

## Vorlesungsmitschrieb

# Algorithmen und Berechenbarkeit

## Vorlesung 03

Letztes Update: 2017/11/01 - 09:40 Uhr

### Laufzeiten

Es wäre gut, wenn jemand die Inhalte der ersten 15 Minuten nachtragen könnte, da ich leider verhindert war.

- $o(n^2)$  beschreibt die Menge aller Funktionen, die mindestens so langsam wie  $n^2$  wachsen (asymptotisch).
  - **In  $o(n^2)$ :**
  - **Nicht in  $o(n^2)$ :**
- $\mathcal{O}(n^2)$  beschreibt die Menge aller Funktionen, die echt langsamer wachsen als  $n^2$ .
  - **In  $\mathcal{O}(n^2)$ :**  $n$ ,  $n^{1,99}$ ,  $n \cdot \log(n)$ ,  $n \cdot \log^2(n)$
  - **Nicht in  $\mathcal{O}(n^2)$ :**  $n^2$ ,  $n^2 \cdot \log(n)$ ,  $2^n$
- $\Omega(n^2)$  beschreibt die Menge aller Funktionen, die mindestens so schnell wie  $n^2$  wachsen (asymptotisch).
  - **In  $\Omega(n^2)$ :**  $n^2$ ,  $n^2 \cdot \log(n)$ ,  $n^{2,1}$ ,  $2^n$
  - **Nicht in  $\Omega(n^2)$ :**  $n \cdot \log(n)$ ,  $n^{1,9}$ ,  $\sqrt{n}$ ,  $n \cdot \log^2(n)$ ,  $\frac{n^2}{\log(n)}$
- $\omega(n^2)$  beschreibt die Menge aller Funktionen, die echt schneller wachsen als  $n^2$ .
  - **In  $\omega(n^2)$ :**  $n^{2,1}$ ,  $n^2 \cdot \log(n)$ ,  $2^n$
  - **Nicht in  $\omega(n^2)$ :**  $n^2$ ,  $n \cdot \log(n)$ ,  $\frac{n^2}{\log(n)}$ ,  $\log(n)$
- $\Theta(n^2)$  beschreibt die Menge aller Funktionen, die sowohl in  $\mathcal{O}(n^2)$  als auch in  $\Omega(n^2)$  enthalten sind.

### Vergleichsbasiertes Sortieren

Es wird *Vergleichsbasiertes Sortieren* von  $n$  Objekten betrachtet, wobei die Elemente nur verglichen werden dürfen. Hier stellt sich die **Frage**: Was ist die Komplexität des vergleichsbasierten Sortierens?

Die ersten Überlegungen stellen klar: Jeder Sortieralgorithmus liefert eine obere Schranke für  $T(n)$ :

- **Bubblesort**  $\Rightarrow T(n) \in \mathcal{O}(n^2)$
- **Mergesort**  $\Rightarrow T(n) \in \mathcal{O}(n \cdot \log(n))$

**Aussage 1** Es kann bewiesen werden, dass  $T(n) \in \Omega(n \cdot \log(n)) \Rightarrow T(n) \in \Theta(n \cdot \log(n))$

[**Beweis**] Man betrachte einen beliebigen Algorithmus  $\mathcal{A}$  zum Sortieren.  $\mathcal{A}$  vergleicht  $e_i$  mit  $e_j$ .

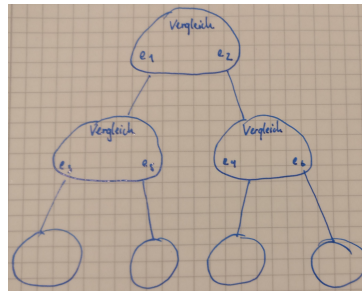


Abbildung 1: Exemplarische Vergleiche beim vergleichsbasierten Sortieren

Ein Blatt in diesem Baum heißt im Prinzip: Der Algorithmus hat fertig sortiert. Es heißt aber genauso: Der Algorithmus hat „herausgefunden“, was die „Permutation“ der Eingabe war. Daraus folgt, dass der Baum  $n!$  Blätter haben muss. Es zeigt sich außerdem, dass die Worst-Case-Laufzeit des Algorithmus  $\mathcal{A}$  genau der Tiefe des Baumes entspricht. Damit stellt sich die nächste **Frage**:

Was ist die minimale Tiefe eines Binärbaumes, der  $n!$  Blätter hat?

$$2^n = n!$$

$$\left( n! \approx \left( \frac{n}{e} \right)^{\frac{n}{e}} \Rightarrow x = \log_2 \left( \frac{n}{e} \right)^{\frac{n}{e}} \Rightarrow x = n \cdot \log(n) \right)$$

## Monte-Carlo und Las-Vegas Algorithmen ineinander umwandeln

Es stellt sich die **Frage**, ob jeder Las-Vegas-Algorithmus in einen Monte-Carlo-Algorithmus umgewandelt werden kann, und andersherum.

### Las-Vegas $\Rightarrow$ Monte-Carlo

Die Idee besteht aus folgender Überlegung: Lasse den Las-Vegas-Algorithmus eine bestimmte Anzahl an Schritten laufen und breche dann ab. War der Las-Vegas-Algorithmus bis dahin fertig, so muss auch das Ergebnis korrekt sein. War der Las-Vegas-Algorithmus bis dahin nicht fertig, dann gibt es auch kein korrektes Ergebnis.

Die zentrale **Frage**, die sich hier anfügt: Wie lange darf der Algorithmus laufen und was ist seine Erfolgswahrscheinlichkeit?

Sei nun  $\mathcal{A}$  ein Las-Vegas-Algorithmus mit erwarteter Laufzeit  $f(n)$ .  $\mathcal{A}$  darf nun für maximal  $\alpha \cdot f(n) \mid \alpha \geq 1$  Schritte laufen. Falls der Algorithmus bis dahin fertig ist, ist das Ergebnis sicher korrekt. Ist der Algorithmus bis dahin nicht fertig, so wird *Müll* zurückgegeben.

Dieser modifizierte Algorithmus hat immer eine Laufzeit von  $< \alpha \cdot f(n)$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass *Müll* zurückgegeben wird, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass  $\mathcal{A}$  länger als  $\alpha \cdot f(n)$  Zeit zum Sortieren benötigt.

### Monte-Carlo $\Rightarrow$ Las-Vegas

Nicht alle Monte-Carlo-Algorithmen können ohne Weiteres in Las-Vegas-Algorithmen umgewandelt werden.

Für manche Probleme ist die Verifikation des Ergebnisses einfacher als die Berechnung:

- Sortieren:  $O(n \cdot \log(n))$  vs.  $O(n)$ .
- Kürzeste Wege:  $O(n \cdot \log(n + m))$  vs.  $O(m)$ .

Das Überführen von Monte-Carlo- in Las-Vegas-Algorithmen ist möglich, wenn man einen effizienten *Checker* hat.

- Monte-Carlo-Algorithmus  $\mathcal{A}$  hat eine Laufzeit von  $f(n)$ .
- Checker  $\mathcal{O}$  hat eine Laufzeit von  $f(n)$ .
- Die Erfolgswahrscheinlichkeit von  $\mathcal{A}$  sei  $p(n)$ .

Mit folgendem Algorithmus kann dann ein Las-Vegas-Algorithmus erzeugt werden:

```

1. Lasse Algorithmus laufen
2. Überprüfe Ergebnis mit Checker
   Falls korrekt, dann fertig
   Falls nicht korrekt, zurück zu 1.

```

Die erwartete Laufzeit  $\mathcal{R}$  ist dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= p(n) \cdot (f(n) + g(n)) \\
&\quad + ((1 - p(n)) \cdot p(n) \cdot (f(n) + g(n))) \cdot 2 \\
&\quad + ((1 - p(n))^2 \cdot p(n) \cdot (f(n) + g(n))) \cdot 3 \\
&\quad + \dots \\
&= \left( f(n) + g(n) \right) \cdot p(n) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} ((1 - p(n))^i < \frac{f(n) + g(n)}{p(n)} \cdot (i + 1))
\end{aligned}$$


---

## Anhang

### Markov-Ungleichung

Sei  $X$  eine nicht negative Zufallsvariable mit  $E[X] = \mu$ . Dann gilt:

$$P(X \geq \alpha \cdot \mu) \leq \frac{1}{\alpha}$$