Ficha 2 - Álgebra

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   Seja I a matriz identidade de ordem 2. Das operações $A - 2C$, AB, BA, A^2, B^2, $3IA$ e ACB efectue a ou as que estão bem definidas.

2. Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} k & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Determine k para que as matrizes comutem.

3. Determine se A e B são matrizes inversas uma da outra:

   (a)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

   (b)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Seja A a matriz A do exercício 3b. Seja $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Use o facto das matrizes A e B do exercício 3b serem inversas uma da outra para resolver a equação $A\vec{x} = \vec{b}$.

5. Use o método de Gauss para determinar as matrizes inversas (se existirem) das seguintes matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Calcule o determinante da matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

usando:

(a) expansão na primeira linha;

(b) expansão na segunda coluna;

(c) regra de Sarrus.

7. Calcule os determinantes das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

(b) $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \end{pmatrix}$;

(c) $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(d) $D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Use os resultados do exercício anterior para tirar conclusões relativamente às matrizes A, B, C e D, sobre:

   (a) invertibilidade;

   (b) independência linear das colunas;

   (c) se as colunas geram ou não geram $\mathbb{R}^4$ (nos casos de A e B) ou $\mathbb{R}^5$ (nos casos de C e D).

9. Calcule a inversa da matriz do exercício 5a pelo método da matriz adjunta.