Tema 0

Prerrequisitos

Bernardo D'Auria

Universidad Carlos III de Madrid

Procesos Estocásticos
Grado en Estadística y Empresa

Objetivo del tema

El objetivo principal de esta tema es recordar y introducir los conceptos básicos de:

- Sucesos y Probabilidad de sucesos.
- Variables y Vectores aleatorios.
- Funciones de probabilidad, de densidad y distribuciones.
- Transformadas de Fourier y Laplace. Funciones características.
- Probabilidad y Media condicionadas

Sucesos y Probabilidad de sucesos

Un espacio de probabilidad se define con terna

$$(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$$

y se usa come concepto matematico abstracto para modelizar y analizar de forma analitica fenómenos aleatorios.

- Ω se llama espacio muestral y contiene todos los posibles sucesos simples del experimento aleatorio.
- Σ es una sigma-algebra y está definida como un conjunto cuyos elementos son subconjuntos del espacio muestral Ω. Los elementos de Σ se llaman suscesos aleatorios y serán los únicos eventos cuya probabilidad de éxito se pueda calcular.
- $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad o distribución de probabilidad, que a cada elemento de Σ asocia un valor entre $[0, 1]$ que denota su probabilidad de éxito.

Ω: El espacio muestral

El espacio muestral, Ω, puede ser cualquier conjunto, solo hace falta que no sea vacío.

Puede contener un numero finito, infinito numerable o infinito no numerable de elementos.

Example

- Lanzamiento de un dado

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$$

- Número de siniestros que pueden ocurrir en un año

$$\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{Z}^+$$

- Generación de dos números al azar entre cero y uno

$$\Omega = [0, 1] \times [0, 1] = [0, 1]^2$$

- Ganancia o perdida de una empresa a final de año

$$\Omega = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$$

Σ: La sigma-algebra

La sigma algebra Σ es el conjunto de sucesos que se pueden medir usando la medida de probabilidad $\mathbb{P}$.

Las propiedades de Σ son:

- El conjunto vacío es siempre medible

$$\emptyset \in \Sigma$$

- Si un conjunto $A \subset \Omega$ es un suceso, también lo será el conjunto complemento $A^c \subset \Omega$

$$A \in \Sigma \iff A^c \in \Sigma$$

- Sea $\{A_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de conjuntos medibles, también el conjunto unión $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ será medible

$$A_n \in \Sigma \quad \forall n \geq 1 \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$$

Σ: La sigma-algebra

Example

- El conjunto de todos los subconjuntos de Ω
$$\Sigma = 2^{\Omega}$$
- Lanzamiento de una moneda. $\Omega = \{\text{Cara, Cruz}\}$
$$\Sigma = \{\emptyset, \{\text{Cara}\}, \{\text{Cruz}\}, \Omega\} = 2^{\Omega}$$
- Generación de un número al azar entre cero y uno. $\Omega = [0, 1]$
$\Sigma = ([0, 1])$ contiene todos los subconjuntos $[0, x)$, con $x \in \Omega$, como también la unión y la intersección de cualquier sucesiones de ellos

Comentario

Cuando Ω no es numerable, la sigma-algebra completa 2^{Ω} no se puede usar por qué no sería posible definir una función de probabilidad $\mathbb{P}$ con las propiedades que se van a enunciar en la siguiente transparencia.

$\mathbb{P}$: La distribución de probabilidad

La distribución de probabilidad $\mathbb{P}$ es una función que asocia a cada suceso un valor entre 0 y 1, que indica la probabilidad de que el suceso se cumpla en el realizar el experimento aleatorio.

$$\mathbb{P}: \quad A \in \Sigma \to \mathbb{P}(A) \in [0,1] \ .$$

La distribución de probabilidad tiene las siguientes propiedades

- El suceso imposible, es decir vacío, tiene probabilidad nula de éxito
$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$
- El suceso complementario tiene probabilidad de éxito complemental
$$A \in \Sigma, \quad \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$$
- La probabilidad de la unión de dos sucesos A y B, incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), es data por la suma de sus probabilidades
$$A, B \in \Sigma, \quad A \cap B = \emptyset \quad \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

$\mathbb{P}$: La distribución de probabilidad

Example

- La probabilidad de que un día haya lluvia. $\Omega = \{\text{Hay lluvia, No hay lluvia}\}$, $\Sigma = 2^{\Omega}$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0,\ \mathbb{P}(\text{Hay lluvia}) = 1/4,\ \mathbb{P}(\{\text{No hay lluvia}) = 3/4,\ \mathbb{P}(\Omega) = 1\ .$$

- Generación de un número uniforme al azar entre cero y uno. $\Omega = [0, 1]$, $\Sigma = ([0, 1])$

$$\mathbb{P}([0, x)) = x, \quad x \in [0, 1]$$

Comentario

Cuando Ω no es numerable, es posible que la probabilidad de cada suceso elemental sea 0, aún haya sucesos con probabilidad positiva. En el ultimo ejemplo

$$\mathbb{P}(\{x\}) = 0 \quad \forall x \in \Omega\ .$$

Proabilidad condicionada

Si se supone que al realizar un experimento ya sabemos algo del resultado, por ejemplo que el suceso B haya ocurrido, nos podemos preguntar cual es la probabilidad que otro evento ocurra. Se habla en este caso de probabilidades condicionadas.

La probabilidad del suceso A dado (que haya ocurrido) el suceso B, de probabilidad positiva, se define como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \ .$$

Proabilidad condicionada

Si se supone que al realizar un experimento ya sabemos algo del resultado, por ejemplo que el suceso B haya ocurrido, nos podemos preguntar cual es la probabilidad que otro evento ocurra. Se habla en este caso de probabilidades condicionadas.

La probabilidad del suceso A dado (que haya ocurrido) el suceso B, de probabilidad positiva, se define como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \ .$$

A menudo la relación arriba se usa también en la forma

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\,\mathbb{P}(B) \ ,$$

es decir se puede eliminar la condición multiplicando para la probabilidad del suceso que condiciona.

Proabilidad condicionada

Si se supone que al realizar un experimento ya sabemos algo del resultado, por ejemplo que el suceso B haya ocurrido, nos podemos preguntar cual es la probabilidad que otro evento ocurra. Se habla en este caso de probabilidades condicionadas.

La probabilidad del suceso A dado (que haya ocurrido) el suceso B, de probabilidad positiva, se define como

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \ .$$

Comentario

Es importante notar que en general $\mathbb{P}(A|B) \neq \mathbb{P}(B|A)$.

Sucesos independientes

Dos sucesos, A y B de probabilidad positiva, son independientes, $A \perp B$, si teniendo información que uno de ellos haya ocurrido no añade ninguna información útil sobre la probabilidad de que haya ocurrido también el otro.

Todas estas condiciones son equivalentes

- $A \perp B$
- $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$
- $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$
- $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)$

Fórmula de la Proabilidad Total

Una fórmula que a menudo se usa para calcular probabilidades es la fórmula de la probabilidad total. Si tenemos unos sucesos $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \Sigma$ y estos son mutuamente excluyentes, es decir

$$B_i \cap B_j = \emptyset \quad \text{con } i \neq j$$

y si el conjunto A, cuya probabilidad nos interesa, es contenidos en estos,

$$A \subset \cup_i B_i \ ,$$

tenemos que

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(A|B_i)\,\mathbb{P}(B_i) \ .$$

Variables Aleatorias

Una variable aleatoria, X, es una función real definida en el espacio muestral Ω

$$X : \omega \in \Omega \to X(\omega) \in E \subset \mathbb{R} \ .$$

Generalmente las variables aleatorias se denotan con letras mayúsculas: X, Y, Z, ...

Las variables aleatorias se pueden caracterizar por el conjunto de valores, $E = X(\Omega)$, que pueden tomar. Se dividen en:

- discretas
- continuas
- mixtas

Variables Aleatorias

Una variable aleatoria, X, es una función real definida en el espacio muestral Ω

$$X : \omega \in \Omega \to X(\omega) \in E \subset \mathbb{R} \ .$$

Generalmente las variables aleatorias se denotan con letras mayúsculas: X, Y, Z, ...

Las variables aleatorias se pueden caracterizar por el conjunto de valores, $E = X(\Omega)$, que pueden tomar. Se dividen en:

- discretas
- continuas
- mixtas

Puede asumir solo un número finito o numerable de valores.

Ejemplos: Lanzamientos de un dado, número de alumnos en un aula, el número de bits errados recibidos en una transmisión.

Variables Aleatorias

Una variable aleatoria, X, es una función real definida en el espacio muestral Ω

$$X : \omega \in \Omega \to X(\omega) \in E \subset \mathbb{R} \ .$$

Generalmente las variables aleatorias se denotan con letras mayúsculas: X, Y, Z, ...

Las variables aleatorias se pueden caracterizar por el conjunto de valores, $E = X(\Omega)$, que pueden tomar. Se dividen en:

- discretas
- continuas
- mixtas

Asumen un número no numerable de valores y cada uno con probabilidad 0.

Ejemplos: Altura de un estudiante, valor de una corriente en un cable, temperatura de un material.

Variables Aleatorias

Una variable aleatoria, X, es una función real definida en el espacio muestral Ω

$$X : \omega \in \Omega \to X(\omega) \in E \subset \mathbb{R} \, .$$

Generalmente las variables aleatorias se denotan con letras mayúsculas: X, Y, Z, $\ldots$

Las variables aleatorias se pueden caracterizar por el conjunto de valores, $E = X(\Omega)$, que pueden tomar. Se dividen en:

- discretas
- continuas
- mixtas

Asumen un número no numerable de valores y algunos de ellos con probabilidad positiva.

Ejemplo: El tiempo de espera en una tienda antes de ser atendido.

Variables aleatorias discretas

Una variable aleatoria discreta X, se caracteriza por su función de probabilidad o función de masa,

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) \ ,$$

que tiene las siguientes propiedades

- $0 \leq p(x) \leq 1$, por todos los $x \in \mathbb{R}$
- $\sum_{x \in E} p(x) = 1$

Variables aleatorias discretas

Una variable aleatoria discreta X, se caracteriza por su función de probabilidad o función de masa,

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) \ ,$$

que tiene las siguientes propiedades

- $0 \leq p(x) \leq 1$, por todos los $x \in \mathbb{R}$
- $\sum_{x \in E} p(x) = 1$

o por la función de distribución, $F_X(\cdot)$, definida como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Esta función se puede calcular una vez conocida la función de probabilidad usando la fórmula

$$F_X(x) = \sum_{\{e \in E : e \leq x\}} p_X(e) \ .$$

Variables aleatorias discretas

Una variable aleatoria discreta X, se caracteriza por su función de probabilidad o función de masa,

$$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) \ ,$$

que tiene las siguientes propiedades

- $0 \leq p(x) \leq 1$, por todos los $x \in \mathbb{R}$
- $\sum_{x \in E} p(x) = 1$

o por la función de distribución, $F_X(\cdot)$, definida como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

La función de distribución tiene las siguientes propiedades

- Es no decreciente: $F(x + \Delta x) \geq F(x), \qquad \Delta x \geq 0$
- Empieza en 0 y acaba en 1: $F(-\infty) = 0 \ , \qquad F(+\infty) = 1$
- Es continua a la derecha: $\lim_{\Delta x \to 0^+} F(x + \Delta x) = F(x)$

Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria continua X, se caracteriza por su función de densidad,

$$f_X(x) = \frac{\mathbb{P}(x \leq X \leq x + dx)}{dx} = \frac{\mathbb{P}(X \in dx)}{dx} \ ,$$

que tiene las siguientes propiedades

- $f(x) \geq 0$, por todos los $x \in \mathbb{R}$
- $\int_{x\in\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$

o por la función de distribución, $F_X(\cdot)$, definida como en el caso de las variables aleatorias discretas como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Esta función se puede calcular una vez conocida la función de densidad usando la fórmula

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

y tiene las mismas propiedades que en caso discreto.

Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria continua X, se caracteriza por su función de densidad,

$$f_X(x) = \frac{\mathbb{P}(x \le X \le x + dx)}{dx} = \frac{\mathbb{P}(X \in dx)}{dx} ,$$

que tiene las siguientes propiedades

- $f(x) \ge 0$, por todos los $x \in \mathbb{R}$
- $\int_{x\in\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$

o por la función de distribución, $F_X(\cdot)$, definida como en el caso de las variables aleatorias discretas como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x) \quad x \in \mathbb{R} .$$

Esta función se puede calcular una vez conocida la función de densidad usando la fórmula

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

y tiene las mismas propiedades que en caso discreto.

Variables Aleatorias Continuas

Una variable aleatoria continua X, se caracteriza por su función de densidad,

$$f_X(x) = \frac{\mathbb{P}(x \leq X \leq x + dx)}{dx} = \frac{\mathbb{P}(X \in dx)}{dx} \ ,$$

que tiene las siguientes propiedades

- $f(x) \geq 0$, por todos los $x \in \mathbb{R}$
- $\int_{x \in \mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$

o por la función de distribución, $F_X(\cdot)$, definida como en el caso de las variables aleatorias discretas como

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) \quad x \in \mathbb{R} \ .$$

Esta función se puede calcular una vez conocida la función de densidad usando la fórmula

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

y tiene las mismas propiedades que en caso discreto.

Funciones que caracterizan una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria, se definen las siguientes funciones

- La función característica, $\psi_X(s)$,
$$\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\,t\,X}] \quad t \in \mathbb{R} \ .$$
- La función generatriz de momentos, $M_X(t)$,
$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{t\,X}] \quad t \in \mathbb{R} \ .$$
- La función generatriz, $\phi_X(z)$, generalmente cuando X es discreta,
$$\phi_X(z) = \mathbb{E}[z^X] \quad z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1 \ .$$
- La trasformata de Laplace, $\tilde{F}_X(s)$, solo cuando $X \geq 0$,
$$\tilde{F}_X(s) = \mathbb{E}[e^{-s\,X}] \quad s \in \mathbb{R} \ .$$

Todas estas funciones caracterizan la variable aleatoria, es decir si dos variables aleatorias, X e Y, tienen una de estas funciones iguales entonces todas serán iguales y $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y$.

Ejemplos de Variables Aleatorias

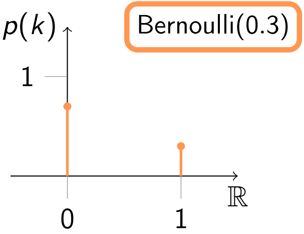
Variable aleatoria Bernoulli de parametro $p \in [0, 1]$.

$$X \sim \text{Be}(p)$$

Tiene función de probabilidad

$$p_X(k) = \begin{cases} q & k = 0 \\ p & k = 1 \end{cases}$$

donde $q = 1 - p$.



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = p$
- $\mathbb{V}\text{ar}[X] = p\,q$
- $\phi_X(z) = q + p\,z$
- $M_X(t) = q + p\,e^t$

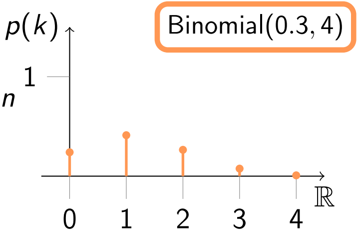
Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Binomial de parámetros $p \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$.

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

Tiene función de probabilidad

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n$$



donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ con $k \leq n$.

Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = n\,p$
- $\mathbb{V}\text{ar}[X] = n\,p\,(1-p)$
- $\phi_X(z) = (1 - p + p\,z)^n$
- $M_X(t) = (1 - p + p\,e^t)^n$

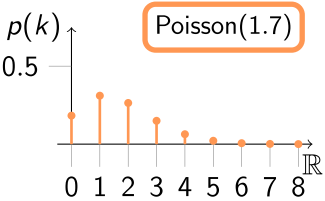
Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Poisson de parámetros $\nu > 0$.

$$X \sim \mathrm{Po}(\nu)$$

Tiene función de probabilidad

$$p_X(k) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} \quad k \geq 0 \ .$$



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = \nu$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \nu$
- $\phi_X(z) = \exp(\nu(z-1))$
- $M_X(t) = \exp(\nu(e^t - 1))$

Ejemplos de Variables Aleatorias

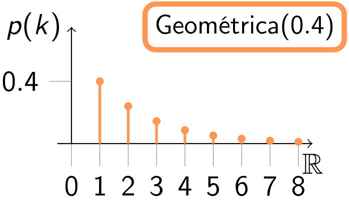
Variable aleatoria Geométrica de parámetros $p > 0$.

$$X \sim \mathrm{Geo}(p)$$

Tiene función de probabilidad

$$p_X(k) = p\, q^{k-1} \quad k \geq 1\ .$$

donde $p + q = 1$.



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = 1/p$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = q/p^2$
- $\phi_X(z) = \frac{z\,p}{1-z\,q}$
- $M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t} \quad t < -\ln(q)$

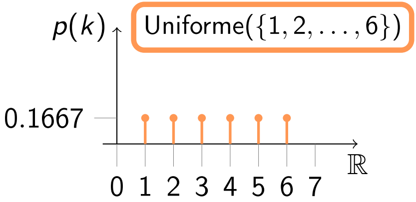
Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Uniforme Discreta entre 1 y N, con $N \geq 1$.

$$X \sim \mathrm{U}(\{1, 2, \ldots, N\})$$

Tiene función de probabilidad

$$p_X(k) = 1/N \quad k \in \{1, \ldots, N\} \, .$$



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = \frac{N+1}{2}$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \frac{N^2-1}{12}$
- $\phi_X(z) = \frac{z}{N} \frac{1-z^N}{1-z}$
- $M_X(t) = \frac{e^t}{N} \frac{1-e^{N\,t}}{1-e^t}$

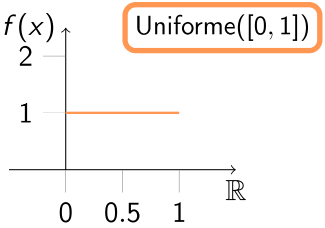
Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Uniforme Continua entre a y b, con $b > a$.

$$X \sim \mathrm{U}([a, b])$$

Tiene función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} (b-a)^{-1} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = \frac{b+a}{2}$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $\psi_X(t) = \frac{e^{i\,t\,b} - e^{i\,t\,a}}{i\,t(b-a)}$
- $M_X(t) = \frac{e^{t\,b} - e^{t\,a}}{t(b-a)}$

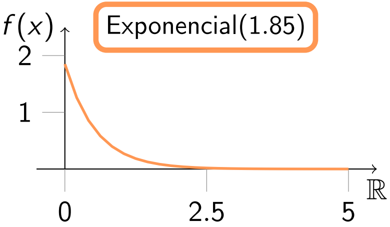
Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Exponencial con parametro $\lambda > 0$.

$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$$

Tiene función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = 1/\lambda^2$
- $M_X(t) = \lambda/(\lambda - t)$
- $\tilde{F}_X(s) = \lambda/(\lambda + s)$

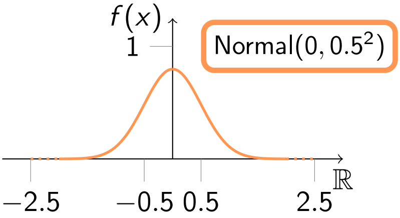
Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Normal con parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma \geq 0$.

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

Tiene función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = \mu$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \sigma$
- $\psi_X(t) = \exp\left(i\,\mu\,t - \frac{\sigma^2\,t^2}{2}\right)$
- $M_X(t) = \exp\left(\mu\,t + \frac{\sigma^2\,t^2}{2}\right)$

Vectores Aleatorios - conjunta

Una vector aleatorio es un n-pla de variables aleatorias

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) : \omega \in \Omega \to (X_1(\omega), X_2(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in \mathbb{R}^n$$

Para el vector se define la función de distribución conjunta

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \dots, X_n \le x_n)$$

Si todas las componente del vector son discretas se puede definir la función de probabilidad conjunta

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n)$$

y si todas son continuas la función de densidad de probabilidad conjunta,

$$f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n = \mathbb{P}(X_1 \in dx_1, \dots, X_n \in dx_n) \ .$$

Vectores Aleatorios - marginal

Usando la distribución conjunta se puede calcular la marginal poniendo las otras coordenadas al infinito

$$F_{X_2}(x) = \mathbb{P}(X_2 \leq x) = F(\infty, x, \ldots, \infty)$$

La función de probabilidad marginal se obtiene desde la conjunta sumando sus valores al variar de todas las otras variables

$$p_{X_2}(x) = \sum_{x_1} \sum_{x_3} \cdots \sum_{x_n} p(x_1, x, x_3 \ldots, x_n) \ .$$

en el caso continuo se obtiene integrando,

$$f_{X_n}(x) = \int \cdots \int f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x) \, dx_1 \cdots dx_{n-1} \ .$$

Bibliografia I

- S. M. Ross
  Stochastic processes.
  John Wiley and Sons, Inc., 2ed., 1996.
  Capítulo I
- R. Durrett.
  Essentials of stochastic processes.
  Springer., 1999.
  Apéndice A