ISPGAYA
instituto superior politécnico

CTeSP

Resolução Lista 3 Professora: Joana Becker Paulo

jbpaulo@ispgaya.pt

Questão 1 Como visto em sala de aula, sabemos que uma derivada pode ser definida através dos conceitos aprendidos anteriormente, através da definição de limites. Por isto, a matemática é linda, antes de conhecermos as regras de derivação que vão "simplificar os cálculos" é possível encontrar as derivadas através do conceito:

Definition 1 *(Derivada num ponto) Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$ um ponto. A derivada de f em x_0, se existir, é dada por:*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Quando este limite existe e é finito, dizemos que f é diferenciável em x_0.

Usando esta definição formal de derivada, determine as derivadas das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x) = \ln(x)$, $x = a \in D_f$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{1}{x - a} \ln\left(\frac{x}{a}\right)$$

Fazendo $h = x - a$, vem $x = a + h$, $h \to 0$:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right)}{h} = \frac{1}{a} \lim_{u \to 0} \frac{\ln(1 + u)}{u} = \frac{1}{a}$$

pois $\lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x = 2$

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{2x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{4}$$

c) $f(x) = x^2 - 3x$, $x = 3$

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2-3x)-(9-9)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x(x-3)}{x-3} = 3$$

Questão 2 Aplicação de derivada na Geometria analítica. Em sala de aula vimos como encontrar a equação da reta tangente à uma curva. Vamos relembrar:

Em um gráfico de uma função, quando se deseja encontrar a reta tangente, a esse gráfico, é preciso conhecer o coeficiente angular (ou inclinação) dessa reta tangente à curva traçada por f no ponto p.

Como sabemos, o coeficiente angular da reta tangente é igual a derivada da função no ponto p e que a reta tangente tem sua equação geral dada por:

$$f(x) - f(p) = f'(p)(x-p)$$

Após esta lembrança, encontre a reta tangente à função $f(x) = x^3 + 1$ no ponto $p = 1$.

Como já descrito no enunciado, por definição, a inclinação da reta é dada pela derivada dessa função no ponto, neste caso, $p = 1$.

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(1) = 3$$

Isto é, o coeficiente angular, inclinação da reta é 3. Substituindo na equação geral da reta tangente, temos :

$$f(x) - f(1) = f'(1)(x-1)$$

Observamos que é preciso encontrar o valor da função no ponto $p = 1$. $f(1) = (1)^3+1 = 2$, então: a reta tangente tem a seguinte equação:

$$f(x) - 2 = 3(x - 1)$$

Podemos "ajeitar" essa equação: $f(x) = 3x - 3 + 2$, como $f(x) = y$, podemos escrever: $y = 3x - 1$

Questão 3 Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico da função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto de abcissa 4.

Temos $f(4) = 2$, e $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, logo $f'(4) = \frac{1}{4}$.

Equação da reta tangente:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{4}x + 1$$

Questão 4 Sabendo que são válidas as seguintes fórmulas de derivação:

* Se $f(x) = e^x$, então:

$$f'(x) = e^x$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}.$$

À primeira vista, o quociente $\frac{e^h-1}{h}$ é uma forma indeterminada $0/0$. Como já estudamos, aplicamos a regra de L'Hospital:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(e^h)'}{(h)'} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h}{1} = 1.$$

Portanto:

$$f'(x) = e^x.$$

* Se $g(x) = \ln x$, então:

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x + h) - \ln(x)}{h}.$$

Usamos a propriedade dos logaritmos:

$$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right), \quad a > 0, b > 0.$$

Aplicando com $a = x + h$ e $b = x$:

$$\ln(x+h) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+h}{x}\right).$$

Portanto:

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Seja $u = \frac{h}{x}$, então $h = ux$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} \lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u}.$$

Este limite também é uma forma indeterminada 0/0. Aplicando L'Hospital:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{\frac{1}{1+u}}{1} = 1.$$

Logo:

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Derive:

a) $f(x) = x^2 e^{x^2}$

$f'(x) = 2xe^{x^2} + x^2 \cdot e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}(1 + x^2)$

b) $f(x) = e^{\frac{x^3}{\sqrt{x-1}}}$

$$f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2(x-1)^{-1/2} + e^{x^3} \cdot \left(-\frac{1}{2}(x-1)^{-3/2}\right) = e^{x^3}(x-1)^{-3/2}\left(3x^2(x-1) - \frac{1}{2}\right)$$

c) $f(x) = (1 - x^2)\ln x$

$f'(x) = -2x\ln x + (1 - x^2) \cdot \frac{1}{x} = -2x\ln x + \frac{1}{x} - x$

d) $f(x) = x^2 - \frac{\ln(x^2)}{x}$

Para $x > 0$: $f'(x) = 2x - \frac{2}{x}$

Agora, vamos relembrar a definição de Regra da Cadeia:

[Regra da Cadeia] Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ funções tais que $f(I) \subseteq J$. Se f é diferenciável em $x_0 \in I$ e g é diferenciável em $f(x_0) \in J$, então a função composta $g \circ f$ é diferenciável em x_0 e verifica-se:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0).$$

Questão 5 Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4 e^{-x}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, defina $(g \circ f)'$.

Pela Regra da Cadeia:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Calculamos:

$$f'(x) = 4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x} = x^3 e^{-x}(4 - x)$$

Logo:

$$(g \circ f)'(x) = g'(x^4 e^{-x}) \cdot x^3 e^{-x}(4 - x)$$

Questão 6 Um problema frequente em trigonometria e cálculo é determinar a derivada de funções trigonométricas compostas, isto é, quando o argumento da função não é simplesmente x, mas uma expressão mais complexa.

Recorde que:

$$\frac{d}{dx}\sin(u) = u' \cdot \cos(u) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\cos(u) = -\,u' \cdot \sin(u),$$

onde u é uma função de x.

Aplicando a regra da cadeia, obtenha a derivada da função:

$$F(x) = \cos(2x).$$

Pela definição, no enunciado da questão, temos que: $(\cos u)' = -u' \sin u$, o "nosso" u aqui é $2x$, então, se derivarmos já o $2x$, sabemos que: $(2x)' = 2$, fazendo as substituições necessárias u' por 2 e $u = 2x$: $\cos(2x) = -2\sin(2x)$

Questão 7 Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Mostre que f é contínua em $x = 0$ mas, no entanto, não é diferenciável nesse ponto.

Definimos:

$f(x) = \{ \quad$ x $\sin\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 00, x = 0$

Continuidade em $x = 0$:

$$|f(x)| = \left| x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \to 0 \text{ quando } x \to 0 \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

Logo, f é contínua em 0.

Diferenciabilidade em $x = 0$:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Este limite não existe (oscila entre -1 e 1), logo f não é diferenciável em 0.

Questão 8 Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a função derivada da função considerada.

a) $f(x) = (x-1)(x^2+3x)$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$

b) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$

$f'(x) = \frac{2}{3}(2x-1)^{-1/3} \cdot 2 = \frac{4}{3(2x-1)^{1/3}}$

c) $f(x) = \frac{cosx}{1-sen(x)}$

Usando quociente:

$$f'(x) = \frac{-\sin x(1-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x}$$

Trata-se abaixo de duas questões que envolvem regra da cadeia. Temos duas maneiras diferentes de a resolver:

d) $(\frac{x^3-sinx}{2x^2})^2$

<u>**Primeira maneira**</u>:

Derivar "naturalmente" a função: $f(x) = (\frac{x^3-\sin x}{2x^2})^2$, isto é:

$f'(x) = 2(\frac{x^3-\sin x}{2x^2})(\frac{x^3-\sin x}{2x^2})'$

$(\frac{x^3-\sin x}{x^2})(\frac{(x^3-\sin x)'(2x^2)-(x^3-\sin x)(2x^2)'}{(2x^2)^2})$

$(\frac{x^3-\sin x}{x^2})(\frac{(3x^2-\cos x)(2x^2)-4x(x^3-\sin x)}{4x^4})$

$(\frac{x^3-\sin x}{x^2})(\frac{6x^4-2x^2\cos x-4x^4+4x\sin x}{4x^4})$

$(\frac{x^3-\sin x}{x^2})(\frac{2x^4-2x^2\cos x+4x\sin x}{4x^4})$

$(\frac{x^3-\sin x}{x^2})(2x(\frac{x^3-x\cos x+2\sin x}{4x^4}))$

$(\frac{x^3-\sin x}{x^2})(\frac{x^3-x\cos x+2\sin x}{2x^3})$

$\frac{(x^3-\sin x)(x^3-x\cos x+2\sin x)}{2x^5}$

Segunda Maneira:

$f(u) = u^2$, $u = \frac{x^3-\sin x}{2x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$\frac{dy}{du} = 2u$

$\frac{du}{dx} = \frac{(x^3-\sin x)'(2x^2)-(x^3-\sin x)(2x^2)'}{(2x^2)^2} = \frac{2x^4-2x^2\cos x+4x\sin x}{4x^4}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2u \cdot (\frac{x^3-x\cos x+2\sin x}{2x^3})$

Lembremos que, temos que deixar tudo em uma única variável, neste caso, variável x, isto é:

$\frac{dy}{dx} = 2(\frac{x^3-\sin x}{2x^2}) \cdot (\frac{x^3-x\cos x+2\sin x}{2x^3}) = \frac{(x^3-\sin x)(x^3-x\cos x+2\sin x)}{2x^5}$

e) $sin(sinx-1)$

Primeira maneira:

De forma mais "direta":

$(\sin(\sin x-1))' = \cos(\sin x-1) \cdot (\sin x-1)' = \cos(\sin x-1)(\cos x)$

Segunda maneira:

$f(u) = \sin u$, $u = x-1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$\frac{dy}{du} = \cos u$

$\frac{dy}{dx} = \cos u \cdot \cos x$

$\frac{dy}{dx} = \cos(\sin x - 1) \cdot \cos x$

Questão 9 Obtenha o valor de $f'(0)$ da função: $f(x) = (3x^2 + x) \cdot (x^3 - 4x + 2)$.

Usaremos a regra do produto.

$f'(x) = (3x^2 + x)' \cdot (x^3 - 4x + 2) + (3x^2 + x) \cdot (x^3 - 4x + 2)'$;

$f'(x) = (6x + 1) \cdot (x^3 - 4x + 2) + (3x^2 + x) \cdot (3x^2 - 4)$;

$f'(0) = 1 \cdot (2) + 0 \cdot (-4)$;

$f'(0) = 2$.

Questão 10 Calcule a derivada da função: $f(x) = \frac{3x^2+4x-83}{x-1}$, no ponto $x = 2$.

Usando a regra do quociente.

$f'(x) = \frac{(3x^2+4x-83)' \cdot (x-1) - (3x^2+4x-83) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2}$;

$f'(x) = \frac{(6x+4) \cdot (x-1) - (3x^2+4x-83) \cdot (1)}{(x-1)^2}$;

$f'(x) = \frac{6x^2-6x+4x-4-3x^2-4x+83}{(x-1)^2}$;

$f'(x) = \frac{3x^2-6x+79}{(x-1)^2}$;

$f'(2) = \frac{12-12+79}{1^2}$;

$f'(2) = 79$.

Questão 11 Partindo da função: $f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$, indique a quantidade de vezes que esta função é derivável (ou seja, encontre todas as derivadas possíveis).

$f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$

$f'(x) = 32x^3 + 15x^2 - 2x$

$f''(x) = 96x^2 + 30x - 2$

$f^3(x) = 192x + 30$

$f^4(x) = 192$

$f^5(x) = 0$

A função é 5 vezes derivável, após $n \geq 5$, não se deriva mais.

[Derivada da função inversa] Seja f uma função estritamente monótona e contínua num intervalo I, diferenciável em $x_0 \in I$ com $f'(x_0) \neq 0$, e seja f^{-1} a sua inversa. Então f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ e

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Questão 12 Considere a função f definida por $f(x) = 5x^7 + 6x^3 + x + 9$. Sabendo que $f(-1) = -3$ e que f é invertível, determine $(f^{-1})'(-3)$.

Sabemos que:

$$(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{f'(-1)}$$

Calculamos:

$$f'(x) = 35x^6 + 18x^2 + 1 \Rightarrow f'(-1) = 35 + 18 + 1 = 54$$

Logo:

$$(f^{-1})'(-3) = \frac{1}{54}$$

Questão 13 Considere a função f definida por $f(x) = 4x^3 + x + 2$. Sabendo que f é invertível, determine $(f^{-1})'(2)$.

Procuramos x_0 tal que $f(x_0) = 2$:

$$4x_0^3 + x_0 + 2 = 2 \Rightarrow x_0(4x_0^2 + 1) = 0 \Rightarrow x_0 = 0$$

Então:

$$f'(x) = 12x^2 + 1 \Rightarrow f'(0) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(2) = \frac{1}{1} = 1$$

Questão 14 Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = sen(x)$. Determine, utilizando o Teorema da derivada da função inversa, as derivadas seguintes:

a) $(f^{-1})'(x)$, para $x \in \mathbb{R}^+$

$f'(x) = 3x^2$, logo $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3(f^{-1}(y))^2} = \frac{1}{3y^{2/3}}$

b) $(g^{-1})'(0)$

Temos $g(0) = 0$, $g'(0) = \cos 0 = 1$, logo $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{1} = 1$

Derivadas das funções inversas trigonométricas: As funções arco seno, arco cosseno e arco tangente são as inversas das funções trigonométricas usuais. Ou seja, enquanto seno, cosseno e tangente relacionam ângulos com razões entre lados de um triângulo retângulo, suas inversas fornecem o valor do ângulo a partir dessas razões.

$$(\arcsin(ax))' = \frac{a}{\sqrt{1-(ax)^2}}, \quad |ax| < 1,$$
$$(\arccos(ax))' = -\frac{a}{\sqrt{1-(ax)^2}}, \quad |ax| < 1,$$
$$(\arctan(ax))' = \frac{a}{1+(ax)^2}.$$

Interpretação geométrica:

Num triângulo retângulo, temos os catetos (adjacente e oposto ao ângulo) e a hipotenusa. As funções trigonométricas são definidas como razões entre esses lados.

Se fôssemos observar o triângulo retângulo, temos: a base, a perpendicular (catetos adjacente e oposto ao ângulo, respectivamente) e a hipotenusa.

Arco seno:

A fórmula do seno trata-se de cateto oposto ao ângulo dividido pela hipotenusa.
O arco seno nos fornece o valor do ângulo:

$$\sin\theta = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}}$$
$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}}\right)$$

Arco cosseno:

A fórmula do cosseno trata-se de cateto adjacente ao ângulo dividido pela hipotenusa.
O arco cosseno nos fornece o valor do ângulo:

$$\cos\theta = \frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}}, \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\textit{cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}}\right).$$

Arco Tangente:

A tangente é definida como cateto oposto dividido pelo cateto adjacente. O arco tangente fornece o ângulo correspondente a essa razão.

$$\tan\theta = \frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{cateto adjacente}}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\textit{cateto oposto}}{\textit{cateto adjacente}}\right).$$

Questão 15 Derive:

a) $f(x) = arcsen(\sqrt{x})$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$

b) $f(x) = (1+x^2)arctg(x)$

$f'(x) = 2x \arctan x + (1+x^2) \cdot \frac{1}{1+x^2} = 2x \arctan x + 1$

c) $f(x) = arcsen(\frac{1}{x^2})$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^{-4}}} \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right) = -\frac{2}{x^3\sqrt{1-1/x^4}} = -\frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$

d) $f(x) = arccos(1-e^x)$

$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-e^x)^2}} \cdot (-e^x) = \frac{e^x}{\sqrt{2e^x - e^{2x}}} = \frac{1}{\sqrt{2e^{-x}-1}}$, para $x < \ln 2$

e) $f(x) = arctg(1+\ln x)$

$f'(x) = \frac{1}{1+(1+\ln x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x[1+(1+\ln x)^2]}$

Questão 16 Para cada uma das funções seguintes determine $(f^{-1})'$ utilizando o Teorema da derivada da função inversa.

a) $f(x) = x^3 + 1$

$f'(x) = 3x^2$, logo $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{3(f^{-1}(y))^2} = \frac{1}{3(y-1)^{2/3}}$

b) $f(x) = \ln(arcsen(x))$, com $x \in]0,1[$

Seja $y = f(x)$, então $\arcsin x = e^y \Rightarrow x = \sin(e^y)$.

Mas, melhor: $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$.

$f'(x) = \frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Logo: $(f^{-1})'(y) = \arcsin x \cdot \sqrt{1-x^2} =^y \cdot \sqrt{1-\sin^2(e^y)} = e^y \cos(e^y)$

c) $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, com $x \in]-1,0[$

$f'(x) = \frac{2x(1-x^2)+2x^3}{(1-x^2)^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$

Se $y = f(x)$, então $(f^{-1})'(y) = \frac{(1-x^2)^2}{2x}$. Como $x < 0$, o sinal é negativo.

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Para aplicar o teorema da inversa, f deve ser estritamente monótona.

Mas f não é injetiva num vizinhança de 0 (ex: $f(1) = -1$, $f(-1) = 2$), e não é contínua em 0?

Verifica-se: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, logo **não é contínua**, portanto **não é invertível globalmente**.

O exercício pede apenas onde for possível. Supondo que se restrinja a um dos ramos:

Para $x < 0$, $f'(x) = -3x^2 < 0$, invertível.

Então, se $y = f(x) = 1 - x^3$, $x = (1-y)^{1/3}$, e $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{-3x^2} = -\frac{1}{3(1-y)^{2/3}}$

Questão 17 Determine os extremos das funções:

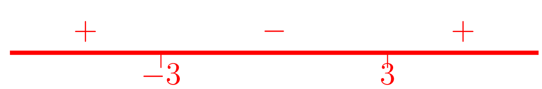
a) $f(x) = x^3 - 27x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 27$

A equação pode ser simplificada (dividiremos por 3): $f'(x) = x^2 - 9$

É preciso encontrar o candidato a ponto crítico: vamos de forma intuitiva, já podemos concluir que as duas raízes são: $x = -3$ e $x = 3$. Porém, caso não consiga ver logo, pode ser feito através da fórmula resolvente.

Próximo passo, verificar se existem extremos:



Para $x = -4$, por exemplo: $f'(1) = 16 - 9 = 7 > 0$, logo a função $f(x)$ é crescente;

Para $x = 0$, por exemplo: $f'(3) = -9 < 0$, logo a função $f(x)$ é decrescente;

Para $x = 4$, por exemplo: $f'(4) = 16 - 9 = 7 > 0$, logo a função $f(x)$ é crescente.

Concluímos ponto $x = -3$ é ponto de máximo e $x = 3$ é ponto de mínimo.

b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$

$f'(x) = -3x^2 + 12x - 12$. A equação pode ser simplificada (dividiremos por 3): $f'(x) = -x^2 + 4x - 4$.

É preciso encontrar o candidato a ponto crítico: vamos utilizar a fórmula resolvente : $a = -1$, $b = 4$, $c = -4$.

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$;

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4)}}{2 \cdot (-1)}$

$x = \frac{-4}{-2} = 2$

Raízes reais e iguais a 2. Vamos, agora, analisar se existe extremo. Para isso, escolheremos valores menores e maiores que 2.

$-$ $-$

2

Para $x = 1$, por exemplo: $f'(1) = -1 + 4 - 4 < 0$, logo a função $f(x)$ é decrescente;

Para $x = 3$, por exemplo: $f'(3) = -9 + 12 - 4 = -13 + 12 = -1$, logo a função $f(x)$ é decrescente.

Concluímos que não existe extremo.

Questão 18 Encontre os pontos de inflexão do gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ e determine a concavidade do gráfico.

Como queremos encontrar os candidatos a ponto de inflexão e verificar a concavidade da função, iremos utilizar o teste da segunda derivada.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f''(x) = 6x - 12$

Existe $f''(x)$ para todos os valores de x. De forma trivial, concluímos que só há um candidato a ponto de inflexão (f''(x) = 0):

$f''(x) = 6x - 12 = 0$

$x = 2$

Agora, é preciso analisar os sinais da concavidade e verificar se existe, mesmo, ponto de inflexão.

$$\begin{array}{ccc} - & & + \\ \hline & 2 & \end{array}$$

Para $x = 1$, por exemplo: $f''(1) = -6 < 0$, logo a função $f(x)$ tem concavidade voltada para baixo;

Para $x = 3$, por exemplo: $f''(3) = 6 > 0$, logo a função $f(x)$ tem concavidade voltada para cima.

Como há mudança das concavidades o ponto 2 é ponto de inflexão.

Vamos agora, relembrar alguns outros teoremas, já trabalhados em sala de aula:

[Teorema de Lagrange ou do Valor Médio]
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que:

* f é contínua em $[a, b]$;
* f é diferenciável em $]a, b[$.

Então, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Questão 19 Mostre que a função $f(x) = arctg(x - 2) + 2x - 5$ tem um único zero no intervalo $]2, 3[$.

f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

$f(2) = \arctan(0) + 4 - 5 = -1 < 0$

$f(3) = \arctan(1) + 6 - 5 = \frac{\pi}{4} + 1 > 0$

Logo, pelo T.V.I., existe pelo menos um zero em $]2, 3[$.

Além disso, $f'(x) = \frac{1}{1+(x-2)^2} + 2 > 0$ sempre $\Rightarrow f$ estritamente crescente $\Rightarrow$ zero único.

Questão 20 A função $f(x) = x^{\frac{4}{5}}$ no intervalo $[0, 1]$, satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio, no intervalo dado? Justifique a sua resposta.

É preciso lembrar que para que a função satisfaça o teorema temos que garantir que: a função seja contínua para todo o intervalo fechado $[0, 1]$ e a função seja derivável para todo o intervalo aberto $(0, 1)$.

Esta função, trata-se de uma potência, portanto é contínua em toda a reta real $\mathbb{R}$.

A derivada desta função é $f'(x) = \frac{4}{5}x^{\frac{4}{5}-1} = \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} = \frac{4}{5x^{\frac{1}{5}}}$, esta derivada não vai existir em $x = 0$, pois teríamos uma divisão por zero. Mas, isto não é problema, uma vez que precisamos somente que a função seja derivável para o intervalo aberto $(0, 1)$, portanto, ela não precisa ser derivável nas fronteiras do intervalo, em $x = 0$ e $x = 1$.

[Teorema de Rolle] Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que:

* é contínua em $[a, b]$;

* f é diferenciável em $]a, b[$

* $f(a) = f(b)$.

Então, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Questão 21) Determine um ponto c que satisfaça o Teorema de Rolle para as seguintes funções:

a) $f(x) = 2 + \sqrt{x} - \sqrt{x^3}$ definida em $[0, 1]$

A função f é contínua no intervalo $[0, 1]$ e derivável em $(0, 1)$. Este polinômio tem, pelo menos um, ponto crítico no intervalo $(0, 1)$. De fato, $f(0) = 2$ e $f(1) = 2$, ou seja, as condições do Teorema de Rolle são satisfeitas. Portanto, segue do Teorema de Rolle que existirá pelo menos um ponto c que está dentro deste intervalo. Vamos calcular os pontos críticos:

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2}$
$f'(x) = 0$

$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} = 0$, vamos igualar os denominadores:

$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} = \frac{1-3x}{2x} = 0$

$1 - 3x = 0$

$-3x = -1$

$x = \frac{1}{3}$

Isto significa que, no ponto $c = \frac{1}{3}$ a reta tangente à curva é horizontal, ou seja, $f'(\frac{1}{3}) = 0$.

b) $f(x) = 2 + \sin x$ definida em $[0, 2\pi]$

A função f é contínua no intervalo $[0, 2\pi]$ e derivável em $(0, 2\pi)$. Este polinômio tem, pelo menos um, ponto crítico no intervalo $(0, 2\pi)$. De fato, $f(0) = 2$ e $f(2\pi) = 2$, ou seja, as condições do Teorema de Rolle são satisfeitas. Portanto, segue do Teorema de Rolle que existirá pelo menos um ponto c que está dentro deste intervalo. Vamos calcular os pontos críticos:

$f'(x) = \cos x$

$f'(x) = \cos x = 0$

Dentro do intervalo de $(0, 2\pi)$, o cosseno é zero quando $c = \frac{\pi}{2}$.

Questão 22 Calcule os limites usando a regra de L'Hostipal:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x}$

$(\sin 5x)' = 5 \cos 5x$

$(3x)' = 3$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x} - 1}{3x}$

Como sabemos, já das aulas, uma exponencial elevada a zero é igual a 1, na verdade, qualquer número (base) elevado a zero é igual a 1, desta forma sabemos que o numerador esta expressão será zero, uma vez que teremos: $1 - 1$. Como já visto na letra a, o limite de 3x também será zero, portanto, mas uma indeterminação. Desta forma, vamos recorrer a regra de L'hospital:

$(e^{5x})' = (e^{5x} \cdot (5x)') = 5e^{5x}$

$(3x)' = 3$

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(3x^2 + 2) - \ln(x^2))$

$\lim_{x\to+\infty}[\ln(3x^2+2)-\ln(x^2)] = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(3+\frac{2}{x^2}\right) = \ln 3$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{sen^2\frac{x}{3}}{x^2}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-x}{x}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-x}{x} = \infty$ (pois numerador $\to 1$, denominador $\to 0^+$)

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2arcsen(x)}{3x}$

$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x} = \frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \frac{2}{3}$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{xsen(x)}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2(x/2)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = -\frac{1}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to -\pi/4}\dfrac{\cos(2x)}{1+cotg(x)}$

$\lim_{x\to-\pi/4}\frac{\cos(2x)}{1+\cot x} = \frac{\cos(-\pi/2)}{1+\cot(-\pi/4)} = \frac{0}{1-1} = \frac{0}{0}$

Aplicamos L'Hôpital:

$$\text{Num}':-2\sin(2x),\quad \text{Den}':-\csc^2 x \Rightarrow \lim_{x\to-\pi/4}\frac{-2\sin(2x)}{-\csc^2 x} = \frac{-2(-1)}{-2} = -1$$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^p}$ com $p\in\mathbb{R}^+$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^p} = 0$ para $p>0$ (logaritmo cresce mais devagar que qualquer potência)

j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\ln(2-x)}$

$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\ln(2-x)} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ L'H: $\lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{1}{2-x}} = \lim_{x\to 1}(2-x) = 1$

l) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim x\ln x} = e^0 = 1$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = e^{\lim\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$

n) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^x$

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim x\ln(1/x)} = e^0 = 1$

o) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$

$\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x} = e^{\lim\frac{\ln x}{\ln x}} = e^1 = e$

p) $\lim_{x\to 0}(\cos(2x))^{\frac{1}{x^2}}$

$\lim_{x\to 0}(\cos(2x))^{1/x^2} = e^{\lim \frac{\ln(\cos 2x)}{x^2}} = e^{\lim \frac{-2\tan 2x}{2x}} = e^{-2}$

q) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = e^{\lim \frac{\ln x}{x}} = e^{-\infty} = 0$

r) $\lim_{x\to 0^+}(tg(x))^{tg(2x)}$

$\lim_{x\to 0^+}(\tan x)^{\tan(2x)} = e^{\lim \tan(2x)\ln(\tan x)} = e^0 = 1$

s) $\lim_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$

$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3} = \left(1+\frac{4}{x-1}\right)^{x+3} \to e^4$

t) $\lim_{x\to 1}\dfrac{e^{x-1}-x}{(x-1)^2}$

$\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}-x}{(x-1)^2} = \frac{0}{0} \Rightarrow$ L'Hôpital duas vezes

1ª derivada: $\frac{e^{x-1}-1}{2(x-1)}$, 2ª: $\frac{e^{x-1}}{2} \to \frac{1}{2}$

u) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\arctan 5x}{\arctan 7x}$

Considerando $(\arctan(ax))' = \frac{1}{1+(ax)^2}$. É interessante ressaltar que, a função arco tangente é a inversa da tangente, poderíamos descrever como: $(\tan x)^{-1}$

Se fossemos observar o triângulo retângulo temos: a base, a perpendicular (que são conhecidos como catetos, adjacente e oposto ao ângulo, respectivamente) e a hipotenusa. A fórmula da tangente, todos já sabem que trata-se de cateto oposto ao ângulo, dividido pelo cateto adjacente ao ângulo. O arco tangente nos fornece o valor deste ângulo.

$$\tan\theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan 5x}{\arctan 7x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\arctan 5x)'}{(\arctan 7x)'}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+(5x)^2}\cdot 5}{\frac{1}{1+(7x)^2}\cdot 7} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{1+(25x^2)}}{\frac{1}{1+(49x^2)}} = \frac{5}{7}$$

v) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - x}$

Por conhecimentos já obtidos das propriedades de logaritmo Neperiano, por exemplo, sabemos que $ln1 = 0$, desta forma: