Exemplo 6.4

O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ é l.d.

pois são 4 vectores de $\mathbb{R}^3$ e $4 > 3$ (teorema 8).

## I.7 Introdução às transformações lineares

Terminologia

Quando falamos de funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ usamos o termo "transformação".

Exemplo 7.1

a) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
$\vec{x} \to 2\vec{x}$

(ou apenas $T(\vec{x}) = 2\vec{x}$)

T é a transformação ~~[illegible]~~ que transforma cada vector de $\mathbb{R}^3$ no seu dobro.

b) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$
$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2)$

T é a transformação que, a cada vector de $\mathbb{R}^3$, retira a terceira coordenada, transformando-o num vector de $\mathbb{R}^2$.

## Observação

As matrizes do exemplo 7.1 podem ser descritas através de matrizes do seguinte modo:

a) Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Então a transformação do exemplo 7.1. a) é dada por

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

b) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Então a transformação do exemplo 7.1. b) é dada por

$$T(\vec{x}) = A\vec{x}.$$

## Exemplo 7.2

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \vec{x} &\to A\vec{x} \end{aligned}, \quad \text{onde } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ou seja $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$)

## Observação

A partir de qualquer matriz $A$, de ordem $m \times n$, podemos definir uma transformação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$:

$$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\vec{x} \mapsto A\vec{x}.$$

Estas transformações (que podem ser descritas através de uma matriz) podem ser chamadas transformações matriciais. (Todas as transformações que vimos até agora são matriciais.)

## Domínio, imagem e conjunto de chegada

Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação (transforma vectores de $\mathbb{R}^n$ em ~~$\mathbb{R}^m$~~ vectores de $\mathbb{R}^m$). O domínio de $T$ é $\mathbb{R}^n$. O conjunto de chegada de $T$ é $\mathbb{R}^m$.
Seja $\vec{x}$ um vector de $\mathbb{R}^n$. A imagem de $\vec{x}$ (pela transformação $T$) é o vector $T(\vec{x})$. A imagem da transformação $T$ é o conjunto das imagens de todos os vectores do domínio, isto é, o conjunto de todos os vectores $T(\vec{x})$.

## Exemplo 7.3

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2) \to (x_1, x_1) .$$

Seja $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Indique o domínio e o conjunto de chegada de T.

Indique a imagem do vector $\vec{u}$ pela transformação T.

Indique a imagem da transformação T.

## Exemplo 7.4

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{x} \to A\vec{x} .$$

Seja $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Determine $T(\vec{u})$.

b) Determine os vectores de $\mathbb{R}^2$ cujas imagens é $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

c) Determine se $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ pertence à imagem de T.

Uma <u>transformação linear</u>, $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, é uma transformação que satisfaz as seguintes condições:

i) $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

ii) $T(\alpha \vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$

(para quaisquer vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do domínio e qualquer escalar $\alpha$).

<u>Propriedades</u>

a) Todas as transformações matriciais são transformações lineares, pois pelas propriedades da multiplicação de matriz por vector, (teorema 5),

$$A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$$

$$A(\alpha \vec{u}) = \alpha A\vec{u} .$$

b) Qualquer transformação linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ satisfaz:

i) $T(\vec{0}) = \vec{0}$

↳ vector nulo de $\mathbb{R}^m$

↳ vector nulo de $\mathbb{R}^n$

ii) $T(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \cdots + \alpha_p \vec{v}_p) =$

$= \alpha_1 T(\vec{v}_1) + \alpha_2 T(\vec{v}_2) + \cdots + \alpha_p T(\vec{v}_p)$