I.8 Matriz de uma transformação linear

Notação

É usual designar os vectores de $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ por $\vec{i}$ e $\vec{j}$ ou por $\vec{e}_1$ e $\vec{e}_2$.

É usual designar os vectores de $\mathbb{R}^3$ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ por $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ ou $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$.

É usual designar os vectores de $\mathbb{R}^n$ $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$, $\dots$ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ por $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$.

Assim, usaremos a convenção

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

O próximo exemplo serve para motivar o teorema seguinte.

Exemplo 8.1

Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear. ~~Então~~ Sejam $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ e $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Sabendo que $T(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ e $T(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$, determine uma matriz A tal que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ para qualquer $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^2$.

Analisando este exemplo e generalisando para transformações $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, temos:

Teorema 9

Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Então existe uma e uma só matriz A tal que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ para todo o $\vec{x}$ de $\mathbb{R}^n$. A matriz A é dada por

$$A = \left(T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2) \ \cdots \ T(\vec{e}_n) \right)$$

Esta matriz chama-se matriz canónica da transformação linear T.

Observação

Deste teorema e da secção anterior concluímos que uma transformação é linear se e só se é matricial. Ou seja, as transformações lineares são precisamente aquelas que podem ser dadas através de uma matriz: $T(\vec{x}) = A\vec{x}$.

Exemplo 8.2

Sabendo que as seguintes transformações de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ são lineares, determine as suas matrizes canónicas:

a) reflexão no eixo dos xx;

b) projecção no eixo dos yy;

c) rotação num ângulo θ.

Transformações lineares injectivas e sobrejectivas

Seja $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear.

i) T diz-se injectiva se $T(\vec{u}) = T(\vec{v}) \Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$
(objectos diferentes têm imagens diferentes)

ii) T diz-se sobrejectiva se a imagem de T é $\mathbb{R}^m$

iii) T diz-se bijectiva se é simultaneamente injectiva e sobrejectiva.

Exemplo 8.3

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x_1, x_2) = (0, x_2)$ não é injectiva nem sobrejectiva

b) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$ é sobrejectiva mas não é injectiva.

c) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x_1, x_2) = (x_1, -x_2)$ é bijectiva.

Exemplo 8.4

Seja $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$
$\vec{x} \to A\vec{x}$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Determine se T é:

a) sobrejectiva;

b) injectiva.

Este exemplo motiva os dois teoremas seguintes.

Teorema 10

A transformação linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é injectiva se e só se a equação $T(\vec{x}) = \vec{0}$ tem apenas a solução trivial ($\vec{x} = \vec{0} \to$ vector nulo de $\mathbb{R}^n$).

Teorema 11

A transformação linear $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, com matriz canónica A:

i) é sobrejectiva se e só se as colunas de A geram $\mathbb{R}^m$;

ii) é injectiva se e só se as colunas de A são l.i..

Observação

A alínea i) deste teorema é apenas a reformulação de parte do teorema 4 na linguagem das transformações lineares.

Exemplo 8.5

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x_1, x_2) = (5x_1 - x_2, x_2, -x_1 + x_2)$.

Determine se T é:

a) injectiva;

b) sobrejectiva.