Tema II

Cadenas de Markov en tiempo discreto

Bernardo D'Auria

Universidad Carlos III de Madrid

Procesos Estocásticos
Grado en Estadística y Empresa

Objetivo del tema

El objetivo principal de esta tema es introducir los conceptos de:

- Cadena de Markov en tiempo discreto
- Probabilidad y matriz de transiciones
- Tiempos de paradas
- Distribución límite y estacionaria

Cadenas de Markov en tiempo discreto

Las cadenas de Markov, son una clase especial de procesos, bastante amplia para permitir modelar y estudiar muchos problemas en las aplicaciones y al mismo tiempo bastante restrictiva para permitir un análisis matemática sencilla.

Con el término cadena nos referimos al caso en que el proceso puede asumir un número finito, o a lo mejor numerable, de posibles valores.

Definimos $E = \{1, 2, \ldots, N\}$ el número de estados. Nosotros vamos a asumir $N < \infty$ pero se puede tratar de forma similar el caso de $N = \infty$.

Por lo tanto tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el proceso $X(n) \in E$ y llamamos los elementos de E los estados del proceso.

Vamos a ver a continuación que la propiedad de Markov que hace que estos modelos sean tractable matemáticamente, corresponde con la idea que el valor presente del proceso contiene toda la información para poder predecir su evolución en el futuro.

Propriedad de Markov

Generalmente, para un proceso estocástico cualquiera es difícil calcular su función de probabilidad conjunta, pero en el caso de las cadenas de Markov nos ayuda la siguiente propiedad.

Definición (Propriedad de Markov)

Si se conoce el valor actual, $X(n)$, de la cadena, no es necesario conocer el pasado, $X(0), \ldots, X(n-1)$, para predecir el futuro, $X(n+1)$.
Es decir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \quad \ldots \quad , X_0 = i_0) \\ = \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) \ . \end{aligned}$$

La probabilidad condicionada, $\mathbb{P}(X_{n+1} = x, | X_n = x_n)$, toma el nombre de probabilidad de transición, o probabilidad de transición de orden 1 o de un solo paso.

Estacionariedad

Nosotros estamos interesado solo al caso de cadenas de Markov estacionarias, o homogeneas en el tiempo.

Definición (Cadena de Markov estacionaria)

Una cadena de Markov es estacionaria si sus probabilidades de transición no dependen del tiempo.
Es decir

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) = p_{i,j}$$

La matriz de transición de orden 1, P se define como la matriz cuya componentes son las probabilidades de transición de orden 1.

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}^{(1)} = (p_{i,j})_{i,j \in E}$$

Ejemplo

Supongamos que el clima de una determinada región sólo puede ser soleado (1) o nublado (2) y que las condiciones del clima en mañanas sucesivas forman una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias. La matriz de transición está dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Si un día concreto está nublado, ¿cuál es la probabilidad de que esté nublado el día siguiente?

$$p_{22} = 0.4$$

Ejemplo

Supongamos que el clima de una determinada región sólo puede ser soleado (1) o nublado (2) y que las condiciones del clima en mañanas sucesivas forman una cadena de Markov con probabilidades de transición estacionarias. La matriz de transición está dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Si un día concreto está nublado, ¿cuál es la probabilidad de que esté nublado el día siguiente?

$$p_{22} = 0.4$$

Probabilidades de transición de orden n

Además de las probabilidades de transición de orden 1 se pueden definir las de orden n

$$p_{i,j}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i)$$

y la correspondiente matriz de transición de orden n

$$\mathrm{P}^{(n)} = (p_{i,j}^{(n)})_{i,j \in E}$$

Teorema (Ecuación de Chapman-Kolmogorov)

Se puede demostrar que

$$\mathrm{P}^{(n+m)} = \mathrm{P}^{(n)} \mathrm{P}^{(m)}$$

y en particular, usado recursividad con $\mathrm{P}^{(1)} = \mathrm{P}$, *tenemos que*

$$\mathrm{P}^{(n)} = \mathrm{P}^{n}$$

Ejemplo

En el ejemplo del clima con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Si un miércoles está nublado, ¿cuál es la probabilidad de que el viernes siguiente haga sol?

La matriz de transición en dos pasos es

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} 0.67 & 0.33 \\ 0.66 & 0.34 \end{pmatrix}$$

Entonces la probabilidad pedida es

$$p_{21}^{(2)} = 0.66$$

Ejemplo

En el ejemplo del clima con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Si un miércoles está nublado, ¿cuál es la probabilidad de que el viernes siguiente haga sol?

La matriz de transición en dos pasos es

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} 0.67 & 0.33 \\ 0.66 & 0.34 \end{pmatrix}$$

Entonces la probabilidad pedida es

$$p_{21}^{(2)} = 0.66$$

Distribución inicial y al tiempo n

Para calcular las probabilidades que el proceso se encuentre en un cierto estado en un tiempo n, tenemos que conocer en que estado el proceso haya empezado en el tiempo 0.

En particular tenemos que dar la probabilidad, no condicionada, que en el tiempo 0 se encontrara en uno cualquiera de los estados, por ejemplo fijamos

$$\pi_i(0) = \mathbb{P}(X_0 = i) \quad i \in E$$

y denotamos el vector fila $\vec{\pi}(0) = (\pi_i(0))_{i \in E}$ como la distribución inicial del proceso.

Teorema (Distribución al tiempo n)

La distribución al tiempo n, $\vec{\pi}(n) = (\mathbb{P}(X_n = i))_{i \in E}$, se calcula según la fórmula

$$\vec{\pi}(n) = \vec{\pi}(0)\,\mathrm{P}^n$$

Ejemplo

En el ejemplo del clima con matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Supongamos que la probabilidad de que el miércoles haga sol es 0.2 y la probabilidad de que esté nublado es 0.8. Calcular:

1. Probabilidad de que esté nublado el jueves.
2. Probabilidad de que esté nublado el viernes.
3. Probabilidad de que esté nublado el sábado.

Ejemplo

En el ejemplo del clima con matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Supongamos que la probabilidad de que el miércoles haga sol es 0.2 y la probabilidad de que esté nublado es 0.8. Calcular:

1. Probabilidad de que esté nublado el jueves. $\pi_2(1) = 0.38$
2. Probabilidad de que esté nublado el viernes.
3. Probabilidad de que esté nublado el sábado.

Ejemplo

En el ejemplo del clima con matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Supongamos que la probabilidad de que el miércoles haga sol es 0.2 y la probabilidad de que esté nublado es 0.8. Calcular:

1. Probabilidad de que esté nublado el jueves. $\pi_2(1) = 0.38$
2. Probabilidad de que esté nublado el viernes. $\pi_2(2) = 0.338$
3. Probabilidad de que esté nublado el sábado.

Ejemplo

En el ejemplo del clima con matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Supongamos que la probabilidad de que el miércoles haga sol es 0.2 y la probabilidad de que esté nublado es 0.8. Calcular:

1. Probabilidad de que esté nublado el jueves. $\pi_2(1) = 0.38$
2. Probabilidad de que esté nublado el viernes. $\pi_2(2) = 0.338$
3. Probabilidad de que esté nublado el sábado. $\pi_2(3) = 0.3338$

Ejemplo resuelto por R

Definimos el vector `matP`

```
matP <- c(0.7, 0.3, 0.6, 0.4)
```

modificamos su dimensiones para hacerlo matriz

```
dim(matP)<-c(2,2)
```

Calculamos la matriz de transición de orden 2

```
matP %*% matP
```

Definimos la distribución inicial

```
vecPi <- c(0.2, 0.8)
```

Calculamos la distribución al tiempo 3

```
vecPi %*% matP %*% matP %*% matP
```

Ejercicio - Locutorio telefónico

En un locutorio telefónico hay 4 líneas de teléfono y cada 3 minutos se mide el número de líneas que están ocupadas. Llamamos $X(n)$ el número de líneas ocupadas en el minuto $3n$, se supone que X es una cadena de Markov con espacio de estados $E = \{0, 1, \ldots, 4\}$ y con matriz de transición

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio - Locutorio telefónico

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Si en un instante de tiempo concreto hay 3 líneas ocupadas

$$\mathbb{P}_3 \begin{pmatrix} \text{4 líneas ocupadas en el siguiente} \\ \text{instante de tiempo} \end{pmatrix} =$$

Ejercicio - Locutorio telefónico

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Si en un instante de tiempo concreto hay 3 líneas ocupadas

$$\mathbb{P}_3 \left(\begin{array}{l} \text{4 líneas ocupadas en el siguiente} \\ \text{instante de tiempo} \end{array} \right) = p_{45} = 0.2$$

Ejercicio - Locutorio telefónico

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Si en un instante de tiempo no hay ninguna línea ocupada.

$$\mathbb{P}_0 \left(\begin{array}{l} \text{Al menos dos línea ocupada en} \\ \text{el siguiente instante de tiempo} \end{array} \right) =$$

Ejercicio - Locutorio telefónico

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Si en un instante de tiempo no hay ninguna línea ocupada.

$$\mathbb{P}_0 \begin{pmatrix} \text{Al menos dos línea ocupada en} \\ \text{el siguiente instante de tiempo} \end{pmatrix} = 1 - p_{11} - p_{12} = 0.5$$

Ejercicio - Locutorio telefónico

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Si una línea está ocupada en un instante de tiempo concreto.

$$\mathbb{P}_1 \begin{pmatrix} \text{3 líneas ocupadas dos instantes} \\ \text{después} \end{pmatrix} =$$

Ejercicio - Locutorio telefónico

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.17 & 0.24 & 0.28 & 0.18 & 0.13 \\ 0.16 & 0.25 & 0.28 & 0.18 & 0.13 \\ 0.15 & 0.23 & 0.27 & 0.21 & 0.14 \\ 0.13 & 0.17 & 0.24 & 0.28 & 0.18 \\ 0.13 & 0.17 & 0.24 & 0.27 & 0.19 \end{pmatrix}$$

Si una línea está ocupada en un instante de tiempo concreto.

$$\mathbb{P}_1 \left(\begin{array}{l} \text{3 líneas ocupadas dos instantes} \\ \text{después} \end{array} \right) = 0.18$$

Ejercicio - Locutorio telefónico

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Si las 4 líneas están ocupadas en un instante de tiempo concreto.

$$\mathbb{P}_4 \begin{pmatrix} \text{No haya líneas ocupadas tres} \\ \text{instantes después} \end{pmatrix} =$$

Ejercicio - Locutorio telefónico

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.152 & 0.227 & 0.269 & 0.208 & 0.144 \\ 0.153 & 0.226 & 0.269 & 0.208 & 0.144 \\ 0.15 & 0.218 & 0.265 & 0.218 & 0.149 \\ 0.141 & 0.197 & 0.254 & 0.244 & 0.164 \\ 0.141 & 0.197 & 0.254 & 0.243 & 0.165 \end{pmatrix}$$

Si las 4 líneas están ocupadas en un instante de tiempo concreto.

$$\mathbb{P}_4 \begin{pmatrix} \text{No haya líneas ocupadas tres} \\ \text{instantes después} \end{pmatrix} = 0.141$$

Ejercicio - Locutorio telefónico

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Si una línea está ocupada en un instante de tiempo.

$$\mathbb{P}_1 \left(\begin{array}{l} \text{Tres instantes después haya en-} \\ \text{tre 1 y 3 líneas ocupadas} \end{array} \right) =$$

Ejercicio - Locutorio telefónico

$$P^3 = \begin{pmatrix} 0.152 & 0.227 & 0.269 & 0.208 & 0.144 \\ 0.153 & 0.226 & 0.269 & 0.208 & 0.144 \\ 0.15 & 0.218 & 0.265 & 0.218 & 0.149 \\ 0.141 & 0.197 & 0.254 & 0.244 & 0.164 \\ 0.141 & 0.197 & 0.254 & 0.243 & 0.165 \end{pmatrix}$$

Si una línea está ocupada en un instante de tiempo.

$$\mathbb{P}_1 \left(\begin{array}{l} \text{Tres instantes después haya en-} \\ \text{tre 1 y 3 líneas ocupadas} \end{array} \right) = 0.703$$

Ejercicio - Locutorio telefónico

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Al inicio del proceso de observación (instante $n = 1$) tenemos que

$$\pi(1) = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1, 0)$$

$$\mathbb{P}_{\pi(1)} \left(\begin{array}{l} \text{Haya 2 líneas ocupadas en el} \\ \text{instante 3} \end{array} \right) =$$

Ejercicio - Locutorio telefónico

$$
\mathsf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.17 & 0.24 & 0.28 & 0.18 & 0.13 \\ 0.16 & 0.25 & 0.28 & 0.18 & 0.13 \\ 0.15 & 0.23 & 0.27 & 0.21 & 0.14 \\ 0.13 & 0.17 & 0.24 & 0.28 & 0.18 \\ 0.13 & 0.17 & 0.24 & 0.27 & 0.19 \end{pmatrix}
$$

Al inicio del proceso de observación (instante $n = 1$) tenemos que

$$\pi(1) = (0.4, 0.4, 0.1, 0.1, 0)$$

$$\mathbb{P}_{\pi(1)}\left(\begin{array}{l}\text{Haya 2 líneas ocupadas en el} \\ \text{instante 3}\end{array}\right) = 0.275$$

Ejercicio resuelto por R

Definimos el vector `matP`

```
matP <- t(matrix(c(0.1, 0.4, 0.3, 0.1, 0.1,
                   0.2, 0.3, 0.3, 0.1, 0.1,
                   0.2, 0.2, 0.3, 0.2, 0.1,
                   0.1, 0.1, 0.2, 0.4, 0.2,
                   0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.3), 5))
```

Calculamos la matriz de transición de orden 3

```
matP %*% matP %*% matP
```

Definimos la distribución inicial, es decir al instante $n = 1$

```
vecPi <- c(0.4, 0.4, 0.1, 0.1,0)
```

Calculamos la distribución al tiempo 3

```
vecPi %*% matP %*% matP
```

Ejercicio - Contrato de seguro

Una empresa aseguradora produce un contrato de seguro de 3 años para un trabajador de alto riesgo según el siguiente modelo de Cadena de Markov homogénea:

Estados:

1. en activo
2. inactivo
3. jubilado
4. muerto

Matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.15 & 0.05 \\ 0.1 & 0.7 & 0.0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los cambios de estados solo ocurren al final de año y el beneficio por muerte es de 5.000€ y se paga al final del año que haya muerte. Al momento del contrato el trabajador se encuentra en estado inactivo.

hallar el valor presente del beneficio potencial de muerte antes de estipular el contrato

- Sin asumir ningún taso de interés
- Asumiendo un taso de interés del 4 %

Ejercicio - Contrato de seguro

Una empresa aseguradora produce un contrato de seguro de 3 años para un trabajador de alto riesgo según el siguiente modelo de Cadena de Markov homogénea:

Estados:

1. en activo
2. inactivo
3. jubilado
4. muerto

Matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.15 & 0.05 \\ 0.1 & 0.7 & 0.0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los cambios de estados solo ocurren al final de año y el beneficio por muerte es de 5.000€ y se paga al final del año que haya muerte. Al momento del contrato el trabajador se encuentra en estado inactivo.

hallar el valor presente del beneficio potencial de muerte antes de estipular el contrato

- Sin asumir ningún taso de interés 2267.5€
- Asumiendo un taso de interés del 4 %

Ejercicio - Contrato de seguro

Una empresa aseguradora produce un contrato de seguro de 3 años para un trabajador de alto riesgo según el siguiente modelo de Cadena de Markov homogénea:

Estados:

1. en activo
2. inactivo
3. jubilado
4. muerto

Matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.15 & 0.05 \\ 0.1 & 0.7 & 0.0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los cambios de estados solo ocurren al final de año y el beneficio por muerte es de 5.000€ y se paga al final del año que haya muerte. Al momento del contrato el trabajador se encuentra en estado inactivo.

hallar el valor presente del beneficio potencial de muerte antes de estipular el contrato

- Sin asumir ningún taso de interés 2267.5€
- Asumiendo un taso de interés del 4 % 2114.12€

Clasificación de los estados

Definición (Accesibilidad)

Un estado $j \in E$ es accesible desde un estado $i \in E$, $(i \to j)$, si con probabilidad positiva es posible empezando en i estar en un momento dato (incluido el instante inicial) en el estado j.

$$i \to j \iff \exists n \geq 0 : \; P(X_n = j | X_0 = i) > 0$$

Definición (Comunicabilidad)

Dos estados $i, j \in E$ se comunican, $(i \leftrightarrow j)$ si uno y cada uno de ellos es accesible por el otro.

$$i \leftrightarrow j \iff i \to j \text{ y } j \to i$$

Clasificación de los estados

Definición (Clase de estados)

Un conjunto de estados que comunican entre ellos se llama clase

Se puede demostrar que dadas dos clases, estas o son la misma o no tienen ningún estado en común.

Definición (Periodicidad)

Un estado tiene periodo $d \in \mathbb{N}$ *si*

$$p_{ii}^{(n)} = 0$$

por cualquier n *que no sea múltiplo de* d*. Es decir empezando en* i*, la cadena puede volver a* i *solo en instantes que son múltiples de* d*. Si* $d = 1$*, el estado* i *se llama aperiódico.*

Todo los estados de una misma clase tienen mismo periodo!

Ejemplo de clasificación

Sea $E = \{0, 1, \ldots, 9\}$, y dada la siguiente matriz de transición P donde $*$ denota un número positivo.

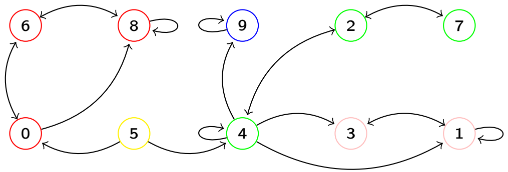
$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Ejemplo de clasificación

Sea $E = \{0, 1, \ldots, 9\}$, y dada la siguiente matriz de transición P donde $*$ denota un número positivo.

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Hay 5 clases:
$C_1 = \{0, 6, 8\},\ C_2 = \{1, 3\},\ C_3 = \{2, 4, 7\},\ C_4 = \{5\},\ C_5 = \{9\}$.



Distribución estacionaria

Definición (Distribución estacionaria)

Una distribución π se dice estacionaria por una cadena de Markov X, si empezando por ella la distribución de $X(n)$ sigue siendo π para cada $n > 0$.

Teorema (Propriedad de la distribución estacionaria)

Una distribución π es estacionaria para una cadena de Markov con matriz de transición P, si se verifica la siguiente igualdad

$$\pi\,\mathsf{P} = \pi\ .$$

Teorema (Cadena de Markov irreducible)

Si una cadena tiene un número finito de estados y es irreducible (contiene solo una clase), entonces la distribución estacionaria existe y es única.

Cálculo de la distribución estacionaria

Importante: Se asume que la cadena es irreducible o que contiene solo una clase recurrente.

Hay que resolver el sistema

$$\pi\,\mathsf{P} = \pi\ ,$$

que es equivalente al siguiente

$$\pi\,(\mathsf{P} - \mathbb{I}) = \vec{0}\ .$$

Una solución seria el vector nulo, que no es una distribución válida, ya que necesitamos que la suma de todas sus componentes sea 1.

Además tenemos que $\det(\mathsf{P} - \mathbb{I}) = 0$, es decir esa matriz no tiene inversa.

Tenemos que quitar una ecuación, por ejemplo la que corresponde a su primera columna y añadir la ecuación

$$\pi\,\vec{1} = 1\ .$$

Ejemplo

Data la matriz de transición P calculamos la matriz $P - \mathbb{I}$

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 & 0.0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -0.9 & 0.7 & 0.2 \\ 0.0 & -0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 & -1.0 \end{pmatrix}$$

que tiene determinante nulo. Añadiendo la condición $\pi \vec{1} = 1$, vamos a resolver el siguiente sistema

$$\pi \begin{pmatrix} 1 & 0.7 & 0.2 \\ 1 & -0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.6 & -1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que nos da, como distribución estacionaria,

$$\begin{aligned} \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.136 & 0.558 & 0.306 \\ 1.020 & -0.816 & -0.204 \\ 0.748 & 0.068 & -0.816 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.136 & 0.558 & 0.306 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tiempos de parada

Un tiempo de parada, T, es una variable aleatoria

$$T : \omega \in \Omega \to T(\omega) \in \mathbb{N}$$

con la especial propiedad que toma valor n solo gracias a las observación de lar primeras n coordenadas del proceso X.

Es decir, pare determinar el suceso $\{T = n\}$ hace falta solo mirar las primeras $n+1$ variables $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$,

$$T(\omega) = f(X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$
$$\{\omega \in \Omega : T(\omega) = n\} = \{\omega \in \Omega : f(X_0, X_1, \ldots, X_n) = n\}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} T^{I} &= \min\{n : X_n = 4\} \\ T^{II} &= \min\{n : X_0 + \cdots + X_n = 400\} \end{aligned}$$

y no es un tiempo de parada

$$T^{III} = \max\{n : X_n = 4\}$$

Propriedad de Markov Fuerte

Los tiempo de paradas, aún siendo aleatorios, se portan, con respecto a la propiedad de Markov, como si fueran determinista.

Definición (Propriedad de Markov Fuerte)

Sea T un tiempo de parada. Asumiendo $T < \infty$, y conocido el valor que la cadena asume en este tiempo, $X(T) = i$, no es necesario conocer el pasado, $X(0), \ldots, X(T-1)$, para predecir el futuro, $X(T+1), X(T+2), \ldots$. Es decir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{T+1} = j | X_T = i, X_{T-1} = i_{T-1}, \quad & \ldots \quad , X_0 = i_0, T < \infty) \\ & = \quad \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) = p_{ij} \ .\end{aligned}$$

En particular, asumiendo $T < \infty$, el proceso

$$(X(T+n) | X(T) = i, n \geq 0) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X(n) | X(0) = i, n \geq 0)$$

y es independiente de $(X(0), X(1), \ldots X(T))$.

Tiempos de primera visita

En una cadena de Markov se define el tiempo de primera visita de un conjuntos de estados $C \subset E$ como

$$T_C = \min\{n > 0 : X_n \in C\}$$

si es finito, y $T_C = \infty$ en el caso en que el proceso no toca el conjunto C.

Asumiendo que la cadena empiece en el estado $i \in E$ definimos

$$T_{iC} = \{T_C | X_0 = i\}$$

En el caso que $C = \{j\}$ definimos $T_{ij} = T_{i\{j\}}$, que es el tiempo de visita al estado j empezando desde el estado i.

Comentario

En la definición el estado j puede ser igual al mismo estado i, en este caso T_{ii} se llama también tiempo de regreso

Tiempos de visita de orden mayor

Siguiendo las definiciones anteriores se definen los tiempos de visitas de orden $n > 1$

$$T_C^{(n)} = \text{mín}\{k > T_C^{(n-1)} : X_k \in C\}$$

si es finito, y $T_C^{(n)} = \infty$ en el caso en que el proceso no toca el conjunto C más de $n-1$ veces.

Igualmente definimos

$$T_{iC}^{(n)} = \{\, T_C^{(n)} | X_0 = i\}$$

y

$$T_{ij}^{(n)} = T_{i\{j\}}^{(n)} \ .$$

Tiempos de primera visita

Siendo T_{ij} una variable aleatoria discreta con valores en $\mathbb{N}$, podemos definir su función de probabilidad

$$f_{ij}(n) = p_{T_{ij}}(n) = \mathbb{P}\{T_{ij} = n\} \ .$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} f_{ij}(0) &= 0 \\ f_{ij}(n) &= \mathbb{P}\{X_n = j, X_{n-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j | X_0 = i\} \ , \end{aligned}$$

y definimos

$$f_{ij} = \mathbb{P}\{T_{ij} < \infty\} = \mathbb{P}_i\{T_j < \infty\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n) \ .$$

Y ugualmente podemos calcular su valor medio, μ_{ij}

$$\mu_{ij} = \mathbb{E}[T_{ij}] = \mathbb{E}_i[T_j] = \sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{ij}(n) + (1 - f_{ij}) * \infty \ .$$

Clasificación de los estados

Los estados se pueden clasificar de la siguiente forma

Transitorio $f_{ii} = \mathbb{P}_i\{T_i < \infty\} < 1$	Recurrente $f_{ii} = \mathbb{P}_i\{T_i < \infty\} = 1$	
$\mu_{ii} = \mathbb{E}_i[T_i] = \infty$	Nulo $\mu_{ii} = \mathbb{E}_i[T_i] = \infty$	Positivo $\mu_{ii} = \mathbb{E}_i[T_i] < \infty$

Los estados transitorios seguramente al final no se visitan más, mientras los estados recurrentes se visitan una infinidad de veces.

Dos estados que pertenecen a la misma clase son del mismo tipo.

Comentario

Es posible que una cadena de Markov no deje en una infinidad de tiempo de pasar por estados transitorios, pero esto solo pasa si estos son en número infinito.

Teoremas límites

Definimos el número de visitas al estado j en los primeros n pasos, incluyendo el tiempo 0, como

$$N_j(n) = \sum_{k=0}^{n} 1\{X(k) = j\},$$

y definimos $N_{ij}(n) = \Big(N_j(n) | X(0) = i \Big)$.

Teorema

Sean i, j dos estados con $i \leftrightarrow j$. Definiendo $\pi_j = 1/\mu_{jj} = \mathbb{E}_j^{-1}[T_j]$,

$$\mathbb{P}_i \left(\lim_{n\to\infty} \frac{N_j(n)}{n} = \pi_j \right) = 1$$

es decir

$$\frac{N_{ij}(n)}{n} \overset{n\to\infty}{\rightarrow} \pi_j \quad \text{con prob. 1.}$$

Si el estado j es transitorio o recurrente nulo, $\pi_j = 0$; mientras si el estado j es recurrente positivo , $\pi_j > 0$.

Teoremas límites

El resultado anterior se puede expresar usando las probabilidades de transición de orden n.

Teorema

Sean i, j dos estados con $i \leftrightarrow j$ y periodo $d \geq 1$, con $\pi_j = 1/\mu_{jj} = \mathbb{E}_j^{-1}[T_j]$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \pi_j$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j \qquad \text{(} j \text{ aperiódico)}$$

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n\,d)} = d\,\pi_j \qquad \text{(} j \text{ con periodo } d \text{)}$$

Si el estado j es transitorio o recurrente nulo, $\pi_j = 0$; mientras si el estado j es recurrente positivo , $\pi_j > 0$.

Cadena de Markov irreducible y aperiódica

Si una cadena de Markov es irreducibe y aperiódica, donde:

- irreducible: hay una única clase
- aperiódica: el periodo de cada uno y todos los estados es 1

solo hay dos posibilidades:

i) todos los estados son transitorios o recurrentes nulos (tienen que ser en número infinito) y no hay distribución límite o estacionaria ya que $p_{ij}^{(n)} \to \pi_j = 0$ para $n \to \infty$

ii) todos los estados son recurrentes positivos y existe una única distribución límite o estacionaria dada por

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0$$

Clasificación de los estados y Teoremas límites - Resumem

	Transitorio	Recurrente	
		Nulo	Positivo
$f_{jj} = \mathbb{P}_j\{T_j < \infty\}$	< 1	$= 1$	$= 1$
$\mu_{jj} = \mathbb{E}_j[T_j]$	$= \infty$	$= \infty$	$< \infty$
$\pi_j = 1/\mu_{jj}$	$= 0$	$= 0$	> 0
$i \leftrightarrow j, N_{ij}(n)/n$	$\to 0$	$\to 0$	$\to \pi_j$
$i \leftrightarrow j, \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}/n$	$\to 0$	$\to 0$	$\to \pi_j$
$i \leftrightarrow j, p_{ij}^{(n\,d)}$	$\to 0$	$\to 0$	$\to d\,\pi_j$

Distribuciones límites y estacionarias

La distribución límite $\pi(\infty)$, si existe está dada por

$$\pi_j(\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\pi(0)}(X(n) = j)$$

y puede ser no única si la cadena no es irreducible, no existir si la cadena es periódica y puede depender de la distribución inicial $\pi(0)$.

Una distribución π es estacionaria si tiene la siguiente propiedad

$$\pi\,\mathsf{P} = \pi \ .$$

y si la cadena de Markov no es irreducible puede existir más que una distribución estacionaria.

Una distribución límite es también estacionaria:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \pi(0)\,\mathsf{P}^{n+1} = \left(\lim_{n\to\infty} \pi(0)\,\mathsf{P}^{n}\right)\,\mathsf{P} = \pi\,\mathsf{P} \ .$$

Ejemplo: Estudia la cadena de Markov con $\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Simulación de una MC por R

En el file R-Markov-Chain.R están definidas:

1. la función `is.stMatrix(mat)`
   que controla si la matriz `mat` es estocástica, es decir cuadrada, con valores non negativos y cuya lineas suman 1.
2. la función `simMC(matP, n, path, dist)` calcula la trayectoria de la cadena de Markov definida por `matP` hasta el tiempo n y con distribución inicial dada por `dist`. Si el valor de `path` es `TRUE` restituye todo el camino hasta al tiempo `n`, si es `False` calcula solo la posición final.
3. la función `statMC(matP)` calcula la distribución estacionaria de la cadena de Markov definida por `matP`

Para cargar el file, asumiendo que esté en la carpeta de trabajo, usar el comando

```
source("R-Markov-Chain.R")
```

Simulación de una MC por R

La función `is.stMatrix(mat)` está así definida

```
is.stMatrix <- function(mat){
  return(is.matrix(mat)
         && ncol(mat) == nrow(mat)
         && all(mat >= 0)
         && all(rowSums(mat) == 1))
}
```

Simulación de una MC por R

La función `simMC(matP, n, path, dist)` está así definida

```
simMC <- function(matP, n=1,
           path= TRUE, dist=array(1/nrow(matP),nrow(matP))) {
 if (!is.stMatrix(matP))
     stop("the first argument has to be a stochastic matrix");
  s <- nrow(matP);
  r <- sample.int(s,size=1,prob=dist);
  if(path){
    ret <- rep(NA, n);
    ret[1] <- r;
  };
  if (n>1) {
    for (i in 2:n) {
      r <- sample.int(s,size=1,prob=matP[r,]);
      if (path) ret[i] <- r;
    };
  }
  if (path) {
    return(ret);
  } else {
    return(r);
  };
}
```

Simulación de una MC por R

La función `statMC(matP)` está así definida

```
statMC <- function(matP) {
  if (!is.stMatrix(matP))
      stop("the first argument has to be a stochastic matrix");
  ones <- array(1,nrow(matP));
  matG <- matP - diag(ones);
  matG[,1] <- ones;
  v <- array(0,nrow(matP));
  v[1] <- 1;
  ret <- solve(t(matG),v);
  return(ret);
}
```

Ejemplo de simulación de una MC por R

Cargamos el scipt-file en R

```
source("R-Markov-Chain.R")
```

Definimos la matriz de transición $P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.0 & 0.8 \\ 0.2 & 0.8 & 0.0 \end{pmatrix}$

```
matP <- matrix(c(0.3,0.2,0.2,0.4,0.0,0.8,0.3,0.8,0.0),3)
```

Simulamos 1000 veces la cadena por 1500 pasos

```
sim <- replicate(1000,simMC(matP,1500,path=FALSE))
```

Dibujamos el histograma de los resultados de los experimentos

```
hist(sim,1:4-0.5)
```

Calculamos la distribución estacionaria

```
pi <- statMC(matP)
```

Añadimos al gráfico el resultado teórico esperado

```
points(1:3, pi*1000)
```

Ejemplo de simulación de una MC por R

Cargamos el s…t file en R

`source("R`

Definimos

`matP <- m` … `3)`

Simulamos

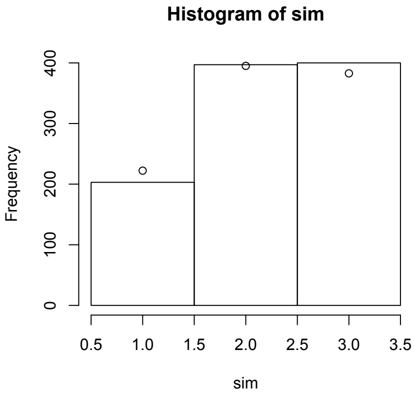
`sim <- re`

Dibujamos … entos

`hist(sim,`

Calculamo

`pi <- sta`



Añadimos al gráfico el resultado teórico esperado

```
points(1:3, pi*1000)
```

Número medio de pasos por estados transitorios

Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de los estados transitorios y Q la sub-matriz de transición de un estado transitorio a otro estado transitorio

$$\mathrm{Q} = (p_{ij}) \quad i, j \in \mathcal{T}$$

Sea $N_j(n)$ el número medio de visita al estado j durante el intervalo de tiempo $[0, n]$, y $m_{ij}^{(n)}$ su media empezando por el estado i:

$$N_j(n) = \sum_{k=0}^{n} 1\{X(k) = j\} \ , \quad m_{ij}^{(n)} = \mathbb{E}_i[N_j(n)] \ .$$

Sea $m_{ij} = m_{ij}^{(\infty)}$ y definimos $\mathrm{M}^{(n)}$ y M como las matrices

$$\mathrm{M}^{(n)} = (m_{ij}^{(n)}) \ , \quad \mathrm{M} = (m_{ij}) \qquad i, j \in \mathcal{T} \ .$$

Teorema

$$m_{ij}^{(0)} = 1\{i = j\} \ ; \quad m_{ij}^{(n+1)} = 1\{i = j\} + \sum_{k \in \mathcal{T}} p_{ik} \, m_{kj}^{(n)}$$

$$i, j \in \mathcal{T} \ ; \qquad m_{ij} = 1\{i = j\} + \sum_{k \in \mathcal{T}} p_{ik} \, m_{kj}$$

Número medio de pasos por estados transitorios

Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de los estados transitorios y Q la sub-matriz de transición de un estado transitorio a otro estado transitorio

$$\mathrm{Q} = (p_{ij}) \quad i, j \in \mathcal{T}$$

Sea $N_j(n)$ el número medio de visita al estado j durante el intervalo de tiempo $[0, n]$, y $m_{ij}^{(n)}$ su media empezando por el estado i:

$$N_j(n) = \sum_{k=0}^{n} 1\{X(k) = j\} \ , \quad m_{ij}^{(n)} = \mathbb{E}_i[N_j(n)] \ .$$

Sea $m_{ij} = m_{ij}^{(\infty)}$ y definimos $\mathrm{M}^{(n)}$ y M como las matrices

$$\mathrm{M}^{(n)} = (m_{ij}^{(n)}) \ , \quad \mathrm{M} = (m_{ij}) \qquad i, j \in \mathcal{T} \ .$$

Teorema

$$\mathrm{M}^{(0)} = \mathbb{I} \ ; \quad \begin{aligned} \mathrm{M}^{(n+1)} &= \mathbb{I} + \mathrm{Q}\,\mathrm{M}^{(n)} \\ \mathrm{M} &= (\mathbb{I} - \mathrm{Q})^{-1} \end{aligned}$$

Probabilidad de tocar un estado transitorio

Si tenemos dos estados transitorios, $i, j \in \mathcal{T}$, la probabilidad de pasar por j empezando en i, antes de dejar los estados en $\mathcal{T}$, es

$$f_{ij} = \mathbb{P}_i(T_j < \infty) = \mathbb{P}_i(N_j(\infty) > 0)$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \mathbb{E}_i[N_j(\infty)] = \mathbb{E}_i[N_j(\infty)1\{T_j < \infty\}] \\ &= \mathbb{E}_i[\mathbb{E}_i[N_j(\infty)1\{T_j < \infty\}|1\{T_j < \infty\}]] \\ &= \mathbb{E}_i[1\{T_j < \infty\}\mathbb{E}_i[N_j(\infty)|1\{T_j < \infty\}]] \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que

$$\mathbb{E}_i[N_j(\infty)|T_j < \infty] = \mathbb{E}_j[N_j(\infty)] = m_{jj}$$

porqué una vez tocado el estado j podemos contar las veces que seguimos pasando por el, tenemos que

$$m_{ij} = \mathbb{E}_i[m_{jj}\, 1\{T_j < \infty\}] = m_{jj}\, \mathbb{P}_i(T_j < \infty) = m_{jj}\, f_{ij}\ .$$

Probabilidad de tocar un estado transitorio

Si tenemos dos estados transitorios, $i, j \in \mathcal{T}$, la probabilidad de pasar por j empezando en i, antes de dejar los estados en $\mathcal{T}$, es

$$f_{ij} = \mathbb{P}_i(T_j < \infty) = \mathbb{P}_i(N_j(\infty) > 0)$$

$$m_{ij} = \mathbb{E}_i[m_{jj}\, 1\{T_j < \infty\}] = m_{jj}\, \mathbb{P}_i(T_j < \infty) = m_{jj}\, f_{ij}\ .$$

Finalmente, hemos probado el siguiente resultado

Teorema

$$i, j \in \mathcal{T}\ , \quad f_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_{jj}}$$

Transición entre clases

Fijamos $\mathcal{C}$ como una clase de estados recurrentes, es decir para cada $i, j \in \mathcal{C}$ hay que $i \leftrightarrow j$ y $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}$, donde $\mathcal{R}$ es el conjunto de todos los estados recurrentes, entonces

Teorema

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{R}\,, \quad i \in \mathcal{C}\,, j \notin \mathcal{C}\ : \quad p_{ij} = 0$$

Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los estados transitorios y recordando que $f_{ij} = \mathbb{P}_i(T_j < \infty)$, tenemos que

Teorema

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{R}\,, \quad i \in \mathcal{T}\,, j \in \mathcal{C}\ : \quad f_{ij} = \sum_{k \in \mathcal{T}} p_{ik}\, f_{kj} + \sum_{k \in \mathcal{C}} p_{ik}$$

Demostración

$$
\begin{aligned}
f_{ij} &= \mathbb{P}_i(N_j(\infty) > 0) \\
&= \sum_k \mathbb{P}_i(N_j(\infty) > 0 | X(1) = k)\, \mathbb{P}_i(X(1) = k) \\
&= \sum_k \mathbb{P}_k(N_j(\infty) > 0)\, \mathbb{P}_i(X(1) = k) \\
&= \sum_k f_{kj}\, p_{ik} = \sum_{k \in \mathcal{T}} f_{kj}\, p_{ik} + \sum_{k \in \mathcal{C}} p_{ik}
\end{aligned}
$$

Donde en la última ecuación hemos usado, $f_{kj} = 1$ con $k \in \mathcal{C}$ y $f_{kj} = 0$ con $k \notin \mathcal{C} \cup \mathcal{T}$.

Transición entre clases

Definimos $f_{\mathcal{C}}$ el vector columna con componentes

$$f_{\mathcal{C}}(i) = \mathbb{P}_i(T_{\mathcal{C}} < \infty) \quad i \in \mathcal{T},\ \mathcal{C} \subset \mathcal{R}\ ,$$

donde $f_{\mathcal{C}}(i)$ indica la probabilidad de tocar el conjunto $\mathcal{C}$ empezando en el estado $i \in \mathcal{T}$, y definimos $p_{\mathcal{C}}$ el correspondiente vector columna de componentes

$$p_{\mathcal{C}}(i) = \sum_{j \in \mathcal{C}} p_{ij} \quad i \in \mathcal{T},\ \mathcal{C} \subset \mathcal{R}\ ,$$

tenemos que

Teorema

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{R}\ : \qquad f_{\mathcal{C}} = \mathrm{M}\, p_{\mathcal{C}}$$

Problema de la ruina del jugador

Considera un juego donde un jugador tiene un número, i, inicial de monedas.

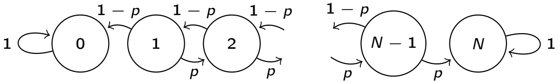
Cada vez que juega puede ganar una moneda con una probabilidad p o perderla con probabilidad $1 - p$.

El juego termina si el jugador pierde todas sus monedas o cuando llegue a tener N monedas en total.

Queremos calcular la probabilidad de que el jugador se arruine, es decir

$$f_{i0} = \mathbb{P}_i(T_0 < \infty)$$

El diagrama de transición será



Problema de la ruina del jugador

Empezamos calculando la matriz M.

Tenemos que $\mathcal{T} = \{1, \ldots, N-1\}$, y la matriz Q es

$$
\mathrm{Q} = \begin{pmatrix}
0 & p & 0 & \cdots & 0 \\
1-p & 0 & p & \cdots & 0 \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & & & 1-p & 0
\end{pmatrix}
$$

por lo tanto

$$
\mathrm{M} = (\mathbb{I} - \mathrm{Q})^{-1}
$$

La clase de estados que nos interesa es $\mathcal{C} = \{0\}$, y el vector $p_{\mathcal{C}} = (1-p, 0, \ldots, 0)'$.

$$
f_{\mathcal{C}} = \mathrm{M}\, p_{\mathcal{C}} = \left(\frac{1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{N-i}}{1 - \left(\frac{p}{1-p}\right)^{N}} \right)_{i \in \mathcal{T}}
$$