

Vorlesungsmitschrieb

Algorithmen und Berechenbarkeit

Vorlesung 03

Letztes Update: 2017/11/13 - 18:32 Uhr

Laufzeiten

- $O(n^2)$ beschreibt die Menge aller Funktionen, die echt langsamer wachsen als n^2 .
 - **In** $O(n^2)$: n , $n^{1,99}$, $n \cdot \log(n)$, $n \cdot \log^2(n)$
 - **Nicht in** $O(n^2)$: n^2 , $n^2 \cdot \log(n)$, 2^n
- $\Omega(n^2)$ beschreibt die Menge aller Funktionen, die mindestens so schnell wie n^2 wachsen (asymptotisch).
 - **In** $\Omega(n^2)$: n^2 , $n^2 \cdot \log(n)$, $n^{2,1}$, 2^n
 - **Nicht in** $\Omega(n^2)$: $n \cdot \log(n)$, $n^{1,9}$, \sqrt{n} , $n \cdot \log^2(n)$, $\frac{n^2}{\log(n)}$
- $\omega(n^2)$ beschreibt die Menge aller Funktionen, die echt schneller wachsen als n^2 .
 - **In** $\omega(n^2)$: $n^{2,1}$, $n^2 \cdot \log(n)$, 2^n
 - **Nicht in** $\omega(n^2)$: n^2 , $n \cdot \log(n)$, $\frac{n^2}{\log(n)}$, $\log(n)$
- $\Theta(n^2)$ beschreibt die Menge aller Funktionen, die sowohl in $O(n^2)$ als auch in $\Omega(n^2)$ enthalten sind.

Vergleichsbasiertes Sortieren

Es wird *Vergleichsbasiertes Sortieren* von n Objekten betrachtet, wobei die Elemente nur verglichen werden dürfen. Hier stellt sich die **Frage**: Was ist die Komplexität des vergleichsbasierten Sortierens?

Die ersten Überlegungen stellen klar: Jeder Sortieralgorithmus liefert eine obere Schranke für $T(n)$:

- **Bubblesort** $\Rightarrow T(n) \in O(n^2)$
- **Mergesort** $\Rightarrow T(n) \in O(n \cdot \log(n))$

Aussage 1 Es kann bewiesen werden, dass $T(n) \in \Omega(n \cdot \log(n)) \Rightarrow T(n) \in \Theta(n \cdot \log(n))$

[Beweis] Man betrachte einen beliebigen Algorithmus \mathcal{A} zum Sortieren. \mathcal{A} vergleicht e_i mit e_j .

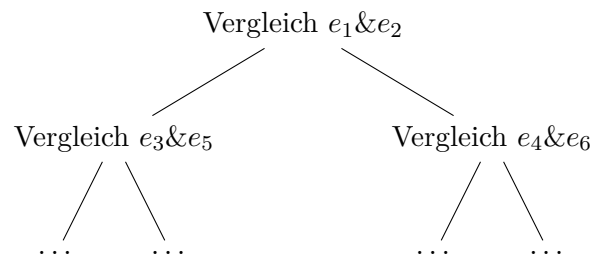


Abbildung 1: Exemplarische Vergleiche beim vergleichsbasierten Sortieren

Ein Blatt in diesem Baum heißt im Prinzip: Der Algorithmus hat fertig sortiert. Es heißt aber genauso: Der Algorithmus hat „herausgefunden“, was die „Permutation“ der Eingabe war. Daraus folgt, dass der Baum $n!$ Blätter haben muss. Es zeigt sich außerdem, dass die Worst-Case-Laufzeit des Algorithmus \mathcal{A} genau der Tiefe des Baumes entspricht. Damit stellt sich die nächste **Frage**: Was ist die minimale Tiefe eines Binärbaumes, der $n!$ Blätter hat?

$$2^n = n!$$

$$\left(n! \approx \left(\frac{n}{e} \right)^{\frac{n}{e}} \Rightarrow x = \log_2 \left(\frac{n}{e} \right)^{\frac{n}{e}} \Rightarrow x = n \cdot \log(n) \right)$$

Monte-Carlo und Las-Vegas Algorithmen ineinander umwandeln

Es stellt sich die **Frage**, ob jeder Las-Vegas-Algorithmus in einen Monte-Carlo-Algorithmus umgewandelt werden kann, und andersherum.

Las-Vegas \Rightarrow Monte-Carlo

Die Idee besteht aus folgender Überlegung: Lasse den Las-Vegas-Algorithmus eine bestimmte Anzahl an Schritten laufen und breche dann ab. War der Las-Vegas-Algorithmus bis dahin fertig, so muss auch das Ergebnis korrekt sein. War der Las-Vegas-Algorithmus bis dahin nicht fertig, dann gibt es auch kein korrektes Ergebnis.

Die zentrale **Frage**, die sich hier anfügt: Wie lange darf der Algorithmus laufen und was ist seine Erfolgswahrscheinlichkeit?

Sei nun \mathcal{A} ein Las-Vegas-Algorithmus mit erwarteter Laufzeit $f(n)$. \mathcal{A} darf nun für maximal $\alpha \cdot f(n) \mid \alpha \geq 1$ Schritte laufen. Falls der Algorithmus bis dahin fertig ist, ist das Ergebnis sicher korrekt. Ist der Algorithmus bis dahin nicht fertig, so wird *Müll* zurückgegeben.

Dieser modifizierte Algorithmus hat immer eine Laufzeit von $< \alpha \cdot f(n)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass *Müll* zurückgegeben wird, ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass \mathcal{A} länger als $\alpha \cdot f(n)$ Zeit zum Sortieren benötigt.

Monte-Carlo \Rightarrow Las-Vegas

Nicht alle Monte-Carlo-Algorithmen können ohne Weiteres in Las-Vegas-Algorithmen umgewandelt werden.

Für manche Probleme ist die Verifikation des Ergebnisses einfacher als die Berechnung:

- Sortieren: $O(n \cdot \log(n))$ vs. $O(n)$.
- Kürzeste Wege: $O(n \cdot \log(n + m))$ vs. $O(m)$.

Das Überführen von Monte-Carlo- in Las-Vegas-Algorithmen ist möglich, wenn man einen effizienten *Checker* hat.

- Monte-Carlo-Algorithmus \mathcal{A} hat eine Laufzeit von $f(n)$.
- Checker \mathcal{O} hat eine Laufzeit von $g(n)$.
- Die Erfolgswahrscheinlichkeit von \mathcal{A} sei $p(n)$.

Mit folgendem Algorithmus kann dann ein Las-Vegas-Algorithmus erzeugt werden:

```

1. Lasse Algorithmus laufen
2. Überprüfe Ergebnis mit Checker
Falls korrekt, dann fertig
Falls nicht korrekt, zurück zu 1.

```

Die erwartete Laufzeit \mathcal{R} ist dann

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} &= p(n) \cdot (f(n) + g(n)) \\
 &\quad + ((1 - p(n)) \cdot p(n) \cdot (f(n) + g(n))) \cdot 2 \\
 &\quad + ((1 - p(n))^2 \cdot p(n) \cdot (f(n) + g(n))) \cdot 3 \\
 &\quad + \dots \\
 &= \left(f(n) + g(n) \right) \cdot p(n) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} ((1 - p(n))^i < \frac{f(n) + g(n)}{p(n)} \cdot (i + 1))
 \end{aligned}$$

Anhang

Markov-Ungleichung

Sei X eine nicht negative Zufallsvariable mit $E[X] = \mu$. Dann gilt:

$$P(X \geq \alpha \cdot \mu) \leq \frac{1}{\alpha}$$