

## II. Álgebra de matrizes

### II.1. Operações com matrizes

#### Convenções de escrita

Se  $A$  é uma matriz de ordem  $m \times n$ , podemos escrever  $A$  como

$$A = \left( \vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_n \right)$$

onde  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  são as colunas de  $A$ , ou

como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

onde  $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$  são os elementos (ou entradas) da matriz.

Por exemplo, se  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ , temos

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad a_{21} = 0, \quad a_{13} = 8.$$

## Alguma terminologia

(47)

Matriz linha: matriz com uma só linha

$$\text{Ex: } (2 \ 0 \ 3).$$

Matriz coluna: matriz com uma só coluna

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Matriz quadrada: matriz com tantas linhas como colunas

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz nula: matriz com todos os elementos nulos

$$\text{Ex: } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Adição de matrizes

Só se podem somar matrizes da mesma ordem.  
Somam-se os elementos nas mesmas posições.

### Exemplo 1.1

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Se  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ , a operação  $A+C$  não está (48)  
definida, pois  $A$  e  $C$  não são da mesma ordem.

### Multiplicação de matriz por escalar

Multiplicam-se todos os elementos da matriz pelo escalar.

### Exemplo 7.2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = 2, \quad \beta = -1$$

$$\gamma = -2$$

$$\alpha A = 2 \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\beta A = (-1)A = -A = - \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A + \gamma B = A + (-2)B = A - 2B =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & -6 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -6 & -1 \\ 2 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

## Notação

(99)

$-A$  é o mesmo que  $(-1)A$ .

$A - B$  é o mesmo que  $A + (-B)$ .

## Teorema 1

Sejam  $A, B$  e  $C$  matrizes da mesma ordem. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  escalares. Temos:

i)  $A + B = B + A$

ii)  $(A + B) + C = A + (B + C)$

iii)  $A + O = A$

iv)  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

v)  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

vi)  $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

## Observação

Na propriedade iii) deste teorema, " $O$ " designa a matriz nula da ordem apropriada (ou seja, da mesma ordem da matriz  $A$ ).

Já conhecemos a multiplicação de matriz por vector:  $A\vec{x}$ .

A multiplicação de duas matrizes,  $A$  e  $B$ , é concebida de modo a que a equação  $A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}$  seja satisfeita.

Deste modo, a multiplicação de matrizes é equivalente à composição de transformações lineares:

Sejam  $A$  e  $B$  as matrizes canônicas das transformações  $T_1$  e  $T_2$ , respectivamente.

$$T_1: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\vec{x} \mapsto A \vec{x}$$

$$T_2: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\vec{x} \mapsto B\vec{x}$$

$$T_1(\vec{x}) = A\vec{x}$$

$$T_2(\vec{x}) = B\vec{x}$$

$$\vec{x} \xrightarrow{T_2} B\vec{x} \xrightarrow{T_1} A(B\vec{x})$$

$T_1 \circ T_2$

$$(T_1 \circ T_2)(\vec{x}) = A(B\vec{x})$$

Se  $A(B\vec{x}) = (AB)\vec{x}$ , então  $(T_1 \circ T_2)(\vec{x}) = (AB)\vec{x}$

e a matriz canônica de transformação  $T_1 \circ T_2$  será AB.

A multiplicação de  $A$  por  $B$  é então dada por

$$AB = (A\vec{b}_1 \quad A\vec{b}_2 \quad \dots \quad A\vec{b}_p)$$

onde  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p$  são as colunas da matriz  $B$ .

### Exemplo 1.3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AB = (A\vec{b}_1 \quad A\vec{b}_2 \quad A\vec{b}_3) = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 14 \end{pmatrix}$$

### Observação

a) Esta definição generaliza a nossa anterior definição de multiplicação de matriz por vector.

b) A multiplicação  $AB$  só está definida se  $A$  tiver tantas colunas como  $B$  tem linhas. Se  $A$  é de ordem  $m \times n$ ,  $B$  deve ser de ordem  $n \times p$ . Neste caso,  $AB$  será de ordem  $m \times p$ .

## Regra prática para o cálculo de AB

(52)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & \boxed{b_{1j}} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & \dots & \boxed{b_{2j}} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & \boxed{b_{nj}} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

O elemento na posição  $i, j$  da matriz  $AB$  é obtido fazendo o produto escalar da linha  $i$  de  $A$  com a coluna  $j$  de  $B$ .

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

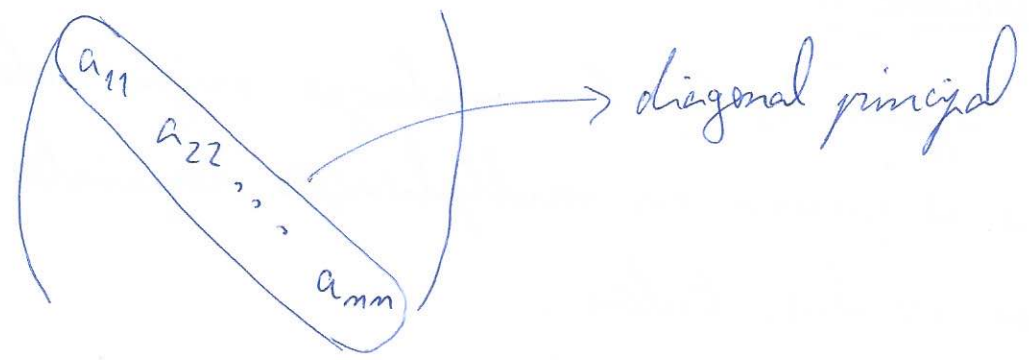
$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \boxed{c_{ij}} & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

(Posição " $i, j$ " significa ~~linha~~ linha  $i$ , coluna  $j$ )

### Exemplo 1.4

Sejam  $A$  e  $B$  como no exemplo 1.3. VOLT a calcular  $AB$ , agora com a nova regra.

A diagonal principal de uma matriz quadrada é composta pelas posições  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ :



Uma matriz diagonal é uma matriz quadrada cujos elementos fora da diagonal principal são todos nulos, por exemplo,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$  ou  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### Matriz identidade

A matriz identidade de ordem  $n$ , que se designa  $I_n$  (ou apenas  $I$ ), é a matriz quadrada de ordem  $n$ , diagonal, com todos os elementos da diagonal iguais a 1.

por exemplo,

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Teorema 2

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  matrizes cujos ordens permitam que se façam as multiplicações seguintes. Seja  $\alpha$  um escalar. Então:

i)  $A(BC) = (AB)C$

ii)  $A(B+C) = AB + AC$

iii)  $(A+B)C = AC + BC$

iv)  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

v)  $IA = A$  e  $AI = A$ ,

onde  $I$  é a matriz identidade da ordem apropriada, em cada equação.

### Observação

Na propriedade v), se  $A$  for, por exemplo, de ordem  $2 \times 3$ , então a propriedade fica

$$I_2 A = A \quad \text{e} \quad A I_3 = A.$$

### Exemplo 1.5

(55)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

### Convenções

Podemos escrever  $ABC$  em vez de  $(AB)C$  ou  $A(BC)$ , uma vez que, pela propriedade i) do teorema 2,  $(AB)C = A(BC)$ .

### Observações

a) Em geral,  $AB \neq BA$ .

Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

⏟

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

⏟

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Se  $AB = AC$  não segue necessariamente  $B = C$ , mesmo se  $A \neq 0$ .

(56)

Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Se  $AB = 0$ , não segue necessariamente  $A = 0 \vee B = 0$ ,  
↳ matriz nula

Por exemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Notação

$A^n$  significa  $A$  multiplicada por si própria  $n$  vezes:

$$A^2 = AA$$

$$A^3 = AAA, \text{ etc.}$$

### Exemplo 1.6

Seja  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Calcule  $A^2$  e  $A^3$ .

## Matriz transposta

(57)

A matriz transposta de  $A$ , que se escreve  $A^T$ , é a matriz que se obtém de  $A$  trocando as linhas pelas colunas.

### Exemplo 1.7

Seja  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ . Então,  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ .

### Teorema 3

Sejam  $A$  e  $B$  matrizes cujos ordens permitam que se façam as operações seguintes. Seja  $\alpha$  um escalar. Então:

i)  $(A^T)^T = A$

ii)  $(A+B)^T = A^T + B^T$

iii)  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

iv)  $(AB)^T = \cancel{(BA)^T} B^T A^T$

## II, 2 Matriz inversa

(58)

Sejam  $A$  e  $B$  matrizes quadradas de ordem  $n$ .

Se  $AB = I$  e  $BA = I$ ,

digamos que  $A$  e  $B$  são matrizes inversas uma da outra.

### Exemplo 2.1

Verifique que  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$  são

matrizes inversas uma da outra.

### Propriedade

Uma matriz tem, no máximo, uma matriz inversa: a inversa é única.

### Notação

A matriz inversa de matriz  $A$ , se existir, escreve-se  $A^{-1}$ .

Por exemplo, se  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$  (exemplo 2.1), (59)  
então  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$ . Temos  $AA^{-1} = I$  e  $A^{-1}A = I$ .

### Observação

a) Uma vez que a relação de "ser inversa" é mútua, se  $A$  é inversa de  $B$ , então  $B$  é a inversa de  $A$ .

Logo, a inversa da inversa de  $A$  é  $A$ :  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

b) Existem muitas matrizes quadradas que não possuem matriz inversa. A matriz  $A$  não possui inversa se não existir nenhuma matriz  $B$  tal que  $AB = I$  e  $BA = I$ . Se a matriz  $A$  tiver inversa, diz-se uma matriz invertível.

### Teorema 4

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$  e  $\vec{b}$  um vector qualquer de  $\mathbb{R}^n$ . Se a matriz  $A$  for invertível, então a equação  $A\vec{x} = \vec{b}$  (e também o respectivo sistema) é possível determinada. A sua solução é  $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ .

## Demonstração

(60)

$$A \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow A^{-1}(A \vec{x}) = A^{-1} \vec{b} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1}A) \vec{x} = A^{-1} \vec{b} \Leftrightarrow I \vec{x} = \cancel{A^{-1} \vec{b}} A^{-1} \vec{b} \Leftrightarrow$$

$$\vec{x} = A^{-1} \vec{b}$$

Portanto, se existir solução, esta é  $\vec{x} = A^{-1} \vec{b}$ .

Por outro lado,  $A(A^{-1} \vec{b}) = (AA^{-1}) \vec{b} = I \vec{b} = \vec{b}$ .

Logo,  $\vec{x} = A^{-1} \vec{b}$  é solução.

## Exemplo 2.2

Do exemplo 2.1, sabemos que se  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ ,  
então  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$ . Usando este facto, resolve

o sistema 
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 7x_1 + 4x_2 = -1 \end{cases}$$

O método de resolver sistemas usado no exemplo 2.2  
chama-se método da matriz inversa. Este método só  
é aplicável se a matriz dos coeficientes for quadrada e  
invertível.

Teorema 5

a) Se  $A$  e  $B$  são matrizes invertíveis de mesma ordem, então o seu produto é uma matriz invertível, sendo a sua inversa  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

Mais em geral, o produto de várias matrizes invertíveis é uma matriz invertível e

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

$$(ABCD)^{-1} = D^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}, \text{ etc}$$

b) Se  $A$  é invertível, então  $A^T$  também é invertível e

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Teorema 6

A matriz quadrada  $A$  é invertível se e só se  $A \sim I$  (ou seja, se e só se for possível escalonar  $A$  até ao formato de matriz identidade). Além disso, a sequência de operações elementares que transforma  $A$  em  $I$ , também transforma  $I$  em  $A^{-1}$ .

Este teorema leva ao seguinte algoritmo para determinar a matriz inversa de  $A$ :

Formar-se a matriz  $(A \ I)$ . Usa-se o método de Gauss para escalonar e reduzir esta matriz. Se a matriz  $A$  for invertível, o resultado será  $(I \ A^{-1})$ . Se a matriz  $A$  não for invertível, não existirão pivots em todas as primeiras  $n$  colunas e, portanto, ~~será impossível~~ o método esquerda (primeiras  $n$  colunas), depois de escalonar e reduzir, não ficará igual à matriz identidade.

A este método chama-se método de Gauss para determinação da matriz inversa.

### Exemplo 2.3

Seja  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ . Determine se  $A$  é invertível e, em caso afirmativo, determine  $A^{-1}$ .