ISPGAYA
instituto superior politécnico

Análise Matemática I - Licenciatura - Engenharias

Exercícios de Fixação.

Joana Becker Paulo Mafalda Correia

jbpaulo@ispgaya.pt

Exercício 1: Aplique as propriedades do limite, indicando-os e calcule o limite de cada função:

a) $\lim_{x\to 2}(3x+5)^5$

b) $\lim_{x\to\sqrt{2}}(x^2+3)(x-4)$

c) $\lim_{s\to 4}\dfrac{6s-1}{2s-9}$

d) $\lim_{x\to 1} x^2-3x^3$

e) $\lim_{x\to 2}\sqrt{x^3+x^2-1}$

Exercício 2: Calcule:

a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-1}{2x-12}$

b) $\lim_{x\to\pi}(x^2+\cos\ x)$

c) $\lim_{x\to -2}(x^3-2x)^4$

d) $\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{x^4+9x^3+10x^2-x+5}$

e) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x\cdot\sin\ x}{x+1}$

f) $\lim_{x\to 5}\ln(x^3-3x^2-30)$

g) $\lim_{x \to -2} 2^{x^2+3x+5}$

h) $\lim_{x \to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$

i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3-4x^2-3x}{x^2+3x-4}$

j) $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

l) $\lim_{x \to -8} \frac{\sqrt[3]{x}+2}{x+8}$

Relembrando:

O conceito de continuidade em um ponto a está relacionado com o comportamento da função numa vizinhança de a e em $f(a)$. Juntamente com as análises já estudadas em sala de aula, podemos agora dizer que:

- Se $a \in D_f$ e f está definida numa vizinhança de $x = a$, diz-se que f é contínua em $x = a$ quando e so quando existe $\lim_{x \to a} f(x)$ e $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

- Se $a \in D_f$ e f está definida numa vizinhança de $x = a$, diz-se que f é descontínua em $x = a$ se não existe $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, isto é, os limites laterais são diferentes ou infinitos, ou simplesmente não existem ou $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$.

Partindo dessas definições, resolva as questões abaixo.

Exercício 3: Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado ($p = 0$). Justifique.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x}, & \text{se } \ x \geq 0 \\ \text{L}, & se \ \ x < 0 \end{cases} , \tag{1}$$

Exercício 4: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \text{2x+1}, & \text{se } \ x \geq 1 \\ 5, & se \ \ x < 1 \end{cases} , \tag{2}$$

Calcule o valor do limite: $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ e diga se existe o $\lim_{x \to 1} f(x)$, justifique.

Exercício 5: Calcule os limites indicados: $\lim_{x\to 1^-} f(x)$; $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 1} f(x)$, se existirem. Caso os limites não existam, especifique a razão.

$$f(x) = \begin{cases} \text{3x - 2}, & \text{se } x > 1 \\ 2, & se \quad \text{x} = 1 \\ \text{4x} + 1, & se \quad \text{x} < 1 \end{cases}, \tag{3}$$

Exercício 6: O protótipo de um veículo esta sendo testado e sua velocidade no tempo x é dada pela função abaixo:

$$f(x) = \begin{cases} \text{7x-2}, & \text{se } \text{x} \geq 1 \\ kx^2, & se \quad \text{x} < 1 \end{cases}, \tag{4}$$

Os engenheiros do protótipo desejam que a velocidade apresente um comportamento contínuo, ou seja, ela não mude abruptamente em um determinado tempo. Neste caso, a partir do conhecimento que se tem, sobre a relação entre limite e continuidade, indique o valor de k que torna possível a existência do limite e a função seja, desta forma, contínua.

Exercício 7: Seja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x < 2 \\ 1, & se\ x = 2 \\ 4 - x, & se\ x > 2 \end{cases}$$

Calcular: $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

Exercício 8: Seja

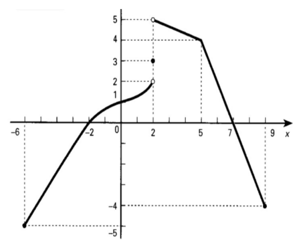
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & se\ x < 1 \\ 3, & se\ x = 1 \\ x + 1, & se\ x > 1 \end{cases}$$

Calcular: $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 1} f(x)$.

<u>Exercício 9:</u> Seja $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & se\ x \leq 3 \\ 4 - x, & se\ x > 3 \end{cases}$ Calcular: $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

<u>Exercício 10:</u> Verificar se a função definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \end{cases}$ **é contínua em** $x = 1$.

<u>Exercício 11:</u>



O

O gráfico representa uma função f de $[-6, 9]$ em $\mathbb{R}$. Determine, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

<u>Exercício 12:</u> Calcule:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} (-4x + 7)$

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\dfrac{-3}{x + 5})$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\dfrac{2x^3 + x^2 - 7}{x^4 - 5x^2 + 5})$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} (\dfrac{x^2 + 3x}{x^2 - 4})$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{x^3 + 3x - 1}{2x^2 + x + 1})$

f) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\dfrac{x^3 - 3x^2 + 1}{1 - 2x^2})$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} (\dfrac{100}{x^2 + 5})$

h) $\lim_{x \to -\infty} (x^4 + 5x^2 + 1)$

i) $\lim_{x \to 3^+} (\dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3})$

j) $\lim_{x \to +\infty} (\dfrac{x^2}{x + 1})$

<u>Exercício 13:</u> Determine, se existirem, as assíntotas da função $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$.

<u>Exercício 14:</u> Determine, se existir, a assíntota horizontal da função $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ e desenhe o gráfico.

<u>Exercício 15:</u> Determine as assíntotas horizontais e verticais, caso existam, do gráfico da função: $g(x) = \frac{x+3}{2-x}$.

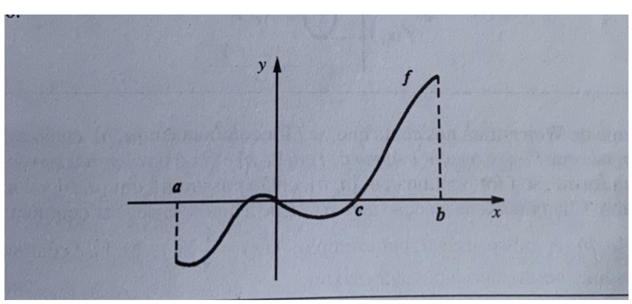
<u>Exercício 16:</u> Considere a função racional $f(x) = \frac{x^2-1}{5x-4}$ e determine a assíntota oblíqua desta função, caso exista.

<u>Exercício 17:</u> A função logística tem aplicações em várias áreas do conhecimento como, por exemplo, na inteligência artificial e na modelagem de crescimento populacional. Ela tem a forma: $\phi = \frac{1}{1+e^{-x}}$. Encontre a(s) assíntotas(s) horizontal(ais) dessa função.

Antes dos próximos exercícios estejam atentos aos teoremas e corolários:

Teorema 1 *Teorema de Bolzano.*

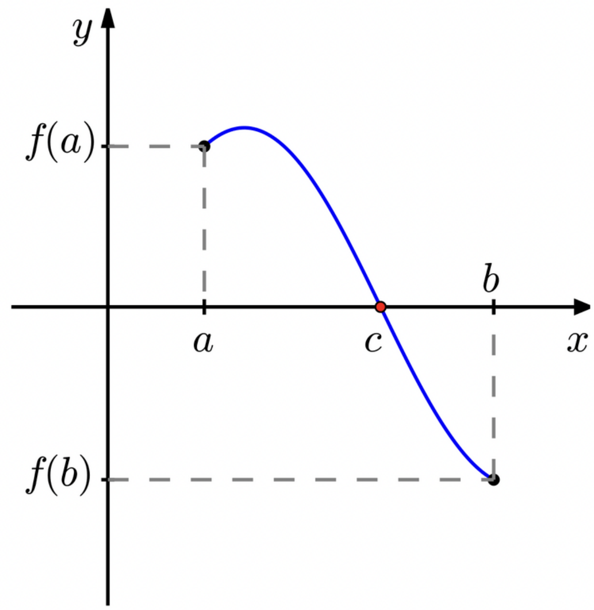
Se f for contínua no intervalo fechado [a,b] e se f(a) e f(b) tiverem sinais contrários, então existirá <u>pelo menos um</u> ***c*** *em [a,b], tal que* $f(c) = 0$.



Geometricamente isto significa que o gráfico de f intersecta a reta horizontal $y = l$ sempre que l esteja entre f(a) e f(b).

Corolário 1 *Corolário do Teorema de Bolzano:*

Seja $f : [a, b] \to R$ *contínua tal que* $f(a) \times f(b) < 0$ *então existe* $c \in \mathbf{R}$ *tal que* $f(x) = 0$

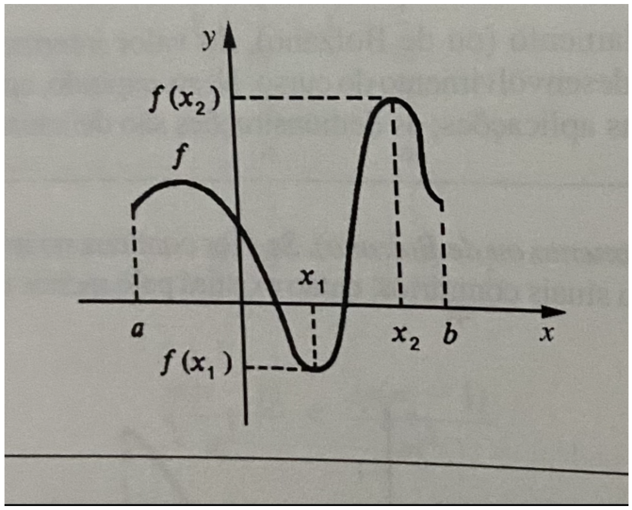


"Traduzindo": Isto significa que se f(a) e f(b) tiverem sinais contrários, então a função possui pelo menos um zero no intervalo [a,b].

Este Corolário do Teorema de Bolzano é muito útil principalmente na presença de um polinômio de quarto ou quinto grau. Embora não "consigamos" encontrar raízes recorrendo aos métodos algébricos podemos provar que existem em um determinado intervalo desde que se verifiquem as condições do corolário.

Teorema 2 *Teorema de Weierstrass.*

Se f for contínua em [a,b], então existirão x_1 *e* x_2 *em [a,b] tais que* $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ *para todo* x *em [a,b].*



O que este Teorema quer nos dizer é o seguinte: se f for contínua em [a,b] então existirão x_1 e x_2 neste intervalo tais que $f(x_1)$ é o valor mínimo de f em [a,b] e $f(x_2)$ é o valor máximo de f em [a,b]. Ou seja, se f for continua no intervalo [a,b] então assumirá em [a,b] valor máximo e valor mínimo.

Exercício 18: Considere a função $f(x) = 2x + \sqrt[3]{x}$, mostre que a equação $f(x) = 5$ tem solução quando $x \in [1, 8]$.

Exercício 19: Seja $g(x) = x^5$, no intervalo $]1, 2[$, dada a equação $g(x) = 2$ existe alguma solução neste intervalo ? Se sim, indique uma. Considere a existência de números irracionais.

Exercício 20: Seja h uma função de domínio **R** definida por $h(x0 = x^3 + x^2 + x - 2$, a função possui pelo menos um zero da função, no intervalo $] - 1, 1[$?

Exercício 21: Existe algum $c \geq 0$ tal que: $c = \sqrt{c + 1}$, no intervalo $]0, 3[$?

Exercício 22: Seja g uma função de domínio $[0, +\infty[$, definida por:

$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 - \sqrt{x}, & se\ 0 \leq x \leq 2 \\ x - 5 + \sqrt{x - 1}, & se\ x > 2 \end{cases}$. Em qual dos seguintes intervalos o Teorema de Bolzano permite garantir a existencia de pelo menos um zero da função g?

a) $]0, 1[$

b) $]1, 3[$

c) $]3, 5[$

d) $]5, 9[$

Exercício 23: Seja f uma função de domínio $[-3, 8]$, definida por:

$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 9 - \sqrt{x}, & se\ [-3, 0] \\ 9 - x, & se\ ]0, 8] \end{cases}$, existe um máximo e um mínimo?