III. Determinantes

III.1 Determinantes e suas propriedades

Considere-se a matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

O seu **determinante** é o número $ad-bc$. O determinante desta matriz escreve-se $\det A$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Assim,

$$\det A = ad - bc$$

ou

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc .$$

Exemplo 1.1

Calcule o determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Resposta:

$$\det A = 1 \times 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2$$

ou

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2 .$$

Notação

Dada a matriz A, designaremos A_{ij} a matriz que se obtém de A retirando a linha i e a coluna j.

Exemplo 1.2

Seja $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Escreva as matrizes A_{11}, A_{12} e A_{23}.

Observação

Se A for uma matriz quadrada de ordem n, então as matrizes A_{ij} são quadradas de ordem $n-1$.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Seja i uma linha qualquer de A. Então, o <u>determinante</u> de A é

$$\det A = (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \det A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det A_{in}$$

Alternativamente, em vez de usarmos uma linha, i, podemos usar uma coluna j. O determinante de A é

$$\det A = (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j} \det A_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det A_{nj}$$

Observações

a) O resultado do cálculo do determinante não depende da linha ou coluna usada.

b) Esta definição de determinante é recursiva: para calcular o determinante da matriz A, de ordem n, preciso de saber vários determinantes de ordem n-1.

Exemplo 1.3

Calcule o determinante de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Regra de Sarrus

Se A for uma matriz quadrada de ordem 3,

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

então o seu determinante é

$$A = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

Exemplo 1.4

Calcule o determinante da matriz do exemplo 1.3 usando a regra de Sarrus.

ATENÇÃO: a regra de Sarrus só se aplica a matrizes de ordem 3 !

Exemplo 1.5

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcule det A.

Uma matriz triangular superior (inferior) é uma matriz quadrada cujos elementos abaixo (acima) da diagonal principal são nulos.

Exemplo 1.6

A matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ é triangular superior. Calcule det A.

Deste exemplo, concluímos o seguinte:

Teorema 1

O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos na diagonal principal.

Teorema 2

Seja A uma matriz quadrada.

a) Se a matriz B é obtida de A trocando duas linhas, então $\cancel{\det B = \det A}$ $\det B = -\det A$.

b) Se B é obtida de A multiplicando uma linha por uma constante k, então
$$\det B = k \det A.$$

c) Se B é obtida de A somando a uma linha um múltiplo de outra linha, então
$$\det B = \det A.$$

Os resultados deste teorema permitem-nos usar operações em linhas (método de Gauss) para calcular determinantes, como se verá no seguinte exemplo.

Exemplo 1.7

Calcule o determinante de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Teorema 3

A matriz quadrada A é invertível se e só se $\det A \neq 0$.

(Este teorema segue directamente da aplicação do método de Gauss no cálculo do det A, escalonando a matriz A, e das alíneas ~~de~~ a) e b) do teorema 7 do cap. II - p. 63.)

Este teorema será usado no seguinte exemplo.

Exemplo 1.8

Seja A a matriz do exemplo 1.7. Determine se:

a) A é invertível;

b) As colunas de A são linearmente independentes;

c) As colunas de A geram $\mathbb{R}^4$.

Teorema 4

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Temos:

a) $\det A^T = \det A$;

b) $\det(AB) = \det A \times \det B$;

c) Se A é invertível, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$.

III.2 Aplicação ao cálculo da matriz inversa

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. A matriz

$$\begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{12} & \det A_{13} & \cdots & (-1)^{1+n} \det A_{1n} \\ -\det A_{21} & \det A_{22} & -\det A_{23} & \cdots & (-1)^{n} \det A_{2n} \\ \det A_{31} & -\det A_{32} & \det A_{33} & \cdots & (-1)^{1+n} \det A_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ (-1)^{n+1} \det A_{n1} & (-1)^{n+2} \det A_{n2} & (-1)^{n+3} \det A_{n3} & \cdots & \det A_{nn} \end{pmatrix}$$

é chamada <u>matriz dos cofactores</u> de A.

O elemento que está na posição ij desta matriz é $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$.

A <u>matriz adjunta</u> de A, $\operatorname{adj} A$, é a matriz transposta da matriz dos cofactores:

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31} & \cdots \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{32} & \cdots \\ \det A_{13} & -\det A_{23} & \det A_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Teorema 5

Se A é uma matriz invertível, a sua inversa é dada por $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \times \operatorname{adj} A .$$

Observação

Este teorema fornece-nos um novo método para calcular matrizes inversas. Chamaremos a este método "método da adjunta".

Exemplo 2.1

Use o método da adjunta para calcular a matriz inversa de $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} .$$