Ejercicios del Tema II

Bernardo D'Auria

Universidad Carlos III de Madrid

Procesos Estocásticos
Grado en Estadística y Empresa

Outline

Ejercicio - Contrato de seguro

Una empresa aseguradora produce un contrato de seguro de 3 años para un trabajador de alto riesgo según el siguiente modelo de Cadena de Markov homogénea:

Estados:

1. en activo
2. inactivo
3. jubilado
4. muerto

Matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0.15 & 0.05 \\ 0.1 & 0.7 & 0.0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

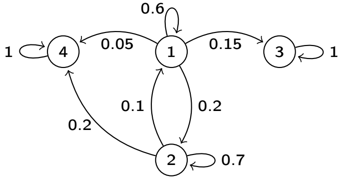
Los cambios de estados solo ocurren al final de año y el beneficio por muerte es de 5.000€ y se paga al final del año que haya muerte. Al momento del contrato el trabajador se encuentra en estado inactivo.

Hallar el valor presente del beneficio potencial de muerte antes de estipular el contrato

- Sin asumir ningún taso de interés
- Asumiendo un taso de interés del 4 % anuo.

Solución - Contrato de seguro

El diagrama de estados de la cadena de Markov es



Al final del primer año la empresa habrá pagado el beneficio solo si el trabajador se encontrará en el tiempo 1 en el estado 4, es decir

$$C_1 = 5000€ \times \mathbb{P}_2(X(1) = 4) = 5000€ \times p_{24} = 5000€ \times 0.2 = 1000€$$

que también se puede calcular como

$$C_1 = \mathbb{E}[5000€ \times 1\{X(1) = 4\}] = 1000€ \ .$$

Igualmente tenemos para el segundo y el tercer año

$$\begin{aligned} C_2 &= 5000€ \times p_{24}^{(2)} = 5000€ \times 0.345 = 1725€; \\ C_3 &= 5000€ \times p_{24}^{(3)} = 5000€ \times 0.4535 = 2267.5€ \ . \end{aligned}$$

Solución - Contrato de seguro

Por lo tanto el precio del contrato será la cantidad pagada a final del tercer año

$$C = C_3 = 2267.5€ \ .$$

Para considerar el interés, tenemos que considerar no solo la cantidad pagada sino también en que año se ha pagado. Definimos estas cantidades como el coste medio a final de año menos el coste medio del año anterior, que corresponde exactamente al coste añadido por el año corriente.

Esto por qué el estado 4 es absorbente y si un año el trabajador se encuentra en este estado se quedará en este estado también los años sucesivos pero cobrará el beneficio solo una vez. Entonces tenemos $\Delta C_1 = C_1 = 1000€$ y

$$\Delta C_2 = C_2 - C_1 = 725€ \quad \Delta C_3 = C_3 - C_2 = 542.5€$$

y el coste con los intereses añadidos será de

$$\tilde{C} \;=\; \frac{\Delta C_1}{1.04} + \frac{\Delta C_2}{1.04^2} + \frac{\Delta C_3}{1.04^3} = 2114.12€ \ .$$

Outline

Ejercicio - Distribución estacionaria

Considera la Cadena de Markov homogénea con matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar la distribución estacionaria.

Solución

Llamamos $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ la distribución estacionaria. Esta tendrá que resolver la ecuación $\pi = \pi\, P$ es decir

$$\begin{cases} \pi_1 &= \frac{1}{10}\,\pi_1 + \frac{8}{10}\,\pi_2 + \frac{1}{2}\,\pi_3 \\ \pi_2 &= \frac{2}{10}\,\pi_2 + \frac{1}{2}\,\pi_3 \\ \pi_3 &= \frac{9}{10}\,\pi_1 \end{cases}$$

Una de estas ecuaciones es redundante y la cambiamos por $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Se tiene que la solución es

$$\pi = \left(\tfrac{80}{197}, \tfrac{45}{197}, \tfrac{72}{197} \right) = (40.61\,\%, 22.84\,\%, 36.55\,\%)$$

Ejercicio - Distribución estacionaria

Considera la Cadena de Markov homogénea con matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.9 \\ 0.8 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar la distribución estacionaria.

Solución

Llamamos $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ la distribución estacionaria. Esta tendrá que resolver la ecuación $\pi = \pi\, P$ es decir

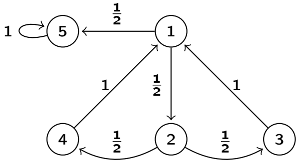
$$\begin{cases} \pi_1 & = \frac{1}{10}\,\pi_1 + \frac{8}{10}\,\pi_2 + \frac{1}{2}\,\pi_3 \\ \pi_2 & = \frac{2}{10}\,\pi_2 + \frac{1}{2}\,\pi_3 \\ \pi_3 & = \frac{9}{10}\,\pi_1 \end{cases}$$

Una de estas ecuaciones es redundante y la cambiamos por $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Se tiene que la solución es

$$\pi = \left(\tfrac{80}{197}, \tfrac{45}{197}, \tfrac{72}{197} \right) = (40.61\,\%,\ 22.84\,\%,\ 36.55\,\%)$$

Ejercicio

Considera la Cadena de Markov homogénea con diagrama de transiciones:



Hallar el valor de:

- la matriz de transición
- las clases y sus períodos
- la distribución de los tiempos de parada $T_{11}^{(n)}$
- la distribución estacionaria

Solución

- La matriz de transición es igual a

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Como el estado 5 es absorbente, el solo constituye una clase. Luego tenemos que $1 \to 2 \to 3 \to 1$ y por lo tanto

$$1 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 3$$

  Igualmente tenemos que $1 \to 2 \to 4 \to 1$ y por lo tanto las únicas clases son

$$\{1, 2, 3, 4\} \text{ y } \{5\}$$

Solución

- Siendo $p_{55} = 1$ tenemos que el periodo del estado 5 es 1,

  $$d(5) = 1$$

  Para el estado 1 tenemos que

  $$p_{11}^{(1)} = 0;\ p_{11}^{(2)} = 0;\ p_{11}^{(3)} = \frac{1}{2};$$

  Además considerado que la distribución al tiempo 3 empezando en el estado 1 es $\pi_1(3) = (0.5, 0, 0, 0, 0.5)$ usando Champan-Kolmogorov tenemos que

  $$p_{11}^{(4)} = p_{11} \times 0.5 + p_{51} \times 0.5 = 0$$

  y continuando tenemos que

  $$p_{11}^{(3n)} = 2^{-n}$$

  y 0 en el resto. Se deduce que $d(1) = 3$ como también el periodo de toda su clase

  $$d(\{1, 2, 3, 4\}) = 3\ .$$

Solución

- Consideramos el primer tiempo de parada $T_{11} = T_{11}^{(1)}$ y indicamos con ω una realización del proceso

$$\omega = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \ .$$

Ya que se empieza en el estado 1 tenemos $x_0 = 1$, por lo tanto posibles realizaciones serán

$$\omega_1 = 15555555555\ldots \qquad \omega_2 = 12312315555\ldots$$
$$\omega_3 = 12415555555\ldots \qquad \omega_4 = 12412312315\ldots$$

y el valor de la variable aleatoria $T_{11}(\omega)$ será

$$T_{11}(\omega_1) = \infty; \quad T_{11}(\omega_2) = 3; \quad T_{11}(\omega_3) = 3; \quad T_{11}(\omega_4) = 3$$

es decir

$$T_{11} = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad X(1) = 2 \quad \text{con prob. } \frac{1}{2}$$
$$T_{11} = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad X(1) = 5 \quad \text{con prob. } \frac{1}{2}$$

Solución

Es decir el primer tiempo de parada, T_{11}, toma solo el valor 3 y el valor ∞ cada uno con probabilidad $\frac{1}{2}$. Por lo tanto su función de masa o de probabilidad vale

$$f_{11}(n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 3 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y la probabilidad que sea finito se calcula como

$$f_{11} = \mathbb{P}(T_{11} < \infty) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{11}(n) = \frac{1}{2}$$

que equivale a decir

$$\mathbb{P}(T_{11} = \infty) = 1 - \mathbb{P}(T_{11} < \infty) = 1 - f_{11} = \frac{1}{2} .$$

Es decir el estado 1 es transitorio, ya que tiene probabilidad positiva de no regresar.

Solución

De la misma forma tenemos que los tiempos de parada de orden mayor valdrán

$$T_{11}^{(n)} = \begin{cases} 3n & \text{con prob. } 2^{-n} \\ \infty & \text{con prob. } 1 - 2^{-n} \end{cases}$$

Es decir

$$f_{11}^{(n)}(k) = \begin{cases} 2^{-n} & k = 3n \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y

$$f_{11}^{(n)} = \mathbb{P}(T_{11}^{(n)} < \infty) = \frac{1}{2^n}$$

Solución

- Para calcular la distribución estacionaria

$$\mathsf{P} - \mathbb{I} = \begin{pmatrix} -1 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & -1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y tiene determinante nulo, de echo una linea es nula.
Añadimos la condición $\pi \vec{1} = 1$,

$$\pi \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 1 & -1 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que nos da, como distribución estacionaria,

$$\begin{aligned} \pi &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

El resultado es da esperarse ya que solo el estado 5, siendo absorbente, es recurrente positivo.

Ejercicio

Una compañía de seguros comienza en el instante 0 con un superávit de $S = 3$. Al principio de cada año, recoge un premio de $P = 2$ y paga un cantidad aleatoria debida a los siniestros con la siguiente distribución:

Cantidad	0	1	2	4
Probabilidad	0.15	0.25	0.50	0.10

Las reclamaciones de las cantidades son independientes entre sí.

Si, al final del año, el superávit es más de 3, la empresa paga un dividendo equivalente al importe del excedente a 3.

Si la empresa es incapaz de pagar sus créditos, o si su superávit se reduce a 0, se va a la quiebra.

Asumiendo que no haya ningún gasto administrativo y ningún taso de interés, calcular el dividendo que se espera la empresa pagará al final del cuarto año.

Solución

El superávit de la empresa se puede modelar con una cadena de Markov con matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.10 & 0.50 & 0.25 & 0.15 \\ 0.10 & 0 & 0.50 & 0.40 \\ 0 & 0.10 & 0 & 0.90 \end{pmatrix}$$

Tenemos que la distribución inicial es

$$\pi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

y en los instantes siguientes

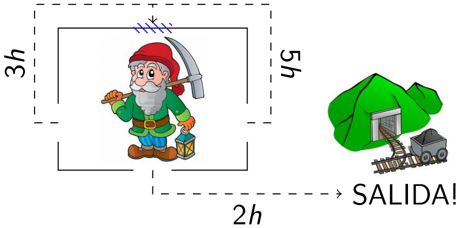
$$\begin{aligned} \pi(1) &= \pi(0)\,P = \begin{pmatrix} 0 & 0.10 & 0 & 0.90 \end{pmatrix} , \\ \pi(2) &= \pi(0)\,P^2 = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.14 & 0.025 & 0.825 \end{pmatrix} , \\ \pi(3) &= \pi(0)\,P^3 = \begin{pmatrix} 0.0265 & 0.1525 & 0.0475 & 0.7735 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

El dividendo esperado al final del cuarto año es

$$0.0475 \times 1 \times 0.15 + 0.7735 \times 2 \times 0.15 + 0.7735 \times 1 \times 0.25 = 0.43255.$$

Ejercicio - Problema del minero

Hay un minero que quiere salir de la mina, pero se encuentra en un sitio bajo tierra con 3 salidas.



Solo una salida lo lleva a salir de la mina en 2 horas, mientras las otras dos salidas lo llevan por caminos de 3 y 5 horas que lo vuelven a llevar en el mismo sitio.

El minero elige cada vez una salida al azar olvidándose de sus elecciones anteriores.

Halla el tiempo medio que el minero necesita para salir de la mina.

Solución I

Si llamamos T el tiempo que tarda para salir el minero, imaginamos que la salida 1 es la que lo llevaría a salir de la mina y llamamos X la primera elección de salida, es decir

$$X = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } 1/3 \\ 2 & \text{con probabilidad } 1/3 \\ 3 & \text{con probabilidad } 1/3 \end{cases}$$

tenemos que

$$T = 1\{X=1\}\,2h + 1\{X=2\}\,(3h+\tilde{T}) + 1\{X=3\}\,(5h+\tilde{T})$$

donde $\tilde{T}$ es el tiempo que tardaría a salir si habiendo elegido la salida equivocada el minero se encontrara otra ves en el sito inicial y tuviera que elegir otra vez. $\tilde{T}$ tiene la misma distribución de T ya que el minero repite la misma elección igual que al tiempo 0, y es independiente de la primera elección, X.

Solución II

Si calculamos la esperanza tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[1\{X=1\}\,2h + 1\{X=2\}\,(3h+\tilde{T}) \\
&\quad +1\{X=3\}\,(5h+\tilde{T})] \\
&= 2h\,\mathbb{E}[1\{X=1\}] + \mathbb{E}[1\{X=2\}]\,\mathbb{E}[(3h+\tilde{T})] \\
&\quad +\mathbb{E}[1\{X=3\}]\,\mathbb{E}[(5h+\tilde{T})]
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el valor esperado de una función indicadora es igual a la probabilidad del suceso donde la función indicadora toma valor 1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T] &= 2h\,\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)\,(3h+\mathbb{E}[\tilde{T}]) \\
&\quad +\mathbb{P}(X=3)\,(5h+\mathbb{E}[\tilde{T}]) \\
&= \frac{2}{3}h + 1h + \frac{1}{3}\mathbb{E}[T] + \frac{5}{3}h + \frac{1}{3}\mathbb{E}[T]
\end{aligned}$$

y resolviendo tenemos que $\mathbb{E}[T] = 10h$.

Ejercicio - Distribución estacionaria

Considera la Cadena de Markov homogénea con matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 1-(a+b) & a & b \\ 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 3/10 & 7/10 \end{pmatrix} \qquad \text{con } a, b \geq 0, a+b \leq 1 \ .$$

Encuentra la distribución estacionaria, cuando:

$$\circ\ a+b > 0\ , \qquad \circ\ a+b = 0\ .$$

Solución

La distribución estacionaria para la cadena formada por los la clase recurrente $\{2,3\}$ es $\begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \end{pmatrix}$.
Por lo tanto la distribución estacionaria será igual a

$$\begin{pmatrix} k & (1-k)\,27.27 & (1-k)\,72.73 \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{array}{ll} k = 0 & \text{cuando } a+b > 0 \\ 0 \leq k \leq 1 & \text{cuando } a+b = 0 \end{array}$$

Ejercicio - Distribución estacionaria

Considera la Cadena de Markov homogénea con matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 1-(a+b) & a & b \\ 0 & 1/5 & 4/5 \\ 0 & 3/10 & 7/10 \end{pmatrix} \qquad \text{con } a, b \geq 0, a+b \leq 1 \ .$$

Encuentra la distribución estacionaria, cuando:

$$\circ\ a+b > 0 \ , \qquad \circ\ a+b = 0 \ .$$

Solución

La distribución estacionaria para la cadena formada por los la clase recurrente $\{2, 3\}$ es $\begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{8}{11} \end{pmatrix}$.
Por lo tanto la distribución estacionaria será igual a

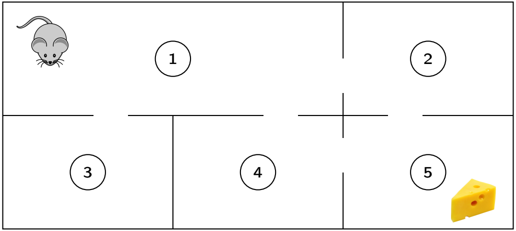
$$\begin{pmatrix} k & (1-k)\,27.27 & (1-k)\,72.73 \end{pmatrix}$$

con

$$\begin{array}{ll} k = 0 & \text{cuando } a+b > 0 \\ 0 \leq k \leq 1 & \text{cuando } a+b = 0 \end{array}$$

Ejercicio

Considera el siguiente laberinto



y imagina que el ratón cada minuto cambia con probabilidad 2/3 de habitación eligiendo al azar una de las puertas disponibles, y que para en el momento que encuentre el queso en la habitación 5.

a) Encuentra la matriz y el diagrama de transición
b) Clasifica los estados y sus períodos

Si el ratón al tiempo 0 se encuentra en la habitación 1, encuentra:

b) la probabilidad de visitar la habitación 4
c) el número medio de visitas que hará a la habitación 2
d) el tiempo medio que tardará en encontrar el queso.

Solución

a) La matriz de transición es

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 & 2/9 & 2/9 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Los estados son todos transientes y aperiodico a parte del estado 5 que es absorbente.

Definimos la matriz de las transiciones entre los estado transientes, Q como

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/9 & 2/9 & 2/9 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Solución

Tendremos que la matriz M está dada por

$$\mathsf{M} = (\mathbb{I} - \mathsf{Q})^{-1} = \begin{pmatrix} 9/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 \\ 9/4 & 9/4 & 3/4 & 3/4 \\ 9/2 & 3/2 & 3 & 3/2 \\ 9/4 & 3/4 & 3/4 & 9/4 \end{pmatrix}$$

- c) La probabilidad de visitar la habitación 4 será dado por

$$f_{14} = \frac{m_{14}}{m_{44}} = \frac{3/2}{9/4} = 2/3$$

- d) El numero de visitas a la habitación 2 será dado por

$$m_{12} = 3/2 \ .$$

Solución

- e) Llamamos $m_i = \mathbb{E}_i[T_5]$ con $i = 1, \ldots, 4$ Tendremos que

$$\begin{aligned}
m_1 &= 1 + \mathbb{E}_1[T_5]\, p_{11} + \mathbb{E}_2[T_5]\, p_{12} + \mathbb{E}_3[T_5]\, p_{13} \\
m_2 &= 1 + \mathbb{E}_1[T_5]\, p_{21} + \mathbb{E}_2[T_5]\, p_{22} \\
m_3 &= 1 + \mathbb{E}_1[T_5]\, p_{31} + \mathbb{E}_3[T_5]\, p_{33} \\
m_4 &= 1 + \mathbb{E}_1[T_5]\, p_{41} + \mathbb{E}_4[T_5]\, p_{44}
\end{aligned}$$

que equivale a

$$\vec{m} = \vec{1} + \mathrm{Q}\, \vec{m}$$

con $\vec{m}$ y $\vec{1}$ vectores columnas. Por lo tanto

$$\vec{m} = \mathrm{M}\, \vec{1} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 21/2 & 6 \end{pmatrix}$$

y el valor buscado es

$$m_1 = 9 \ .$$

Ejercicio

Una empresa quiere usar un sistema par incentivar la mejora profesional de su personal ofreciendo cursos de formación. Un empleado tendrá que cursar un curso de formación (estado 1) y una vez acabado el curso recibirá, en el año siguiente, una recompensa (estado 2). Luego, por un año más, el empleado no recibirá ninguna formación (estado 3), y al terminar de este año se apuntará a otro curso de formación. La recompensa para cada curso es de 500€.

La matriz de transición para este modelo está dada por

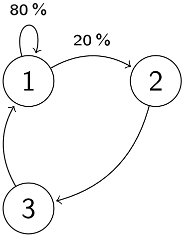
$$P = \begin{pmatrix} 80\,\% & 20\,\% & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El trabajador empieza en el periodo 0 en el estado 3.

a) Dibuja el diagrama de transición, caracteriza los estados y sus periodos.
b) Calcula la distribución de X(1) y X(2).
c) Calcula la distribución conjunta del vector (X(2),X(3)).
d) Calcula la distribución estacionaria y la tasa anual de premio que el trabajador recibe.
e) El valor de $\mathbb{E}_3[T_2]$. Sugerencia: Pon la variable T_{32} en relación con la variable T_{33}.

Solución

a) El diagrama de estados de la cadena de Markov es



La cadena es aperiódica y irreducible.

b) Llamando $\pi(n)$ la distribución de $X(n)$, es inmediato calcular

$$\pi(1) = (1, 0, 0)$$
$$\pi(2) = (80\,\%, 20\,\%, 0)$$

Solución

- La distribución conjunta de $(X(2), X(3)$ se saca usando la fórmula de la probabilidad condicionada

$$\begin{aligned} p(i,j) &= \mathbb{P}(X(3) = j, X(2) = i) \\ &= \mathbb{P}(X(3) = j | X(2) = i)\, \mathbb{P}(X(2) = i) = p_{i,j}\, \pi_i(2)\ . \end{aligned}$$

Obtendremos que

$p(i\|j)$	$j = 1$	2	3
$i = 1$	64 %	16 %	0
2	0	0	20 %
3	0	0	0

Solución

d) Para calcular la distribución estacionaria, π, sabemos que $\pi(\mathbb{I}-\mathrm{P}) = \vec{0}$ y $\pi\,\vec{1} = 1$ que se escribe

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -10 & 5 & 5 \\ -5 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 & 1/7 & 1/7 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.714 & 0.143 & 0.143 \\ -1.430 & 0.714 & 0.714 \\ -0.714 & -0.143 & 0.857 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} 0.714 & 0.143 & 0.143 \end{pmatrix}$$

La tasa anual del premio se calcula como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_3(n)}{n} \times 500€ = \pi_2 \times 500€ = \frac{1}{7} \times 500€ \approx 71.43€ \,.$$

Solución

- e) Tenemos que $T_{32} = T_{33} - 1$ ya que para visitar el estado 3 hay que visitar el estado 2 en el año anterior. Por lo tanto

$$\mathbb{E}_3[T_2] = \mathbb{E}_3[T_3 - 1] = \mathbb{E}_3[T_3] - 1 = \mu_{33} - 1 = \frac{1}{\pi_3} - 1 = 7 - 1 = 6\,.$$

Ejercicio 1 - Parcial 1 - 2018

Sea $X(n)$ un proceso estocástico normal con media $\mu_X(n) = 0$ y autocovarianza $\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n, n+m) = e^{-2m}$, y sea Y una variable aleatoria continua, independiente de $X(n)$, con función de densidad,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y(1-y^2) & 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Se define el proceso $Z(n) = Y + X(n)$. Calcula:

a) La media del proceso, $\mu_Z(n)$.

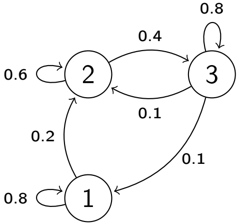
b) Su función de autocovarianza $\mathbb{C}\mathrm{ov}_Z(n, n+m)$.

c) ¿Es $Z(n)$ débilmente o estrictamente estacionario?

Ejercicio 2 - Parcial 1 - 2018

Dada la cadena de Markov con estados $\{1, 2, 3\}$, diagrama de transición dado a la derecha y asumiendo que la distribución inicial es

$$\pi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \; :$$



1. Encontrar la matriz de transición, caracterizar los estados y sus periodos.
2. Calcular la distribución de $X(1)$ y el valor medio de $X(1)(1 - X(1))^2$.
3. Calcular el número medio de visitas que la cadena hará al estado 2 y la probabilidad de que la cadena visitará el estado 1.
4. Calcular la distribución de $X(\infty)$, su valor medio y su varianza.

Ejercicio 3 - Parcial 1 - 2018

Dada la cadena de Markov con estados $\{1, 2, 3, 4\}$ y matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

1. Dibujar el diagrama de transición, caracterizar los estados y sus periodos.
2. Calcular la distribución límite (si existe) empezando en el estado 2.
3. Calcular la probabilidad empezando en 1 de visitar el estado 4.
4. Calcular la distribución límite (si existe) empezando con distribución uniforme discreta en todos los estados.

Nota: Para resolver el problema **NO** es necesario invertir matrices de dimensiones 4×4.

Ejercicio - Distribución estacionaria

Considera una Cadena de Markov homogénea con la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 3/10 & 0 & 7/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

Dibuja el diagrama de transición, clasifica los estados y encuentra todas las distribución estacionaria.

Solución

Las clases son $C_1 = \{1,3\}$, $C_2 = \{2\}$ y $C_3 = \{4,5\}$.

La clase C_2 es transitoria mientras las clases C_1 y C_3 son recurrentes positivas. Todas son aperiodicas.

La distribución estacionarias para una cadena solo en la clase C_1 sería

$$(\frac{3}{11}, \frac{8}{11})$$

y solo en la clase C_3 sería

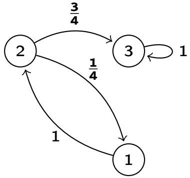
$$(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}) \; .$$

Por lo tanto con $a, b \geq 0$ and $a + b = 1$, todas las distribuciones estacionarias serán dada por

$$\begin{aligned} \pi &= a \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & 0 & \frac{8}{11} & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{11}a & 0 & \frac{8}{11}a & \frac{3}{7}b & \frac{4}{7}b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejercicio - Clasificación de estados

Considera la Cadena de Markov homogénea con diagrama de transiciones:



Hallar el valor de:

a) la matriz de transición
b) las clases
c) la distribución de los tiempos de parada $T_{11}^{(n)}$ y sus valor medios
d) los periodos
e) si los estados son transitorios o recurrentes

Solución

a) La matriz de transición es igual a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.75 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Tenemos que el estado 3 es absorbente y el estado 1 y 2 comunican por lo tanto las clases son

$$\{1, 2\} \text{ y } \{3\}$$

c) Desde 1 solo vamos a 2, y desde 2 o volvemos a 1 con probabilidad 1/4 o vamos a 3 y nunca regresamos a 1, entonces

$$T_{11} = \begin{cases} 2 & \text{con prob. } 1/4 \\ \infty & \text{con prob. } 3/4 \end{cases}$$

Solución

- c) (continúa) Igualmente para regresar 2 veces, tenemos que regresar una primera vez (es decir $T_{11} = 2$), luego ir al paso 3 en 2 y luego volver a 1 con probabilidad $1/4$ o ir a 3 y no regresar nunca a 1, entonces

$$T_{11}^{(2)} = \begin{cases} 4 & \text{con prob. } 1/16 \\ \infty & \text{con prob. } 1 - 1/16 \end{cases}$$

En general tenemos

$$T_{11}^{(n)} = \begin{cases} 2n & \text{con prob. } 1/4^n \\ \infty & \text{con prob. } 1 - 1/4^n \end{cases}$$

Calculamos la media de T_{11}.

$$\mathbb{E}_1[T_{11}] = 2 \times \mathbb{P}(T_{11} = 2) + \infty \times \mathbb{P}(T_{11} = \infty) = \infty$$

como tiene que ser, ya que el estado 1 es transitorio, es decir hay probabilidad positiva de no volver

$$\mathbb{P}(T_{11} = \infty) = \frac{3}{4} \ .$$

Solución

d) Calculamos las probabilidades de regreso en n pasos

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_{11}^{(n)}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4^2}$	0	$\frac{1}{4^3}$	0	$\frac{1}{4^4}$	$\cdots$

se ve que son positivas solo para múltiples de 2, y por lo tanto tenemos que

$$d(1) = 2 \ .$$

Todos los estados que comunican con el estado 1 tendrán el mismo período, y entonces también $d(2) = 2$.
Para el estado 3 tenemos que

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_{33}^{(n)}$	1	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$

y el máximo común divisor es 1, entonces

$$d(3) = 1 \ .$$

e) Los estados $\{1, 2\}$ son transitorios y el estado 3 es recurrente.

Ejercicio

Una empresa quiere usar un sistema par incentivar la mejora profesional de su personal ofreciendo cursos de formación.

Un empleado tendrá que cursar un curso de formación (estado 1) y una vez acabado el curso recibirá, en el año siguiente, una recompensa (estado 2). Luego, por un año más, el empleado no recibirá ninguna formación (estado 3), y al terminar de este año o continuará con apuntarse a otro curso de formación o dejará el plan de formación (estado 4). La matriz de transición para este modelo está dada por

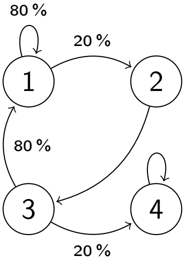
$$P = \begin{pmatrix} 80\,\% & 20\,\% & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 80\,\% & 0 & 0 & 20\,\% \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El trabajador empieza en el periodo 0 en el estado 1.

1. Dibuja el diagrama de transición, caracteriza los estados y sus periodos.
2. Calcula la distribución estacionaria.
3. La distribución de $X(2)$, su media y su varianza.
4. La probabilidad de que el empleado una vez recibido un premio vuelva a apuntarse a un curso de formación.

Solución

a) El diagrama de estados de la cadena de Markov es



Hay dos clases $\mathcal{T} = \{1, 2, 3\}$ y $\mathcal{R} = \{4\}$. La cadena es aperiódica.

b) Como hay un solo estado recurrente positivo la distribución estacionaria es

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Solución

c) Calculamos

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.64 & 0.16 & 0.2 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.64 & 0.16 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y tenemos que la distribución de $X(2)$ está dada por

$$\pi(2) \begin{pmatrix} 0.64 & 0.16 & 0.2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Usando la distribución calculamos

$$\mathbb{E}_1[X(2)] = 1.56 \,, \quad \mathbb{E}_1[X^2(2)] = 3.08 \,, \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}_1[X(2)] = 0.6464 \,.$$

d) Usando la estacionariedad podemos asumir que en el tiempo 0 el empleado esté en el estado 2. La probabilidad buscada es $\mathbb{P}_2(T_1 < \infty)$, y teniendo en cuenta que el estado 4 es absorbente, esta probabilidad se puede calcular como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_2(T_1 < \infty) &= \mathbb{P}(X(2) = 1, X(1) = 3 | X(0) = 2) \\ &= \mathbb{P}(X(2) = 1 | X(1) = 3) = p_{31} = 80\,\% \,. \end{aligned}$$

Ejercicio

Los compradores de automóviles de las marcas A, B y C, se quedan o cambian marca de su coche según la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

Después de varios años,
¿qué parte del mercado tiene la marca C?

Solución - 1ra versión

Vamos a determinar la distribución estacionaria,

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} ,$$

que es solución de la ecuación

$$\pi \, \mathsf{P} = \pi$$

es decir

$$\begin{cases} \frac{2}{5}\pi_1 & +\frac{1}{5}\pi_2 & +\frac{1}{9}\pi_3 & = \pi_1 \\ \frac{1}{5}\pi_1 & +\frac{3}{5}\pi_2 & +\frac{1}{9}\pi_3 & = \pi_2 \\ \frac{2}{5}\pi_1 & +\frac{1}{5}\pi_2 & +\frac{7}{9}\pi_3 & = \pi_3 \end{cases}$$

Una de las ecuaciones anterior es superflua y la sustituimos por

$$\pi_1 \quad +\pi_2 \quad +\pi_3 \quad = 1$$

y resolviendo tenemos que

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{4}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix} .$$

La marca C tendrá el 56.25 % del mercado.

Solución - 2da versión

Vamos a determinar la distribución estacionaria, π, que es solución de la ecuación

$$\pi\,\mathsf{P} = \pi$$

y satisface la condición $|\pi| = \pi \cdot \vec{1} = 1$.

Tenemos que resolver el sistema

$$\pi \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 1 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

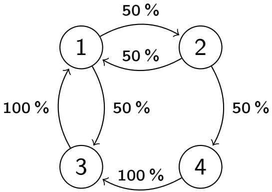
y al final tenemos que

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{4} & \frac{9}{16} \\ \frac{19}{16} & -\frac{7}{4} & \frac{9}{16} \\ \frac{23}{16} & \frac{1}{4} & -\frac{27}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{16} & \frac{4}{16} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}.$$

La marca C tendrá el 56.25 % del mercado.

Ejercicio

Dado el siguiente diagrama de transición



a) Encuentra la matriz de transición P
b) Caracteriza los estados y sus periodos.
c) Calcula $\mathbb{E}_i[T_i]$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$
d) Calcula la distribución estacionaria usando el resultado del apartado anterior
e) Encuentra la distribución estacionaria usando la matriz de transición P
f) encuentras las probabilidades límites $p_{ii}^{nd(i)}$ para $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ con $d(i)$ el periodo del estado i.

Solución

a) La matriz de transición para este modelo está dada por

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La cadena es aperiódica y de periodo $d = 2$

c) Tenemos

$$\mathbb{E}_1[T_1] = 2.5 \quad \mathbb{E}_2[T_2] = 5 \quad \mathbb{E}_3[T_3] = 10/3 \quad \mathbb{E}_1[T_1] = 10$$

d) Sabiendo que $\pi_i = 1/\mathbb{E}[T_I]$ tenemos

$$\pi = \begin{pmatrix} 4/10 & 2/10 & 3/10 & 1/10 \end{pmatrix} .$$

Solución

e) La matriz de transición para este modelo está dada por

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix} 4/10 & 2/10 & 3/10 & 1/10 \end{pmatrix} .$$

f) Sabiendo que $p_{ii}^{(nd)} \to d\pi_i$ tenemos que

$$(p_{ii}^{(nd)})_i \to \begin{pmatrix} 8/10 & 4/10 & 6/10 & 2/10 \end{pmatrix} .$$

Ejercicio:
El problema de la ruina del jugador

Considera un juego donde un jugador tiene un número, i, inicial de monedas.

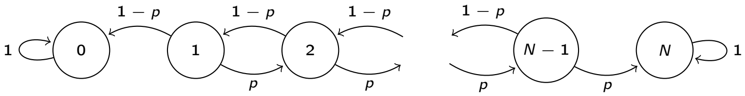
Cada vez que juega puede ganar una moneda con una probabilidad p o perderla con probabilidad $1 - p$.

El juego termina si el jugador pierde todas sus monedas o cuando llegue a tener N monedas en total.

Queremos calcular la probabilidad de que el jugador gane el juego, es decir

$$f_{iN} = \mathbb{P}_i(T_N < \infty)$$

El diagrama de transición será



Solución

Tenemos que aplicar la ecuación

$$f_{ij} = \sum_{k \in T} p_{ik}\, f_{kj} + \sum_{k \in R} p_{ik}$$

para todos los estados $i \in T$.

El conjunto T es, $T = \{1, 2, \ldots, N-1\}$, y las clases recurrentes son $R_0 = \{0\}$ y $R_N = \{N\}$. A nosotros interesa la clase recurrente R_N por lo tanto en este caso $j = N$.

Tendremos que

$$\begin{cases} f_{N-1} & = q\, f_{N-2} + p \\ f_{N-2} & = q\, f_{N-3} + p\, f_{N-1} \\ \vdots & \\ f_2 & = q\, f_1 + p\, f_3 \\ f_1 & = p\, f_2 \end{cases}$$

Solución

Llamando $f_N = 1$ y $f_0 = 0$ las ecuaciones anteriores se pueden escribir en la siguiente forma

$$f_i = q\, f_{i-1} + p\, f_{i+1} \quad i = 1, \ldots, N-1$$

Escribiendo f_i como $q\, f_i + p\, f_i$, ya que $p + q = 1$, tenemos que

$$f_{i+1} - f_i = \frac{q}{p}(f_i - f_{i-1})$$

Usando $f_0 = 0$ tenemos que

$$f_1 - f_0 = f_1 = \left(\frac{q}{p}\right)^0 f_1$$

y con $i = 1$, tenemos que

$$f_2 - f_1 = \left(\frac{q}{p}\right)^1 f_1$$

Luego con $i = 2$

$$f_3 - f_2 = \frac{q}{p}(f_2 - f_1) = \left(\frac{q}{p}\right)^2 f_1$$

Solución

Y entonces por un valor $i = 1, \ldots, N-1$ general tendremos que

$$f_{i+1} - f_i = \left(\frac{q}{p}\right)^i f_1 \ .$$

Sumando todos los valores anteriores por todos los valores de i tenemos

$$\begin{aligned} f_N - f_0 &= \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-2} + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{0}\right) f_1 \\ &= \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}{1 - \frac{q}{p}} f_1 \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $f_N - f_0 = 1$ tenemos que

$$f_1 = \frac{1 - \frac{q}{p}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \ .$$

Solución

Sustituyendo el valor encontrados de f_1, tenemos en general que

$$f_i = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} .$$

y teniendo en cuenta el caso especial $p = q = 1/2$ la solución general será

$$f_i = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^N} & p \neq \frac{1}{2} \\ \frac{i}{N} & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ejercicio 2 - Primer parcial 2014

Una empresa aseguradora usa un modelo del tipo cadena de Markov para calcular el valor de un contrato de seguro de vida. La cadena de Markov considera 3 estados: activo, inactivo y muerto. Un trabajador en activo pasará el año siguiente a inactivo con una probabilidad del 20 % mientras seguirá activo con una probabilidad del 79 %. Un trabajador inactivo se dará de alta el año siguiente con una probabilidad del 70 % y se quedará de baja con una probabilidad del 28 %. Las probabilidades que sobren son para una transición al estado de muerte.

Se asume que la indemnización en caso de muerte es de 10k€ y que el trabajador empiece en el tiempo 0 su contrato en estado activo.

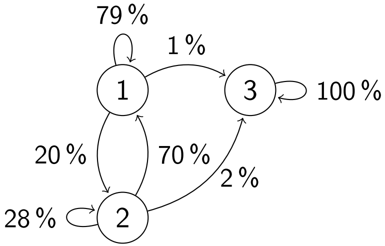
1. Escribe la matriz de transición y el diagrama de estados.
2. Caracteriza los estados y sus periodos.
3. Calcula la probabilidad que antes de morir el trabajador se encuentre en estado inactivo.

Si el contrato dura 2 años, e indicando con $X(n)$ el estado del trabajador a final del año n, calcula

4. las funciones de probabilidad de las variables $X(1)$ y $X(2)$
5. la función de probabilidad del gasto de la empresa S
6. el precio del contrato π si la empresa usa el principio de la desviación típica con parámetro $1/100$, es decir $\pi = \mathbb{E}[S] + \sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}[S]/10000}$.

Solución

1. Definiendo los estados: 1-activo, 2-inactivo y 3-muerto, tenemos que el diagrama de estados de la cadena de Markov es



y la matriz de transición $\mathrm{P} \in \mathcal{M}^{3\times 3}$ es

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 79\,\% & 20\,\% & 1\,\% \\ 70\,\% & 28\,\% & 2\,\% \\ 0 & 0 & 100\,\% \end{pmatrix}$$

2. Los estados transitorios son $T = \{1, 2\}$ y el único estado recurrente, de hecho absorbente, es $R = \{3\}$, todos con períodos igual a 1.

Solución

3. Queremos calcular la probabilidad

$$f_{12} = \mathbb{P}_1(T_2 < \infty) = \mathbb{P}_1(N_2(\infty) > 0) \ .$$

Sabemos que $f_{12} = m_{12}/m_{22}$ con m_{ij} elementos de la matriz

$$\mathsf{M} = (\mathbb{I} - \mathsf{Q})^{-1}$$

donde

$$\mathsf{Q} = \begin{pmatrix} 0.79 & 0.29 \\ 0.7 & 0.28 \end{pmatrix} \ .$$

Se calcula

$$\mathsf{M} \approx \begin{pmatrix} 64.29 & 17.86 \\ 62.5 & 18.75 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$f_{12} \approx 17.86/18.75 \approx 95.24\,\% \ .$$

Solución

4. Definimos las funciones de probabilidad de $X(1)$ y $X(2)$ como $\pi(1)$ y $\pi(2)$. Sabiendo que $\pi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ tenemos que

$$\pi(1) = \pi(0)\,\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 0.79 & 0.2 & 0.01 \end{pmatrix} \;;$$
$$\pi(2) = \pi(1)\,\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 0.7641 & 0.214 & 0.0219 \end{pmatrix} \;.$$

5. El gasto de la empresa es $S = 10\text{k€}\,1\{X(2) = 3\}$ y por lo tanto vale

$$S = \begin{cases} 10\text{k€} & \text{con prob. } 2.19\,\% \\ 0 & \text{con prob. } 97.81\,\% \end{cases}$$

6. Se calcula

$$\mathbb{E}[S] = 219\text{€},\; \mathbb{E}[S^2] = 2.19 * 10^6\text{€}^2 \text{ y } \mathbb{V}\mathrm{ar}[S] = 2.14 * 10^6\text{€}^2 \;.$$

Por lo tanto $\pi = 233.636$€.

Cadena de Markov

Considera la cadena de Markov con matriz de transición

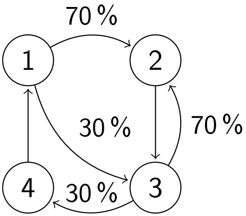
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 70\,\% & 30\,\% & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 70\,\% & 0 & 30\,\% \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula:

1. Las clases y los períodos
2. La distribución estacionaria
3. La distribución del tiempo de primera visita T_{11}
4. El valor medio $\mathbb{E}_1[T_1]$

Solución

El diagrama de transición es



1. La cadena es aperiódica y irreducible.
2. La distribución estacionaria es

$$\pi = \begin{pmatrix} 11.95\,\% & 36.25\,\% & 39.84\,\% & 11.95\,\% \end{pmatrix}.$$

Solución

3. La distribución del tiempo de primera visita T_{11}

$$\mathbb{P}_1(T_1 = n) = \begin{cases} 2n & (0.7)(0.3)(0.7)^{n-1} \\ 2n+1 & (0.3)(0.3)(0.7)^{n-1} \end{cases}$$

4. El valor medio $\mathbb{E}_1[T_1]$

$$\mathbb{E}_1[T_1] = 1/0.1195 = 8.3682 \ .$$

Ejercicio - Distribuciónes límites y estacionarias

Considera la Cadena de Markov homogénea con matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallar :

a) las distribución límites
b) la distribución estacionaria

Solución

a) Imaginamos de empezar por una cualquiera distribución inicial $\pi_p(0) = (p, 1-p)$ con $p \in [0,1]$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\pi_p(1) &= \pi_p(0)\,\mathsf{P} = (1-p, p)\\ \pi_p(2) &= \pi_p(1)\,\mathsf{P} = (p, 1-p) = \pi_p(0)\end{aligned}$$

y en general

$$\pi_p(2n+1) = (1-p, p) \quad \text{y} \quad \pi(2p) = \pi_p(0) = (p, 1-p)$$

y por lo tanto el limite

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_{\pi_p(0)}(X(n) = j)$$

nunca existe, ya que la función oscila entre p y $1-p$. L'único caso en el cual existiría sería el caso en que $p = 1-p = 1/2$ que como vamos a ver en el apartado siguiente corresponde a la única distribución estacionaria.

Solución

- b) Para calculara la distribución estacionaría, $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, tenemos que
$$\pi = \pi \, \mathsf{P}$$
es decir
$$\begin{cases} \pi_1 = 0 \times \pi_1 + 1 \times \pi_2 = \pi_2 \\ \pi_2 = 1 \times \pi_1 + 0 \times \pi_2 = \pi_1 \end{cases}$$
y como ya se esperaba una de ella es superflua. Usando la ecuación de normalización tenemos que
$$\pi_1 + \pi_2 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2} \; .$$

Solución

b) *Otra forma de ver la distribución estacionaria.*
Sabemos que si la cadena está al tiempo n en el estado 1, estará al tiempo $n+1$ en el estado 2 y viceversa, para volver en el mismo estado al paso siguiente, $n+2$.
Esto quiere decir que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_j(n)}{n} = \frac{1}{2}$$

Sabiendo, por los teoremas limites que,

$$\mathbb{P}_i\left(\lim_{n\to\infty} \frac{N_j(n)}{n} = \frac{1}{\mu_{jj}}\right) = 1$$

obtenemos que $\mu_{jj} = 2$.
Esto era de esperarlo ya que $T_{jj} = 2$ determinista, y

$$\mu_{jj} = \mathbb{E}[T_{jj}] = 2 \ .$$

Solución

b) *Otra forma de ver la distribución estacionaria.*
Siempre por los teoremas límites tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n\,d)} = \frac{d}{\mu_{jj}} = d\,\pi_j$$

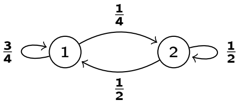
y entonces

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n\,d)} = \frac{2}{2} = 1 = 2\,\pi_j$$

y tenemos que $\pi_j = \frac{1}{2}$.

Ejercicio - Simulación con R

Considera la Cadena de Markov homogénea con diagrama de transiciones:



Hallar:

a) la matriz de transición
b) un camino aleatorio de esta cadena de 6 pasos empezando con distribución inicial tal que $\mathbb{P}(X(1) = 1) = 0.4$.
c) la probabilidad $\mathbb{P}(X(4) = 1 | X(1) = 1)$.
d) el valor de la probabilidad anterior simulando la cadena de Markov

Solución

a) la matriz de transición se calcula como

$$P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

la definimos en R

```
> matP <- matrix(c(0.75,0.5,0.25,0.5),2)
> matP
     [,1] [,2]
[1,] 0.75 0.25
[2,] 0.50 0.50
```

b) cargamos el script en R para simular cadenas de Markov

```
> source("R-Markov-Chain.R")
```

definimos la distribución inicial, d, y llamamos la función

```
> d <- c(0.4,0.6)
> simMC(matP,6,TRUE,d)
[1] 1 2 2 1 1 2
```

Solución

- c) la probabilidad que se pide es

$$p_{11}^{(3)} = (\mathsf{P}^3)(1,1)$$

y usando R

```
> (matP %*% matP %*% matP)[1,1]
[1] 0.671875
```

- d) cambiamos la distribución inicial en determinista

```
> d<-c(1,0)
```

simulamos $n = 7$ veces y generamos así el vector *ex*

```
> n<-7
> ex <- replicate(n,simMC(matP,4,FALSE,d))
> ex
[1] 1 1 1 2 1 2 1
```

miramos solo al suceso que nos interesa $(X(4) = 1)$

```
> ex == 1
[1]  TRUE  TRUE  TRUE FALSE  TRUE FALSE  TRUE
```

Solución

d) (continúa) aplicamos la función indicadora generando el vector *ind*

```
> ind <- 1*(ex == 1)
> ind
[1] 1 1 1 0 1 0 1
```

Calculamos la frecuencia relativa

```
> sum(ind)/n
[1] 0.7142857
```

Repetimos todos con un número $n = 50000$

```
> n<-500000
> sum(1*(replicate(n,simMC(matP,4,FALSE,d)) == 1))/n
[1] 0.672598
```

que aproxima bien el valor teórico hasta el tercer decimal!

Ejercicio - Ruina del jugador

Considera el problema de la ruina del jugador con $p = 0.4$ y $N = 6$. Empezando con 3 monedas, hallar :

a) el tiempo medio que el jugador pasa con tener 3 monedas
b) el número medio de visitas al estado 2
c) la probabilidad de que el jugador llegue a tener 4 monedas

Solución - Ruina del jugador

Calculamos la matriz de transición por los estados transitorios

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$$

```
> matQ <- t(matrix(c(0,0.4,0,0,0,0.6,0,0.4,0,0,0,0.6,
+ 0,0.4,0,0,0,0.6,0,0.4,0,0,0,0.6,0),5))
> matQ
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]  0.0  0.4  0.0  0.0  0.0
[2,]  0.6  0.0  0.4  0.0  0.0
[3,]  0.0  0.6  0.0  0.4  0.0
[4,]  0.0  0.0  0.6  0.0  0.4
[5,]  0.0  0.0  0.0  0.6  0.0
```

y la matriz de número medio de visitas $\mathrm{M} = (\mathbb{I} - \mathrm{Q})^{-1}$

```
> matM <- solve(diag(5)-matQ)
> matM
          [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
[1,] 1.5864662 0.9774436 0.5714286 0.3007519 0.1203008
[2,] 1.4661654 2.4436090 1.4285714 0.7518797 0.3007519
[3,] 1.2857143 2.1428571 2.7142857 1.4285714 0.5714286
[4,] 1.0150376 1.6917293 2.1428571 2.4436090 0.9774436
[5,] 0.6090226 1.0150376 1.2857143 1.4661654 1.5864662
```

a) Tenemos que $m_{33} = \mathbb{E}_3[N_3(\infty)] = 2.714$

b) Tenemos que $m_{32} = \mathbb{E}_3[N_2(\infty)] = 2.143$

c) Tenemos que $f_{34} = \mathbb{P}_3(T_4 < \infty) = m_{34}/m_{44} = 58.46\,\%$

```
> matM[3,4]/matM[4,4]
[1] 0.5846154
```

Ejercicio - Ruina del jugador

Considera el problema de la ruina del jugador con $p = 0.7$ y $N = 6$. Empezando con 3 monedas, hallar :

a) el número medio de visitas al estado 5
b) el número medio de visitas al estado 1
c) el número medio de visitas al estado 5 en los primeros 4 pasos
d) la probabilidad de que el jugador llegue a tener 1 moneda

Solución - Ruina del jugador

Calculamos la matriz de transición por los estados transitorios

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0 \end{pmatrix}$$

```
> matQ <- t(matrix(c(0,0.7,0,0,0,0.3,0,0.7,0,0,0,0.3,
+ 0,0.7,0,0,0,0.3,0,0.7,0,0,0,0.3,0),5))
> matQ
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]  0.0  0.7  0.0  0.0  0.0
[2,]  0.3  0.0  0.7  0.0  0.0
[3,]  0.0  0.3  0.0  0.7  0.0
[4,]  0.0  0.0  0.3  0.0  0.7
[5,]  0.0  0.0  0.0  0.3  0.0
```

y la matriz de número medio de visitas $M = (\mathbb{I} - Q)^{-1}$

```
> matM <- solve(diag(5)-matQ)
> matM
           [,1]       [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
[1,] 1.41669518 1.38898392 1.3243243 1.1734519 0.8214164
[2,] 0.59527882 1.98426274 1.8918919 1.6763599 1.1734519
[3,] 0.24324324 0.81081081 2.1351351 1.8918919 1.3243243
[4,] 0.09237085 0.30790284 0.8108108 1.9842627 1.3889839
[5,] 0.02771126 0.09237085 0.2432432 0.5952788 1.4166952
```

a) Tenemos que $m_{35} = \mathbb{E}_3[N_5(\infty)] = 2.135$

```
> matM[3,5]
[1] 1.324324
```

b) Tenemos que $m_{31} = \mathbb{E}_3[N_1(\infty)] = 0.243$

```
> matM[3,1]
[1] 0.2432432
```

Solución - Ruina del jugador

Calculamos la matriz de número medio de visitas en n pasos usando la fórmula ricursiva

$$\mathrm{M}_{n+1} = \mathbb{I} + \mathrm{Q}\,\mathrm{M}_n$$

empezando por $\mathrm{M}_0 = \mathbb{I}$

```
  > matMn <- diag(5)                          (en n = 0 pasos)
  > matMn <- diag(5) + matQ %*% matMn         (en n = 1 pasos)
  > matMn <- diag(5) + matQ %*% matMn         (en n = 2 pasos)
  > matMn <- diag(5) + matQ %*% matMn         (en n = 3 pasos)
  > matMn <- diag(5) + matQ %*% matMn         (en n = 4 pasos)
> matMn
       [,1]   [,2]   [,3]   [,4]   [,5]
[1,] 1.2982 0.9940 0.7987 0.3430 0.2401
[2,] 0.4260 1.6405 1.1410 0.9016 0.3430
[3,] 0.1467 0.4890 1.6846 1.1410 0.7987
[4,] 0.0270 0.1656 0.4890 1.6405 0.9940
[5,] 0.0081 0.0270 0.1467 0.4260 1.2982
```

c) Tenemos que $m_{35}(4) = \mathbb{E}_3[N_5(4)] = 0.799$

```
> matMn[3,5]
[1] 0.7987
```

d) Tenemos que $f_{31} = \mathbb{P}_3(T_1 < \infty) = m_{31}/m_{11} = 17.17\,\%$

```
> matM[3,1]/matM[1,1]
[1] 0.1716977
```

Ejercicio

Lamamos T el conjunto de los estados transitorios de una cadena de Markov, y con Q la sub-matriz de transición. Definimos con $m_{ij}(n)$ el número medio de visitas al estado j empezando en el estado i en los primeros n pasos, es decir

$$m_{ij}(n) = \mathbb{E}_i[N_j(n)]$$

con $i, j \in T$, y llamamos M_n la correspondiente matriz.

Demuestra que :

a) $\mathsf{M}_n = \mathbb{I} + \mathsf{Q} + \mathsf{Q}^2 + \cdots + \mathsf{Q}^n$.
b) $\mathsf{M}_n - \mathbb{I} + \mathsf{Q}^{n+1} = \mathsf{Q}[\mathbb{I} + \mathsf{Q} + \mathsf{Q}^2 + \cdots + \mathsf{Q}^n]$.
c) $\mathsf{M}_n = \mathsf{M}(\mathbb{I} - \mathsf{Q}^{n+1})$.

Solución

a) Consideramos $i, j \in T$ y $n > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} m_{i,j}(n) &= \mathbb{E}_i[N_j(n)] = \mathbb{E}_i[N_j(0) + (N_j(n) - N_j(0))] \\ &= \mathbb{E}_i[N_j(0)] + \mathbb{E}_i[N_j(n) - N_j(0)] \\ &= 1\{i = j\} + \mathbb{E}_i[\mathbb{E}_i[N_j(n) - N_j(0)|X(1)]] \end{aligned}$$

ya que tenemos, por la propiedad de Markov,

$$E_i[N_j(n) - N_j(0)|X(1) = k] = E_k[N_j(n-1)] = m_{kj}$$

llegamos a

$$\begin{aligned} m_{i,j}(n) &= 1\{i = j\} + \mathbb{E}_i[m_{X(1)j}] \\ &= 1\{i = j\} + \sum_{k \in T} m_{kj}\, p_{ik} \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho que $m_{kj} = 0$ si $k \notin T$.
Usando matrices esto se escribe como

$$\mathrm{M}_n = \mathbb{I} + \mathrm{Q}\,\mathrm{M}_{n-1}\ .$$

Solución

a) (Continúa) Siendo obviamente $\mathsf{M}_0 = \mathbb{I}$, tenemos que la relación es cierta por $n = 1$, es decir

$$\mathsf{M}_1 = \mathbb{I} + \mathsf{Q} \ .$$

Imaginamos que sea cierta por n verificamos que lo es por $n + 1$,

$$\begin{aligned} \mathsf{M}_{n+1} &= \mathbb{I} + \mathsf{Q}\,\mathsf{M}_n \\ &= \mathbb{I} + \mathsf{Q}\,(\mathbb{I} + \mathsf{Q} + \mathsf{Q}^2 + \cdots + \mathsf{Q}^n) \\ &= \mathbb{I} + \mathsf{Q} + \mathsf{Q}^2 + \mathsf{Q}^3 + \cdots + \mathsf{Q}^n + 1) \end{aligned}$$

que verifica la tesis.

b) Siendo $\mathsf{M}_n = \mathbb{I} + \mathsf{Q} + \mathsf{Q}^2 + \cdots + \mathsf{Q}^n$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathsf{M}_n - \mathbb{I} + \mathsf{Q}^{n+1} &= \mathsf{Q} + \mathsf{Q}^2 + \cdots + \mathsf{Q}^n + \mathsf{Q}^{n+1} \\ &= \mathsf{Q}(\mathbb{I} + \mathsf{Q} + \cdots + \mathsf{Q}^{n-1} + \mathsf{Q}^n) \end{aligned}$$

Solución

- Por el apartado anterior tenemos que

$$\mathsf{M}_n - (\mathbb{I} - \mathsf{Q}^{n+1}) = \mathsf{Q}\,\mathsf{M}_n$$

por lo tanto tenemos que

$$(\mathbb{I} - \mathsf{Q})\,\mathsf{M}_n = (\mathbb{I} - \mathsf{Q}^{n+1})$$

y recordando que $\mathsf{M} = (\mathbb{I} - \mathsf{Q})^{-1}$ tenemos que

$$\mathsf{M}_n = \mathsf{M}\,(\mathbb{I} - \mathsf{Q}^{n+1})$$

Comentario

La matriz M *se puede escribir como* M_∞ *y por lo tanto, usando el primer apartado, esta se puede calcular como*

$$\mathsf{M} = \mathbb{I} + \mathsf{Q} + \mathsf{Q}^2 + \mathsf{Q}^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{Q}^n\ .$$