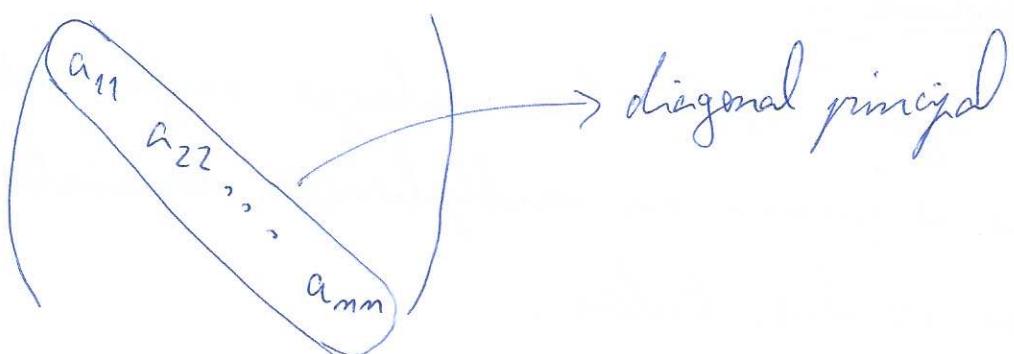
$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \boxed{c_{ij}} & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

(Posição " i, j " significa ~~linha~~ linha i , coluna j)

Exemplo 1.4

Sejam A e B como no exemplo 1.3. Vamos a calcular AB , agora com a regra regular.

A diagonal principal de uma matriz quadrada é composta pelas posições $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$:



Uma matriz diagonal é uma matriz quadrada cujos elementos fora da diagonal principal são todos nulos, por exemplo, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matriz identidade

A matriz identidade de ordem n , que se designa I_n (ou apenas I), é a matriz quadrada de ordem n , diagonal, com todos os elementos da diagonal iguais a 1.

Por exemplo,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 2

Sejam A , B e C matrizes cujas ordens permitem que se façam as multiplicações seguintes. Seja α um escalar. Então:

- i) $A(BC) = (AB)C$
- ii) $A(B+C) = AB + AC$
- iii) $(A+B)C = AC + BC$
- iv) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

v) $IA = A$ e $AI = A$,

onde I é a matriz identidade da ordem correspondente, em cada equação.

Observação

No propriedade v), se A for, por exemplo, de ordem 2×3 , então a propriedade ficas

$$I_2 A = A \quad \text{e} \quad AI_3 = A .$$

Exemplo 1.5

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Convenção

Podemos escrever ABC em vez de $(AB)C$ ou $A(BC)$, uma vez que, pela propriedade i) do teorema 2, $(AB)C = A(BC)$.

Observações

a) Em geral, $AB \neq BA$.

Por exemplo,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}} \neq \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(56)

b) Se $AB = AC$ não segue necessariamente
 $B = C$, menos se $A \neq 0$.

Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Se $AB = 0$, não segue necessariamente $A=0 \vee B=0$
 ↴ matrizes nulas

Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notação

A^m significa A multiplicado por si próprio m vezes:

$$A^2 = AA$$

$$A^3 = AAA, \text{ etc.}$$

Exemplo 1.6

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcule A^2 e A^3 .

Matriz transposta

(57)

A matriz transposta de A , que se escreve A^T , é a matriz que se obtém de A trocando as linhas pelas colunas.

Exemplo 1.7

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. Então, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Teorema 3

Sejam A e B matrizes cujas ordens permitem que se façam as operações seguintes. Seja α um escalar. Então:

$$\text{i}) (A^T)^T = A$$

$$\text{ii}) (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$\text{iii}) (\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$\text{iv}) (AB)^T = \cancel{(BA)}^T B^T A^T$$

II.2 Matriz inversa

(58)

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n .

Se $AB = I$ e $BA = I$,

dizemos que A e B são matrizes inversas uma da outra.

Exemplo 2.1

Verifique que $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$ são matrizes inversas uma da outra.

Propriedade

Uma matriz tem, no máximo, uma matriz inversa: a inversa é única.

Notação

A matriz inversa da matriz A , se existir, escreve-se A^{-1} .

Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ (exemplo 2.1), (59)
 então $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$. Temos $AA^{-1} = I$ e $A^{-1}A = I$.

Observação

- a) Observar que a regra de "ser inverso" é simétrica:
 se A é inversa de B , então B é a inversa de A .
 Logo, o inverso da inversa de A é A : $(A^{-1})^{-1} = A$.
- b) Existem muitas matrizes quadradas que não
 formam matriz inversa. A matriz A não formará
 inversa se não existir nenhuma matriz B tal que
 $AB = I$ e $BA = I$. Se a matriz A tiver inversa,
 dig-se uma matriz invertível.

Teorema 3

Seja A uma matriz quadrada de ordem n e \vec{b}
 um vetor qualquer de \mathbb{R}^n . Se a matriz A for
 invertível, então a equação $A\vec{x} = \vec{b}$ (e também
 o respectivo sistema) é possível determinada. A
 sua solução é $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Demonstração

(6C)

$$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1}A)\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow I\vec{x} = \cancel{A^{-1}\vec{b}} \Leftrightarrow$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Portanto, se existir solução, esta é $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Por outro lado, $A(A^{-1}\vec{b}) = (AA^{-1})\vec{b} = I\vec{b} = \vec{b}$.

Logo, $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ é solução.

Exemplo 2.2

Do exemplo 2.1, sabemos que se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$,
então $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$. Usando este fato, resolva
o sistema $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 7x_1 + 4x_2 = -1 \end{cases}$.

O método de resolver sistemas usado no exemplo 2.2

chama-se método da matriz inversa. Esse método só
é aplicável se a matriz dos coeficientes for quadrada e
invertível.

Teorema 5

a) Se A e B são matrizes invertíveis da mesma ordem, então o seu produto é uma matriz invertível, sendo a sua inversa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Mais em geral, o produto de várias matrizes invertíveis é uma matriz invertível e

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

$$(ABCD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}, \text{ etc}$$

b) Se A é invertível, então A^T também é invertível e

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Teorema 6

A matriz quadrada A é invertível se e só se $A \sim I$

(ou seja, se e só se for possível escalarizar A até ao formato de matriz identidade). Além disso, a sequência de operações elementares que transforma A em I , também transforma I em A^{-1} .

Este teorema leva ao seguinte algoritmo para determinar a matriz inversa de A :

Formar-se a matriz $(A \ I)$. Usar-se o método de Gauss para escalarizar e reduzir esta matriz. Se a matriz A for invertível, o resultado será $(I \ A^{-1})$. Se a matriz A não for invertível, não existirão pivôs em todas as primeiras n colunas e, portanto, ~~será impossível~~ o método seguir-se (primeiras n colunas), depois de escalarizada e reduzida, não ficará igual à matriz identidade.

A este método chama-se método de Gauss para determinação da matriz inversa.

Exemplo 2.3

Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Determine se A é invertível e, em caso afirmativo, determine A^{-1} .