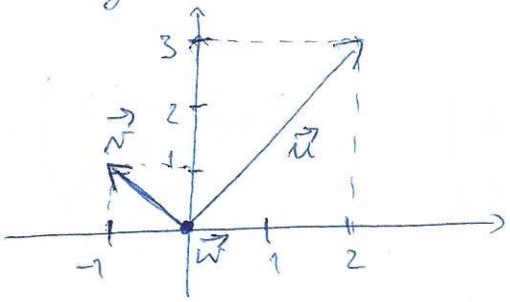
I.3 Forma vectorial

Um vector é uma matriz com uma única coluna.
(O símbolo usual para vector é uma letra minúscula com seta por cima, ou quando em documento typografado, letra minúscula a negrito.)

Exemplo 3.1

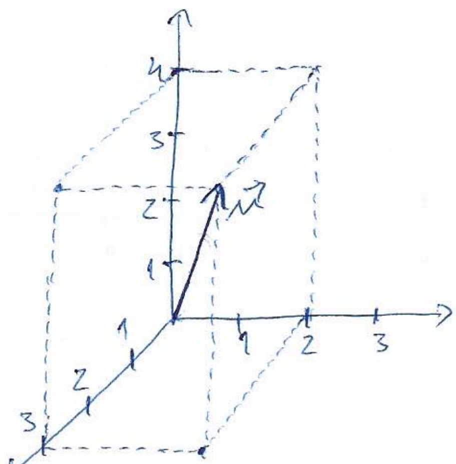
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ são vectores de $\mathbb{R}^2$.

Podem ser representados geometricamente do seguinte modo:



$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ é um vector de $\mathbb{R}^3$.

Pode ser representado geometricamente como:



$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ é um vector de } \mathbb{R}^5.$$

(Não pode ser representado geometricamente.)

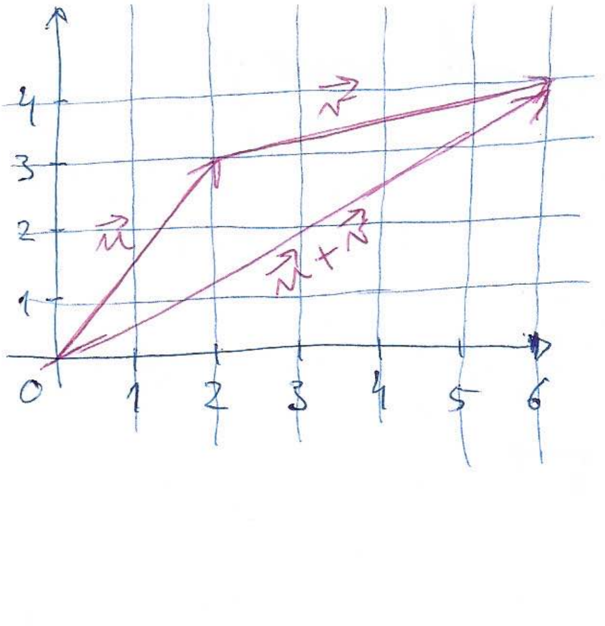
Adição de vectores

Vectores do mesmo espaço (isto é, com o mesmo número de componentes) podem ser somados. Somam-se componente a componente.

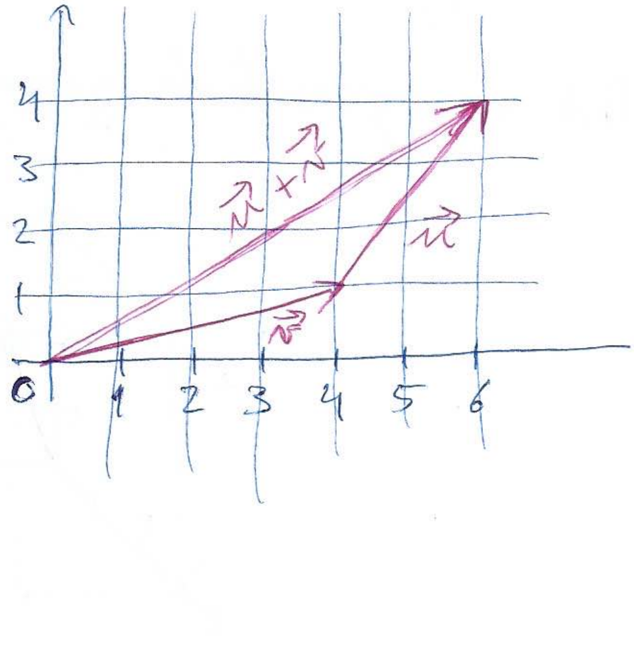
Exemplo 3.2

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{u}+\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+4 \\ 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

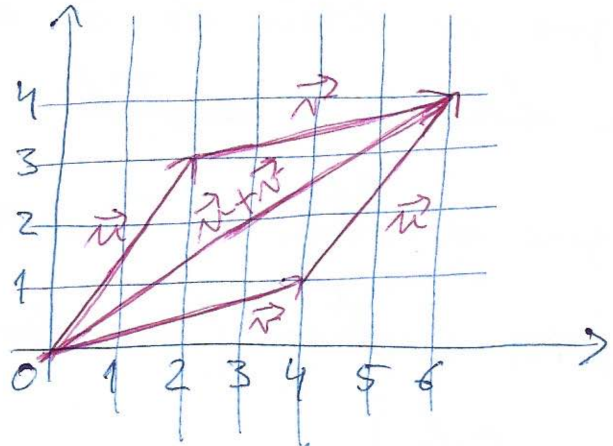
A interpretação geométrica da adição de vectores é ilustrada com:



ou



Ou numa só figura:



A este processo geométrico de somar vectores dá-se o nome de "regra do paralelogramo". (As duas cópias do vector $\vec{u}$ e as duas cópias do vector $\vec{v}$ formam um paralelogramo.)

Multiplicação de um vector por um número

Multiplicam-se todas as componentes do vector pelo número em questão.

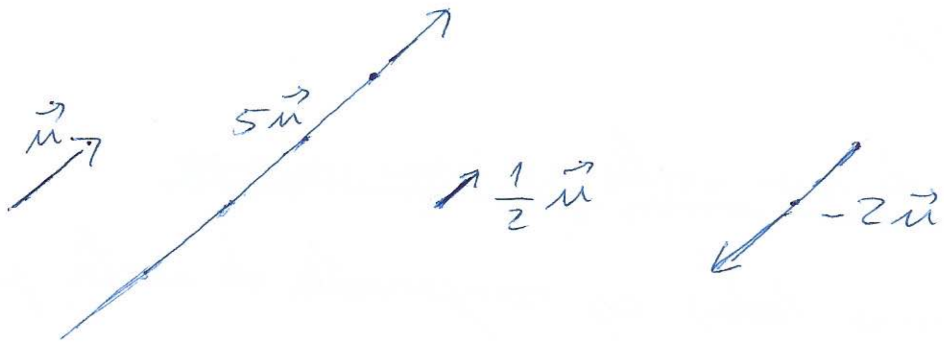
Exemplo 3

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad 5\vec{u} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \qquad -2\vec{u} = -2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Geometricamente, a interpretação é a seguinte:

- $5\vec{u}$ é o vector que se obtém de $\vec{u}$ ampliando $5\times$ (mantendo a direcção e sentido)
- $\frac{1}{2}\vec{u}$ é o vector que se obtém de $\vec{u}$ reduzindo o comprimento para metade (mantendo a direcção e o sentido)
- $-2\vec{u}$ é o vector que se obtém de $\vec{u}$ passando o comprimento para o dobro e revertendo o sentido



Exemplo 3.4

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad -2\vec{u} = -2\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 0 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

$-\vec{v} = \cancel{4} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Observações

a) Não foi necessário definir subtracção de vectores, porque a subtracção é um caso particular de adição. De facto, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

b) Só se podem adicionar vectores do mesmo espaço (isto é, da mesma dimensão).

<u>Vector nulo</u> é qualquer vector cujas componentes sejam todas nulas. Por exemplo, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é o vector nulo de $\mathbb{R}^2$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é o vector nulo de $\mathbb{R}^5$.

Propriedades da adição de vectores e da multiplicação por número

Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Seja $\vec{0}$ o vector nulo de $\mathbb{R}^n$. Sejam α e β números.

i) $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

ii) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

iii) $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

iv) $\vec{u}+(-\vec{u})=-\vec{u}+\vec{u}=\vec{0}$

v) $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$

vi) $(\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$

vii) $\alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$

viii) $1\vec{u}=\vec{u}$

Combinação linear

Dados os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ de $\mathbb{R}^n$, qualquer vector que possa ser escrito como

$$\vec{u}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_p\vec{v}_p$$

(onde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ são números) diz-se uma <u>combinação linear</u> de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$.

Exemplo 3.5

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ é combinação linear de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pois

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ é combinação linear de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, pois

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ é combinação linear de $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, pois

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Observação

Graficamente, observamos que dados dois vectores de $\mathbb{R}^2$ não colineares, $\vec{u}$ e $\vec{v}$, qualquer outro vector de $\mathbb{R}^2$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Exemplo 3.6

Considere-se o vector de $\mathbb{R}^3$ $\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix}$.

- $\vec{u}$ não é combinação linear de $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.
- $\vec{u}$ é combinação linear de $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
- $\vec{u}$ é combinação linear de $\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\2\\14\end{pmatrix}$.
- $\vec{u}$ é combinação linear de $\begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix}$.
- $\vec{u}$ é combinação linear de $\begin{pmatrix}-9\\-3\\-21\end{pmatrix}$.

Exemplo 3.7

Sejam $\vec{b}=\begin{pmatrix}7\\4\\-3\end{pmatrix}$, $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}$, $\vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}$.

Determine se $\vec{b}$ é combinação linear de $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$.

Observação

A matriz aumentada do sistema do exemplo anterior é $\begin{pmatrix}\vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{b}\end{pmatrix}$. Assim, concluimos a seguinte propriedade.

Propriedade

A equação vectorial $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$ é equivalente ao sistema cuja matriz aumentada é $(\vec{a}_1 \;\; \vec{a}_2 \; \cdots \; \vec{a}_n \;\; \vec{b})$. Assim, $\vec{b}$ é combinação linear de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ se e só se o referido sistema é possível.

Conjunto gerado

O conjunto de todas as combinações lineares de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ é designado $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p \rangle$ e chama-se <u>conjunto gerado</u> por $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$. Diz-se também que os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p$ <u>geram</u> o conjunto $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p \rangle$.

Propriedade

$\vec{b} \in \langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p \rangle$ se e só se o sistema cuja matriz aumentada é $(\vec{v}_1 \;\; \vec{v}_2 \; \cdots \; \vec{v}_p \;\; \vec{b})$ é possível.

Exemplo 3.8

a) $\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ é o conjunto de todos os vectores ao longo do eixo dos xx em $\mathbb{R}^2$

b) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ é o conjunto de todos os vectores ao longo da recta $y=x$ em $\mathbb{R}^2$

c) $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$

d) $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$

e) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ é o conjunto de vectores ao longo do eixo dos xx em $\mathbb{R}^3$

f) $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$ é o conjunto de vectores ao longo da direcção $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ em $\mathbb{R}^3$

g) $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ é o conjunto de todos os vectores situados no plano xOy em $\mathbb{R}^3$.

Observações

Dos exemplos acima constatamos:

Qualquer vector não nulo gera uma recta que contém a origem.

Quaisquer dois vectores não colineares geram um plano que contém a origem.

Exemplo 3.9

Sejam $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -13 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Determine se $\vec{b}$ pertence ao plano $\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle$.