ISPGAYA
instituto superior politécnico

AM I - Engenharia Informática

Exercícios de Fixção.

Joana Becker Paulo e Mafalda Correia

jbpaulo@ispgaya.pt

Questão 1

A partir das seguintes definições resolva, em seguida, o que se pede.

Definição 1 *Se elementos diferentes no domínio de uma função sempre possuirem imagens diferentes, esta função é chamada de **Injetiva**.*

Simbolicamente:

$f : A \to B$ *é injetora se* $\forall x_1, x_2 \in A \to x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dica: Portanto, basta verificar se existe ou não dois elementos do domínio que possuem a mesma imagem no contradomínio. Análise gráfica: basta observar que os valores diferentes do domínio geram sempre imagens diferentes.

a) Seja $f : R \to R$ com lei de formação $f(x) = 3x$ podemos dizer que é uma função injetiva, a partir da definição acima? Justifique sua resposta.

b) Dada a função $f : R \to R$ com lei de formação $f(x) = x^2$ podemos dizer que é uma função injetiva ? Verifique.

Questão 2

Chamamos de função **Sobrejetiva** quando o contradomínio da função é igual ao seu conjunto imagem, ou seja, todos os elementos do contradominio estão relacionados a um elemento do domínio. Dizemos que este é um caso especial de função.

Dica: As funções polinomiais do primeiro grau são sempre sobrejetoras quando definidas da forma: $f : R \to R$.

Será que as funções quadráticas, ou seja, funções polinomiais do segundo grau, são sobrejetivas?

a) Suponha a função quadrática $f : R \to R$ com lei de formação: $f(x) = x^2$ é sobrejetora? Justifique a sua resposta

b) Agora considere a mesma função $f(x) = x^2$, mas estando definida da forma: $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, o que se pode dizer desta função "nestas condições"? É sobrejetora?.

Questão 3

Uma função **bijetiva** é o tipo de função matemática que relaciona cada elemento do domínio A a um elemento diferente no contradomínio B e além disto, todo elemento do contradomínio B é imagem de A. Trata-se do que chamamos de correspondência biunívoca, pois os elementos do domínio A possuem correspondentes únicos no contradomínio B. Podemos observar que uma função bijetora é aquela que é injetora e sobrejetora.

Partindo, destas definições e considerando a função definida por

$$f(x) = 5x + 2.$$

Prove que f é bijetiva.

Questão 4 Como definido em sala de aula, sabemos que de maneira "nada formal" uma função inversa é encontrada algebricamente quando invertemos as variáveis na lei de formação. Ou seja, x passa a ser y e y passa a ser x, isto é x por $f(x)$ e $f(x)$ por x. A função $f^{-1}(x)$ é aquela que faz o oposto do que a função faz. Formalmente temos que:

Definição 2 *Seja $f : A \to B$ em que $f(a) = b$ então a sua inversa $f^{-1}(x) : B \to A$ tal que $f(b) = a$.*

Após esta lembrança, resolva os itens abaixo, indicando as suas funções inversas:

a) Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2x - 6$ a sua inversa é?:

b) Utilizando a mesma função da questão 3: $f(x) = 5x + 2$, apresente a expressão de $f^{-1}(x)$.

c) Descreva a inversa da função exponencial: $f(x) = 3^x$.

Questão 5 As funções f e g são dadas por $f(x) = 5x - 3$ e $g(x) = -2x + 3k$. Sabe-se que $f(0) = 1 + g(0)$. Qual o valor de $g(2)$?

Questão 6 Considere a função:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{se} \quad x \leq -1 \\ 3x + 2, & \text{se} \quad -1 < x \leq 7 \\ 1, & \text{se} \quad x > 7 \end{cases}$$

Determine o valor da expressão:

E $= g(-2) + g(-1) + g(5) + g(7) + g(10)$.

Questão 7 O gráfico de $f(x) = x^2 + bx + c$, onde b e c são constantes, passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, 2)$. Então, $f(\frac{-2}{3})$ vale?

Questão 8 Dada a função $y = -2x + 3$ de domínio $\mathbb{R}$:

a) Construa o gráfico da função.

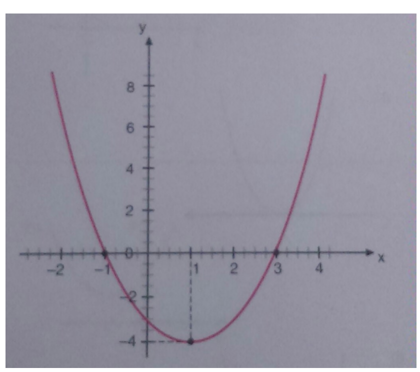
b) Verifique qual é a raiz da função.

c) Analise a monotonicidade desta função.

Questão 9 Utilizando mais uma vez, a função da questão 3: $f(x) = 5x + 2$, calcule as interseções do gráfico da função com os eixos coordenados.

Questão 10

Observe o gráfico e, em seguida, responda às questões:

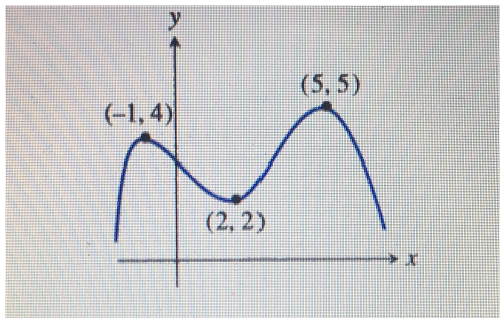


a) Quais são as coordenadas do ponto em que a parábola intersecta o eixo das abscissas?

b) Quais são as coordenadas do ponto em que a parábola intersecta o eixo das ordenadas?

c) A função tem valor máximo ou mínimo? Caso sua resposta seja sim, identifique esses valores e os pontos de máximo e/ou de mínimo.

Questão 11 No gráfico abaixo, identifique os pontos de máximo e mínimos locais (verifique e identifique, caso exista: máximo e/ou mínimo absoluto).



Questão 12

Determine o domínio de cada uma das funções, justificando a sua resposta.

a) f(x) = $5x^3 - x^2 + 2$

b) r(x) = $\frac{1}{x^2-4}$

c) g(x) = $\frac{1}{4-x^2}$

d) h(x) = $\sqrt{3x-2}$

e) j(x) = $\sqrt{x+7}$

f) k(x) = $\frac{2x+1}{\sqrt{x-3}}$

g) $y = \sqrt{2}$

h) $y = -x + 2$

i) $y = -x^2 - x + 2$

j) $y = \sqrt{2-x}$

l) $y = -\sqrt{2-x}$

m) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-x}}$

n) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$

o) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

p) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

q) $f(x) = \sqrt{-x^2+4x-3}$

r) $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x}$

s) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-x-6}}{x-1}$

t) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$

u) $(f(x) = (x+1)^{\frac{2}{3}}$

v) f$(x) = \sqrt[5]{x^2-4x+3}$

x) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2-1}$

w) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}}$

z) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2-5x+6}}{\sqrt{x-1}}$

Questão 13**:** Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$$\frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 \sqrt{x+1} = -1$$

Questão 14**:** Sabendo que para isolar o x em uma expressão do tipo: $e^x = a$, sendo a um número qualquer, aplica-se ln em ambos os lados e utiliza-se a propriedade $ln(e^x) = x$.

Esta propriedade que transforma uma exponencial em logaritmo natural (ln) é a inversa da função exponencial. Ou seja, de maneira mais formal temos que:

Definição 3 *Considere a função exponencial f:* $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, *definida por:* $f(x) = e^x$. *A função inversa* $f^{-1}(x)$ *é o logaritmo natural, denotado por* $ln(x)$, *tal que:* $f^{-1}(x) = ln(x)$. *Então, por definição de função inversa, temos:* $ln(e^x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$ *e* $e^{ln(x)} = x$, $\forall x \in \mathbf{R}^+$.

De maneira mais simplificada: O logaritmo natural é a função inversa da exponencial de base e, e portanto: $ln(e^x) = x$ e $e^{ln(x)} = x$.

Agora, partindo, desta revisão: Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{3}$$

Questão 15: Seja f uma função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = a + e^{bx}$, em que a e b são números reais.

Sabendo que o gráfico da função f contém os pontos de coordenadas $(1, 5)$ e $(2, 7)$, determine os valores de a e de b.

Observação: Algumas questões, abaixo, são de escolha múltipla, mas em todas, é preciso justificar a sua escolha.

Questão 16: Para certos valores de a e de b ($a > 1$ e $b > 1$), tem-se $\log_a\left(\frac{b}{a}\right) = 2$.

Qual é o valor de $\log_a\left(\sqrt{a^3} \times b^2\right)$?

(A) $\frac{13}{2}$ (B) $\frac{15}{2}$ (C) $\frac{19}{2}$ (D) $\frac{21}{2}$

Questão 17: Na faculdade de Engenharia elétrica, Arquimedes perguntou sobre a existência de um instrumento para medir a intensidade de sons. A intensidade de um som é medida na unidade conhecida decibel, usando-se o instrumento Decibelímetro. Se um som tem intensidade I_d (em Watts por metro quadrado) seu valor correspondente, em decibeis é obtido pela fórmula

$$I_d = 10 \cdot log(\frac{I}{I_o}),$$

onde $I_o = 10^{-12} W/m^2$ representa a intensidade sonora de referência de um som muito fraco percebido pelo ouvido humano. Se um som é de intensidade $I = 10w/m^2$, então o valor em decibeis desse som é:

a) 90

b) 100

c) 110

d) 120

e) 130

Questão 18**:** Uma turma de uma escola recebeu a seguinte questão em sua prova: Um dos valores de x que soluciona a equação $log_2(-x^2+32)=4$ é igual ao número de centros culturais localizados nas proximidades do centro da cidade. Esse número é:

a) 13

b) 4

c) 5

d) 6

e) 7

Questão 19**:** A escala Richter mede a magnitude de um terremoto. Os terremotos originam-se do movimento das placas tectônicas. O atrito de uma placa com outra forma ondas mecânicas que são responsáveis pelas vibrações que causam o terremoto. O sismográfo mede a amplitude e a frequência dessas vibrações utilizando uma equação logarítmica. A partir da qual ele calcula a magnitude do terremoto. Suponha que a magnitude de um terremoto pode ser calculada pela expressão $M = 3,3 + log(A \cdot f)$, onde A é a amplitude da onda e f é a frequência da onda. Calcule a magnitude desse terremoto sabendo que ele teve amplitude 1000 micromêtros e frequência 0.1hz.

Questão 20**:** O montante M é a quantidade a ser recebida após a aplicação de um capital C, a taxa i, durante certo tempo t. No regime de juros compostos, esse montante é calculado pela relação $M = C \cdot (1+i)^t$. Considere um capital de 10.000 euros, aplicado a uma taxa de 12% ao ano durante 4 anos. Qual seria o montante ao final dessa aplicação ?

Questão 21**:** Certo tratamento médico consiste na aplicação de uma determinada substância a um paciente. Admita que a quantidade Q de substância que permanece no paciente, t horas após sua aplicação, é dada, em miligramas, por $Q(t) = 250^{1-0,1t}$. Após 10horas de sua aplicação, a quantidade que permanece no paciente é:

a) 250mg

b) 10mg

c) 5mg

d) 1mg

Questão 22**:** Num laboratório cuja temperatura ambiente é constante, aqueceu-se uma substância até atingir uma certa temperatura, superior à temperatura ambiente, e, a seguir, deixou-se arrefecer essa substância durante uma hora.

Admite que a temperatura dessa substância, em graus Celsius, t minutos após o início do arrefecimento, é dada por

$$T(t) = 20 + 100e^{-kt}, \quad 0 \leq t \leq 60$$

em que k é uma constante real positiva.

Durante o arrefecimento, houve um instante t_1 em que a temperatura da substância foi 30°C.

Qual é o valor de k?

(A) $\dfrac{\ln 10}{t_1}$ (B) $t_1 - \ln 10$ (C) $\dfrac{\ln 10}{t_1}$ (D) $t_1 + \ln 10$