ISPGAYA
instituto superior politécnico

Análise Matemática I - Licenciatura - Engenharia Informática

Resposta da Lista 4

Joana Becker Paulo e Mafalda Correia

1) Determine os seguintes integrais indefinidos:

a) $\int (3x^2 + 5x + 7)\, dx$

$\int (3x^2 + 5x + 7) dx = x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 7x + C$

b) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{1/3} dx = \frac{x^{4/3}}{4/3} = \frac{3}{4}x^{4/3} + C$

c) $\int (x^3 + 1)^2\, dx$

$\int (x^3 + 1)^2 dx = \int (x^6 + 2x^3 + 1) dx = \frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{2} + x + C$

d) $\int \frac{\text{arctg}\, x}{1+x^2}\, dx$

$\int \frac{\text{arctg}\, x}{1+x^2} dx$. Sub: $u = \text{arctg}\, x \implies du = \frac{1}{1+x^2} dx$

$\int \frac{\text{arctg}\, x}{1+x^2} dx = \int u\, du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2}\text{arctg}^2(x) + C$

e) $\int \frac{3x^2}{1+x^3}\, dx$

$\int \frac{3x^2}{1+x^3} dx$. Sub: $u = 1 + x^3 \implies du = 3x^2 dx$

$\int \frac{3x^2}{1+x^3} dx = \int \frac{1}{u}\, du = \ln|u| + C = \ln|1 + x^3| + C$

f) $\int \frac{1}{x^7}\, dx$

$\int \frac{1}{x^7} dx = \int x^{-7} dx = \frac{x^{-6}}{-6} + C = -\frac{1}{6x^6} + C$

g) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$. Sub: $u = 1 - x^2 \implies du = -2xdx \implies xdx = -\frac{1}{2}du$
$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{2}\right)du = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = -\frac{1}{2}(2u^{1/2}) + C = -\sqrt{1-x^2} + C$

h) $\int \frac{x^2+1}{x}\,dx$

$\int \frac{x^2+1}{x}dx = \int (x + \frac{1}{x})dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$

i) $\int \frac{x^3}{1+x^8}\,dx$

$\int \frac{x^3}{1+x^8}dx$. Sub: $u = x^4 \implies du = 4x^3dx \implies x^3dx = \frac{1}{4}du$

$\int \frac{x^3}{1+x^8}dx = \int \frac{1}{1+u^2}\left(\frac{1}{4}\right)du = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{4}\mathrm{arctg}(u) + C = \frac{1}{4}\mathrm{arctg}(x^4) + C$

j) $\int \frac{5x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$

$\int \frac{5x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$. Sub: $u = x^3 \implies du = 3x^2dx \implies x^2dx = \frac{1}{3}du$

$\int \frac{5x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx = \int \frac{5}{\sqrt{1-u^2}}\left(\frac{1}{3}\right)du = \frac{5}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \frac{5}{3}\mathrm{arcsen}(u) + C = \frac{5}{3}\mathrm{arcsen}(x^3) + C$

l) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$. Sub: $u = 1 - x^4 \implies du = -4x^3dx \implies x^3dx = -\frac{1}{4}du$

$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{4}\right)du = -\frac{1}{4}\int u^{-1/2}du = -\frac{1}{4}(2u^{1/2}) + C = -\frac{1}{2}\sqrt{1-x^4} + C$

2) Determine os seguintes integrais indefinidos:

a) $\int \frac{e^{\mathrm{arcsen}\,x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Seja $u = \mathrm{arcsen}\,x$. Então, $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
O integral torna-se: $\int e^u du = e^u + C = e^{\mathrm{arcsen}\,x} + C$.

b) $\int \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx$

Seja $u = \ln x$. Então, $du = \frac{1}{x}dx$.
O integral torna-se: $\int \cos(u)du = \mathrm{sen}(u) + C = \mathrm{sen}(\ln x) + C$.

c) $\int \frac{6}{x\ln^3(4x)}\,dx$

Seja $u = \ln(4x)$. Então, $du = \frac{1}{4x}\cdot 4dx = \frac{1}{x}dx$.
O integral torna-se: $6\int u^{-3}du = 6\frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{3}{\ln^2(4x)} + C$.

d) $\int \frac{e^{3x}}{(e^{3x}-2)^6}\,dx$

Seja $u = e^{3x} - 2$. Então, $du = 3e^{3x}dx \implies \frac{1}{3}du = e^{3x}dx$.
O integral torna-se: $\frac{1}{3}\int u^{-6}du = \frac{1}{3}\frac{u^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{15(e^{3x}-2)^5} + C$.

e) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}\,dx$

Seja $u = \ln x$. Então, $du = \frac{1}{x}dx$.
O integral torna-se: $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = \text{arcsen}(u) + C = \text{arcsen}(\ln x) + C$.

f) $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

Seja $u = 1 + e^x$. Então, $du = e^x dx$.
O integral torna-se: $\int u^{1/2}du = \frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{3}(1+e^x)^{3/2} + C$.

g) $\int \frac{1}{x\ln x}\,dx$

Seja $u = \ln x$. Então, $du = \frac{1}{x}dx$.
O integral torna-se: $\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C = \ln|\ln x| + C$.

h) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}\,dx$

Seja $u = \sqrt{x}$. Então, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \implies 2du = \frac{1}{\sqrt{x}}dx$.
O integral torna-se: $2\int e^u du = 2e^u + C = 2e^{\sqrt{x}} + C$.

i) $\int \frac{1+\cos x}{x+\text{sen }x}\,dx$

Note que o numerador é a derivada exata do denominador: $(x + \text{sen }x)' = 1 + \cos x$.
O integral é da forma $\int \frac{u'}{u}dx = \ln|u| + C$:
$\ln|x + \text{sen }x| + C$.

j) $\int x^5\text{sen}(x^6)\,dx$

Seja $u = x^6$. Então, $du = 6x^5dx \implies \frac{1}{6}du = x^5dx$.
O integral torna-se: $\frac{1}{6}\int \text{sen }u du = -\frac{1}{6}\cos(u) + C = -\frac{1}{6}\cos(x^6) + C$.

k) $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Separando em dois integrais: $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.
Para o 1º: $u = \arccos x, du = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \implies -\frac{\arccos^2 x}{2}$.
Para o 2º: $v = 1 - x^2, dv = -2xdx \implies \sqrt{1-x^2}$.
Resultado: $-\frac{1}{2}\arccos^2 x + \sqrt{1-x^2} + C$.

l) $\int \frac{\cos(\ln(x^2))}{x}\,dx$

Note que $\ln(x^2) = 2\ln x$. Seja $u = 2\ln x$. Então, $du = \frac{2}{x}dx$.
O integral torna-se: $\frac{1}{2}\int \cos u du = \frac{1}{2}\text{sen}(u) + C = \frac{1}{2}\text{sen}(\ln(x^2)) + C$.

m) $\int \frac{1}{e^x+9e^{-x}}\,dx$

Multiplicando o numerador e o denominador por e^x: $\int \frac{e^x}{e^{2x}+9}dx$.
Seja $u = e^x$. Então, $du = e^x dx$.
O integral torna-se: $\int \frac{1}{u^2+3^2}du = \frac{1}{3}\text{arctg}(\frac{u}{3}) + C = \frac{1}{3}\text{arctg}(\frac{e^x}{3}) + C$.

n) $\int \frac{\text{sen}(\text{arctg } x)}{1+x^2}\,dx$

Seja $u = \text{arctg } x$. Então, $du = \frac{1}{1+x^2}dx$.
O integral torna-se: $\int \text{sen } u du = -\cos(u) + C = -\cos(\text{arctg } x) + C$.

3) Considere a função g definida em $\mathbb{R}^+$ por $g(x) = \frac{(\ln x)^2}{x}$.

a) Determine a família de todas as primitivas de g.

Família: $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \frac{(\ln x)^3}{3} + C$.

b) Indique a primitiva da função g que se anula para $x = e$.

Se $G(e) = 0 \implies \frac{(\ln e)^3}{3} + C = 0 \implies \frac{1}{3} + C = 0 \implies C = -1/3$.
$G(x) = \frac{(\ln x)^3 - 1}{3}$.

4) Determine a primitiva F para a função $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ tal que $F(-1) = 1$.

$F(x) = 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C$.

$F(-1) = 1 \implies 2\ln(1) - \frac{3}{-1} + C = 1 \implies 3 + C = 1 \implies C = -2$.

$F(x) = 2\ln|x| - \frac{3}{x} - 2$.

5) Determine a primitiva da função f definida por $f(x) = \frac{3\cos(\ln x)}{x}$ que toma o valor 2 em $x = 1$.

Usamos a substituição $u = \ln x \implies du = \frac{1}{x}dx$:

$$F(x) = \int \frac{3\cos(\ln x)}{x}dx = 3\int \cos(u)du = 3\text{sen}(u) + C = 3\text{sen}(\ln x) + C$$

Sabendo que $F(1) = 2$:

$$3\text{sen}(\ln 1) + C = 2 \implies 3\text{sen}(0) + C = 2 \implies C = 2$$

Portanto, $F(x) = 3\text{sen}(\ln x) + 2$.

6) Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $P[\frac{ln^2(x)}{x}]$

$P[\frac{ln^2(x)}{x}] = \frac{1}{3}P[\frac{3ln^2(x)}{x}] = \frac{ln^3(x)}{3} + C$

Nota:

$P(n \cdot u' \cdot u^{n-1}) = u^n + C$

Sendo $u = ln(x), u' = \frac{d(ln(x))}{dx} = \frac{1}{x}, n - 1 = 2$

b) $P[\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}]$

$P[\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}] = P[\frac{x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}] = P[\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}] = \frac{1}{2}P[\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}] = \frac{1}{2}P[\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}] = \frac{1}{2}arcsin(x^2) + C$

Usamos P$(\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}) = arcsin(u) + C$ sendo $u = x^2, u' = 2x$

c) $P[\frac{2}{\sqrt{x}}]$

$P[\frac{2}{\sqrt{x}}] = 2P[\frac{1}{\sqrt{x}}] = 2P[x^{\frac{-1}{2}}] = 2P[2 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}] = 4\sqrt{x} + C$

Usamos $P(n \cdot x^{n-1}) = x^n + C$

d) $P[\frac{x\sqrt{x}}{2}]$

$P[\frac{x\sqrt{x}}{2}] = \frac{1}{2} \cdot P[x \cdot x^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2}P[x^{\frac{3}{2}}] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}P[\frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}}] = \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$

e) $P[\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}]$

$P[\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}] = P[\frac{1}{\sqrt{4(1-\frac{x^2}{4})}}] = \frac{1}{2}P[\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}] = \frac{1}{2} \cdot 2P[\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}] = arcsin(\frac{x}{2}) + C$

f) $P[\frac{2}{\sqrt{1-2x}}]$

$P[\frac{2}{\sqrt{1-2x}}] = P[2 \cdot (1-2x)^{-\frac{1}{2}}] = -P[-2 \cdot (1-2x)^{-\frac{1}{2}}] = -\frac{1}{\frac{1}{2}}(1-2x)^{-\frac{1}{2}+1} = -2\sqrt{1-2x} + C$

7) Calcule as seguintes integrais indefinidas, observando se é preciso utilizar algum método especifico para facilitar seus cálculos.

a)$\int \frac{x^2}{(2x^3+1)^{\frac{2}{3}}} dx$

Faremos mudança de variável:

$u = 2x^3 + 1$

$du = 6x^2 dx$

$\frac{1}{6}\int (\frac{1}{u^{\frac{2}{3}}}) du$

$\frac{1}{6}\int u^{-\frac{2}{3}} du$

$\frac{1}{6}[\frac{u^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + k]$

$\frac{1}{6}[\frac{u^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + k]$

$\frac{3}{6}u^{\frac{1}{3}} + k$

$\frac{1}{2}u^{\frac{1}{3}} + k$

$\frac{1}{2}(2x^3+1)^{\frac{1}{3}} + k$

$\frac{\sqrt[3]{2x^3+1}}{2} + k$

b) $\int xe^{(2x^2-1)} dx$

Mudança de variável:

$u = 2x^2 - 1$

$du = 4xdu$

$\frac{du}{4} = xdx$

$\int \frac{(e^u)}{4} du$

$\frac{e^u}{4} + k$

$\frac{e^{(2x^2-1)}}{4} + k$

c) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Antes vamos reescrever a integral da seguinte maneira: $\int e^{\sqrt{x}} \cdot (x^{-\frac{1}{2}}) dx$

Agora faremos a mudança de variável:

$u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$du = \frac{1}{2} x^{(\frac{1}{2}-1)} dx$

$du = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$

$2du = x^{-\frac{1}{2}} dx$

$\int 2e^u du$

$2 \int e^u du$

$2e^u + k$

$2e^{\sqrt{x}} + k$

d) $\int \frac{(lnu)^3}{u} du$

Pode parecer confuso, mas é bom mudarmos as letras para verem que não se altera nada, o processo é o mesmo de sempre, só vamos precisar agora "chamar" a mudança de variável de outra letra, por exemplo, podemos usar v:

$v = ln(u)$

$dv = \frac{1}{u} du$

$\int v^3 dv$

$\frac{v^4}{4} + k$

$\frac{(ln(u))^4}{4} + k$

e) $\int x \cos(\pi x^2) dx$

Mudança de variável:

$u = \pi x^2$

$du = 2\pi x dx$

$\frac{du}{2\pi} = x dx$

$\int \frac{\cos(u)}{2\pi} du$

$\frac{1}{2\pi} \sin(u) + k$

$\frac{1}{2\pi} \sin(\pi x^2) + k$

f) $\int \frac{ln(5x)}{x} dx$

Mudança de variável:

$u = ln(5x)$

$du = \frac{5}{5x} dx$

$\int u du$

$\frac{u^2}{2} + k$

$\frac{1}{2}(ln(5x))^2 + k = \frac{1}{2} ln^2(5x) + k$

g) $\int \frac{(lnx)^2}{2x} dx$

Mudança de variável:

$u = ln(x)$

$du = \frac{1}{x} dx$

$\int \frac{u^2}{2} du$

$\frac{1}{2} \int u^2 du$

$\frac{1}{2}(\frac{u^3}{3} + k)$

$\frac{1}{6} u^3 + k$

$\frac{ln^3(x)}{6} + k$

h) $\int \frac{1}{xln(x)} dx$

Mudança de variável:

$u = ln(x)$

$du = \frac{1}{x} du$

$\int \frac{1}{u} du$

$ln|u| + k$

$ln|ln(x)| + k$

i) $\int xsen(2x^2)dx$

Mudança de variável:

$u = 2x^2$

$\frac{du}{4} = xdx$

$\frac{1}{4} \int \sin(u) du$

$-\frac{\cos(2x^2)}{4} + k$

j) $\int 28(7x-2)^{-5} dx$

Mudança de variável:

$u = 7x - 2$

$du = 7dx$

$\frac{du}{7} = dx$

$\frac{28}{7} \int u^{-5} du$

$4(\frac{u^{-5+1}}{-5+1}) + k$

$4(\frac{u^{-4}}{(-4)}) + k$

$-\frac{1}{u^4} + k$

$-\frac{1}{(7x-2)^4} + k$

l) $\int \frac{9r^2}{\sqrt{1-r^3}} dr$

$du = -3r^2 dr$

$-\frac{du}{3} = r^2 dr$

$9\int \frac{r^2}{\sqrt{1-r^3}} dr$

$-3\int u^{-\frac{1}{2}} du$

$-3\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + k$

$-6u^{\frac{1}{2}} + k$

$-6(1-r^3)^{\frac{1}{2}} + k$

$-6\sqrt{1-r^3} + k$

m) $\int x^2 e^{-2x^3} dx$

Mudança de variável:

$u = -2x^3$

$du = -6x^2 dx$

$-\frac{du}{6} = x^2 dx$

$-\frac{1}{6}\int e^u du$

$-\frac{1}{6}e^{-2x^3} + k$

n) $\int ln(x)dx$

Preste atenção para não confundir: $\int \frac{1}{x} dx$ é $ln|x| + k$, mas o inverso não acontece, por este motivo, temos que, integrar por partes um logaritmo. Portanto:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

$$u(x) = ln(x) \qquad dv = 1\ dx$$

$$du = \frac{1}{x}(x)'\ dx \qquad v = x$$

$\int ln(x)dx = xln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}dx$

$\int ln(x)dx = xln(x) - x + k$

$\int ln(x)dx = x(ln(x) - 1) + k$

o) $\int ln(2x+3)dx$

Repare que se você tentar fazer mudança de variável, não sairá muito do lugar, agora. Portanto, é importante perceber quando faz sentido usar esta técnica ou não. Uma dica: as funções logarítmicas não possuem integrais diretas. Portanto, salvo algumas excessões, na maior parte das vezes teremos que usar a Integração por parte. Lembre-se:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

$$u(x) = ln(2x+3) \qquad dv = 1\ dx$$

$$du = \frac{1}{2x+3}(2x+3)'\ dx \qquad v = x$$

$$du = \frac{2}{2x+3}$$

$\int ln(2x+3)dx = x \cdot ln(2x+3) - 2\int \frac{x}{2x+3}\ dx$

Repare que para $2\int \frac{x}{2x+3}\ dx$, já podemos fazer mudança de variável, mas não é tão direta quanto as feitas anteriormente, é preciso mais alguns "pulos do gato", agora. Preste atenção, no que será feito:

$u = 2x + 3$

$du = 2dx$

$\frac{du}{2} = dx$

Observe que ainda teríamos "um problema", o x no numerador da equação. A menos que, como sabemos da beleza da matemática podemos fazer o seguinte, deixar x isolado: $u - 3 = 2x$, $x = \frac{u-3}{2}$.

$2\int \frac{x}{2x+3}\ dx = 2\int \frac{\frac{u-3}{2}}{u} \frac{du}{2} = \frac{2}{2}\int \frac{\frac{u-3}{2}}{\frac{u}{1}} du = \int \frac{u-3}{2} \cdot \frac{1}{u} du = \frac{1}{2}\int \frac{u-3}{u} du = \frac{1}{2}[\int \frac{u}{u} du - \int \frac{3}{u} du]$

$\frac{1}{2}[\int \frac{u}{u} du - \int \frac{3}{u} du] = \frac{1}{2}[\int 1 du - 3\int \frac{1}{u} du] = \frac{1}{2}[u + k_1 - (3\ ln|u| + k_2)]$

Agora, vamos substituir u pela sua expressão "original" $u = 2x + 3$:

$2\int \frac{x}{2x+3}\ dx = \frac{1}{2}[(2x+3) + k_1 - (3\ ln|(2x+3)| + k_2)]$

Não podemos esquecer de voltar para a integração por partes:

$\int ln(2x+3)dx = x \cdot ln(2x+3) - [\frac{1}{2}[(2x+3) + k_1 - (3\ ln|(2x+3)| + k_2)]$

$\int ln(2x+3)dx = x \cdot ln(2x+3) - \frac{1}{2}(2x+3) + 3\ ln|(2x+3)| + K$

Podemos ainda fazer algumas simplificações:

$\int ln(2x+3)dx = x \cdot ln(2x+3) - \frac{2x}{2} - \frac{3}{2} + 3\ ln|(2x+3)| + K$

$\int ln(2x+3)dx = x \cdot ln(2x+3) - x - \frac{3}{2} + 3\ ln|(2x+3)| + K$

p) $\int x\ ln(x)dx$

Mais uma vez, integração por partes:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

$$u(x) = ln(x) \qquad dv = x\ dx$$

$$du = \tfrac{1}{x}(x)'\ dx \qquad v = \tfrac{x^2}{2}$$

$\int x\ ln(x)dx = ln(x) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx$

$\int x\ ln(x)dx = \frac{x^2}{2}ln(x) - \int \frac{x}{2}dx$

$\int x\ ln(x)dx = \frac{x^2}{2}ln(x) - \frac{1}{2}\int xdx$

$\int x\ ln(x)dx = \frac{x^2}{2}ln(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + k$

$\int x\ ln(x)dx = \frac{x^2}{2}ln(x) - \frac{x^4}{4} + k$

q) $\int x\ e^x dx$

Integração por partes:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

$$u(x) = x \qquad dv = e^x\ dx$$

$$du = dx \qquad v = e^x$$

$\int x\ e^x dx = xe^x - \int e^x dx$

$\int x\ e^x dx = xe^x - e^x + k$

$\int x\ e^x dx = e^x(x-1) + k$

r) $\int (2x+1)\sin(x)dx$

Integração por partes:

$$u(x) = 2x + 1 \qquad dv = \sin(x)\ dx$$

$$du = 2dx \qquad v = -\cos(x)$$

$\int (2x+1)\sin(x)dx = (2x+1)(-\cos(x)) - \int(-\cos(x)) \cdot 2dx$

$\int (2x+1)\sin(x)dx = -(2x+1)\cos(x) + 2\int \cos(x)dx$

$\int (2x+1)\sin(x)dx = -(2x+1)\cos(x) + 2\sin(x) + k$

$\int (2x+1)\sin(x)dx = (-2x-1)\cos(x) + 2\sin(x) + k$

$\int (2x+1)\sin(x)dx = -2x\cos(x) - \cos(x) + 2\sin(x) + k$

$\int (2x+1)\sin(x)dx = 2(\sin(x) - x\cos(x)) - \cos(x) + k$

8) Determine, usando a técnica de integração por partes, os seguintes integrais indefinidos:

(a) $\int x \cos x \, dx$

Resolução: Escolhemos a função algébrica para u e a trigonométrica para dv:

- $u = x \implies du = dx$
- $dv = \cos x \, dx \implies v = \int \cos x \, dx = \text{sen } x$

Aplicando a fórmula:

$$\int x \cos x \, dx = x\text{sen } x - \int \text{sen } x \, dx = x\text{sen } x - (-\cos x) + C = x\text{sen } x + \cos x + C$$

(b) $\int x^2 \cos x \, dx$

Resolução: Escolhemos $u = x^2$ e $dv = \cos x \, dx$:

- $u = x^2 \implies du = 2x \, dx$
- $dv = \cos x \, dx \implies v = \text{sen } x$

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2\text{sen } x - \int 2x\text{sen } x \, dx$$

Aplicamos integração por partes novamente no integral: $\int 2x\text{sen } x \, dx$, com $u = 2x$ e $dv = \text{sen } x \, dx \implies du = 2dx, v = -\cos x$:

$$= x^2\text{sen } x - \left[-2x\cos x - \int -2\cos x \, dx\right] = x^2\text{sen } x + 2x\cos x - 2\text{sen } x + C$$

(c) $\int \ln^2 x\, dx$

Resolução: Escolhemos $u = (\ln x)^2$ e $dv = dx$:

- $u = (\ln x)^2 \implies du = 2\ln x \cdot \frac{1}{x}\, dx$
- $dv = dx \implies v = x$

$$\int \ln^2 x\, dx = x\ln^2 x - \int x \cdot \frac{2\ln x}{x}\, dx = x\ln^2 x - 2\int \ln x\, dx$$

Usando o resultado de $\int \ln x\, dx = x\ln x - x$:

$$= x\ln^2 x - 2(x\ln x - x) + C = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$$

(d) $\int \ln x\, dx$

Resolução: Escolhemos $u = \ln x$ e $dv = dx \implies du = \frac{1}{x}dx, v = x$:

$$\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x\ln x - \int 1\, dx = x\ln x - x + C$$

(e) $\int \ln(x^2+1)\, dx$

Resolução: Escolhemos $u = \ln(x^2+1)$ e $dv = dx \implies du = \frac{2x}{x^2+1}dx, v = x$:

$$\int \ln(x^2+1)\, dx = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\, dx$$

Fazendo a divisão polinomial $\frac{2x^2}{x^2+1} = 2 - \frac{2}{x^2+1}$:

$$= x\ln(x^2+1) - \left[\int 2\, dx - \int \frac{2}{x^2+1}\, dx\right] = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\text{arctg } x + C$$

(f) $\int e^{2x}\text{sen } x\, dx$

Resolução: Seja $I = \int e^{2x}\text{sen } x\, dx$. Escolhemos $u = \text{sen } x, dv = e^{2x}dx \implies du = \cos x dx, v = \frac{1}{2}e^{2x}$:

$$I = \frac{1}{2}e^{2x}\text{sen } x - \frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\, dx$$

Aplicando partes novamente no integral com cosseno:

$$I = \frac{1}{2}e^{2x}\text{sen } x - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{2}I\right] \implies \frac{5}{4}I = \frac{1}{2}e^{2x}\text{sen } x - \frac{1}{4}e^{2x}\cos x$$

$$I = \frac{e^{2x}(2\text{sen } x - \cos x)}{5} + C$$

(g) $\int \text{arcsen } x \, dx$

Resolução: Escolhemos $u = \text{arcsen } x, dv = dx \implies du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, v = x$:

$$\int \text{arcsen } x \, dx = x\text{arcsen } x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

O novo integral resolve-se por substituição imediata:

$$= x\text{arcsen } x + \sqrt{1-x^2} + C$$

(h) $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$

Resolução: Substituição: $t = \sqrt{x} \implies x = t^2 \implies dx = 2t \, dt$. O integral fica $2 \int te^t \, dt$. Por partes ($u = t, dv = e^t dt$):

$$2(te^t - \int e^t \, dt) = 2te^t - 2e^t + C = 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + C$$

(i) $\int \text{arctg } x \, dx$

Resolução: Escolhemos $u = \text{arctg } x, dv = dx \implies du = \frac{1}{1+x^2} dx, v = x$:

$$\int \text{arctg } x \, dx = x\text{arctg } x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x\text{arctg } x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

(j) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

Resolução: Escolhemos $u = \ln x, dv = x^{1/2} dx \implies du = \frac{1}{x} dx, v = \frac{2}{3} x^{3/2}$:

$$\int \sqrt{x} \ln x \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \int \frac{2}{3} x^{1/2} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + C$$

(l) $\int \cos^2 x \, dx$

Resolução: Escolhemos $u = \cos x, dv = \cos x \, dx \implies du = -\text{sen } x dx, v = \text{sen } x$:

$$I = \text{sen } x \cos x + \int \text{sen}^2 x \, dx = \text{sen } x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx$$

$$I = \text{sen } x \cos x + x - I \implies 2I = x + \text{sen } x \cos x \implies I = \frac{x + \text{sen } x \cos x}{2} + C$$

9) Determine a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ e $f''(x) = 12x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Resolução: Para encontrar a função f, devemos realizar duas integrações sucessivas (visto que partimos da segunda derivada) e utilizar as condições dadas em cada passo para determinar as constantes de integração.

1º. Determinação da primeira derivada $f'(x)$: Como a derivada de $f'(x)$ é $f''(x)$, integramos a função dada:

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int 12x\,dx$$

Aplicando a regra da potência:

$$f'(x) = 12\left(\frac{x^2}{2}\right) + C_1 = 6x^2 + C_1$$

Utilizamos agora a condição $f'(0) = 2$ para determinar C_1:

$$f'(0) = 6(0)^2 + C_1 = 2 \implies C_1 = 2$$

Logo, a expressão da primeira derivada é:

$$f'(x) = 6x^2 + 2$$

2º. Determinação da função $f(x)$: Para obter $f(x)$, integramos a expressão de $f'(x)$ que acabámos de encontrar:

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (6x^2 + 2)\,dx$$

Novamente, aplicamos as regras de primitivação:

$$f(x) = 6\left(\frac{x^3}{3}\right) + 2x + C_2 = 2x^3 + 2x + C_2$$

Utilizamos a condição final $f(0) = 1$ para determinar C_2:

$$f(0) = 2(0)^3 + 2(0) + C_2 = 1 \implies C_2 = 1$$

Conclusão: Substituindo o valor de C_2 na expressão de $f(x)$, obtemos a função pretendida:

$$f(x) = 2x^3 + 2x + 1$$

10) Calcule as seguintes integrais definidas, observando se é preciso utilizar algum método especifico para facilitar seus cálculos.

a) $\int_{-3}^{0}(x^2 - 4x + 7)dx$

Esta integral é mais "direta":

$\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 7x|_{-3}^{0}$

Pelo Primeiro Teorema Fundamental do cálculo: $F(b) - F(a)$:

$\frac{0^3}{3} - 4\frac{0^2}{2} + 7\cdot 0 - frac(-3)^3 3 - 4\frac{(-3)^2}{2} + 7(-3) = 0 - [(\frac{-27}{3} - 2\cdot 9 - 21)] = 0 - [-9 - 18 - 21] = 48$

b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(cos(x))dx$

Também é uma integral "direta":

$\sin(x)|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sin(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{-\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - [-\frac{\sqrt{2}}{2}] = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

c) $\int_{ln\ 2}^{3}(5e^x)dx$. Sabe-se que $e^{ln\ 2} = 2$

Podemos colocar a constante 5 para fora da integral, por propriedade, reescrevemos: $5\int_{ln\ 2}^{3}(e^x)dx$. Pela "piada" contada em sala de aula, sabemos que a função exponencial, quando $\lambda = 1$ não muda nada se ela se integrar em uma festa ou não, afinal se integrar ou não, dá no mesmo :P. Ou seja: $\int e^x dx = e^x$, agora, basta usarmos o nosso conhecimento do Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo para encontrar o valor desta integral, com o limite de integração descrito:

$5e^x|_{ln\ 2}^{3} = 5e^3 - 5e^{ln(2)} = 5e^3 - 5\cdot 2 = 5e^3 - 10 = 5(e^3 - 2)$

d) $\int_0^2 xe^{-x}dx$

Esta integral já não é tão direta, é preciso usar a técnica de integração por partes:

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu$$

$$u(x) = x \qquad dv = e^{-x}\ dx$$

$$du = dx \qquad v = -e^{-x}$$

$\int_0^2 udv = uv|_0^2 - \int_0^2 vdu$

$\int_0^2 xe^{-x}dx = x(-e^{-x})|_0^2 - \int_0^2(-e^{-x})dx = -xe^{-x}|_0^2 + \int_0^2(e^{-x})dx$

$\int_0^2 xe^{-x}dx = [-2e^{-2} - (-0 \cdot e^{-0})] + (-e^{-x})|_0^2 = -2e^{-2} + [-e^{-2} - e^{-0}] + k$

$\int_0^2 xe^{-x}dx = -2e^{-2} - e^{-2} - 1 + k$

$\int_0^2 xe^{-x}dx = 3e^{-2} - 1 + k$

e) $\int_{\frac{\pi}{2}}^2 x\sin(x)dx$

Esta integral já não é tão direta, é preciso usar a técnica de integração por partes:

$$\int udv = u \cdot v - \int vdu$$

$$u(x) = x \qquad dv = \sin(x)dx$$

$$du = dx \qquad v = -\cos(x)$$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^2 x\sin(x)dx = u \cdot v|_{\frac{\pi}{2}}^2 - \int_{\frac{\pi}{2}}^2 vdu = x(-\cos(x))|_{\frac{\pi}{2}}^2 - \int_{\frac{\pi}{2}}^2(-\cos(x))dx$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^2 x\sin(x)dx = 2\pi(-1) + (\frac{\pi}{2}(\cos(\frac{\pi}{2}))) + \int_{\frac{\pi}{2}}^2(\cos(x))dx$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^2 x\sin(x)dx = -2\pi - (\frac{\pi}{2}(0)) + \int_{\frac{\pi}{2}}^2(\cos(x))dx$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^2 x\sin(x)dx = -2\pi + [\sin(x)|_{\frac{\pi}{2}}^2] = -2\pi + [\sin(2\pi) - \sin(\frac{\pi}{2})]$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^2 x\sin(x)dx = -2\pi + [0 - 1] = -2\pi - 1 = -(1 + 2\pi)$

f) $\int_{\frac{1}{3}}^2 x^2 + 2x + 1\,dx$

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{3}}^2 x^2 + 2x + 1\,dx &= [\frac{x^{2+1}}{2+1} + 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + x]_{\frac{1}{3}}^2 \\
&= big[\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x]_{\frac{1}{3}}^2 \\
&= [\frac{2^3}{3} + 2\frac{2^2}{2} + 2] - [\frac{(\frac{1}{3})^3}{3} + 2\frac{(\frac{1}{3})^2}{2} + \frac{1}{3}] \\
&= [\frac{8}{3} + 2\frac{4}{2} + 2] - [\frac{\frac{1}{27}}{3} + 2\frac{\frac{1}{9}}{2} + \frac{1}{3}] \\
&= [\frac{8}{3} + 4 + 2] - [\frac{1}{81} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}] \\
&= frac83 + 6 - \frac{1}{81} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{665}{81}
\end{aligned}$$

g) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{x}\,dx &= \left[ln|x|\right]_1^e \\ &= ln|e| - ln|1| \\ &= 1 - 0 \\ &= 1\end{aligned}$$

h) $\int_0^8 \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\,dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^8 \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\,dx &= \int_0^8 \sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}\,dx \\
&= [\sqrt{2} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}]_0^8 \\
&= \sqrt{2} \cdot \frac{8^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{8^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - (\sqrt{2} \cdot \frac{0^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{0^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1}) \\
&= \sqrt{2} \cdot \frac{2^{3^{\frac{3}{2}}}}{\frac{3}{2}} + \frac{8^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \\
&= 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{9}{2}} \cdot \frac{2}{3} + 2^{3^{4\times\frac{1}{3}}} \cdot \frac{3}{4} \\
&= \frac{2^{\frac{1}{2}+\frac{9}{2}+1}}{3} + \frac{2^{3\times4\times\frac{1}{3}}}{4} \cdot 3 \\
&= \frac{2^6}{3} + \frac{2^4}{2^2} \cdot 3 \\
&= \frac{2^6}{3} + 2^2 \cdot 3 \\
&= \frac{64}{3} + 12 \\
&= \frac{100}{3}
\end{aligned}$$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3(x)\,dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^3(x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(x)\cdot sin(x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-cos^2(x))\cdot sin(x)\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x) - cos^2(x)\cdot sin(x)\,dx \\
&= \big[-cos(x)\big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \big[\frac{cos^3(x)}{3}\big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \big[-cos(\frac{\pi}{2}) - (-cos(0))\big] + \big[\frac{cos^3(\frac{\pi}{2})}{3} - \frac{cos^3(0)}{3}\big] \\
&= \big[0-(-1)\big] + \big[\frac{0}{3} - \frac{1}{3}\big] \\
&= 1 - \frac{1}{3} \\
&= \frac{3}{3} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

de notar que $(cos(x))' = -sin(x)$ e se usa a fórmula $Pu'\cdot u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

j) $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx &= \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\,dx
\end{aligned}$$

de notar que $(1+x)' = 1$ e se usa a fórmula $Pu'\cdot u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

l) $\int_1^e \frac{1+ln(x)}{x}\,dx$

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1+ln(x)}{x}\,dx &= \int_1^e \frac{1}{x} + \int_1^e \frac{ln(x)}{x}\,dx\\ &= [ln|x|]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x}\cdot ln(x)\,dx\\ &= [ln|e| - ln|1|] + [\frac{ln^2|x|}{2}]_1^e\,dx\\ &= 1 - 0 + [\frac{ln^2|e|}{2} - \frac{ln^2|1|}{2}]\\ &= 1 + [\frac{1}{2} - 0]\\ &= \frac{2}{2} + \frac{1}{2}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

de notar que $(ln(x))' = \frac{1}{x}$ e se usa a fórmula $Pu' \cdot u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$

11) Calcule:

a) $\int_0^2 6x^4\,dx$

Resolução: Pela regra da potência e linearidade da integral:

$$\int_0^2 6x^4\,dx = 6\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{6}{5}\left(2^5 - 0^5\right) = \frac{6}{5}\cdot 32 = \frac{192}{5}$$

b) $\int_0^2 \left(\frac{t^2}{3} - \sqrt{t}\right)\,dt$

Resolução: Escrevendo a raiz como potência ($t^{1/2}$):

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{3}t^2 - t^{1/2}\right)\,dt = \left[\frac{1}{3}\cdot\frac{t^3}{3} - \frac{t^{3/2}}{3/2}\right]_0^2 = \left[\frac{t^3}{9} - \frac{2\sqrt{t^3}}{3}\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{2^3}{9} - \frac{2\sqrt{2^3}}{3}\right) - 0 = \frac{8}{9} - \frac{2\cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{8}{9} - \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{8-12\sqrt{2}}{9}$$

c) $\int_{-4}^{-3} \frac{e^x}{3}\,dx$

Resolução: A primitiva de e^x é a própria e^x:

$$\frac{1}{3}\int_{-4}^{-3} e^x\,dx = \frac{1}{3}\left[e^x\right]_{-4}^{-3} = \frac{1}{3}\left(e^{-3}-e^{-4}\right) = \frac{e^{-3}-e^{-4}}{3}$$

d) $\int_1^3 \frac{x^3}{\sqrt{x}}\,dx$

Resolução: Simplificamos a expressão antes de integrar: $\frac{x^3}{x^{1/2}} = x^{3-1/2} = x^{5/2}$.

$$\int_1^3 x^{5/2}\,dx = \left[\frac{x^{7/2}}{7/2}\right]_1^3 = \frac{2}{7}\left[\sqrt{x^7}\right]_1^3 = \frac{2}{7}\left(\sqrt{3^7}-\sqrt{1^7}\right)$$

$$= \frac{2}{7}\left(27\sqrt{3}-1\right) = \frac{54\sqrt{3}-2}{7}$$

e) $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$

Resolução: A primitiva imediata é a função arco-tangente:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \left[\arctan(t)\right]_0^1 = \arctan(1)-\arctan(0) = \frac{\pi}{4}-0 = \frac{\pi}{4}$$

f) $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

Resolução: A primitiva imediata é a função arco-seno:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \left[\text{arcsen}(x)\right]_0^{1/2} = \text{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)-\text{arcsen}(0) = \frac{\pi}{6}-0 = \frac{\pi}{6}$$

g) $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx$

Resolução: Notamos que o numerador é a derivada exata do denominador, o que nos dá uma primitiva logarítmica ($\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$):

$$\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \ln(1+1^2)-\ln(1+0^2) = \ln(2)-\ln(1) = \ln 2$$

h) $\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx$

Resolução:

$$\int_3^6 \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_3^6 = \ln(6)-\ln(3) = \ln\left(\frac{6}{3}\right) = \ln 2$$

i) $\int_0^1 \sqrt[3]{x}(x-1)\,dx$

Resolução: Distribuímos o termo $x^{1/3}$: $\int_0^1 (x^{1/3}\cdot x^1 - x^{1/3})\,dx = \int_0^1 (x^{4/3} - x^{1/3})\,dx$.

$$= \left[\frac{x^{7/3}}{7/3} - \frac{x^{4/3}}{4/3}\right]_0^1 = \left[\frac{3}{7}x^{7/3} - \frac{3}{4}x^{4/3}\right]_0^1 = \left(\frac{3}{7} - \frac{3}{4}\right) - 0 = \frac{12-21}{28} = -\frac{9}{28}$$

j) $\int_e^{e^2} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

Resolução: Fazemos substituição $u = \ln x \implies du = \frac{1}{x}dx$. Limites: se $x = e, u = 1$; se $x = e^2, u = 2$.

$$\int_1^2 \frac{1}{u^2}\,du = \int_1^2 u^{-2}\,du = \left[-\frac{1}{u}\right]_1^2 = \left(-\frac{1}{2}\right) - (-1) = \frac{1}{2}$$

l) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$

Resolução: Fazemos $u = 1 + x^2 \implies du = 2x\,dx \implies x\,dx = \frac{1}{2}du$. Limites: se $x = 0, u = 1$; se $x = 1, u = 2$.

$$\frac{1}{2}\int_1^2 u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left[\sqrt{u^3}\right]_1^2 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right) = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$$

12) Calcule:

a) $\int_0^2 f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } 0 \le x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

Resolução:
Dividimos a integral no ponto de mudança de ramo ($x = 1$):

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^1 2\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$$

Aplicando a Regra de Barrow em cada parte:

$$= [2x]_0^1 + [\ln|x|]_1^2 = (2(1) - 0) + (\ln 2 - \ln 1)$$

Como $\ln 1 = 0$, temos:

$$= 2 + \ln 2$$

b) $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ onde $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ \cos x & \text{se } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \\ \text{sen } x & \text{se } x \in]\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}$

Resolução:

Dividimos a integral em três partes de acordo com os ramos:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} -2\,dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x\,dx + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \text{sen } x\,dx$$

Calculando cada parte:

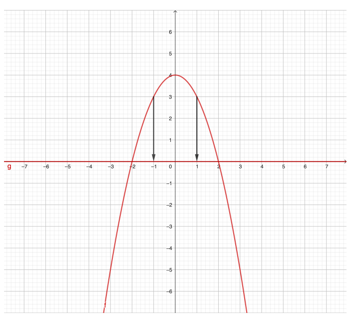
$$= [-2x]_0^{\pi/2} + [\text{sen } x]_{\pi/2}^{3\pi/2} + [-\cos x]_{3\pi/2}^{2\pi}$$

$$= (-2(\pi/2) - 0) + (\text{sen}(3\pi/2) - \text{sen}(\pi/2)) + (-\cos(2\pi) - (-\cos(3\pi/2)))$$

Substituindo os valores trigonométricos:

$$= (-\pi) + (-1 - 1) + (-1 - 0) = -\pi - 2 - 1 = -\pi - 3$$

13) Encontre a área limitada pela curva $y = 4 - x^2$ e o eixo x.

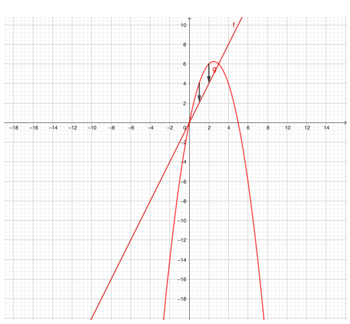


$\int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = 4x - \frac{x^3}{3}|_{-2}^{2} = 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} - [4 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}] = 8 - \frac{8}{3} - [-8 - \frac{-8}{3}]$

$\int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{1/3} - \frac{16}{3/1} = \frac{48-16}{3} = \frac{32}{3}$ ua.

14) Determinar a área limitada pelas curvas $y = 2x$ e $y = 5x - x^2$.

Após fazer o desenho da área que se pretende determinar, é preciso verificar o ponto de interseção entre as curvas para encontrarmos os limites de integração.



Para isto devemos igualar as curvas: $2x = 5x - x^2$

$2x - 5x = -x^2$

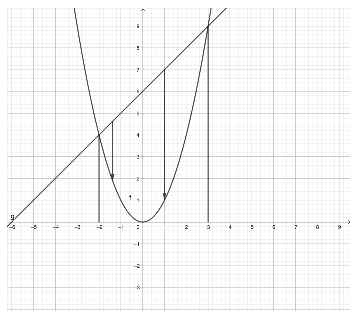
$-3x + x^2 = 0$

$x(x-3) = 0$

$x = 0$ ou $x = 3$

$\int_0^3 (5x - x^2 - 2x)dx = \int_0^3 (3x - x^2)dx = \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}|_0^3 = 3 \cdot \frac{3^2}{2} - \frac{3^3}{3} = 3 \cdot \frac{9}{2} - \frac{27}{3} = \frac{27}{2/3} - \frac{27}{3/2} = \frac{81-54}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$ ua.

15) Encontre a área limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 6$.



Após fazer o desenho da área que se pretende determinar, é preciso verificar o ponto de interseção entre as curvas para encontrarmos os limites de integração.

Para isto devemos igualar as curvas: $x^2 = x + 6$

$x^2 - x - 6 = 0$, equação quadrática, portanto, vamos usar a fórmula resolvente para encontrar os pontos de interseção das curvas.

$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-6)(1)}}{2}$

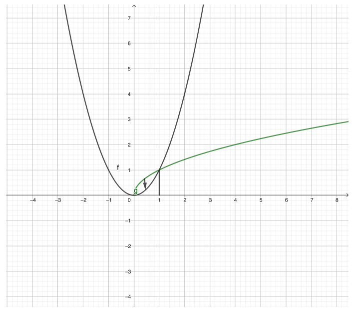
$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$

$x = \frac{1-5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ e $x = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$\int_{-2}^3 (x + 6 - x^2)dx = (\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3})\ |_{-2}^3 = \frac{3^2}{2} + 6 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} - [\frac{(-2)^2}{2} + 6 \cdot (-2) - \frac{(-2)^3}{3}] = [\frac{9}{2} + 18 - \frac{27}{3} - [\frac{4}{2} - 12] - \frac{(-8)}{3}] = \frac{9}{2} + 18 - 9 - [2 - 12 + \frac{8}{3}] = \frac{9}{2} + 18 - 9 - [-10 = \frac{8}{3}] = \frac{9}{2} + 9 + 10 - \frac{8}{3} = \frac{9}{2} + 19 - \frac{8}{3} = \frac{27+114-16}{6} = \frac{125}{6}$

16) Determine a área pelas curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$.



Após fazer o desenho da área que se pretende determinar, é preciso verificar o ponto de interseção entre as curvas para encontrarmos os limites de integração.

Para isto devemos igualar as curvas: $x^2 = \sqrt{x}$, utilizando nossos conhecimentos de álgebra, vamos fazer elevar ambos membros ao quadrado para facilitar nossos cálculos:

$(x^2)^2 = (x^{\frac{1}{2}})^2$

$x^4 = x$

$x^4 - x = 0$

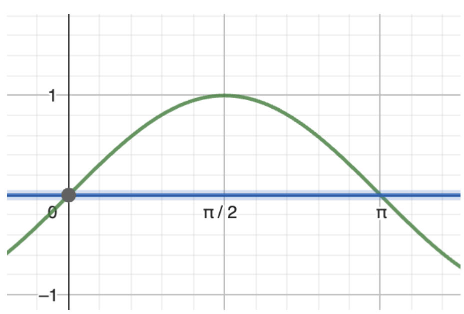
$x(x^3 - 1) = 0$

$x = 0$ ou $x^3 = 1$, isto é $x = 1$

$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} - x^2 dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3}|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ua.

17) Faça um esboço da área limitada pelos gráficos e determine-a:

a)$f(x) = sin(x)$, o eixo dos x, para $0 \leq x \leq \pi$



Como $senx \leq 0$ quando $0 \leq x \leq \pi$, temos que a área procurada é dada pela integral $A = \int_0^\pi sin(x)\, dx$.

Temos:

$\int senxdx = cosx + C$.

Logo, $A = \int_0^\pi sin(x)\, dx = \big[-cos(x) \big]_0^\pi = -cos(x) - (-cos(0)) = 1 + 1 = 2$(unidades de área).

b) Pela circunferência de equação $x^2 + y^2 = a^2$

Para calcular a área A desse círculo, basta calcular a área sob o semi-círculo $y = \sqrt{a^2 - x^2}$, acima do eixo x, entre os pontos $x = a$ e $x = a$, ou seja, calcular:

$\frac{A}{2} = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Faremos a substituição $x = asent$, $\frac{\pi}{2} \geq t \geq \frac{\pi}{2}$.

Para $t = \frac{\pi}{2}, x = a$; para $t = \frac{\pi}{2}, x = a$.

Teremos então $dx = acostdt, a^2 - x^2 = a^2cos^2(t)$ e, como $cost \leq 0$ no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\sqrt{a^2 - x^2} = acos(t)$.

Logo, $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2cos^2(t)\, dt$.

Temos:

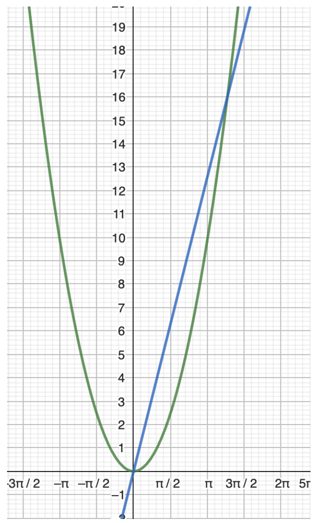
$cos^2(t) + sin^2(t) = 1 \Leftrightarrow sin^2(t) = 1 - cos^2(t)$ e $cos^2(t) - sin^2(t) = cos(2t)$ e efetuando a substituição acima, vem $cos^2(t) - (1 - cos^2(t))) = cos(2t)$, logo $cos^2(t)\frac{1}{2}(1 + cos(2t)$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2cos^2(t)\, dt \\
&= \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + cos(2t))\, dt \\
&= \frac{a^2}{2} \big[t + \frac{1}{2}sin(2t)\big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{a^2}{2} \big[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}sin(2\frac{\pi}{2})\big] - \frac{a^2}{2}\big[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}sin(-2\frac{\pi}{2})\big] \\
&= \frac{\pi a^2}{2}
\end{aligned}$$

E portanto a área do círculo é $A = 2 \cdot \frac{\pi a^2}{2}$, ou seja, $A = \pi a^2$

c) $f(x) = x^2, g(x) = 4x$

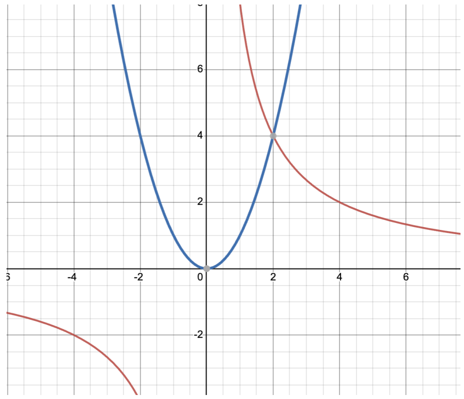


Primeiro calcula os pontos de interseção das duas curvas.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 4x - x^2 \, dx \\ &= [4\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_0^4 \\ &= [4 \times \frac{4^2}{2} - \frac{4^3}{3}] - 0 \quad = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

d) $y = \frac{8}{x}, y = x^2, x = 1, x = 4$



Primeiro calcula os pontos de interseção das duas curvas.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{8}{x} = x^2 \Leftrightarrow x^3 = 8 \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow x = 2$

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^2 \frac{8}{x} - x^2\,dx + \int_2^4 x^2 - \frac{8}{x}\,dx \\
&= [8ln|x| - \frac{x^3}{3}]_1^2 + [\frac{x^3}{3} - 8ln|x|]_2^4 \\
&= [8ln|2| - \frac{2^3}{3}] - [8ln|1| - \frac{1^3}{3}] + [\frac{4^3}{3} - 8ln|4|] - [\frac{2^3}{3} - 8ln|2|] \\
&= 8ln|2| - \frac{8}{3} + \frac{1^3}{3} + \frac{64}{3} - 8ln|4| - \frac{8}{3} + 8ln|2| \\
&= 16ln|2| + \frac{49}{3} - 8ln|2^2| \\
&= 16ln|2| + \frac{49}{3} - 8 \times 2ln|2| \\
&= 16ln|2| + \frac{49}{3} - 16ln|2| \\
&= \frac{49}{3}
\end{aligned}$$

18) A probabilidade P de que um frequencímetro digital manufacturado por uma companhia electrónica dure entre 2 e 3 anos, com um uso normal, é dada aproximadamente por

$$P = \int_2^3 12t^{-3}\,dt.$$

a) Calcule a probabilidade P.

Resolução:
Primeiro, encontramos a primitiva da função utilizando a regra da potência ($\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1}$):

$$\int 12t^{-3}\, dt = 12\left(\frac{t^{-3+1}}{-3+1}\right) = 12\left(\frac{t^{-2}}{-2}\right) = -6t^{-2} = -\frac{6}{t^2}$$

Pelo TFC :

$$P = \left[-\frac{6}{t^2}\right]_2^3 = \left(-\frac{6}{3^2}\right) - \left(-\frac{6}{2^2}\right)$$

$$P = -\frac{6}{9} + \frac{6}{4} = -\frac{2}{3} + \frac{3}{2}$$

Colocando no mesmo denominador (6):

$$P = -\frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{5}{6} \approx 0,833$$

A probabilidade é de aproximadamente $83,3\%$.

b) Calcule x tal que

$$\int_2^x 12t^{-3}\, dt = 1.$$

Resolução:
Utilizamos a primitiva encontrada na alínea anterior:

$$\left[-\frac{6}{t^2}\right]_2^x = 1$$

Aplicando os limites de integração:

$$\left(-\frac{6}{x^2}\right) - \left(-\frac{6}{2^2}\right) = 1$$

$$-\frac{6}{x^2} + \frac{6}{4} = 1$$

Simplificando a fração:

$$-\frac{6}{x^2} + \frac{3}{2} = 1$$

Isolando o termo com x:

$$-\frac{6}{x^2} = 1 - \frac{3}{2}$$

$$-\frac{6}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

Multiplicando ambos os lados por -1 e cruzando os termos:

$$x^2 = 12$$

Como x representa tempo (anos), consideramos apenas o valor positivo:

$$x = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3} \approx 3,46 \text{ anos}.$$

19) Utilizando a **tabela de integrais fornecida** no final desta lista, identifique, em cada caso, a forma da integral que permite resolver o problema.
Em seguida, determine a primitiva correspondente.

a) $\displaystyle\int \frac{3}{1+(3x-1)^2}\,dx$

Identificação: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx$, com $f(x) = 3x - 1$.

$$\boxed{\arctan(3x-1) + C}$$

b) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$

Identificação: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx$, com $f(x) = x^2$.

$$\boxed{\arcsin(x^2) + C}$$

c) $\displaystyle\int x\sin(x^2)\,dx$

Identificação: $\displaystyle\int \sin(f(x))f'(x)\,dx$, com $f(x) = x^2$.

$$\boxed{-\frac{1}{2}\cos(x^2) + C}$$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x+1)^2}}\,dx$

Identificação: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx$, com $f(x) = 2x + 1$.

$$\boxed{\frac{1}{2}\arcsin(2x+1) + C}$$

e) $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$

Identificação: uso da identidade trigonométrica.

$$\boxed{\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C}$$

f) $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

Identificação: $\int \cos(f(x))f'(x)\,dx$, com $f(x) = \ln x$.

$$\boxed{\sin(\ln x) + C}$$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(3x)}\,dx$

Identificação: $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(ax)}\,dx$.

$$\boxed{\frac{1}{3}\tan(3x) + C}$$

h) $\displaystyle\int (2x+1)\cos(x^2+x)\,dx$

Identificação: $\int \cos(f(x))f'(x)\,dx$, com $f(x) = x^2 + x$.

$$\boxed{\sin(x^2 + x) + C}$$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\ln^2 x}\,\frac{1}{x}\,dx$

Identificação: $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx$, com $f(x) = \ln x$.

$$\boxed{\arctan(\ln x) + C}$$

Tabela de integrais trigonométricas

Integral	**Primitiva**
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$	$\arctan x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arcsin x + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$	$\arccos x + C$
$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx$	$\arctan(f(x)) + C$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx$	$\arcsin(f(x)) + C$
$\int \sin(ax)\,dx$	$-\frac{1}{a}\cos(ax) + C$
$\int \cos(ax)\,dx$	$\frac{1}{a}\sin(ax) + C$
$\int \sin(f(x))f'(x)\,dx$	$-\cos(f(x)) + C$
$\int \cos(f(x))f'(x)\,dx$	$\sin(f(x)) + C$
$\int \sin^2 x\,dx$	$\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C$
$\int \cos^2 x\,dx$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$
$\int \tan x\,dx$	$-\ln\|\cos x\| + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$	$\tan x + C$