Exercícios de Álgebra

1. Resolva pelo método de Gauss o sistema

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x- & 3y- & z & = & 2 \\ 2x & + & z & = & -1 \\ x- & y & & = & 4 \end{array}\right.$$

2. Determine para que valores de h o sistema é possível:

$$\left\{\begin{array}{rrcr} 3x+ & y & = & 2 \\ x+ & hy & = & 3 \end{array}\right.$$

3. Resolva pelo método de Gauss e apresente a solução na forma vectorial paramétrica:

   (a)

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x- & 3y- & z & = & 2 \\ x- & 2y+ & z & = & 1 \end{array}\right.$$

   (b)

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} 2x_1- & 3x_2- & x_3+ & 2x_4 & = & 2 \\ x_1- & 2x_2+ & x_3- & x_4 & = & 1 \end{array}\right.$$

4. Considere o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x & -2y & & = & -2 \\ -x & +2y & +z & = & 2 \end{array}\right. .$$

   (a) Resolva-o pelo método de Gauss e dê a sua solução geral na forma vectorial paramétrica. Descreva geometricamente o conjunto das soluções.

   (b) Dê exemplos de três soluções particulares.

5. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 3 \\ -3x_1 & -4x_2 & +x_3 & +x_4 & = & 1 \end{array}\right. .$$

   (a) Resolva-o pelo método de Gauss e apresente a solução geral na forma vectorial paramétrica.

(b) Apresente três exemplos de soluções particulares.

6. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} -3x & -y & +2z & = & 5 \\ -x & & +z & = & 1 \\ 2x & +y & & = & 0 \end{cases}.$$

(a) Escreva-o na forma de: i. equação vectorial; ii. equação matricial.

(b) Resolva o sistema pelo método de Gauss.

(c) Seja $\vec{b}$ o vector dos termos independentes e A a matriz dos coeficientes do sistema dado no enunciado do exercício. Escreva $\vec{b}$ como combinação linear dos vectores formados pelas colunas de A.

7. Considere a matriz A e o vector $\vec{b}$ dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & h \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix}.$$

Discuta a classificação da equação $A\vec{x} = \vec{b}$ (determinada, indeterminada ou impossível) em função dos valores dos parâmetros h e k.

8. Resolva pelo método de Gauss a presente a solução na forma de conjunto gerado:

$$\begin{cases} 2x_1- & 3x_2- & x_3+ & 2x_4 & = & 0 \\ x_1- & 2x_2+ & x_3- & x_4 & = & 0 \end{cases}$$

9. Determine se $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ é combinação linear de $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e de $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

10. Com referência à questão anterior, escreva o primeiro vector como combinação linear dos últimos três.

11. Sejam $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Indique cinco vectores de $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$. Dê uma descrição geométrica deste conjunto.

12. Seja $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}$. Para que valores de h pertence $\vec{b}$ ao plano gerado por $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

13. Determine se $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ pertence a $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

14. Seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Resolva pelo método de Gauss a equação $A\vec{x} = \vec{b}$.

15. Determine se os vectores a_1, a_2 e a_3 geram $\mathbb{R}^3$.

    (a) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

    (b) $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

16. Determine se os seguintes conjuntos de vectores são linearmente dependentes ou independentes:

    (a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

    (b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$

    (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

17. Para que valores de h são os seguintes vectores linearmente dependentes: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ h \\ 1 \end{pmatrix}$.

18. Seja T a transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ cuja matriz canónica é a matriz A do exercício 14. Sejam $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

(a) Determine $T(\vec{u})$.

(b) Determine se $\vec{w}$ pertence à imagem de T.

(c) Determine o ou os vectores (se existirem) cuja imagem pela transformação T é $\vec{v}$.

(d) Determine se T é (i) injectiva; (ii) sobrejectiva.

19. Seja T a transformação linear de $\mathbb{R}^a$ em $\mathbb{R}^b$ cuja matriz canónica é

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine a e b.

   (b) Determine, sob a forma de conjunto gerado, os vectores cuja imagem pela transformação T é nula.

   (c) Determine os vectores cuja imagem pela transformação T é $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (d) Determine se T é (i) sobrejectiva; (ii) injectiva.

20. Determine as matrizes canónicas correspondentes às seguintes transformações geométricas de vectores de $\mathbb{R}^2$:

   (a) Rotação de 90º no sentido positivo.

   (b) Reflexão no eixo dos xx seguida de reflexão na recta $y = x$.

21. Considere a transformação linear dada por $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

   (a) Determine a sua matriz canónica.

   (b) Determine se T é (i) injectiva; (ii) sobrejectiva.

   (c) Determine se $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pertence à imagem da transformação T.