Ejercicios: Cadenas de Markov en tiempo discreto

1. Considera la cadena de Markov con estados $\{1, 2, 3\}$, matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \end{pmatrix}$$

y que empieza en el tiempo 0 con distribución $\pi = (0.5, 0.5, 0)$

a) las matrices de transición de orden 2 y 3

b) la distribución de las variables aleatorias $X(2)$ y $X(3)$

c) la medidas características $\mathbb{E}[X(2)]$, $\mathbb{E}[X^2(3)]$

d) intenta calcular la distribución conjunta de $(X(2), X(3))$

e) calcula la medida característica $\mathbb{E}[X(2)\,X(3)]$

2. Una empresa aseguradora produce un contrato de seguro de 3 años para un trabajador de alto riesgo según el siguiente modelo de Cadena de Markov homogénea:

Estados:

1 en activo

2 inactivo

3 jubilado

4 muerto

Matriz de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los cambios de estados solo ocurren al final de año y el beneficio por muerte es de 10.000€ y se paga al final del año que haya muerte. Al momento del contrato el trabajador se encuentra en estado inactivo.

Hallar

a) el valor presente del beneficio potencial de muerte antes de estipular el contrato asumiendo un taso de interés del 4 % anuo.

b) el precio del contrato en el caso la empresa aseguradora tuviera una función de utilidad exponencial negativa de parámetro $a = (1000€)^{-1}$ y usara el principio de la utilidad nula.

3. Considera la Cadena de Markov homogénea con estados $\{1, 2, 3\}$ y matriz de transiciones:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dibuja el diagrama de transición

b) Determina las clases y sus períodos

c) Calcula la distribución estacionaria π

d) Calcula la distribución de $X(3)$ sabiendo que la cadena haya empezado en el estado 3 al tiempo 0.

e) Calcula la distribución de $X(3)$ en el caso la distribución inicial fuera $\pi(0) = (0, 0.5, 0.5)$.

f) Calcula la distribución de $X(3)$ en el caso la distribución inicial fuera la distribución estacionaria π.

g) Calcula los valores de $\mathbb{E}_3[X(3)]$ y $\mathbb{E}_{\pi(0)}[X(3)]$ y $\mathbb{E}_\pi[X(3)]$.

h) Calcula los valores de $\mathbb{E}_3[h(X(3))]$ y $\mathbb{E}_{\pi(0)}[h(X(3))]$ y $\mathbb{E}_\pi[h(X(3))]$ con $h(x) = x^2$.

Nota: Puedes usar R para comprobar tus cálculos.

4. Considera la Cadena de Markov homogénea, $X(n)$, con matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} .$$

   a) Dibuja el diagrama de transición, determina las clases y sus períodos

   Considera 1 como tiempo inicial, calcula:

   b) $\mathbb{P}_1(X(4) = 2)$, $\mathbb{P}_1(X(4) = 2|X(3) = 1)$, $\mathbb{P}(X(6) = 2|X(4) = 2, X(2) = 1)$.

   Llamando $X_{[4]} = 2112$ el suceso $X(1) = 2$, $X(2) = 1, X(3) = 1, X(4) = 2$, calcula:

   c) $\mathbb{P}_1(X_{[4]} = 2112)$, $\mathbb{P}_2(X_{[4]} = 2112)$, $\mathbb{P}(X_{[4]} = 2112|X_{[2]} = 21)$.
   d) La distribución del tiempo de regreso en 1 para $n = 1, 2, 3, 4$ y n, es decir $\mathbb{P}_1(T_1 = n)$, con $n \geq 2$.
   e) La distribución estacionaria.
   f) La fracción de tiempo que la cadena estará en el estado 1 en un tiempo infinito, es decir $\lim_n N_1(n)/n$.
   g) El tiempo medio de regreso al estado 1, es decir $\mathbb{E}_1[T_1]$.

5. Considera la Cadena de Markov homogénea con matriz de transiciones:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Dibuja el diagrama de transición
   b) Determina las clases y sus períodos
   c) Encuentra la distribución del tiempo de parada T_{11}
   d) Calcula la distribución estacionaria
   e) Es la distribución estacionaria igual que la límite?
   Comparas los valores de $\mathbb{P}_1(X(2n) = 1)$ y $\mathbb{P}_1(X(2n+1) = 1)$, por n intero grande.

   Nota: Este ejercicio está pensado para que se use R para resolverlo.

6. Una empresa aseguradora produce un contrato de seguro de vida de 3 años para trabajadores de dos tipos, de alto riesgo (I) y de bajo riesgo (II). La empresa no conoce la naturaleza del trabajador que quiere hacer el contrato, pero sabe que el 60 % de los trabajadores que quieren contratar sus seguros son de alto riesgo.

   El modelo que usa la empresa para calcular el precio del contrato es una cadena de Markov y para cada tipo de trabajador considera 3 posibles estados: activo, inactivo y muerto. Si el trabajador es de tipo (I) pasará de activo a inactivo en el año siguiente con una probabilidad del 30 % mientras seguirá activo con una probabilidad del 65 %. En el caso el trabajador sea del tipo (II) las probabilidades anteriores serán del 10 % y del 89 %. Un trabajador del tipo (I) en estado inactivo se dará de alta el año siguiente con una probabilidad del 10 % y se quedará de baja con una probabilidad del 70 % mientras para un trabajador del tipo (II) las mismas transiciones se habrán con probabilidades del 70 % y 25 %. Las probabilidades que quedan serán para una transición al estado de muerte.

   Asumiendo que la indemnización en caso de muerte es de 5000€, con un taso de interés del 9 % halla:

   a) la matriz de transición de la cadena de Markov y dibuja el diagrama de transición.
   b) las diferentes clases de la cadena de Markov y sus periodos.
   c) el precio del contrato de forma teórica si el trabajador empieza en estado inactivo
   d) comprueba el resultado simulando la cadena con R

7. *Contrato de seguro*: Una empresa aseguradora produce un contrato de seguro de 3 años para un trabajador de alto riesgo según un modelo de Cadena de Markov homogénea con estados (1 - en activo, 2 - inactivo, 3 - jubilado, 4 - muerto) y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.15 & 0.15 & 0.05 \\ 0.15 & 0.65 & 0.0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Se asume que los cambios de estados solo ocurren al final de año y el beneficio por muerte es de 15.000€ y se paga al final del año que haya muerte, y que al momento del contrato el trabajador se encuentra en estado inactivo.

   Hallar:

   a) el valor presente del beneficio potencial de muerte antes de estipular el contrato asumiendo un taso de interés del 3 % anuo.
   b) el número medio de años que se espera el trabajador pasará en activo
   c) el número medio de años que se espera el trabajador se quedará inactivo

   Si el contrato fuera con duración de 10 años

   d) como cambiaría el valor encontrado en el apartado c)) ?

   Y si fuera a tiempo indefinido, hallar

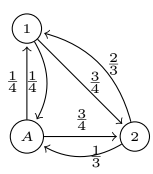
   e) la probabilidad que el trabajador acabara el contrato sin recibir el beneficio por muerte
   f) la probabilidad que el trabajador volviera a darse de alta

8. Considera un juego donde un jugador tiene un número inicial de 2 monedas. Cada vez que juega puede ganar una moneda con una probabilidad del 55 % y perder *dos* con la restante probabilidad. El juego termina si el jugador pierde todas sus monedas o cuando llegue a tener 6 monedas en total (puede que en la última jugada tenga que perder una sola moneda).

   a) Modelar este juego por una cadena de Markov
   b) Calcula el número medio de jugadas en que el jugador tendrá 2 monedas
   c) Calcula el número medio de jugadas en que el jugador tendrá 5 monedas
   d) Calcula la probabilidad que el jugador tiene de ganar
   e) Calcula la probabilidad que el jugador tenga en alguna de las jugadas 4 monedas
   f) Calcula el número medio de jugadas en que el jugador tendrá 5 monedas considerando solo las primeras 5, 10 y 15 jugadas

9. La maquina de una empresa produce los productos por un proceso que necesita 2 diferentes fases y cada día se elige la fase del trabajo según un modelo de cadena de Markov. En cada fase hay una diferente probabilidad que la maquina se averíe (A), y en este caso la empresa tiene que pagar un coste de 7 para arreglarla, lo que también necesita un día.

   El diagrama de transición es el siguiente



   a) Escribe la matriz de transición, determina las clases de la cadena, caracteriza sus estados y determina sus periodos.
   b) Determinar, en régimen estacionario, el gasto medio mensual que la empresa tiene que pagar para los arreglos.
   c) Modificando apropiadamente el modelo, calcular, empezando en el estado 1, los números medios de pasos que la maquina hace en el estado 1 y en el estado 2 antes de terminar necesitando un arreglo.

d) La probabilidad, empezando en el estado 2 de acabar en necesidad de un arreglo antes de pasar por el estado 1.

10. Se considere el juego de un jugador con probabilidad 40 % de ganar y 30 % de empatar. La monedas en juego son 6 y el jugador empieza con 3.

   a) Describe el proceso usando una cadena de Markov, dibuja el diagrama de transición y caracteriza sus estados y calcula sus periodos.
   b) Define un proceso martingala que sirva para calcular la probabilidad que el jugador tiene de ganar.
   c) Encuentra la probabilidad que el jugador tiene de acabar el juego ganando todas las monedas.
   d) El número medio de jugadas que el jugador juega antes de acabar el juego.