

Algorithmen und Berechenbarkeit

Vorlesung 16

Letztes Update: 2018/01/16 - 12:04 Uhr

Das Allgemeine Halteproblem: Die Sprache \mathcal{H}_{all}

Die Sprache \mathcal{H}_{all} ist definiert als

$$\mathcal{H}_{all} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ hält auf allen Eingaben} \}$$

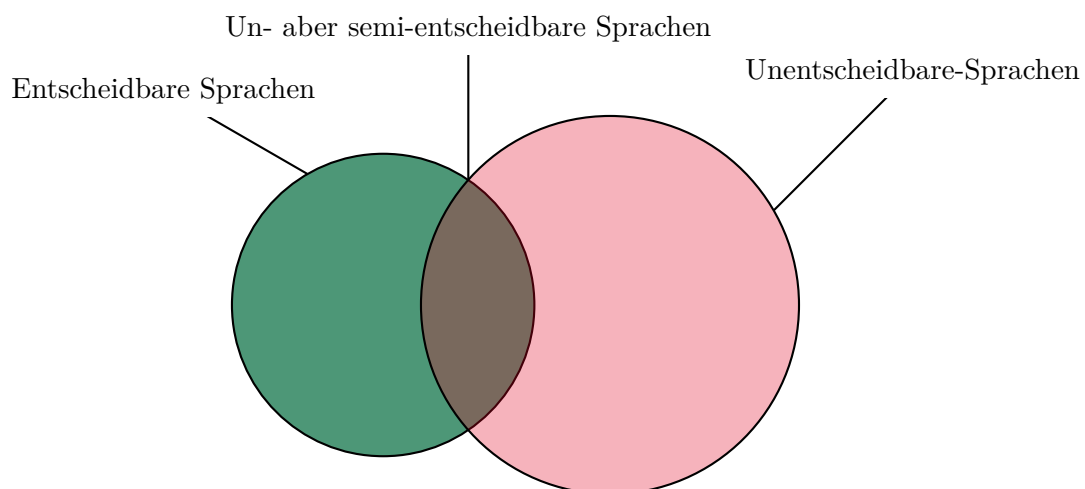
Das Allgemeine Halteproblem besteht aus den beiden Teilsätzen, dass sowohl \mathcal{H}_{all} als auch $\overline{\mathcal{H}_{all}}$ nicht semi-entscheidbar sind.

Satz: $\overline{\mathcal{H}_{all}}$ ist nicht semi-entscheidbar.

Beweis: Für den Beweis wird eine Sprache \mathcal{X} gesucht, die nicht semi-entscheidbar ist. Anschließend wird $\mathcal{X} \leq \overline{\mathcal{H}_{all}}$.

Für \mathcal{X} eignen sich einige Sprachen: Es wurde bereits gezeigt, dass \mathcal{H}_e semi-entscheidbar aber nicht entscheidbar ist (\mathcal{H}_e ist unentscheidbar und semi-entscheidbar). Deshalb ist auch bekannt, dass $\overline{\mathcal{H}_e}$ nicht semi-entscheidbar ist.

Einschub: Entscheidbarkeit/Unentscheidbarkeit - Semi-entscheidbar



Daraus ergeben sich beispielhaft die folgenden Zusammenhänge

- Wenn entscheidbar \Rightarrow auch semi-entscheidbar
- Wenn semi-entscheidbar \Rightarrow entscheidbar
- Wenn unentscheidbar \Rightarrow semi-entscheidbar
- Wenn nicht semi-entscheidbar \Rightarrow unentscheidbar

Beweis-Fortführung: Wählt man nun $\mathcal{X} = \overline{\mathcal{H}_\epsilon}$ (man zeigt also $\overline{\mathcal{H}_\epsilon} \leq \overline{\mathcal{X}_{all}}$) wird eine Funktion f' benötigt, sodass gilt

$$x \in \overline{\mathcal{H}_\epsilon} \Leftrightarrow f(x) \in \overline{\mathcal{H}_{all}}$$

oder äquivalent

$$x \in \mathcal{H}_\epsilon \Leftrightarrow f(x) \in \mathcal{H}_{all}$$

und damit

$$\mathcal{H}_\epsilon \leq \mathcal{H}_{all}$$

Die Funktion f wird wie folgt definiert bzw. berechnet: Sei w die Eingabe für \mathcal{H}_ϵ .

- Falls w keine gültige TM-Kodierung, dann setzt man $f(w) = w$.
- Falls w eine gültige TM-Kodierung $\langle M \rangle$, dann setzt man $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$ mit der folgenden Eigenschaft: $\langle M_\epsilon^* \rangle$ ignoriert und simuliert \mathcal{M} mit der Eingabe ϵ .

Korrektheit der Konstruktion:

Falls w keine TM-Kodierung $\Rightarrow w \notin \mathcal{H}_\epsilon$ und $f(w) \notin \mathcal{H}_{all}$.
Andernfalls gilt $w = \langle M \rangle$ und $f(w) = \langle M_\epsilon^* \rangle$.

- $w \in \mathcal{H}_\epsilon$
 - $\Rightarrow \mathcal{M}$ hält auf der Eingabe ϵ
 - $\Rightarrow \langle M_\epsilon^* \rangle$ hält auf allen Eingaben
 - $\Rightarrow f(w) \in \mathcal{H}_{all}$
- $w \notin \mathcal{H}_\epsilon$
 - $\Rightarrow \mathcal{M}$ hält nicht auf der Eingabe ϵ
 - $\Rightarrow \langle M_\epsilon^* \rangle$ hält nie
 - $\Rightarrow f(w) \notin \mathcal{H}_{all}$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} w \in \mathcal{H}_\epsilon &\Leftrightarrow f(w) \in \mathcal{H}_{all}, \text{ also ist} \\ \mathcal{H}_\epsilon \leq \mathcal{H}_{all} &\Rightarrow \overline{\mathcal{H}_\epsilon} \leq \overline{\mathcal{H}_{all}} \\ &\Rightarrow \overline{\mathcal{H}_{all}} \text{ nicht entscheidbar} \end{aligned}$$

□

Satz: \mathcal{H}_{all} ist nicht semi-entscheidbar.

Beweis: Es wird wieder mit $\overline{\mathcal{H}_\epsilon} \leq \mathcal{H}_{all}$ argumentiert. Man konstruiert eine Funktion f , die JA-Instanzen von $\overline{\mathcal{H}_\epsilon}$ auf JA-Instanzen von \mathcal{H}_{all} und NEIN-Instanzen von $\overline{\mathcal{H}_\epsilon}$ auf NEIN-Instanzen von \mathcal{H}_{all} abbildet.

Sei w die Eingabe für $\overline{\mathcal{H}_\epsilon}$

- Falls w keine gültige TM-Kodierung, dann gilt $w \in \overline{\mathcal{H}_\epsilon}$.
Außerdem wird $f(w) =$ Kodierung einer TM in \mathcal{H}_{all} .
- Falls w eine gültige TM-Kodierung $\langle M \rangle$, dann berechnet man eine Kodierung $\langle M'_{\mathcal{M}} \rangle$ einer TM $\mathcal{M}'_{\mathcal{M}}$, die auf der Eingabe x Folgendes tut: Falls $|x| = i$, simuliert sie die ersten i -Schritte von \mathcal{M} auf der Eingabe ϵ . Wenn \mathcal{M} dabei hält, geht sie in eine Endlosschleife, ansonsten hält sie an: $f(w) = \langle M'_{\mathcal{M}} \rangle$

Korrektheit der Konstruktion:

- $w \in \overline{\mathcal{H}_\epsilon}$
 - $\Rightarrow \mathcal{M}$ hält nicht auf der Eingabe ϵ
 - $\Rightarrow \neg \exists i : \mathcal{M}$ hält innerhalb der ersten i -Schritte auf ϵ
 - $\Rightarrow \forall i : \langle M'_{\mathcal{M}} \rangle$ hält auf der Eingabe der Länge i
 - $\Rightarrow f(w) = \langle M'_{\mathcal{M}} \rangle \in \mathcal{H}_{all}$
- $w \notin \overline{\mathcal{H}_\epsilon}$
 - $\Rightarrow \mathcal{M}$ hält auf der Eingabe ϵ
 - $\Rightarrow \exists i : \mathcal{M}$ hält innerhalb der ersten i -Schritte auf ϵ
 - $\Rightarrow \exists i : \langle M'_{\mathcal{M}} \rangle$ loopt auf Eingaben der Länge i
 - $\Rightarrow f(w) = \langle M'_{\mathcal{M}} \rangle \notin \mathcal{H}_{all}$

Somit gilt:

$$w \in \overline{\mathcal{H}_\epsilon} \Leftrightarrow f(w) \in \mathcal{H}_{all}$$

□

Es wurde also gezeigt, dass sowohl \mathcal{H}_{all} als auch $\overline{\mathcal{H}_{all}}$ nicht semi-entscheidbar bzw. rekursiv aufzählbar sind.

Weitere unentscheidbare Probleme

Hilberts zehntes Problem

Gegeben sei ein multivariates Polynom p (also ein Polynom mit mehreren Variablen z.B. $x, y, z, a \dots$). Es kann die Frage gestellt werden, ob p eine ganzzahlige Nullstelle besitzt.

In der Tat gilt: Die Sprache

$$N = \{ p \mid p \text{ ist Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und ganzzahliger Nullstelle} \}$$

ist unentscheidbar.

Postsche Korrespondenzproblem

Gegeben seien z.B. die Kärtchen

$$K = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ ca \end{bmatrix}}_1, \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ ab \end{bmatrix}}_2, \underbrace{\begin{bmatrix} ca \\ a \end{bmatrix}}_3, \underbrace{\begin{bmatrix} abc \\ c \end{bmatrix}}_4 \right\}$$

Man kann nun beliebig viele Kärtchen beliebig oft aneinanderreihen. Reiht man die Kärtchen $1+2+1$ aneinander, so erhält man zwei Zeichenketten: Einmal die Zeichenkette oben und einmal die Zeichenkette unten. Im Beispiel also oben: **bab** und unten: **caabca**.

Nun kann die Frage gestellt werden, ob man bei einem gegebenen Kartenset K die Karten so anordnen kann, dass die obere Zeichenkette genau der unteren Zeichenkette entspricht. Für das obige Beispiel ist das möglich, dort liefert die Kombination $2 + 1 + 3 + 2 + 4$ sowohl oben als auch unten dieselbe Zeichenkette.

Im Allgemeinen gilt aber: Die Sprache

$$PKP = \{ \text{Kärtchenset } K \text{ mit Lösung} \}$$

ist unentscheidbar (aber semi-entscheidbar).