I. Sistemas de Equações Lineares e Matrizes

I. 1. Operações elementares

Exemplos de equações lineares

$$3x + 2y = 10$$

$$4x - y + \frac{3}{4} z = 32$$

$$5x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 8$$

Uma equação linear é uma equação da forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b,$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ são constantes.

$x_1, \ldots, x_n$ - incógnitas ou variáveis

$a_1, \ldots, a_n$ - coeficientes

b - termo independente

Um sistema de equações lineares é obtido juntando várias equações lineares.

Exemplo 1.1

a) $\begin{cases} 5x + 2y = 11 \\ x - y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 14 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 28 \\ x_1 + 4x_3 = 8 \end{cases}$

Uma <u>solução</u> do sistema é uma lista de valores que, quando substituídos nas incógnitas, tornam as equações verdadeiras.

<u>Exemplo 1.2</u>

a) Verifique que $(3,-2)$ é solução do sistema do exemplo 1.1. a)

b) Verifique que $(8,2,0)$ é solução do exemplo 1.1. b).

<u>Classificação de sistemas</u>

Um sistema pode ser

$$\begin{cases} \text{possível} \begin{cases} \text{determinado} \\ \text{indeterminado} \end{cases} \\ \text{impossível} \end{cases}$$

Sistema possível determinado: tem uma única solução

Sistema possível indeterminado: tem mais do que uma solução

Sistema impossível: não tem soluções

Exemplo 1.3

O sistema $\begin{cases} x+2y=6 \\ 2x+4y=8 \end{cases}$ é impossível.

Matrizes

As seguintes tabelas de números codificam o sistema do exemplo 1.1.a). Estas tabelas chamam-se matrizes.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 11 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

↓ matriz dos coeficientes

↓ matriz dos termos independentes

↓ matriz aumentada

(A matriz aumentada também se chama matriz completa.)

Operações elementares em linhas

(de um sistema ou de uma matriz)

São operações de um dos seguintes três tipos:

i) Trocar duas linhas ($L_i \leftrightarrow L_j$);

ii) Multiplicar uma linha por uma constante não nula ($L_i \to kL_i$);

iii) Somar (ou subtrair) a uma linha um múltiplo de outra linha ($L_i \to L_i + kL_j$).

Exemplo 1.4

Resolver o sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \quad\;\; 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

usando apenas operações elementares.

Observação

A partir do formato "triangular" já sabemos que o sistema tem uma única solução.

Matrizes equivalentes por linhas (ou linha-equivalentes) são matrizes que se podem obter uma da outra usando somente operações elementares.

Propriedade

As operações elementares em linhas são um modo "legítimo" de resolver sistemas. Isto é, os sistemas obtidos sucessivamente são equivalentes ao sistema original (ou seja, têm a mesma solução ou soluções).

Logo, se as matrizes aumentadas de dois sistemas são linha-equivalentes, os sistemas têm a mesma solução (ou soluções).

Exemplo 1.5

Use operações elementares para determinar se o seguinte sistema é possível:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 1 \\ \phantom{5x_1 -{}} x_2 - 4x_3 = 8 \end{cases}$$

I.2 Método de Gauss

Matriz escalonada

É uma matriz que satisfaz:

i) Se existirem linhas nulas, estas são as últimas linhas da matriz;

ii) O primeiro elemento não nulo de cada linha está situado para a direita do primeiro elemento não nulo da linha anterior.

Exemplo 2.1

As matrizes

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

estão escalonadas.

A matriz $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ não está escalonada.

Elemento pivot e coluna pivot

Dada uma matriz escalonada, os elementos pivot são os primeiros elementos não nulos de cada linha. As colunas pivot são as colunas que contêm elementos pivot.

Matriz escalonada reduzida

É uma matriz escalonada que satisfaz adicionalmente:

i) Todos os elementos pivot têm valor 1;

ii) Todos os elementos situados em colunas pivot (exceptuando os próprios pivot) são nulos.

Exemplo 2.2

As matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

estão na forma escalonada reduzida.

Teorema 1

Qualquer matriz é linha-equivalente a uma única matriz escalonada reduzida.

Observação

Dada uma matriz original, obtemos por uma sucessão de operações elementares uma matriz escalonada e, com mais operações, uma matriz escalonada reduzida. A matriz escalonada não é única, mas a matriz escalonada reduzida é.

Este processo é chamado <u>método de Gauss</u>.

Exemplo 2.3

Aplique o método de Gauss para escalonar e reduzir a matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.4

Resolva o sistema pelo método de Gauss:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 - 11x_3 = 19 \end{cases}$$

Classifique-o

Exemplo 2.5

Depois de escalonar a matriz aumentada de certo sistema, temos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Classifique-o. Obtenha a solução geral do sistema na forma paramétrica.

Colunas e posições pivot de uma matriz

As colunas pivot e as posições pivot ~~a~~ de uma matriz qualquer são as que estão na mesma posição das colunas e posições pivot de uma matriz escalonada que lhe seja equivalente.

Exemplo 2.6

(ver exemplo 2.3)

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & \boxed{-7} & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & \boxed{6} & 15 \end{pmatrix}$$

$\square \rightarrow$ posições pivot

Como classificar sistemas usando o método de Gauss:

Escrevemos a matriz aumentada do sistema e escalonamos. Distinguem-se então três situações:

i) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ Sistema determinado

ii) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ Sistema indeterminado

iii) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ Sistema impossível

Os três casos estão sintetizados no seguinte teorema.

Teorema 2

Considere-se um sistema e a respectiva matriz aumentada. O sistema é $\begin{cases} \text{impossível, se a última coluna é pivot} \\ \text{possível, caso contrário} \end{cases}$.

Se o sistema é possível, então ele é

$\begin{cases} \text{determinado, se todas as colunas excepto a última são pivot} \\ \text{indeterminado, caso contrário} \end{cases}$