



# Tema I

## Introducción y conceptos básicos

Bernardo D'Auria

Universidad Carlos III de Madrid

Procesos Estocásticos  
*Grado en Estadística y Empresa*

# Objetivo del tema

El **objetivo** principal de esta tema es recordar y introducir los conceptos básicos de:

- Medidas características
- Transformadas de Fourier y Laplace. Funciones características.
- Probabilidad y Media condicionadas
- Definición de Procesos Estocásticos



# Medidas características

Las medidas características son cantidades que se pueden usar para resumir las propiedades de una variable aleatoria. La más utilizada es la media

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \mathbb{P}(X \in dx) = \begin{cases} \sum_{x \in E} x p_X(x) & \text{v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{v.a. continua} \end{cases}$$

En general si se define la esperanza de una función,  $h(\cdot)$ , como

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \mathbb{P}(X \in dx) = \begin{cases} \sum_{x \in E} h(x) p_X(x) & \text{v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx & \text{v.a. continua} \end{cases}$$

# Medidas características

Las medidas características son cantidades que se pueden usar para resumir las propiedades de una variable aleatoria. La más utilizada es la media

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \mathbb{P}(X \in dx) = \begin{cases} \sum_{x \in E} x p_X(x) & \text{v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & \text{v.a. continua} \end{cases}$$

En general si se define la esperanza de una función,  $h(\cdot)$ , como

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \mathbb{P}(X \in dx) = \begin{cases} \sum_{x \in E} h(x) p_X(x) & \text{v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx & \text{v.a. continua} \end{cases}$$

# Medidas características

Se definen los **momentos de orden**  $n$  como

$$\mu_X^{(n)} = \mathbb{E}[X^n]$$

como la media de  $X$  ponderada por la función  $h(x) = x^n$ , y los **momentos centrados de orden**  $n$

$$\mu_X^{[n]} = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^n]$$

ponderando con la función  $h(x) = (x - \mathbb{E}[X])^n$ .

La **varianza** de  $X$  se define como el segundo momento centrado,

$$\text{Var}[X] = \mu_X^{[2]} = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] .$$



# Calcular la media de v.a. “positivas”

Si tenemos una variable aleatoria **positiva**, es decir

$$\mathbb{P}(X \geq 0) = 1 ,$$

entonces la media se puede calcular con la fórmula

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_{x=0}^{\infty} \bar{F}_X(x) & \text{v.a. discreta} \\ \int_0^{\infty} \bar{F}_X(x) dx & \text{v.a. continua} \end{cases}$$

donde  $\bar{F}_X(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}(X > x)$ , es la función cola de distribución.



# Probabilidad como media de func. indicadoras

La probabilidad de que  $X \in A$  se puede escribir como

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A) &= \int_A \mathbb{P}(X \in dx) = \int 1_A(x) \mathbb{P}(X \in dx) \\ &= \begin{cases} \sum_{x \in E} 1_A(x) p_X(x) & \text{v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(x) f(x) dx & \text{v.a. continua} \end{cases}\end{aligned}$$

donde  $1_A(x)$  es la función indicadora del conjunto  $A$ , es decir

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Por lo tanto podemos escribir

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{E}[1_A(X)]$$



# Probabilidad como media de func. indicadoras

La probabilidad de que  $X \in A$  se puede escribir como

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in A) &= \int_A \mathbb{P}(X \in dx) = \int 1_A(x) \mathbb{P}(X \in dx) \\ &= \begin{cases} \sum_{x \in E} 1_A(x) p_X(x) & \text{v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(x) f(x) dx & \text{v.a. continua} \end{cases}\end{aligned}$$

donde  $1_A(x)$  es la función indicadora del conjunto  $A$ , es decir

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Por lo tanto podemos escribir

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{E}[1_A(X)]$$





# Funciones que caracterizan una variable aleatoria

Sea  $X$  una variable aleatoria, se definen las siguientes funciones

- La **función característica**,  $\psi_X(s)$ ,

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] \quad t \in \mathbb{R}.$$

- La **función generatriz de momentos**,  $M_X(t)$ ,

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] \quad t \in \mathbb{R}.$$

- La **función generatriz**,  $\phi_X(z)$ , generalmente cuando  $X$  es discreta,

$$\phi_X(z) = \mathbb{E}[z^X] \quad z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1.$$

- La **trasformata de Laplace**,  $\tilde{F}_X(s)$ , solo cuando  $X \geq 0$ ,

$$\tilde{F}_X(s) = \mathbb{E}[e^{-sX}] \quad s \in \mathbb{R}.$$

Todas estas funciones caracterizan la variable aleatoria, es decir si dos variables aleatorias,  $X$  e  $Y$ , tienen una de estas funciones iguales entonces todas serán iguales y  $X \stackrel{d}{=} Y$ .

# Función generatriz de momentos para calcular momentos

Sea  $X$  una variable aleatoria, y sea

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] \quad t \in \mathbb{R} .$$

su función generatriz de momentos.

Es posible calcular los momentos de  $X$  de cualquier orden derivando la función  $M_X(t)$  tantas veces cuanto es el orden del momento y calculando el valor de esta derivada en 0.

Es decir vale la siguiente fórmula

$$\mu_X^{(n)} = \mathbb{E}[X^n] = \left. \frac{dM_X(t)}{dt^n} \right|_{t=0} .$$



# Ejemplos de Variables Aleatorias

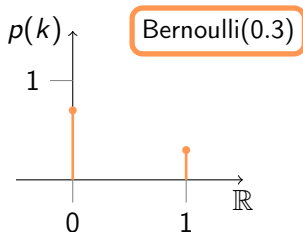
Variable aleatoria Bernoulli de parametro  $p \in [0, 1]$ .

$$X \sim \text{Be}(p)$$

Tiene función de probabilidad

$$p_X(k) = \begin{cases} q & k = 0 \\ p & k = 1 \end{cases}$$

donde  $q = 1 - p$ .



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = p$
- $\mathbb{V}\text{ar}[X] = p q$
- $\phi_X(z) = q + p z$
- $M_X(t) = q + p e^t$



# Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Binomial de parámetros  $p \in [0, 1]$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

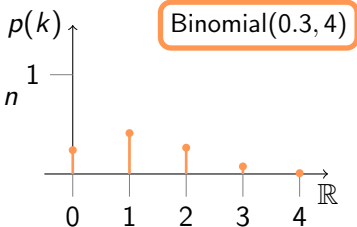
Tiene función de probabilidad

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n$$

donde  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  con  $k \leq n$ .

Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = np$
- $\mathbb{V}\text{ar}[X] = np(1-p)$
- $\phi_X(z) = (1 - p + pz)^n$
- $M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$



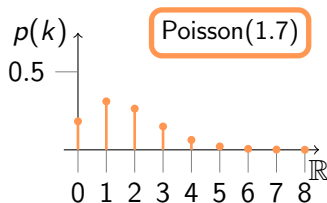
# Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Poisson de parámetros  $\nu > 0$ .

$$X \sim \text{Po}(\nu)$$

Tiene función de probabilidad

$$p_X(k) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} \quad k \geq 0.$$



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = \nu$
- $\mathbb{V}\text{ar}[X] = \nu$
- $\phi_X(z) = \exp(\nu(z - 1))$
- $M_X(t) = \exp(\nu(e^t - 1))$



# Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Geométrica de parámetros  $p > 0$ .

$$X \sim \text{Geo}(p)$$

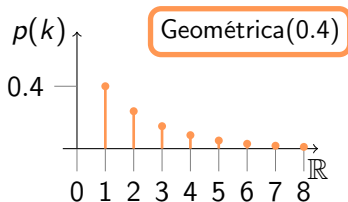
Tiene función de probabilidad

$$p_X(k) = p q^{k-1} \quad k \geq 1 .$$

donde  $p + q = 1$ .

Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = 1/p$
- $\phi_X(z) = \frac{zp}{1-zq}$
- $\mathbb{V}\text{ar}[X] = q/p^2$
- $M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t} \quad t < -\ln(q)$



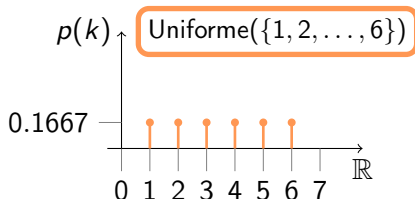
# Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Uniforme Discreta entre 1 y  $N$ , con  $N \geq 1$ .

$$X \sim U(\{1, 2, \dots, N\})$$

Tiene función de probabilidad

$$p_X(k) = 1/N \quad k \in \{1, \dots, N\}.$$



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = \frac{N+1}{2}$
- $\mathbb{V}\text{ar}[X] = \frac{N^2-1}{12}$
- $\phi_X(z) = \frac{z}{N} \frac{1-z^N}{1-z}$
- $M_X(t) = \frac{e^t}{N} \frac{1-e^{Nt}}{1-e^t}$



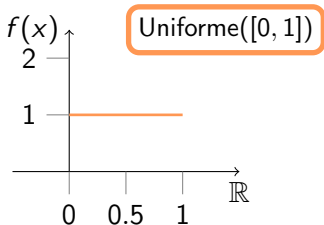
# Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Uniforme Continua entre  $a$  y  $b$ , con  $b > a$ .

$$X \sim U([a, b])$$

Tiene función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} (b-a)^{-1} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Medidas características

$$\circ \mathbb{E}[X] = \frac{b+a}{2}$$

$$\circ \mathbb{V}\text{ar}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\circ \psi_X(t) = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

$$\circ M_X(t) = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}$$





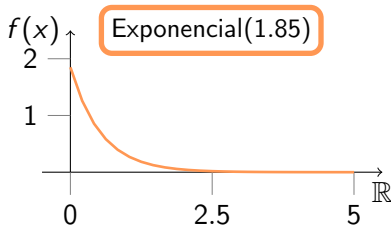
# Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Exponencial con parametro  $\lambda > 0$ .

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

Tiene función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$
- $\mathbb{V}\text{ar}[X] = 1/\lambda^2$
- $M_X(t) = \lambda/(\lambda - t)$
- $\tilde{F}_X(s) = \lambda/(\lambda + s)$



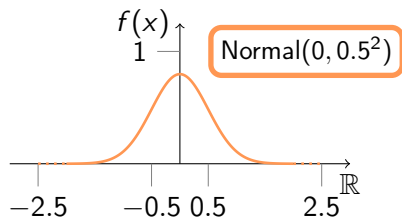
# Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Normal con parámetros  $\mu \in \mathbb{R}$  y  $\sigma \geq 0$ .

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

Tiene función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = \mu$
- $\psi_X(t) = \exp\left(i\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$
- $\mathbb{V}\text{ar}[X] = \sigma^2$
- $M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)$



# Vect. Aleatorios - Medidas características

Sea  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  un vector aleatorio y  $h(x_1, x_2, \dots, x_n)$  una función, se denota la media de la función  $h$  aplicada al vector como

$$\mathbb{E}[h(X_1, X_2, \dots, X_n)] .$$

Si el vector es discreto tenemos que

$$\mathbb{E}[h(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} h(x_1, \dots, x_n) p(x_1, \dots, x_n) ,$$

y si es continuo tenemos que

$$\mathbb{E}[h(X_1, \dots, X_n)] = \int \cdots \int h(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n .$$



# Vectores Aleatorios - Independencia

Dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$  se dicen independientes,  $X \perp Y$ , si por cualquiera dos conjuntos  $A$  y  $B$  se tiene que

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B) .$$

En particular esto es equivalente a decir que, por cualquiera dos funciones  $f(\cdot)$  y  $g(\cdot)$  tenemos que

$$\mathbb{E}[f(X) g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)] \mathbb{E}[g(Y)] .$$

En el caso discreto eso quiere decir que

$$\mathbb{P}_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}_X(x) \mathbb{P}_Y(y)$$

y en el caso continuo

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

es decir las funciones conjuntas son el producto de las marginales.



## Probabilidades condicionadas - caso discreto

Por simplicidad consideramos simplemente el caso bivalente, y consideramos un vector  $(X,Y)$  que supongamos discreto.

Al igual que tratando con sucesos, se puede calcular la probabilidad de que  $X \in A$  una vez que ya sabemos que  $Y \in B$ .

Esto se define como

$$\mathbb{P}(X \in A | Y \in B) = \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y \in B)}{\mathbb{P}(Y \in B)}.$$

Si fijamos el éxito  $Y = y$  tenemos que la nueva variable aleatoria  $X|Y = y$ , asume valores con probabilidad positiva solo en el nuevo espacio muestral  $E|Y = y$ .

En el caso discreto  $X|Y = y$  tendrá función de masa

$$p_{X|Y=y}(x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$



# Probabilidades condicionadas - caso continuo

En el caso continuo, usando la definición de probabilidad condicionada

$$\mathbb{P}(X \in A | Y \in B) = \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y \in B)}{\mathbb{P}(Y \in B)} .$$

tenemos que

$$\mathbb{P}(X \in dx | Y \in dy) = \frac{\mathbb{P}(X \in dx, Y \in dy)}{\mathbb{P}(Y \in dy)} = \frac{f_{X,Y}(x, y) dx dy}{f_Y(y) dy}$$

entonces como  $\mathbb{P}(X \in dx | Y \in dy) = f_{X|Y=y}(x) dx$  tenemos que la función de densidad de  $X|Y = y$  es

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} .$$

## Comentario


*Nota que en el caso continuo se ha condicionado la variable aleatoria  $X$  al caso del éxito de un suceso con probabilidad nula,  $Y = y$  !*

# Medias condicionadas

Teniendo en cuenta de que  $X|Y = y$  sigue siendo una variable aleatoria, se pueden calcular sus funciones características, como su media

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \begin{cases} \sum_{x \in E} x p_{X|Y=y}(x) & \text{caso discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x) dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

o la media de una función  $h(\cdot)$

$$\mathbb{E}[h(X)|Y = y] = \begin{cases} \sum_{x \in E} h(x) p_{X|Y=y}(x) & \text{caso discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f_{X|Y=y}(x) dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$


# Media condicionada

La media condicionada

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \begin{cases} \sum_{x \in E} x p_{X|Y=y}(x) & \text{caso discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y=y}(x) dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

es función del resultado  $y$  obtenido por  $Y$ . Si se calcula su valor antes de saber el resultado obtenido para  $Y$  se tiene una variable aleatoria que se denota por

$$\mathbb{E}[X|Y]$$





# Propiedades de la media condicionada

La media condicionada  $\mathbb{E}[X|Y]$  tiene las siguientes propiedades

- $\mathbb{E}[aX + bZ|Y] = a\mathbb{E}[X|Y] + b\mathbb{E}[Z|Y]$
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$
- $\mathbb{E}[f(Y)X|Y] = f(Y)\mathbb{E}[X|Y]$
- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Z, Y]|Y] = \mathbb{E}[X|Y]$
- $C \text{ constante} \Rightarrow \mathbb{E}[C|Y] = C$
- $X \perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$

Además, usando la función indicadora, se puede expresar la probabilidad condicionada como

$$\mathbb{P}(X \in A|Y) = \mathbb{E}[1_A(X)|Y] .$$



# Ejemplo

Consideramos como experimento el lanzamiento de dos dados  $(X, Y)$ .

Definimos la variable aleatoria  $Z = X + Y$  y hallamos la esperanza condicionada de  $X$  dado  $Z$ , es decir  $\mathbb{E}[X|Z]$ .

Tenemos de inmediato que

$$\mathbb{E}[X|Z = 2] = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[X|Z = 12] = 6$$

y



## Ejemplo

Consideramos como experimento el lanzamiento de dos dados  $(X, Y)$ .

Definimos la variable aleatoria  $Z = X + Y$  y hallamos la esperanza condicionada de  $X$  dado  $Z$ , es decir  $\mathbb{E}[X|Z]$ .

Tenemos de inmediato que

$$\mathbb{E}[X|Z = 2] = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[X|Z = 12] = 6$$

y

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|Z = 3] &= \sum_{x=1}^{x=6} x \mathbb{P}(X = x|Z = 3) \\ &= 1 \mathbb{P}(X = 1|Z = 3) + 2 \mathbb{P}(X = 2|Z = 3) \\ &= 1 \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 2)}{\mathbb{P}(Z = 3)} + 2 \frac{\mathbb{P}(X = 2, Y = 1)}{\mathbb{P}(Z = 3)} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

## Ejemplo

Consideramos como experimento el lanzamiento de dos dados  $(X, Y)$ .

Definimos la variable aleatoria  $Z = X + Y$  y hallamos la esperanza condicionada de  $X$  dado  $Z$ , es decir  $\mathbb{E}[X|Z]$ .

Tenemos de inmediato que

$$\mathbb{E}[X|Z = 2] = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[X|Z = 12] = 6$$

y al final

$$\mathbb{E}[X|Z = z] = \frac{z}{2}$$

es decir la función de probabilidad de  $\mathbb{E}[X|Z]$  es

$$\mathbb{E}[X|Z] = \begin{cases} 1 & \text{con prob. } 1/36; & 1.5 & \text{con prob. } 2/36; \\ 2 & \text{con prob. } 3/36; & 2.5 & \text{con prob. } 4/36; \\ 3 & \text{con prob. } 5/36; \\ 3.5 & \text{con prob. } 6/36; \\ 4 & \text{con prob. } 5/36; & 4.5 & \text{con prob. } 4/36; \\ 5 & \text{con prob. } 3/36; & 5.5 & \text{con prob. } 2/36; \\ 6 & \text{con prob. } 1/36; \end{cases}$$



# Suma de var. aleatorias independientes

Sean,  $X$ , y  $Y$  dos variables aleatorias independientes, tenemos que la suma  $Z = X + Y$  tiene esta distribución

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{E}[1(X + Y \leq z)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[1(X + Y \leq z)|Y]]$$

en el caso discreto

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \sum_{y=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[1(X + Y \leq z)|Y = y]\mathbb{P}(Y = y) \\ &= \sum_{y=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X \leq z - y)\mathbb{P}(Y = y) \end{aligned}$$

es decir

$$p_Z(z) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X = z - y)\mathbb{P}(Y = y) = p_X \star p_Y(z)$$

donde dadas dos funciones discretas  $g(k)$  y  $h(k)$  se define su convolución

$$g \star h(k) = h \star g(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(k - i) h(i)$$



# Suma de var. aleatorias independientes

Sean,  $X$ , y  $Y$  dos variables aleatorias independientes, tenemos que la suma  $Z = X + Y$  tiene esta distribución

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{E}[1(X + Y \leq z)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[1(X + Y \leq z) | Y]]$$

en el caso continuo

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{y=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[1(X + Y \leq z) | Y = y] \mathbb{P}(Y \in dy) \\ &= \int_{y=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X \leq z - y) f_Y(y) dy \end{aligned}$$

es decir

$$f_Z(z) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_X(z - y) \mathbb{P}(Y \in dy) = f_X \star f_Y(z)$$

donde dadas dos funciones continuas  $g(x)$  y  $h(x)$  se define su convolución

$$g \star h(x) = h \star g(x) = \int_{u=-\infty}^{\infty} g(x - u) h(u) du$$



# Suma de var. aleatorias independientes

Sean,  $X$ , y  $Y$  dos variables aleatorias independientes, tenemos que la suma  $Z = X + Y$  tiene esta distribución

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{E}[1(X + Y \leq z)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[1(X + Y \leq z) | Y]]$$

en los dos caso se puede también escribir

$$F_Z(z) = \int_{y=-\infty}^{\infty} F_X(z - y) dF_Y(y) = F_X \otimes F_Y(z)$$

donde la convolución de Stieltjes de dos funciones no decrecientes  $G(x)$  y  $H(x)$  se define como

$$G \otimes H(x) = H \otimes G(x) = \int_{u=-\infty}^{\infty} G(x - u) H'(u) du$$



# Suma de var. aleatorias independientes

La función característica de la suma

$$\begin{aligned}\psi_Z(z) &= \mathbb{E}[e^{izZ}] = \mathbb{E}[e^{iz(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{izX} e^{izY}] \\ &\stackrel{\text{ind}}{=} \mathbb{E}[e^{izX}] \mathbb{E}[e^{izY}] = \psi_X(z) \psi_Y(z)\end{aligned}$$

Lo mismo vale para las otras funciones

$$\begin{aligned}M_Z(t) &= M_X(t) M_Y(t) \\ \phi_Z(z) &= \phi_X(z) \phi_Y(z) \\ \tilde{F}_Z(s) &= \tilde{F}_X(s) \tilde{F}_Y(s)\end{aligned}$$

Esto es útil al momento de calcular los momentos de la suma de variables aleatorias independientes usando la función **generatriz de momentos**,  $M_Z$ , por la fórmula

$$\mu_Z^{(n)} = \mathbb{E}[Z^n] = \left. \frac{dM_Z(t)}{dt^n} \right|_{t=0}.$$





## Ejemplo: Distribución Poisson compuesta

Sea  $N$  una variable aleatoria de Poisson de parametro  $\nu$ , y sea  $X_1, X_2, \dots$  una sucesión de variables aleatorias independientes y igualmente distribuidas independientes de  $N$ .

La variable aleatoria de **Poisson compuesta**,  $Z$ , se define como la suma aleatoria de  $N$  de esas variables, es decir

$$Z = \sum_{n=1}^N X_n$$

y vale 0 si  $N = 0$ .

Tenemos que, con  $X \sim X_1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}[N] \mathbb{E}[X] &= \nu \mathbb{E}[X] &= \nu \mu_X^{(1)} \\ \text{Var}[Z] &= \mathbb{E}[N] \text{Var}[X] + \mathbb{E}^2[X] \text{Var}[N] &= \nu \mathbb{E}[X^2] &= \nu \mu_X^{(2)} \end{aligned}$$



# Definición de Proceso Estocástico

Un Proceso Estocástico en tiempo discreto  $X = (X_n, n \geq 0)$ , es una colección numerable de variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ .

Es decir a cada experimento  $\omega \in \Omega$  corresponde una secuencia infinita de valores in  $\mathbb{R}$ :

$$X : \omega \in \Omega \rightarrow X(\omega) = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty .$$

Fijado un valor de  $\omega$ , la secuencia  $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ , que nos da la trayectoria del proceso a lo largo de todo el tiempo,  $n \geq 0$ , toma el nombre de **camino muestral**.

Si fijamos un instante de tiempo  $n \in \mathbb{N}$  tenemos la realización del proceso al tiempo  $n$ , es decir la variable aleatoria

$$X(n) \text{ o } X_n : \omega \in \Omega \rightarrow X_n(\omega) = x_n \in \mathbb{R} .$$



# Distribuciones de Dimensiones Finitas

Para poder calcular la probabilidad de sucesos relacionados con el proceso  $X$ , tenemos que conocer las distribuciones de los vectores  $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$  por cualquier índices finitos  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{N}$ .

Es decir, fijado un número  $n < \infty$ ,  $n$  instantes de tiempo,  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{N}$  y un equivalente número de niveles  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  se necesita conocer el valor de la distribución conjunta

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n) .$$

La colección de funciones

$$\{F_{t_1, t_2, \dots, t_n} : n < \infty \text{ y } t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{N}\}$$

se llama **distribuciones de dimensiones finitas** o **DDF** .



# Consistencia de las DDF

Para que las DDF sean consistentes, hay que cumplirse la siguiente propiedad

$$\begin{aligned} \lim_{x_k \rightarrow \infty} F_{t_1, \dots, t_{k-1}, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \\ = F_{t_1, \dots, t_{k-1}, t_{k+1}, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Además, dada una colección de funciones de distribución coherentes, siempre es posible construir un proceso  $X$  sobre un espacio de probabilidad que tenga esta colección como DDF.



# Versiones, modificaciones y procesos indistinguibles

Dados dos procesos estocásticos,  $X$  y  $Y$ , decimos que

- son **versiones** el uno del otro si tienen las mismas DDF
- son **modificaciones** el uno del otro si están definidos sobre el mismo espacio de probabilidad  $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$  y

$$\mathbb{P}(X_n = Y_n) = 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

- son **indistinguibles** si

$$\mathbb{P}(X_n = Y_n, n \in \mathbb{N}) = 1$$

Es inmediato verificar que **modificaciones**  $\Rightarrow$  **versiones**.

En tiempo discreto, **modificaciones**  $\iff$  **indistinguibles**.

Dos procesos que son versiones el uno del otro no tienen porque estar definidos sobre el mismo espacio de probabilidad.



# Medidas características

Las medidas características de un proceso  $X$  son funciones del tiempo.

Por ejemplo, estas son algunas definiciones de medidas características comunes:

**media:**  $\mu_X(n) = \mathbb{E}[X(n)]$

**varianza:**  $\sigma_X^2(n) = \mathbb{V}\text{ar}[X(n)] = \mathbb{E}[(X(n) - \mu_X(n))^2]$

**autocorrelación:**  $R_X(n, m) = \mathbb{E}[X(n)X(m)]$

**autocovarianza:**  $\mathbb{C}\text{ov}_X(n, m) = \mathbb{E}[(X(n) - \mu_X(n))(X(m) - \mu_X(m))]$



# Medidas características cruzadas

Sean  $X$  y  $Y$  dos procesos, se definen las funciones

**correlación:**  $R_{X,Y}(n, m) = \mathbb{E}[X(n)Y(m)]$

**covarianza:**  $\mathbb{Cov}_{X,Y}(n, m) = \mathbb{E}[(X(n) - \mu_X(n))(Y(m) - \mu_Y(m))]$

Dos procesos se dicen

**incorrelados** cuando  $\mathbb{Cov}_{X,Y}(n, m) = 0$ ,

**ortogonales** cuando  $R_{X,Y}(n, m) = 0$ .



# Normal multivariante

## Definición (Distribución Normal multivariante)

*Un vector aleatorio  $\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_m)$  tiene una distribución Normal multivariante si se puede escribir como una transformación lineal de un vector  $\vec{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$  hecho por Normales estándar independientes.*

*Es decir existe una matriz,  $A = (a_{ij})$ , y un vector determinista,  $\vec{\mu} = (\mu_j)$ , con  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq m$ , tal que se verifica*

$$\vec{X} = \vec{Z} A + \vec{\mu}$$

Una distribución normal multivariante se caracteriza por su vector de medias y su matriz de covarianzas

$$\vec{\mu} = (\mathbb{E}[X_1], \mathbb{E}[X_2], \dots, \mathbb{E}[X_m]) \quad C = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq m}.$$

Recuerda  $\text{Cov}(X_i, X_i) = \text{Var}[X_i]$  y

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])] .$$





# Proceso Gaussiano

## Definición (Proceso Gaussiano)

Un proceso estocástico  $X(t)$  se dice *Gaussiano* si por cualquier conjunto de tiempos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  el vector

$$(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$$

es una multivariante normal.

Un proceso Gaussiano se caracteriza por sus funciones de media y covarianzas

$$\mu(t) = \mathbb{E}[X(t)]$$

$$C(s, t) = \text{Cov}(X(s), X(t)) = \mathbb{E}[(X(s) - \mu(s))(X(t) - \mu(t))] .$$



# Procesos independientes

Dos procesos,  $X$  y  $Y$ , se dicen **independientes** si los vectores

$$(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}) \text{ y } (Y_{s_1}, Y_{s_2}, \dots, Y_{s_m})$$

son independientes, por cualquier valor de los índices

$$t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{N} \text{ y } s_1, s_2, \dots, s_m \in \mathbb{N}, \quad n, m < \infty.$$

Tenemos que

**independientes**  $\Rightarrow$  **incorrelados**.

**independientes**  $\not\Leftarrow$  **incorrelados**.

**independientes**  $\Leftarrow$  **incorrelados** + **Gaussianos**.



# Estacionariedad fuerte

Un proceso se dice **estacionario en sentido fuerte** si la familia de FFD es invariable por translaciones del tiempo.

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n} = F_{t_1+s, t_2+s, \dots, t_n+s}$$

para todos los  $n < \infty$ ,  $t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{N}$  y  $s \in \mathbb{N}$ .



# Estacionariedad debil

Se dice **estacionario en sentido débil** si las funciones media y autocorrelacion cumplen con la propiedad de invariancia.

$$\mu_X(n) = \mu_X(n + s) = \mu_X(0)$$

$$\mathbb{Cov}_X(n, m) = \mathbb{Cov}_X(n + s, m + s) = \mathbb{Cov}_X(0, m - n)$$

para todos los  $n, m$  y  $s \in \mathbb{N}$ .



# Relaciones de estacionariedad

estacionario en sentido fuerte  $\Rightarrow$  estacionario en sentido débil.

estacionario en sentido fuerte  $\nRightarrow$  estacionario en sentido débil.

estacionario en sentido fuerte  $\Leftarrow$  estacionario en sentido débil

+ Gaussianos.



# Bibliografia I



S. M. Ross

Stochastic processes.

*John Wiley and Sons, Inc.*, 2ed., 1996.

**Capítulo I**



R. Durrett.

Essentials of stochastic processes.

*Springer.*, 1999.

**Apéndice A**

