

ANÁLISE MATEMÁTICA I - LICENCIATURA - ENGENHARIA INFORMÁTICA

---

Exercícios de Integrais.

---

Joana Becker Paulo e Mafalda Correia

---

1) Determine os seguintes integrais indefinidos:

a)  $\int (3x^2 + 5x + 7) dx$

b)  $\int \sqrt[3]{x} dx$

c)  $\int (x^3 + 1)^2 dx$

d)  $\int \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$

e)  $\int \frac{3x^2}{1+x^3} dx$

f)  $\int \frac{1}{x^7} dx$

g)  $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

h)  $\int \frac{x^2+1}{x} dx$

i)  $\int \frac{x^3}{1+x^8} dx$

j)  $\int \frac{5x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx$

l)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$

2) Determine os seguintes integrais indefinidos:

a)  $\int \frac{e^{\arcsen x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

b)  $\int \frac{1}{x} \cos(\ln x) dx$

c)  $\int \frac{6}{x \ln^3(4x)} dx$

d)  $\int \frac{e^{3x}}{(e^{3x}-2)^6} dx$

e)  $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx$

f)  $\int e^x \sqrt{1+e^x} dx$

g)  $\int \frac{1}{x \ln x} dx$

h)  $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx$

i)  $\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx$

j)  $\int x^5 \sin(x^6) dx$

k)  $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

l)  $\int \frac{\cos(\ln(x^2))}{x} dx$

m)  $\int \frac{1}{e^x + 9e^{-x}} dx$

n)  $\int \frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{1+x^2} dx$

3) Considere a função  $g$  definida em  $\mathbb{R}^+$  por  $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$ .

a) Determine a família de todas as primitivas de  $g$ .

b) Indique a primitiva da função  $g$  que se anula para  $x = e$ .

4) Determine a primitiva  $F$  para a função  $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$  tal que  $F(-1) = 1$ .

5) Determine a primitiva da função  $f$  definida por  $f(x) = \frac{3\cos(\ln x)}{x}$  que toma o valor 2 em  $x = 1$ .

6) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a)  $P\left[\frac{\ln^2(x)}{x}\right]$

b)  $P\left[\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\right]$

c)  $P\left[\frac{2}{\sqrt{x}}\right]$

d)  $P\left[\frac{x\sqrt{x}}{2}\right]$

e)  $P\left[\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right]$

f)  $P\left[\frac{2}{\sqrt{1-2x}}\right]$

7) Calcule as seguintes integrais indefinidas, observando se é preciso utilizar algum método específico para facilitar seus cálculos.

a)  $\int \frac{x^2}{(2x^3+1)^{\frac{2}{3}}} dx$

b)  $\int xe^{2x^2-1} dx$

c)  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

d)  $\int \frac{(\ln u)^3}{u} du$

e)  $\int x \cos(\pi x^2) dx$

f)  $\int \frac{\ln(5x)}{x} dx$

g)  $\int \frac{(\ln x)^2}{2x} dx$

h)  $\int \frac{1}{x \ln(x)} dx$

i)  $\int x \sin(2x^2) dx$

j)  $\int 28(7x-2)^{-5} dx$

l)  $\int \frac{9r^2 dr}{\sqrt{1-r^3}}$

m)  $\int x^2 e^{-2x^3} dx$

n)  $\int \ln(x) dx$

o)  $\int \ln(2x+3) dx$

p)  $\int x \ln(x) dx$

q)  $\int x e^x dx$

r)  $\int (2x+1) \sin(x) dx$

8) Determine, usando a técnica de integração por partes, os seguintes integrais indefinidos:

a)  $\int x \cos x dx$

b)  $\int x^2 \cos x dx$

c)  $\int \ln^2 x dx$

d)  $\int \ln x dx$

e)  $\int \ln(x^2 + 1) dx$

f)  $\int e^{2x} \sin x dx$

g)  $\int \arcsin x dx$

h)  $\int e^{\sqrt{x}} dx$

i)  $\int \operatorname{arctg} x dx$

j)  $\int \sqrt{x} \ln x dx$

l)  $\int \cos^2 x dx$

9) Determine a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 2$  e  $f''(x) = 12x$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

10) Calcule as seguintes integrais definidas, observando se é preciso utilizar algum método específico para facilitar seus cálculos.

a)  $\int_{-3}^0 (x^2 - 4x + 7) dx$

b)  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(x)) dx$

c)  $\int_{\ln 2}^3 (5e^x) dx$ . Sabe-se que  $e^{\ln 2} = 2$

d)  $\int_0^2 x e^{-x} dx$

e)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^2 x \sin(x) dx$

f)  $\int_{\frac{1}{3}}^2 x^2 + 2x + 1 dx$

g)  $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

h)  $\int_0^8 \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x} dx$

i)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) dx$

j)  $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$

l)  $\int_1^e \frac{1+\ln(x)}{x} dx$

11) Calcule:

a)  $\int_0^2 6x^4 dx$

b)  $\int_0^2 \left( \frac{t^2}{3} - \sqrt{t} \right) dt$

c)  $\int_{-4}^{-3} \frac{e^x}{3} dx$

d)  $\int_1^3 \frac{x^3}{\sqrt{x}} dx$

e)  $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$

f)  $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

g)  $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx$

h)  $\int_3^6 \frac{1}{x} dx$

i)  $\int_0^1 \sqrt[3]{x}(x-1) dx$

j)  $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$

l)  $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx$

12) Calcule:

a)  $\int_0^2 f(x) dx$  onde  $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

b)  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$  onde  $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}[ \\ \cos x & \text{se } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \\ \sin x & \text{se } x \in ]\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}$

13) Encontre a área limitada pela curva  $y = 4 - x^2$  e o eixo x.

14) Determinar a área limitada pelas curvas  $y = 2x$  e  $y = 5x - x^2$ .

15) Encontre a área limitada pelas curvas  $y = x^2$  e  $y = x + 6$ .

16) Determine a área pelas curvas  $y = x^2$  e  $y = \sqrt{x}$ .

17) Faça um esboço da área limitada pelos gráficos e determine-a:

a)  $f(x) = \sin(x)$ , o eixo dos x, para  $0 \leq x \leq \pi$

b) Pela circunferência de equação  $x^2 + y^2 = a^2$

c)  $f(x) = x^2, g(x) = 4x$

d)  $y = \frac{8}{x}, y = x^2, x = 1, x = 4$

18) A probabilidade  $P$  de que um frequencímetro digital manufacturado por uma companhia electrónica dure entre 2 e 3 anos, com um uso normal, é dada aproximadamente por

$$P = \int_2^3 12t^{-3} dt.$$

a) Calcule a probabilidade  $P$ .

b) Calcule  $x$  tal que

$$\int_2^x 12t^{-3} dt = 1.$$

19) Utilizando a **tabela de integrais fornecida** no final desta lista, identifique, em cada caso, a forma da integral que permite resolver o problema.

Em seguida, determine a primitiva correspondente.

a)  $\int \frac{3}{1 + (3x - 1)^2} dx$

b)  $\int \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}} dx$

c)  $\int x \sin(x^2) dx$

d)  $\int \frac{1}{\sqrt{1 - (2x + 1)^2}} dx$

e)  $\int \sin^2 x dx$

f)  $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$

g)  $\int \frac{1}{\cos^2(3x)} dx$

h)  $\int (2x + 1) \cos(x^2 + x) dx$

i)  $\int \frac{1}{1 + \ln^2 x} \frac{1}{x} dx$

## Tabela de integrais trigonométricas

Integral	Primitiva
$\int \frac{1}{1+x^2} dx$	$\arctan x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\arcsin x + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$	$\arccos x + C$
$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx$	$\arctan(f(x)) + C$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}} dx$	$\arcsin(f(x)) + C$
$\int \sin(ax) dx$	$-\frac{1}{a} \cos(ax) + C$
$\int \cos(ax) dx$	$\frac{1}{a} \sin(ax) + C$
$\int \sin(f(x))f'(x) dx$	$-\cos(f(x)) + C$
$\int \cos(f(x))f'(x) dx$	$\sin(f(x)) + C$
$\int \sin^2 x dx$	$\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$
$\int \cos^2 x dx$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$
$\int \tan x dx$	$-\ln  \cos x  + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	$\tan x + C$