I. 5 Conjunto solução e vectores geradores

Um sistema homogéneo é um sistema que tem a forma matricial $A\vec{x} = \vec{0}$,

onde $\vec{0}$ é um vector nulo.

Exemplo 5.1

Os seguintes sistemas são homogéneos:

a) $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

Observações

a) É óbvio que um sistema homogéneo nunca é impossível, pois tem sempre ~~a solução em~~ pelo menos uma solução: a solução em que todas as incógnitas tomam valor 0, por exemplo, (0,0) ou (0,0,0). Esta solução é chamada solução trivial.

b) Um sistema homogéneo tem soluções não triviais se e só se tem variáveis livres (ver teorema 2, pág. 10).

Exemplo 5.2

a) $\begin{cases} x+2y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ x_1-x_2+3x_3=0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+3x_3+2x_4=0 \end{cases}$

Note-se que o conjunto-solução neste exemplo é:

a) $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ b) $\left\langle \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ c) $\left\langle \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Observação

Daqui inferimos o seguinte:

O conjunto-solução de um sistema homogéneo de n incógnitas tem sempre a forma de um conjunto gerador: $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \rangle$, para certos vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 5.3

Encontre a solução geral do "sistema" de uma só equação:

$$x+2y-z=0.$$

Exemplo 5.4

Encontre a solução geral (na forma paramétrica) do sistema de equações

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}.$$

(Note-se que este sistema é não homogéneo e que o seu sistema homogéneo associado é o sistema do exemplo 5.2. b))

Observação

Comparando as soluções gerais do sistema não homogéneo acima ~~com~~ e do sistema homogéneo associado, temos:

Sistema homogéneo: $\vec{x} = x_3 \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Sistema não homogéneo: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Esta última difere da primeira apenas no termo adicional $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Esta relação verifica-se sempre entre a solução geral de um sistema não homogéneo e a solução geral do sistema homogéneo associado. Este é o conteúdo do teorema 6 (abaixo).

No caso deste exemplo, a solução geral do sistema homogéneo corresponde a uma recta que contém a origem, com a direcção do vector $\begin{pmatrix} -5/3 \\ 4/3 \\ 1 \end{pmatrix}$. A solução geral do sistema não homogéneo é uma recta, que não contém a origem e paralela à primeira.

Teorema 6

Seja $A\vec{x} = \vec{b}$ um sistema não homogéneo e $A\vec{x} = \vec{0}$ o sistema homogéneo associado. Seja $\vec{s}$ uma solução particular do sistema não homogéneo. Então, as soluções do sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ são obtidas adicionando o vector $\vec{s}$ às soluções do sistema $A\vec{x} = \vec{0}$.

Isto é, a solução geral de $A\vec{x} = \vec{b}$ é obtida adicionando o vector $\vec{s}$ à solução geral de $A\vec{x} = \vec{0}$.

Exemplo 5.5

A solução geral de $x + 2y - z = 3$ pode ser escrita como

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Compare esta solução com a solução geral do sistema homogéneo associado (exemplo 5.3).

I.6 Independência linear

Uma lista de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ diz-se <u>linearmente independente</u> (l.i.) se a equação

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_p\vec{v}_p = \vec{0}$$

tem como única solução a solução trivial ($x_1=0, x_2=0, \dots$).

Se a equação tiver soluções não triviais, esta lista de vectores diz-se <u>linearmente dependente</u> (l.d.).

<u>Observação</u>

A equação vectorial acima é equivalente à equação matricial

$$A\vec{x} = \vec{0},$$

onde $A = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_p \end{pmatrix}$ e $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Assim, as colunas de uma matriz A são l.i. se e só se a equação $A\vec{x} = \vec{0}$ tem apenas a solução trivial.

<u>Exemplo 6.1</u>

Determine se $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ é l.i. ou l.d.

<u>Exemplo 6.2</u>

Determine se são l.i. ou l.d.:

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ b) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ d) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}$

e) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Observação

Deste exemplo, podemos concluir o seguinte:

a) Um conjunto de um só vector só é l.d. se o vector for o vector nulo;

b) Um conjunto que contenha o vector nulo é sempre l.d.;

c) Um conjunto de dois vectores não nulos é l.d. só se os vectores forem colineares.

Teorema 7

A lista de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ é l.d. se e só se um dos vectores é combinação linear dos restantes.

Além disso, se $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ é l.d. se e só se um dos vectores é combinação linear dos vectores anteriores a ele na lista. Isto é, se e só se um dos $\vec{v}_i$ é combinação linear de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{i-1}$.

Exemplo 6.3

Sejam $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ três vectores não nulos de $\mathbb{R}^3$. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ é l.d. se e só se os três vectores estão num mesmo plano pela origem.

De facto, se o conjunto é l.d., um dos vectores é combinação linear dos outros dois e, portanto, está no plano definido por estes. Se o conjunto é l.i., nenhum dos três vectores é combinação linear dos outros dois e, portanto não está no plano definido por estes.

Teorema 8

Dado um conjunto de p vectores de $\mathbb{R}^n$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$, se $p > n$ o conjunto é l.d..

Demonstração

Seja $p > n$. A equação

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_p \vec{v}_p = \vec{0}$$

é equivalente ao sistema cuja matriz aumentada é

$$\left(\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_p \ \vec{0} \right).$$

A equação vectorial acima tem soluções não triviais se o sistema for indeterminado. Se $p > n$, existem no sistema mais colunas de incógnitas do que linhas (existem n linhas). Logo, existem colunas não pivot nas colunas das incógnitas (pois, no máximo existem n pivots). Logo, uma vez que o sistema é possível, é indeterminado. Logo, existem soluções não triviais e os vectores são l.d..

Exemplo 6.4

O conjunto $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ é l.d.

pois são 4 vectores de $\mathbb{R}^3$ e $4 > 3$ (teorema 8).