O próximo teorema sintetiza alguns dos conhecimentos
que fomos adquirindo ao longo dos teoremas anteriores, relacionando tudo com a noção de matriz invertível. Apenas as alíneas j) e k) são verdadeiramente novidade.

Teorema 7

(Teorema da matriz invertível)

Seja A uma matriz quadrada de ordem n. As seguintes proposições são equivalentes. Isto é, são todas verdadeiras ou todas falsas.

a) A é invertível.

b) A é linha-equivalente à matriz identidade.

c) A tem n posições pivot.

d) $A\vec{x} = \vec{0}$ tem apenas a solução trivial.

e) As colunas de A são linearmente independentes.

f) A transformação linear $\vec{x} \to A\vec{x}$ é injectiva.

g) $A\vec{x} = \vec{b}$ tem solução para todo o vector $\vec{b}$ de $\mathbb{R}^n$.

h) As colunas de A geram $\mathbb{R}^n$.

i) A transformação linear $\vec{x} \to A\vec{x}$ é sobrejectiva.

j) Existe uma matriz B tal que $BA = I$.

k) Existe uma matriz B tal que $AB = I$.

l) A^T é invertível.

Observações

a) A maior parte dos resultados contidos neste teorema já estão contidos ou são obtidos directamente dos teoremas 2, 4, 10 e 11 do capítulo I e teoremas 5 e 6 do capítulo II. (Excluem-se daqui as alíneas j) e k)).

b) A alínea j) do teorema 7 segue da seguinte observação.

Suponhamos que existe uma matriz B tal que $BA = I$ e considere-se a equação $A\vec{x} = \vec{0}$. Multiplicando à esquerda por B vem $A\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow B(A\vec{x}) = B\vec{0} \Rightarrow$ ~~$(AB)\vec{x} = \vec{0}$~~

$$\Rightarrow (BA)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow I\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0},$$

pelo que $A\vec{x} = \vec{0}$ tem apenas a solução trivial e A é invertível.

c) A alínea k) segue da seguinte observação.

Suponhamos que existe uma matriz B tal que $AB = I$. Considere-se a equação $A\vec{x} = \vec{b}$ onde $\vec{b}$ é um vector qualquer de $\mathbb{R}^n$. Uma vez que $A(B\vec{b}) = (AB)\vec{b} = I\vec{b} = \vec{b}$, constata-se que $\vec{x} = B\vec{b}$ é solução da equação $A\vec{x} = \vec{b}$, pelo que esta equação é possível qualquer que seja o $\vec{b}$. Logo, A é invertível.

d) Das alíneas j) e k) do teorema 7 segue que, para verificar se A e B são matrizes inversas uma da outra, não é necessário verificar ambas as condições $AB = I$ e $BA = I$. Basta verificar uma delas (se uma delas for verdadeira a outra também é).

Exemplo 2.4

Determine se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{pmatrix}$ é invertível.

Transformações inversas

Sejam T e S transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$. Se, sempre que $T(\vec{x}) = \vec{y}$ temos $S(\vec{y}) = \vec{x}$ e, sempre que $S(\vec{y}) = \vec{x}$ temos $T(\vec{x}) = \vec{y}$, então

$$(T \circ S)(\vec{x}) = \vec{x} \quad \text{e} \quad (S \circ T)(\vec{x}) = \vec{x}$$

para todo o $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$.

Neste caso, S e T dizem-se transformações inversas uma da outra. À transformação S damos o nome T^{-1}.

A transformação T diz-se invertível se existir uma transformação que seja inversa de T.

Note-se que se as transformações lineares T e S tiverem matrizes canónicas A e A^{-1}, respectivamente, então

$$(T\circ S)(\vec{x}) = (AA^{-1})\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x} \quad \text{e}$$
$$(S\circ T)(\vec{x}) = (A^{-1}A)\vec{x} = I\vec{x} = \vec{x}.$$

Logo, S e T são inversas uma da outra.

Teorema 8

Seja $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear com matriz canónica A. Então, T é uma transformação invertível se e só se A é uma matriz invertível. Além disso, a matriz canónica da transformação T^{-1} é A^{-1}.

II.3 Subespaços de $\mathbb{R}^n$

Um subconjunto H de $\mathbb{R}^n$ diz-se um subespaço de $\mathbb{R}^n$ se:

a) H é fechado em relação à adição:

Se $\vec{u}$ e $\vec{v} \in H$, também $\vec{u} + \vec{v} \in H$

b) É fechado em relação à multiplicação por escalar:

Se $\vec{u} \in H$ e α é um escalar, também $\alpha\vec{u} \in H$

Observações

Se H é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, então segue que:

i) $\vec{0} \in H$

ii) Se $\vec{u} \in H$, também $-\vec{u} \in H$.

Exemplo 3.1

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ (vectores de $\mathbb{R}^2$ com 2.ª coordenada nula) é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1\}$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^2$.

c) Sendo $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ vectores de $\mathbb{R}^n$, $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Observação

Uma recta só é subespaço se contiver a origem. Um plano só é subespaço se contiver a origem.

Exemplo 3.2

Sejam $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$ vectores de $\mathbb{R}^n$. Então, $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \rangle$ é subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Observação

A $\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p \rangle$ passamos a chamar subespaço gerado ou espaço gerado, em vez de conjunto gerador.

Exemplo 3.3

a) $\{\vec{0}\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^n$ (onde $\vec{0}$ é o vector nulo de $\mathbb{R}^n$)

Chama-se a este subespaço trivial de $\mathbb{R}^n$.

b) $\mathbb{R}^n$ é subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Espaço das colunas de uma matriz: Col A

Col A é o espaço gerado por todas as colunas de A:

$$\text{Col } A = \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \rangle.$$

Exemplo 3.4

Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Determine se $\vec{b} \in \text{Col}\, A$.

Espaço nulo de uma matriz: Nul A

É o conjunto de todas as soluções da equação homogénea $A\vec{x} = \vec{0}$.

Exemplo 3.5

Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$.

a) Determine se os vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ pertencem a Nul A.

b) Determine Nul A na forma de espaço gerado.

A análise do exemplo 3.5. b) sugere que Nul A é sempre um subespaço. Isso mesmo está contido no próximo teorema.

Teorema 9

Seja A uma matriz $m\times n$. Então, $Nul\,A$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração

Se $\vec{u}$ e $\vec{v} \in Nul\,A$, então $A\vec{u}=\vec{0}$ e $A\vec{v}=\vec{0}$.

Então, $A(\vec{u}+\vec{v}) = A\vec{u}+A\vec{v} = \vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$.

Logo, $\vec{u}+\vec{v} \in Nul\,A$.

Também, $A(\alpha\vec{u}) = \alpha A\vec{u} = \alpha\vec{0} = \vec{0}$.

Logo, $\alpha\vec{u} \in Nul\,A$.

Estão satisfeitas as duas propriedades necessárias para $Nul\,A$ ser subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Base de um subespaço

Seja H um subespaço de $\mathbb{R}^n$. O conjunto de vectores de H ~~é uma base de H se:~~ $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_p\}$ é uma base de H se:

i) os vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_p$ são l.i.

ii) os vectores $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_p$ geram H (isto é, $H=\langle\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_p\rangle$)

Exemplo 3.6

a) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ (base canónica de $\mathbb{R}^2$)

b) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ é uma base do subespaço de $\mathbb{R}^2$ "eixo dos xx"

c) $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ é uma base do subespaço de $\mathbb{R}^2$ "recta $y=x$"

d) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$

e) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$

f) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$ não é uma base de $\mathbb{R}^2$

g) $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ (base canónica de $\mathbb{R}^3$)

h) As colunas de uma matriz invertível de ordem n são uma base de $\mathbb{R}^n$.