Funções Reais de uma Variável Real

Curso de Engenharia Informática

Prof.ª Mafalda Correia

ISPGAYA – Instituto Superior Politécnico Gaya

3 de outubro de 2025

Definition

Uma função f definida num conjunto X e tomando valores em Y é uma correspondência que associa a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y \in Y$:

$$f : X \to Y, \quad x \mapsto y = f(x)$$

O elemento y é chamado *imagem* de x através de f e é denotado por $f(x)$.

- O conjunto X é o *domínio* da função.
- O *contradomínio* da função consiste em todas as imagens de elementos de X.

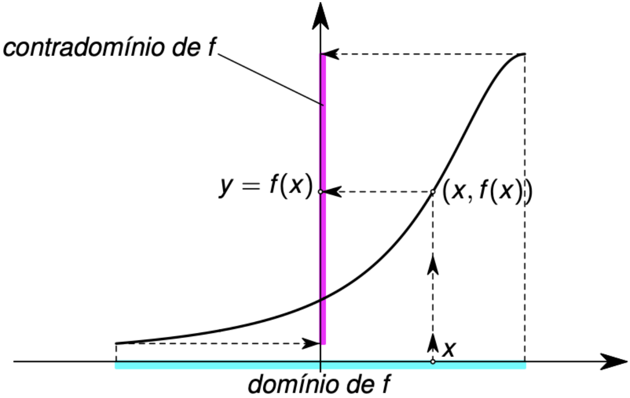
Neste curso, estudaremos apenas funções reais ($Y = \mathbb{R}$) de variável real ($X = \mathbb{R}$).

Elementos Chave

- **x**: Variável Independente (Objeto).
- **f**(**x**) ou **y**: Variável Dependente (Imagem).
- $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}$: Domínio (Conjunto dos objetos).
- $\mathcal{CD}_f \subseteq \mathbb{R}$: Contradomínio (Conjunto das imagens).

Representação Gráfica de uma Função

Gráfico de uma função f é o conjunto de todos os pontos (x, y) no plano cartesiano, em que x pertence ao domínio de f e $y = f(x)$



Funções: Injetiva, Sobrejetiva e Bijetiva

Função Injetiva (Injetiva ou um-para-um)

Uma função $f : X \to Y$ é **injetiva** se elementos distintos do domínio têm imagens distintas:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

Função Sobrejetiva (Sobrejetiva ou sobre)

Uma função $f : X \to Y$ é **sobrejetiva** se cada elemento de Y é imagem de algum elemento de X:

$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X : f(x) = y$$

Função Bijetiva (Bijetiva)

Uma função $f : X \to Y$ é **bijetiva** se é simultaneamente injetiva e sobrejetiva, ou seja, cada elemento de X tem uma imagem única em Y e todos os elementos de Y são atingidos.

Exercício: Função Injetiva, Sobrejetiva e Bijetiva

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 3x - 5$$

Determine se f é:

- Injetiva
- Sobrejetiva
- Bijetiva

Resolução

1. Injetividade:
Uma função é injetiva se $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$.

$$f(x_1) = f(x_2) \implies 3x_1 - 5 = 3x_2 - 5 \implies 3x_1 = 3x_2 \implies x_1 = x_2$$

$\Rightarrow$ f é **injetiva**.

2. Sobrejetividade:
Uma função é sobrejetiva se, para todo $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

$$y = 3x - 5 \implies x = \frac{y+5}{3} \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ f é **sobrejetiva**.

3. Bijetividade:
Como f é simultaneamente injetiva e sobrejetiva, então f é **bijetiva**.

Tipos de Funções

Funções podem ser classificadas nos seguintes tipos:

- Funções algébricas: envolvem apenas operações algébricas (adição, subtracção, divisão, multiplicação e potenciação) sobre números reais
  - Funções polinomiais: definidas por um polinómio tem domínio $\mathbb{R}$, ex. $f(x) = 1 - 2x^2$
  - Função racionais: definidas por quocientes de polinómios, domínios constituídos pelos números reais que não anulam o denominador, ex. $f(x) = \frac{x}{1-x^5}$
  - Função irracionais: definidas por expressões que envolvem pelo menos um radical, domínios constituídos pelos números reais que tornam as raízes de ordem par positivas, ex. $f(x) = 1 + \sqrt{3-x}$

Domínio ($\mathcal{D}_f$)

Regras para o Cálculo Analítico

O domínio é $\mathbb{R}$ a menos que existam restrições que anulem ou tornem o resultado não-real.

1. **Denominadores ($N(x)$):** O denominador tem de ser diferente de zero.

$$f(x) = \frac{A(x)}{N(x)} \implies N(x) \neq 0$$

2. **Raízes de Índice Par ($\sqrt[n]{R(x)}$):** O radicando tem de ser não-negativo.

$$f(x) = \sqrt[n]{R(x)}, \text{ n par} \implies R(x) \geq 0$$

Exemplos de Domínio

Análise Múltipla de Restrições

Example

Calcule o domínio de $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

Exemplos de Domínio

Análise Múltipla de Restrições

Example

Calcule o domínio de $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

Temos duas restrições:

- **Raiz:** $x \geq 0$
- **Denominador:** $x - 1 \neq 0 \implies x \neq 1$

Domínio Final ($\mathcal{D}_f$)

Deve satisfazer as duas condições simultaneamente (interseção):

$$\mathcal{D}_f = [0, +\infty[\cap \mathbb{R} \setminus \{1\} = [0, 1[\cup]1, +\infty[$$

Interseções com os Eixos

Zeros e Interseção com Oy

Interseção com o Eixo Ox (Zeros)

Ocorre quando $f(x) = 0$.

- Procure os valores de x que anulam a expressão analítica, verificando se pertencem a $\mathcal{D}_f$.

Interseção com o Eixo Oy

Ocorre quando $x = 0$.

- Calcule $f(0)$, *se* $0 \in \mathcal{D}_f$.

Exercício Prático

Domínio e Interseções

Considere a função $g(x) = \frac{x^2-9}{\sqrt{2-x}}$.

1. Calcule o domínio de g.
2. Determine os zeros de g.
3. Calcule a interseção com o eixo Oy (se existir).

Exercício Prático

Domínio e Interseções

Considere a função $g(x) = \frac{x^2-9}{\sqrt{2-x}}$.

1. Calcule o domínio de g.
2. Determine os zeros de g.
3. Calcule a interseção com o eixo Oy (se existir).

Resolução

1. $2 - x > 0 \implies x < 2$. $\mathcal{D}_{\mathbf{g}} =]-\infty, \mathbf{2}[$.
2. Zeros: $x^2 - 9 = 0 \implies x = \pm 3$. Como $3 \notin \mathcal{D}_g$, o único zero é $\mathbf{x = -3}$.
3. Interseção Oy: $0 \in \mathcal{D}_g$. $g(0) = \frac{0^2-9}{\sqrt{2-0}} = \frac{-9}{\sqrt{2}}$. Ponto: $(\mathbf{0}, -\mathbf{9}/\sqrt{\mathbf{2}})$.

Módulo II: Monotonia

Crescimento e Decrescimento (Análise Algébrica)

A monotonia é definida comparando as imagens de dois objetos:

Seja $I \subseteq \mathcal{D}_f$ um intervalo e $x_1, x_2 \in I$ tais que $x_1 < x_2$:

- **Estritamente Crescente em I:** Se $f(x_1) < f(x_2)$. (Gráfico sobe).
- **Estritamente Decrescente em I:** Se $f(x_1) > f(x_2)$. (Gráfico desce).
- **Monótona:** Se for sempre crescente ou sempre decrescente.

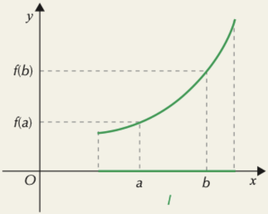
Exemplo de Prova Algébrica

Para $f(x) = -2x + 1$. Seja $x_1 < x_2$:

$$-2x_1 > -2x_2$$
$$-2x_1 + 1 > -2x_2 + 1$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

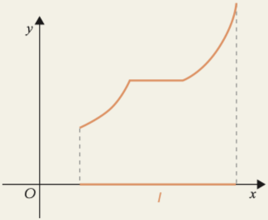
Como $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$, f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$.

Função estritamente crescente em I



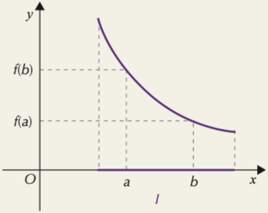
$$\forall a, b \in I, a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

Função crescente, em sentido lato, em I



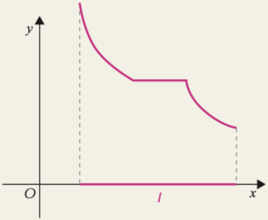
$$\forall a, b \in I, a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$

Função estritamente decrescente em I



$$\forall a, b \in I, a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

Função decrescente, em sentido lato, em I



$$\forall a, b \in I, a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$

Dada uma função real de variável real f e um valor $f(a)$ do contradomínio de f, diz-se que:

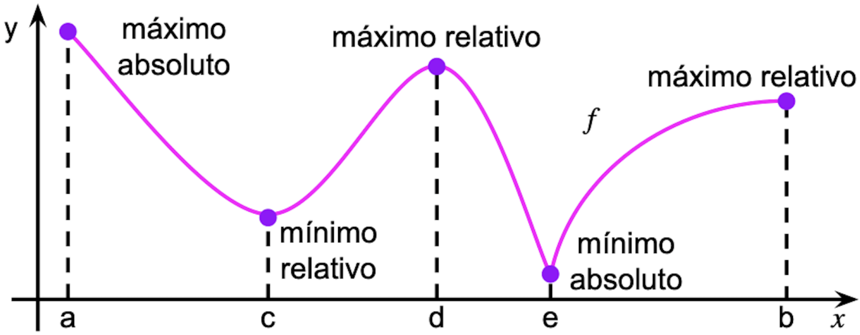
- $f(a)$ é um **máximo absoluto de f** se $\forall x \in D_f$, $f(a) \geq f(x)$.
- $f(a)$ é um **mínimo absoluto de f** se $\forall x \in D_f$, $f(a) \leq f(x)$.

Dada uma função real de variável real f, diz-se que:

- f atinge um **máximo relativo** em $a \in D_f$ quando existe uma vizinhança r de a tal que $\forall x \in V_r(a) \cap D_f$, $f(a) \geq f(x)$;
- f atinge um **mínimo relativo** em $a \in D_f$ quando existe uma vizinhança r de a tal que $\forall x \in V_r(a) \cap D_f$, $f(a) \leq f(x)$.

Os **extremos absolutos** de f são os mínimos e máximos absolutos de f.

Exemplo:



- $f(a)$ e $f(e)$ são o máximo absoluto e o mínimo absoluto, respectivamente;
- $f(c)$ é mínimo relativo e c diz-se o minimizante de f;
- $f(d)$ e $f(b)$ são os máximos relativos e as constantes d e b dizem-se maximizantes de f.

Propriedades: Paridade

Simetria do Gráfico

Condição necessária: Se $x \in \mathcal{D}_f$, então $-x \in \mathcal{D}_f$ (domínio simétrico em relação à origem).

Definition

f é **Par** se $\forall x \in \mathcal{D}_f$: $f(-x) = f(x)$.

- O gráfico é simétrico em relação ao eixo **Oy**.

Definition

f é **Ímpar** se $\forall x \in \mathcal{D}_f$: $f(-x) = -f(x)$.

- O gráfico é simétrico em relação à **origem** $(0, 0)$.

Exemplos de Paridade

Teste a Paridade

1. $f(x) = 5x^4 - x^2$

Exemplos de Paridade

Teste a Paridade

1. $f(x) = 5x^4 - x^2$

$$f(-x) = 5(-x)^4 - (-x)^2 = 5x^4 - x^2 = f(x) \implies PAR$$

Exemplos de Paridade

Teste a Paridade

1. $f(x) = 5x^4 - x^2$

$$f(-x) = 5(-x)^4 - (-x)^2 = 5x^4 - x^2 = f(x) \implies \textcolor{red}{PAR}$$

2. $h(x) = x^3 + 1$

Exemplos de Paridade

Teste a Paridade

1. $f(x) = 5x^4 - x^2$

$$f(-x) = 5(-x)^4 - (-x)^2 = 5x^4 - x^2 = f(x) \implies \textit{PAR}$$

2. $h(x) = x^3 + 1$

$$h(-x) = (-x)^3 + 1 = -x^3 + 1$$

Como $h(-x) \neq h(x)$ e $h(-x) \neq -h(x)$, h é NEM PAR NEM ÍMPAR.

Exercício Prático

Monotonia e Paridade

1. Prove que $f(x) = x^2$ é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$.
2. Verifique a paridade da função $g(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$.

Exercício Prático

Monotonia e Paridade

1. Prove que $f(x) = x^2$ é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$.
2. Verifique a paridade da função $g(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$.

Resolução da Pergunta 1

Seja $x_1, x_2 \in]-\infty, 0]$ com $x_1 < x_2 < 0$.

- Multiplicando por x_1 (negativo): $x_1^2 > x_1 x_2$.
- Multiplicando por x_2 (negativo): $x_1 x_2 > x_2^2$.

Por transitividade: $x_1^2 > x_2^2 \implies f(x_1) > f(x_2)$. $\Rightarrow f$ é estritamente **decrescente**.

Exercício Prático

Monotonia e Paridade

1. Prove que $f(x) = x^2$ é estritamente decrescente em $]-\infty, 0]$.
2. Verifique a paridade da função $g(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$.

Resolução da Pergunta 1

Seja $x_1, x_2 \in]-\infty, 0]$ com $x_1 < x_2 < 0$.

- Multiplicando por x_1 (negativo): $x_1^2 > x_1 x_2$.
- Multiplicando por x_2 (negativo): $x_1 x_2 > x_2^2$.

Por transitividade: $x_1^2 > x_2^2 \implies f(x_1) > f(x_2)$. $\Rightarrow f$ é estritamente **decrescente**.

Resolução da Pergunta 2

$$g(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2+1} = \frac{|x|}{x^2+1} = g(x)$$

$\Rightarrow g$ é uma função *PAR*.

Definition

Uma função f só admite **Função Inversa** f^{-1} se for injetiva no seu domínio (considerando o conjunto de chegada $B = \mathcal{CD}_f$).

Propriedades de f^{-1}

- O domínio de f^{-1} é o contradomínio de f: $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{CD}_f$.
- O contradomínio de f^{-1} é o domínio de f: $\mathcal{CD}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$.
- O gráfico de f^{-1} é simétrico ao de f relativamente à reta $y = x$.

Cálculo da Função Inversa

Algoritmo

Seja $f(x)$ uma função injetiva. Para determinar $f^{-1}(x)$:

1. Escreva a função na forma $y = f(x)$.
2. Isole a variável x em função de y.
3. Troque as variáveis x por y e y por x.

Exemplo

Se $f(x) = 3x - 5$:

- $y = 3x - 5$
- $y + 5 = 3x \implies x = \frac{y+5}{3}$
- $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$

Verificação: $(f \circ f^{-1})(x) = f(\frac{x+5}{3}) = 3(\frac{x+5}{3}) - 5 = x$.

Exercício Prático

Inversa e Injetividade

Considere a função $h(x) = \frac{2x}{x-1}$.

1. Calcule o domínio e contradomínio de h.
2. Prove que h é injetiva.
3. Determine a função inversa $h^{-1}(x)$.

Exercício Prático

Inversa e Injetividade

Considere a função $h(x) = \frac{2x}{x-1}$.

1. Calcule o domínio e contradomínio de h.
2. Prove que h é injetiva.
3. Determine a função inversa $h^{-1}(x)$.

Resolução (Passo 3)

- **Domínio:** $x - 1 \neq 0 \implies \mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- **Contradomínio:** Isolando x:
  $y(x-1) = 2x \implies yx - y = 2x \implies x(y-2) = y \implies x = \frac{y}{y-2}$.
  $\mathcal{CD}_h = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. (Ponto que não é imagem)
- **Inversa:** $h^{-1}(x) = \frac{x}{x-2}$.
- **Domínio de h^{-1}:** $\mathcal{D}_{h^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2\} = \mathcal{CD}_h$.

Exercício Global para a próxima aula

Análise Integrada de Fundamentos

Considere a função $k(x) = 1 - \sqrt{x+4}$.

1. Calcule o domínio $\mathcal{D}_k$.
2. Determine os zeros de k.
3. Analise a monotonia de k.
4. Determine o contradomínio $\mathcal{CD}_k$ e a função inversa $k^{-1}(x)$.

Exercício Global para a próxima aula

Análise Integrada de Fundamentos

Considere a função $k(x) = 1 - \sqrt{x+4}$.

1. Calcule o domínio $\mathcal{D}_k$.
2. Determine os zeros de k.
3. Analise a monotonia de k.
4. Determine o contradomínio $\mathcal{CD}_k$ e a função inversa $k^{-1}(x)$.

Dica

Para a monotonia, comece com $x_1 < x_2$. Para o contradomínio e a inversa, isole $\sqrt{x+4}$ e eleve ao quadrado, mas atenção ao domínio/contradomínio!