I.5 Forma matricial

Uma matriz com m linhas e n colunas diz-se uma matriz de ordem $m \times n$.

Por exemplo $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ é uma matriz de ordem 2×3.

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$, cujas colunas são os vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$:

$$A = \left(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_n \right)$$

Seja $\vec{x}$ um vector de $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são $x_1, x_2, \ldots, x_n$:
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

A <u>multiplicação de A por $\vec{x}$</u> é definida por

$$A\vec{x} = \left(\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_n \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \cdots + x_n \vec{a}_n$$

<u>Observação</u>: A deve ter tantas colunas como $\vec{x}$ tem componentes.

Exemplo 5.1

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 32 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Exemplo 5.2

Sejam $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Escreva a combinação linear $3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 5\vec{v}_3$ como o produto de uma matriz com um vector.

Resposta: $3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 5\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Teorema 3

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ cujas colunas são os vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Seja $\vec{x}$ um vector de $\mathbb{R}^n$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Seja $\vec{b}$ um vector de $\mathbb{R}^m$.

Então, são equivalentes os seguintes:

i) O sistema cuja matriz aumentada é

$$\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n & \vec{b} \end{pmatrix}$$

ii) A equação vectorial

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \cdots + x_n \vec{a}_n = \vec{b}$$

iii) A equação matricial

$$A \vec{x} = \vec{b}$$

Exemplo 5.3

Considere-se os vectores

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

A equação matricial $A\vec{x} = \vec{b}$ é

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

que é equivalente à equação vectorial

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

(ou seja, $x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 = \vec{b}$),

que por sua vez é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (***)$$

(ou seja, $\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{b} \end{pmatrix}$)

Em suma, a equação matricial (*) é equivalente à equação vectorial (**), que é equivalente ao sistema cujo matriz aumentada é (***).

Observação

Daqui concluimos que:

A equação $A\vec{x} = \vec{b}$ tem solução se e só se $\vec{b}$ é combinação linear das colunas de A.

Exemplo 5.4

Determine se

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3.$$

Da analise deste exemplo, concluimos:

Teorema 4

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$. As seguintes afirmações são equivalentes (isto é, são todas verdadeiras ou todas falsas):

i) Para todo o $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, $A\vec{x} = \vec{b}$ tem solução;

ii) As colunas de A geram $\mathbb{R}^m$;

iii) Cada linha de A tem uma posição pivot (isto é, depois de escalonarmos A não temos linhas nulas).

Método alternativo para multiplicar uma matriz por um vector

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ e $\vec{x}$ um vector de $\mathbb{R}^n$. Então $A\vec{x}$ é o vector cujas componentes são obtidas calculando o "produto escalar" de cada linha de A com o vector $\vec{x}$.

Exemplo 5.5

a) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$1\times 4 + 2\times 3 + (-1)\times 7 = 3$$
$$0\times 4 + (-5)\times 3 + 3\times 7 = 6$$

b) $$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 32 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$2\times 4 + (-3)\times 7 = -13$$
$$8\times 4 + 0\times 7 = 32$$
$$-5\times 4 + 2\times 7 = -6$$

Exemplo 5.6

Sejam $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$ e $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Calcule $A\vec{x}$ pelos dois métodos.

Teorema 5

Sejam A uma matriz de ordem $m \times n$, $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vectores de $\mathbb{R}^n$ e α um número. Então:

i) $A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$

ii) $A(\alpha \vec{u}) = \alpha A\vec{u}$