Exemplo 3.7

Seja A a matriz do exemplo 3.5: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

Determine uma base para $Nul\, A$.

Exemplo 3.8

Seja $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{pmatrix}$.

Determine uma base para $Nul\, A$.

Observação

Da análise do exemplo anterior, podemos concluir que a resolução do sistema homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$ pelo método de Gauss e colocação da solução na forma vectorial paramétrica origina sempre uma base para $Nul\, A$.

Exemplo 3.9

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Temos $Col\, A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Note-se que o segundo vector é combinação linear do primeiro e que o quarto vector é combinação linear do primeiro e do terceiro. Logo,

$$Col\, A = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle.$$

Como estes três vectores são l.i., formam uma base para Col A:

$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$ é uma base para Col A.

Este exemplo sugere o seguinte teorema:

<u>Teorema 10</u>

As colunas pivot da matriz A formam uma base para Col A.

<u>Exemplo 3.10</u>

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$. Determine uma base para Col A.

<u>Teorema 11</u>

Se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ é uma base para o subespaço H, então cada vector de H escreve-se de forma única como combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$.

Demonstração

Se $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ é uma base de H, então gera H.

Logo, se $\vec{u} \in H$, $\vec{u}$ pode ser escrito como combinação linear dos vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$.

Suponhamos que $\vec{u}$ pode ser escrito de duas maneiras diferentes como combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$:

$$\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p$$

$$\vec{u} = \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + \dots + \beta_p \vec{v}_p \, .$$

Então

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p = \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \vec{v}_2 + \dots + \beta_p \vec{v}_p \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p - \beta_1 \vec{v}_1 - \beta_2 \vec{v}_2 - \dots - \beta_p \vec{v}_p = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha_1 - \beta_1)\vec{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{v}_2 + \dots + (\alpha_p - \beta_p)\vec{v}_p = \vec{0} \, .$$

Mas, se $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ é uma base de H, então este conjunto é l.i.. Logo, a equação

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_p \vec{v}_p = \vec{0}$$

tem apenas a solução trivial: $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_p = 0$.

Logo, $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$, $\dots$, $\alpha_p - \beta_p = 0$.

Ou seja,

$$\alpha_1 = \beta_1, \; \alpha_2 = \beta_2, \; \dots, \; \alpha_p = \beta_p \, .$$

Assim, $\vec{u}$ ~~se~~ pode-se escrever de uma única maneira como combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$.

Exemplo 3.11

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

O vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ pode escrever-se de uma única maneira como combinação linear dos vectores da base:

$$\vec{u} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

O vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ pode escrever-se de uma única maneira como combinação linear dos vectores da base:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$.

O vector $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ pode escrever-se de muitas maneiras como combinação linear destes vectores:

$$\vec{u} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 7\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

etc.

Coordenadas e vectores de coordenadas

Seja $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ uma base de H e $\vec{u} \in H$, com $\vec{u} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p$.

Os números $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ chamam-se as <u>coordenadas</u> de $\vec{u}$ na base $\mathcal{B}$. O vector

$$[\vec{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

chama-se <u>vector de coordenadas</u> de $\vec{u}$ na base $\mathcal{B}$.

Exemplo 3.12

a) Considere a base canónica de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Seja $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Como $\vec{u} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 12 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, então as coordenadas de $\vec{u}$ na base $\mathcal{B}$ são 3, 12 e 7. O vector de coordenadas de $\vec{u}$ na base $\mathcal{B}$ é $[\vec{u}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$.

b) Seja $\vec{u}$ como na alínea anterior: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$, $H = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

i) Explique porque é que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ é uma base de H.

ii) Verifique que $\vec{u} \in H$ e determine o vector de coordenadas $[\vec{u}]_{\mathcal{B}}$.

<u>Dimensão</u>

É possível demonstrar que se uma base de um subespaço tem p vectores, então qualquer outra base desse subespaço também tem p vectores. Dizemos então que a <u>dimensão</u> do subespaço é p.

A dimensão do subespaço H escreve-se $\dim H$.

Convenciona-se que a dimensão do subespaço trivial, $\{\vec{0}\}$, é 0.

Exemplo 3.13

$\dim \mathbb{R}^2 = 2$, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Exemplo 3.14

a) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$. Dos exemplos 3.5 e 3.7 sabemos que uma base de Nul A é $\left\{ \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Logo, $\dim \text{Nul } A = 1$.

b) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Neste caso, a solução de $A\vec{x} = \vec{0}$ é $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Logo, $\text{Nul } A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(subespaço trivial de $\mathbb{R}^3$).

Não existe nenhuma base para Nul A.

$\dim \text{Nul } A = 0$ (de acordo com a convenção na definição de dimensão)

Característica

A característica da matriz A, é a dimensão do espaço das colunas de A. Escreve-se $r(A)$.

Assim, $r(A) = \dim \operatorname{Col} A$.

Nota

O símbolo $r(A)$ vem do inglês "rank".

Em português do Brasil, diz-se "posto" em vez de "característica".

Observação

Note-se que dim Col A é igual ao número de colunas pivot de A. Logo,

$$r(A) = \text{n.º de colunas pivot de } A$$

Exemplo 3.15

a) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

$r(A) = 2$ porque A tem 2 colunas pivot

b) Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$r(A) = 3$ porque A tem 3 colunas pivot.

Teorema 12

Se a matriz A tem n colunas, então

$r(A) + \dim \mathrm{Nul}\, A = n.$

Teorema 13

Seja H um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão p ($\dim H = p$).

Então, :

a) Qualquer conjunto de p vectores que gere H é l.i.,
e portanto, é uma base de H.

b) Qualquer conjunto de p vectores de H que seja l.i.
gera H, e portanto, é uma base de H.