ISPGAYA
instituto superior politécnico

Análise Matemática I - Licenciatura - Engenharia Informática

Exercícios de Derivadas.

Joana Becker Paulo e Mafalda Correia

Questão 1 Como visto em sala de aula, sabemos que uma derivada pode ser definida através dos conceitos aprendidos anteriormente, através da definição de limites. Por isto, a matemática é linda, antes de conhecermos as regras de derivação que vão "simplificar os cálculos" é possível encontrar as derivadas através do conceito:

Definição 1 *(Derivada num ponto) Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$ um ponto. A derivada de f em x_0, se existir, é dada por:*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Quando este limite existe e é finito, dizemos que f é diferenciável em x_0.

Usando esta definição formal de derivada, determine as derivadas das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x) = \ln(x)$, $x = a \in D_f$

b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x = 2$

c) $f(x) = x^2 - 3x$, $x = 3$

Questão 2 Aplicação de derivada na Geometria analítica. Em sala de aula vimos como encontrar a equação da reta tangente à uma curva. Vamos relembrar:

Em um gráfico de uma função, quando se deseja encontrar a reta tangente, a esse gráfico, é preciso conhecer o coeficiente angular (ou inclinação) dessa reta tangente à curva traçada por f no ponto p.

Como sabemos, o coeficiente angular da reta tangente é igual a derivada da função no ponto p e que a reta tangente tem sua equação geral dada por:

$$f(x) - f(p) = f'(p)(x - p)$$

Após esta lembrança, encontre a reta tangente à função $f(x) = x^3 + 1$ no ponto $p = 1$.

Questão 3 Escreva uma equação da reta tangente ao gráfico da função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto de abcissa 4.

Questão 4 Sabendo que são válidas as seguintes fórmulas de derivação:

a) Se $f(x) = e^x$, então:

$$f'(x) = e^x$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^x e^h - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h}.$$

À primeira vista, o quociente $\frac{e^h-1}{h}$ é uma forma indeterminada 0/0. Como já estudamos, aplicamos a regra de L'Hospital:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(e^h)'}{(h)'} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h}{1} = 1.$$

Portanto:

$$f'(x) = e^x.$$

b) Se $g(x) = \ln x$, então:

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}.$$

Usamos a propriedade dos logaritmos:

$$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right), \quad a > 0, b > 0.$$

Aplicando com $a = x + h$ e $b = x$:

$$\ln(x+h) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x+h}{x}\right).$$

Portanto:

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h}.$$

Seja $u = \frac{h}{x}$, então $h = ux$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} \lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u}.$$

Este limite também é uma forma indeterminada $0/0$. Aplicando L'Hospital:

$$\lim_{u \to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{\frac{1}{1+u}}{1} = 1.$$

Logo:

$$g'(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Derive:

a) $f(x) = x^2 e^{x^2}$

b) $f(x) = e^{\frac{x^3}{\sqrt{x}-1}}$

c) $f(x) = (1 - x^2)\ln x$

d) $f(x) = x^2 - \frac{\ln(x^2)}{x}$

Agora, vamos relembrar a definição de Regra da Cadeia:

Teorema 1 (Regra da Cadeia) *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : J \to \mathbb{R}$ funções tais que $f(I) \subseteq J$. Se f é diferenciável em $x_0 \in I$ e g é diferenciável em $f(x_0) \in J$, então a função composta $g \circ f$ é diferenciável em x_0 e verifica-se:*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0).$$

Questão 5 Sendo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4 e^{-x}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, defina $(g \circ f)'$.

Questão 6 Um problema frequente em trigonometria e cálculo é determinar a derivada de funções trigonométricas compostas, isto é, quando o argumento da função não é simplesmente x, mas uma expressão mais complexa.

Recorde que:

$$\frac{d}{dx}\sin(u) = u' \cdot \cos(u) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\cos(u) = -\,u' \cdot \sin(u),$$

onde u é uma função de x.

Aplicando a regra da cadeia, obtenha a derivada da função:

$$F(x) = \cos(2x).$$

Questão 7 Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Mostre que f é contínua em $x = 0$ mas, no entanto, não é diferenciável nesse ponto.

Questão 8 Em cada uma das alíneas que se seguem, determine a função derivada da função considerada.

a) $f(x) = (x-1)(x^2+3x)$

b) $f(x) = \sqrt[3]{(2x-1)^2}$

c) $f(x) = \frac{cosx}{1-sen(x)}$

d) $(\frac{x^3-sinx}{2x^2})^2$

e) $sin(sinx-1)$

Questão 9 Obtenha o valor de $f'(0)$ da função: $f(x) = (3x^2+x)\cdot(x^3-4x+2)$.

Questão 10 Calcule a derivada da função: $f(x) = \frac{3x^2+4x-83}{x-1}$, no ponto $x = 2$.

Questão 11 Partindo da função: $f(x) = 8x^4+5x^3-x^2+7$, indique a quantidade de vezes que esta função é derivável (ou seja, encontre todas as derivadas possíveis).

Teorema 2 (Derivada da função inversa) *Seja f uma função estritamente monótona e contínua num intervalo I, diferenciável em $x_0 \in I$ com $f'(x_0) \neq 0$, e seja f^{-1} a sua inversa. Então f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$ e*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Questão 12 Considere a função f definida por $f(x) = 5x^7+6x^3+x+9$. Sabendo que $f(-1) = -3$ e que f é invertível, determine $(f^{-1})'(-3)$.

Questão 13 Considere a função f definida por $f(x) = 4x^3+x+2$. Sabendo que f é invertível, determine $(f^{-1})'(2)$.

Questão 14 Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas por $f(x) = x^3$ e $g(x) = sen(x)$. Determine, utilizando o Teorema da derivada da função inversa, as derivadas seguintes:

a) $(f^{-1})'(x)$, para $x \in \mathbb{R}^+$

b) $(g^{-1})'(0)$

Derivadas das funções inversas trigonométricas: As funções arco seno, arco cosseno e arco tangente são as inversas das funções trigonométricas usuais. Ou seja, enquanto seno, cosseno e tangente relacionam ângulos com razões entre lados de um triângulo retângulo, suas inversas fornecem o valor do ângulo a partir dessas razões.

$$(\arcsin(ax))' = \frac{a}{\sqrt{1-(ax)^2}}, \quad |ax| < 1,$$
$$(\arccos(ax))' = -\frac{a}{\sqrt{1-(ax)^2}}, \quad |ax| < 1,$$
$$(\arctan(ax))' = \frac{a}{1+(ax)^2}.$$

Interpretação geométrica:

Num triângulo retângulo, temos os catetos (adjacente e oposto ao ângulo) e a hipotenusa. As funções trigonométricas são definidas como razões entre esses lados.

Se fôssemos observar o triângulo retângulo, temos: a base, a perpendicular (catetos adjacente e oposto ao ângulo, respectivamente) e a hipotenusa.

Arco seno:

A fórmula do seno trata-se de cateto oposto ao ângulo dividido pela hipotenusa.
O arco seno nos fornece o valor do ângulo:

$$\sin\theta = \frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}$$
$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{cateto\ oposto}{hipotenusa}\right)$$

Arco cosseno:

A fórmula do cosseno trata-se de cateto adjacente ao ângulo dividido pela hipotenusa.
O arco cosseno nos fornece o valor do ângulo:

$$\cos\theta = \frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}, \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{cateto\ adjacente}{hipotenusa}\right).$$

Arco Tangente:

A tangente é definida como cateto oposto dividido pelo cateto adjacente. O arco tangente fornece o ângulo correspondente a essa razão.

$$\tan\theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}, \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}\right).$$

Questão 15 Derive:

a) $f(x) = arcsen(\sqrt{x})$

b) $f(x) = (1 + x^2)arctg(x)$

c) $f(x) = arcsen(\frac{1}{x^2})$

d) $f(x) = arccos(1 - e^x)$

e) $f(x) = arctg(1 + \ln x)$

Questão 16 Para cada uma das funções seguintes determine $(f^{-1})'$ utilizando o Teorema da derivada da função inversa.

a) $f(x) = x^3 + 1$

b) $f(x) = \ln(arcsen(x))$, com $x \in]0, 1[$

c) $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$, com $x \in]-1, 0[$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x \geq 0 \\ 1 - x^3 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Questão 17 Determine os extremos das funções:

a) $f(x) = x^3 - 27x + 1$

b) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$

Questão 18 Encontre os pontos de inflexão do gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ e determine a concavidade do gráfico.

Vamos agora, relembrar alguns outros teoremas, já trabalhados em sala de aula:

Teorema 3 (Teorema de Lagrange ou do Valor Médio) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que:*

** f é contínua em $[a, b]$;*
** f é diferenciável em $]a, b[$.*

Então, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Questão 19 Mostre que a função $f(x) = arctg(x - 2) + 2x - 5$ tem um único zero no intervalo $]2, 3[$.

Questão 20 A função $f(x) = x^{\frac{4}{5}}$ no intervalo $[0, 1]$, satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio, no intervalo dado? Justifique a sua resposta.

Teorema 4 (Teorema de Rolle) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que:*
** é contínua em $[a, b]$; * f é diferenciável em $]a, b[$; * $f(a) = f(b)$.*
Então, existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Questão 21) Determine um ponto c que satisfaça o Teorema de Rolle para as seguintes funções:

a) $f(x) = 2 + \sqrt{x} - \sqrt{x^3}$ definida em $[0, 1]$

b) $f(x) = 2 + \sin x$ definida em $[0, 2\pi]$

Questão 22 Calcule os limites usando a regra de L'Hostipal:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{3x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x} - 1}{3x}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} (\ln(3x^2 + 2) - \ln(x^2))$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{sen^2 \frac{x}{3}}{x^2}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x + 1} - x}{x}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2arcsen(x)}{3x}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{xsen(x)}$

h) $\lim\limits_{x \to -\pi/4} \dfrac{\cos(2x)}{1 + cotg(x)}$

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^p}$ com $p \in \mathbb{R}^+$

j) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - x}{\ln(2 - x)}$

l) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

m) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

n) $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$

o) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$

p) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos(2x))^{\frac{1}{x^2}}$

q) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$

r) $\lim\limits_{x \to 0^+} (tg(x))^{tg(2x)}$

s) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x + 3}{x - 1}\right)^{x+3}$

t) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{x-1} - x}{(x - 1)^2}$

u) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan 5x}{\arctan 7x}$

Considerando $(\arctan(ax))' = \frac{1}{1+(ax)^2}$. É interessante ressaltar que, a função arco tangente é a inversa da tangente, poderíamos descrever como: $(\tan x)^{-1}$

Se fossemos observar o triângulo retângulo temos: a base, a perpendicular (que são conhecidos como catetos, adjacente e oposto ao ângulo, respectivamente) e a hipotenusa. A fórmula da tangente, todos já sabem que trata-se de cateto oposto ao ângulo, dividido pelo cateto adjacente ao ângulo. O arco tangente nos fornece o valor deste ângulo.

$$\tan \theta = \frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente}\right)$$

v) $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x^2 - x}$