Vorlesungsmitschrieb

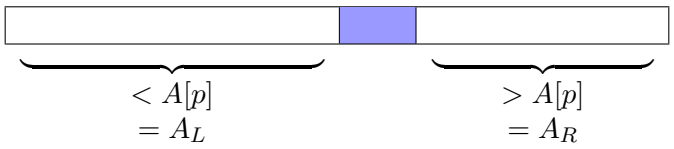
Algorithmen und Berechenbarkeit

Vorlesung 04

Letztes Update: 2017/11/18 - 12:46 Uhr

Las-Vegas-Algorithmus: Randomisierter Quicksort-Algorithmus

```
Eingabe A: [1, 2, 3, ... , n]
    Wähle p aus Eingabe zufällig gleichverteilt
    Füge p an der richtigen Stelle ein
```



Einfügen eines Elements an der *richtigen* Stelle

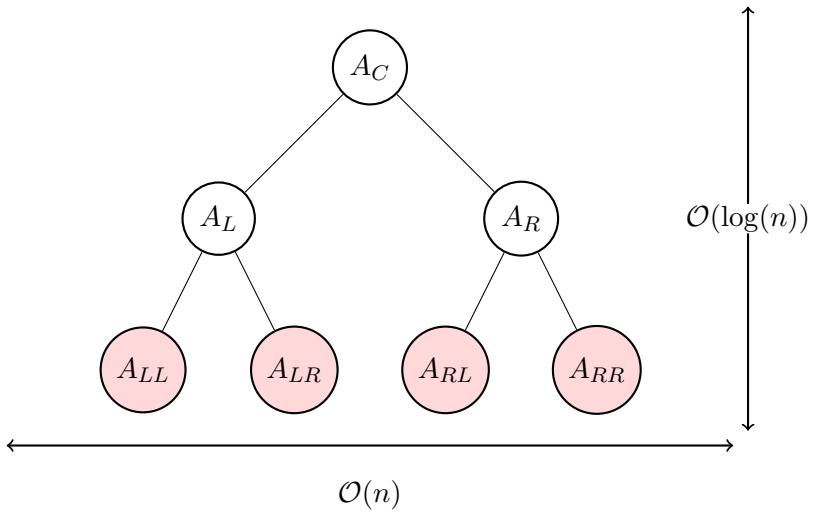
Der Algorithmus wird dann für die linke Seite $RQS(A_l)$ bzw. $RQS(A_r)$ rekursiv aufgerufen. Um *p zufällig gleichverteilt* aufzurufen, können verschiedene Ansätze gewählt werden. Zum Beispiel nimmt man immer das mittige Element ($\frac{n}{2}$) oder man berechnet den Median (das klappt in $O(n)$) und wählt das entsprechende Element aus. Beide Fälle sind suboptimal.

Versuch einer Analyse

Zuerst stellt man sich die folgende **Frage:** Was ist die erwartete Länge von A_l bzw. A_r?

$$E(|A_l|) = E(|A_r|) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot i = \frac{1}{n} \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} = \frac{n-1}{2}$$

Daraus folgt, dass die Tiefe des Rekursionsbaums $\mathcal{O}(\log(n))$ sein muss.



Die Gesamtlaufzeit ergibt sich somit als $\mathcal{O}(n \cdot \log(n))$

Dieser Ansatz der Analyse kann nicht richtig sein, denn folgender Quicksort-Algorithmus hätte mit derselben Folgerung dieselbe Laufzeit, was aber nicht stimmt.

```
Eingabe A: [1, 2, 3, ... , n]
    Wähle p
        mit 50% Wahrscheinlichkeit als kleinstes Element
        mit 50% Wahrscheinlichkeit als größtes Element
    Füge p an der richtigen Stelle ein
```

Man wählt p also entweder als erstes (kleinstes) oder letztes (größtes) Element, und startet den Algorithmus rekursiv erneut. Nach obiger Rechnung ergäbe sich auch hier wieder eine Länge von

$$E(|A_l|) = E(|A_r|) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2}(n-1) = \frac{n-1}{2}$$

Da bei einem rekursiven Aufruf aber jeweils wieder $n-1$ Elemente in der Eingabe enthalten sind, kann das also nicht stimmen.

Korrekte Analyse des Random Quicksort-Algorithmus

Wir gehen zunächst von folgender **Annahme** aus: Die zu sortierenden Elemente sind $s_1, s_2, s_3, ..., s_n$ und außerdem gilt $s_1 < s_2 < s_3 < ... < s_n$. Die Zufallsvariable wird festgelegt als

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls während des Alorithmus } s_i \text{ mit } s_j \text{ verglichen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Gesamtlaufzeit des Random Quicksort-Algorithmus ist damit

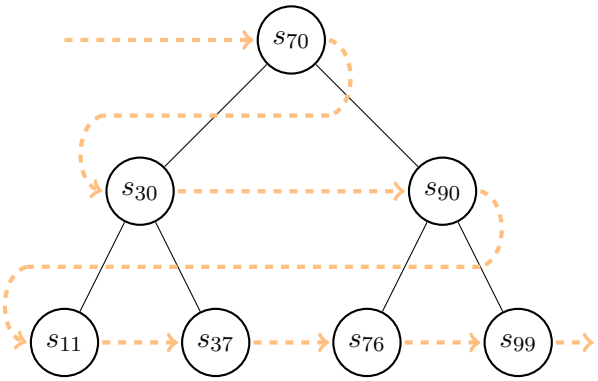
$$\sum_{i<j} X_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1} \cdot \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}$$

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{i<j} X_{ij}\right) &= \sum_{i<j} E(X_{ij}) \quad \text{(Linearität des Erwartungswerts)} \\ &= \sum_{i<j} (0 \cdot P(X_{ij} = 0) + 1 \cdot P(X_{ij} = 1)) \\ &= \sum_{i<j} \underbrace{P(X_{ij} = 1)}_{P_{ij}} \end{aligned}$$

Als Nächstes soll nun P_{ij} berechnet werden, wobei folgende Überlegungen zu beachten sind:

- Elemente mit großer Rangdifferenz werden nur mit geringer Wahrscheinlichkeit miteinander verglichen, da viele Chancen bestehen, dass sie im Rekursionsbaum getrennt werden.
- Elemente mit kleiner Rangdifferenz werden mit größerer Wahrschenlichkeit miteinander verglichen.
- Elemente mit der Rangdifferenz von 1 müssen miteinander verglichen werden.

In folgendem Ablauf des Random Quicksorts entspricht ein Knoten einem Pivotelement im entsprechenden Aufruf.



Die erzeugte Permutation ist $\pi = s_{70}, s_{30}, s_{90}, s_{11}, s_{37}, s_{76}, s_{99}$

Anmerkung: π ist nicht zufällig gleichverteilt, da manche Permutationen gar nicht vorkommen können.
Als Nächstes stellt sich die **Frage**, wie es sich auf die Laufzeit auswirkt, wenn s_i nicht verglichen wird.
Dann taucht ein Element s_k mit $s_i < s_k < s_j$ als Pivotelement vor s_i und vor s_j in π auf, denn s_i wird genau dann mit s_j verglichen, wenn s_i oder s_j das erste Element aus $s_i, s_{i+1}, ..., s_j$ in π ist. Außerdem gilt: Mit gleicher Wahrscheinlichkeit ist jedes der Elemente $s_i, s_{i+1}, ..., s_j$ das erste, das in π auftaucht.
Die Wahrscheinlichkeit, dass s_i mit s_j verglichen wird, beträgt also

$$P_{ij} := P(s_i \text{ wird mit } s_j \text{ verglichen}) = \frac{2}{j - i + 1}$$

Damit kann nun die Laufzeit eingeordnet werden:

$$\begin{aligned}
E\left(\sum_{r<j} X_{ij}\right) &= \sum_{i+1}^{n-1} \cdot \sum_{j=i+1}^{n} E(X_{ij}) \\
&= \sum_{i+1}^{n-1} \cdot \sum_{j=i+1}^{n} P_{ij} \\
&= \underbrace{\sum_{i+1}^{n-1} \cdot \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1}}_{\frac{2}{2}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\ \ldots} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \cdot \sum_{l=2}^{n} \frac{2}{l} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} 2 \cdot \sum_{l=2}^{n} \frac{1}{l} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} 2 \cdot \mathcal{O}(H_n) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} 2 \cdot \mathcal{O}(\log(n)) \\
&= \mathcal{O}(n \cdot \log(n))
\end{aligned}$$

Anmerkung: H_n beschreibt die $n-$te harmonische Zahl.

Zero-Knowledge-Proof

Zunächst soll eine **Anwendung** des „Zero-Knowledge-Proofs“ beschrieben werden: Wie könnte eine Bank beim Onlinebanking beweisen, dass sie weiterhin die Bank ist (die betrachtete Website weiterhin zur Bank gehört)?
Ein möglicher **Ansatz** besagt, dass die Bank (im Folgenden auch einfach **Alice**) ihrem Kunden (**Bob**) beweisen muss, dass sie ein Geheimnis kennt, welches nur Alice bekannt sein kann, allerdings ohne das Geheimnis zu verraten.
Außerdem sollen die folgenden **Eigenschaften** erfüllt sein:

- Falls Alice das Geheimnis nicht kennt, wird das mit hoher Wahrscheinlichkeit von Bob erkannt.
- Alice gibt nichts über das Geheimnis preis, was Bob nicht alleine rausfinden könnte.

Das Protokoll basiert auf dem Graphisomorphie-Problem (Isomorphismus zwischen zwei öffentlichen Graphen G_1 und G_2).
Alice kann G_1 und G_2 wie folgt erzeugen: Sie wählt G_1 zufällig und außerdem eine zufällige Permutation Φ der Knoten von G_1, was dann G_2 definiert. Φ bleibt geheim, wohingegen G_1 und G_2 veröffentlicht werden.

Protokoll, durch welches Alice Bob überzeugt, P zu kennen:

Alice permutiert G_j wobei $j \in \{1, 2\}$ mit einer zufälligen Permutation π zu einem Graphen H. Dabei stellt sie sicher, dass $H \neq G_1$ und $H \neq G_2$. Außerdem sendet sie H an Bob.

Bob möchte sich davon überzeugen, dass Alice die Isomorphie zwischen G_1 und G_2 kennt, indem er $k \in \{1, 2\}$ zufällig wählt und Alice bittet, die Isomorphie zwischen G_k und H offenzulegen.
Falls nun Alice das Geheimnis Φ kennt, so kann sie **immer** Φ bzw. $\Phi \circ \pi$ zurückgeben. Falls Alice Φ nicht kennt und Bob den Graphen wählt, aus dem Alice H generiert hat, kann sie leicht antworten, falls jedoch Bob den anderen Graphen gewählt hat, müsste sie das Graphisomorphie-Problem lösen, um die korrekte Antwort zu geben.
Bei $x-$maliger Wiederholung ist die Wahrscheinlichkeit, dass Bob immer den richtigen Graphen erwischt, aus dem H erzeugt wurde

$$\frac{1}{2^x}$$

Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass Bob erkennt, dass Alice Φ nicht kennt,

$$1 - \frac{1}{2^x}$$

beträgt.

Satz: Alice verrät nichts über Φ.

Beweis: Bob lernt Isomorphie zwischen z.B. G_1 und einer zufälligen Permutation von G_1. Das hätte er auch selber herausfinden können.

Anhang

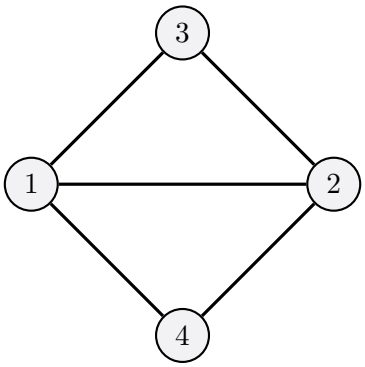
Graphisomorphie

Gegeben seien zwei Graphen $G_1(V_1, E_1)$ und $G_2(V_2, E_2)$. Graphisomorphie bedeutet, es gibt eine bijektive Funktion ϕ, sodass

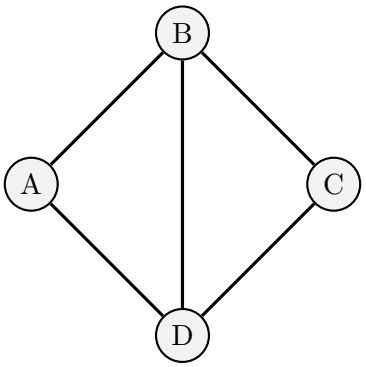
$$\forall a = (v, w) \in E_1 \Leftrightarrow (\phi(v), \phi(w)) \in E_2$$

Graphisomorphie-Problem

Gegeben seien zwei Graphen $G_3(V_3, E_3)$ und $G_4(V_4, E_4)$ und man stellt sich die **Frage**: Wann sind G_1 und G_2 isomorph?



Graph G_3



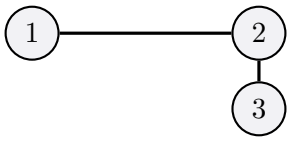
Graph G_4

Die folgende Tabelle zeigt die Isomorphie zwischen $v \in V_3$ und $\phi(v)$.
$v \in V_3$ und $\Phi(v)$ sind nicht isomorph. Festgestellt werden kann dies zum Beispiel über den Knotengrad oder durch die folgende Erkenntnis:

$$2, 4 \in G_3$$
$$A, C \notin G_4$$

$v \in V_3$	$\phi(v)$	$\Phi(v)$
1	B	B
2	D	A
3	C	D
4	A	C

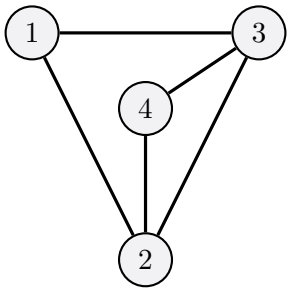
Es folgen weitere Beispiele:



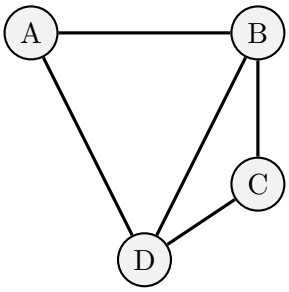
Graph G_5

Graph G_6

Die nicht isomorphen Graphen G_5 und G_6

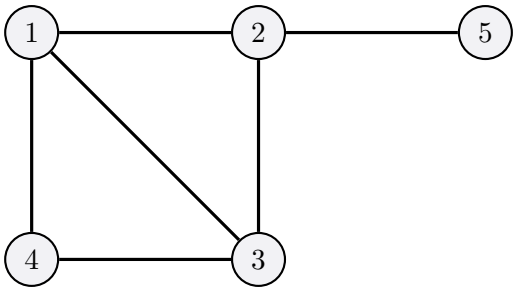


Graph G_7

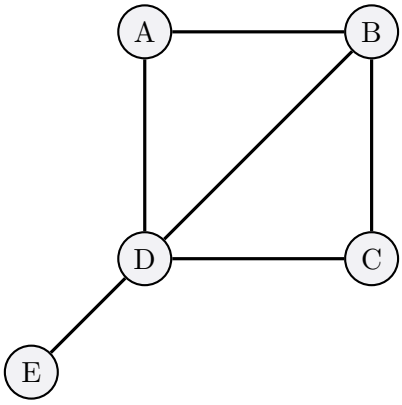


Graph G_8

Die isomorphen Graphen G_7 und G_8



Graph G_9



Graph G_{10}

Die nicht isomorphen Graphen G_9 und G_{10} (D hat Grad 4, 2 hat Grad 3)

Anmerkung: Bis zum Jahr 2015 dachten Informatiker, Graphenisomorphie läge in ***NP-schwer****. Im Jahr 2015 wurde jedoch gezeigt, dass das Problem der Graphenisomorphie in Quasipolynomzeit lösbar ist:*

$$\mathcal{O}(2^{O(\log(n))^2})$$