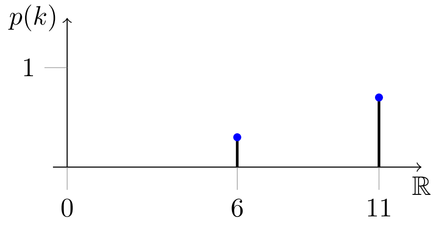
Ejercicios: Introducción y conceptos básicos

1. **Solution**

a) Como la variable Y toma solo los valores 0 y 1, la variable aleatoria X toma solo los valores 5 y 11. Por lo tanto la función de probabilidad será

$$p_X(k) = \begin{cases} 0.3 & k = 6 \\ 0.7 & k = 11 \end{cases}$$



b) La media se calcula como

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\, p(k) = 6 \times 0.3 + 11 \times 0.7 = 9.5\ .$$

Se podría calcular también usando la linearidad y el echo que $\mathbb{E}[Y] = 0.7$, es decir

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[5\,Y + 6] = 5\,\mathbb{E}[Y] + 6 = 5 \times 0.7 + 6 = 9.5\ .$$

Igualmente para la varianza tenemos que

$$\mathbb{V}\text{ar}[X] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (k - 9.5)^2\, p(k) = 12.25 \times 0.3 + 2.25 \times 0.7 = 5.25\ .$$

c) La función generatriz es igual a

$$\phi_X(z) = E[z^X] = 0.3\, z^6 + 0.7\, z^{11}\ .$$

d) $\mathbb{P}(0 \le X \le 5) = 0$, $\mathbb{P}(3 \le X < 8) = p(6) = 0.3$ y $\mathbb{P}(6 < X \le 12) = p(11) = 0.7$.

2. **Solution**

a) usando la igualdad $\int f(x)\, dx = 1$ y por lo tanto

$$k \int_0^1 x^2 - x^3\, dx = k \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = k \times \frac{1}{12} = 1\ .$$

Al final tenemos que $k = 12$.

b) La función de distribución $F_X(x) = \mathbb{P}(X \le x)$. Asumiendo $x \in (0, 1)$ tenemos que

$$F_X(x) = \int_0^x 12\, y^2(1 - y)\, dy = 12 \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^x = 4x^3 - 3x^4\ .$$

Además si $x \le 0$, $F_X(x) = 0$ y si $x \ge 1$, $F_X(x) = 1$.

c) Para calcular la media tenemos que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x \cdot 12\, x^2(1 - x)\, dx = 12 \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = 12 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{5}\ .$$

y para la varianza, usando la fórmula $\mathbb{V}\text{ar}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X]$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_0^1 x^2 \cdot 12\, x^2(1 - x)\, dx = 12 \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = 12 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) = \frac{2}{5}\ ; \\ \mathbb{V}\text{ar}[X] &= \frac{2}{5} - \frac{9}{25} = \frac{1}{25}\ . \end{aligned}$$

3. **Solution**

Sea D el suceso "La bombilla dura más de un año" y A (resp. B) el suceso "La bombilla es de tipo A (resp. B)".

a) Tenemos que
$$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D|B)\mathbb{P}(B) \ .$$
Tenemos que $\mathbb{P}(D|A) = 1 - F_X(1) = e^{-1} = 36.79\,\%$ y $\mathbb{P}(D|B) = 1 - F_Y(1) = e^{-2} = 13.53\,\%$. Por lo tanto
$$\mathbb{P}(D) = 36.79\,\% \times 0.7 + 13.53\,\% \times 0.3 = 29.81\,\% \ .$$

b) Buscamos el valor de $\mathbb{P}(A|D)$. Usando el teorema de Bayes tenemos que
$$\mathbb{P}(A|D) = \frac{\mathbb{P}(D|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{36.79\,\% \times 70\,\%}{29.81\,\%} = 86.39\,\%$$

4. ——— ***Solution*** ———

a) $h''(x) = 2 > 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculamos la media
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^{4} x \binom{4}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4} \sum_{x=0}^{4} x \binom{4}{x} = \frac{1}{16}[0 \times 1 + 1 \times 4 + 2 \times 6 + 3 \times 4 + 4 \times 1] = 2 \ .$$
Entonces $h(\mathbb{E}[X]) = 6$. Luego
$$\mathbb{E}[h(X)] = \frac{1}{16} \sum_{x=0}^{4} h(x) \binom{4}{x} = \frac{1}{16}[0 \times 1 + 2 \times 4 + 6 \times 6 + 12 \times 4 + 20 \times 1] = 7 \ .$$
Entonces
$$\mathbb{E}[h(X)] = 7 \geq 6 = h(\mathbb{E}[X]) \ .$$

c) Calculamos la media
$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x\, e^{-x}\, dx = 1 \ .$$
Entonces $h(\mathbb{E}[X]) = 2$. Luego
$$\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[X^2 + X] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X] \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2\, e^{-x}\, dx = 2! = 2 \ .$$
Por lo tanto
$$\mathbb{E}[h(X)] = 2 + 1 = 3 \geq 2 = h(\mathbb{E}[X]) \ .$$

d) Calculamos la media
$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x\, \lambda e^{-\lambda\, x}\, dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty (\lambda\, x) e^{-(\lambda\, x)}\, d(\lambda\, x) = 1/\lambda \ .$$
Entonces $h(\mathbb{E}[X]) = 1/\lambda^2 + 1/\lambda$. Luego $\mathbb{E}[h(X)] = \mathbb{E}[X^2 + X] = \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[X]$ y
$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2\, \lambda\, e^{-\lambda\, x}\, dx = \frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty (\lambda\, x)^2\, e^{-(\lambda\, x)}\, d(\lambda\, x) = \frac{2!}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} \ .$$
Por lo tanto
$$\mathbb{E}[h(X)] = \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} = h(\mathbb{E}[X]) \ .$$

5. ——— ***Solution*** ———

a) La definición de la función generadora de los momentos es $M_X(t) = \mathbb{E}[e^{t\, X}]$, por lo tanto
$$M_X(t) = e^{t \times 0}\, p_X(0) + e^{t \times 1}\, p_X(1) = (1 - p) + p\, e^t \ .$$

b) La función de densidad de la uniforme es constante igual a 1 en el intervalo $[0, 1]$, y zero fuera este intervalo. Por lo tanto
$$\tilde{F}_X(s) = \mathbb{E}[e^{-s\, X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\, x}\, f_X(x)\, dx = \int_0^1 e^{-s\, x}\, dx = \frac{1 - e^{-s}}{s} \ .$$

6. ——— ***Solution*** ———

Llamamos $\vec{Z} = (Z_1, Z_2)$ el resultado del experimento, que mide el valor del primer y del segundo dado. Como los dados son independientes la función de masa conjunta será

$$p_{\vec{Z}}(z_1, z_2) = \mathbb{P}(Z_1 = z_1) \times \mathbb{P}(Z_2 = z_2) = \begin{cases} \frac{1}{36} & \text{si } z_1, z_2 \in \{1,2,3,4,5,6\} \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

a) La función de masa $p_{\vec{X}}(x_1, x_2)$ vale

$p_{\vec{X}}(x_1,x_2)$	$x_2 = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_1 = 1$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0
2	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0
3	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0
4	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0
5	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	0
6	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

donde hemos usado por ejemplo que

$$\mathbb{P}(X_1 = 5, X_2 = 7) = \mathbb{P}(Z_1 = 5, Z_1 + Z_2 = 7) = \mathbb{P}(Z_1 = 5, Z_2 = 2) = \frac{1}{36} \ .$$

b) Para calcular la media de X_1 necesitamos la probabilidad marginal

$$p_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2=2}^{12} p_{\vec{X}}(x_1, x_2) \ .$$

Por ejemplo

$$\begin{aligned} p_{X_1}(3) = \sum_{x_2=2}^{12} p_{\vec{X}}(3, x_2) =& p_{\vec{X}}(3,2) + p_{\vec{X}}(3,3) + p_{\vec{X}}(3,4) + p_{\vec{X}}(3,5) + p_{\vec{X}}(3,6) + p_{\vec{X}}(3,7) \\ &+ p_{\vec{X}}(3,8) + p_{\vec{X}}(3,9) + p_{\vec{X}}(3,10) + p_{\vec{X}}(3,11) + p_{\vec{X}}(3,12) \\ =& 0 + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} \\ &+ \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

y al final

$x =$	1	2	3	4	5	6
$p_{X_1}(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Nota que hemos recuperado la distribución de una uniforme discreta en {1,2,3,4,5,6}, ya que $X_1 = Z_1$ y Z_1 mide el lanzamiento de un dado. La media se calcula como

$$\mathbb{E}[X_1] = \sum_{x=1}^{6} x \, p_{X_1}(x) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = \frac{7}{2} \ .$$

Otra forma equivalente sería calcular la media de X_1 como media de una función del vector $\vec{X}$, es decir

$$\mathbb{E}[X_1] = \sum_{x_1=1}^{6} \sum_{x_2=2}^{12} x_1 \, p_{\vec{X}}(x_1, x_2) = \frac{7}{2} = 3.5 \ .$$

El valor de $\mathbb{E}[X_1^2 + X_2]$ se calcula igualmente como

$$\mathbb{E}[X_1^2 + X_2] = \sum_{x_1=1}^{6} \sum_{x_2=2}^{12} (x_1^2 + x_2) \, p_{\vec{X}}(x_1, x_2) = \frac{133}{6} = 22.1667 \ .$$

c) La función de masa $p_{\vec{Y}}(y_1, y_2)$ vale

$p_{\vec{Y}}(y_1, y_2)$	$y_2 = 1$	2	3	4
$y_1 = 1$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12}$

donde hemos usado por ejemplo que

$$\mathbb{P}(Y_1 = 5, Y_2 = 3) = \mathbb{P}(Z_1 = 5, Z_2 = 3) = \frac{1}{36} \ ,$$

y

$$\mathbb{P}(Y_1 = 5, Y_2 = 4) = \mathbb{P}(Z_1 = 5, Z_2 = 4) + \mathbb{P}(Z_1 = 5, Z_2 = 5) + = \mathbb{P}(Z_1 = 5, Z_2 = 6) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12} \ ,$$

ya que $Y_1 = Z_1$ y $Y_2 = \text{mín}\, Z_2, 4$ y el suceso $\{Y_2 = 4\}$ es igual al suceso $\{Z_2 \in \{4, 5, 6\}\}$.

d) El valor de $\mathbb{E}[(Y_1 + Y_2)^2]$ se calcula como

$$\mathbb{E}[(Y_1 + Y_2)^2] = \sum_{y_1=1}^{6} \sum_{y_2=1}^{4} (y_1 + y_2)^2 \, p_{\vec{Y}}(y_1, y_2) = \frac{93}{2} = 46.5 \ .$$

7. ——— ***Solution*** ———

a) La función de probabilidad conjunta tiene que sumar 1 entonces

$$\sum_{x=0}^{2} \sum_{y=0}^{4} k y^2 = 90k = 1$$

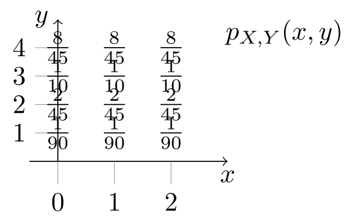
y por lo tanto $k = 1/90$.

b) Tenemos que

$$p_X(x) = \sum_{y=0}^{4} \frac{1}{90} y^2 = \frac{1}{3}$$

cuando $x = 0, 1, 2$ y 0 en el resto. X es una variable aleatoria discreta entre 0 y 2.

Por otro lado tenemos que



$$p_Y(y) = \sum_{x=0}^{2} \frac{1}{90} y^2 = \frac{y^2}{30}$$

por $y = 0, \ldots, 4$ y 0 en el resto.

c) La variable aleatoria $X|Y = y$ tiene función de probabilidad

$$p(x|y) = p_{X|Y=y}(x) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)} = \frac{y^2}{90} \frac{30}{y^2} = \frac{1}{3}$$

cuando $(x, y) \in OABC$ y 0 en el resto.
La variable aleatoria $Y|X = x$ tiene función de probabilidad

$$p(y|x) = p_{Y|X=x}(y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)} = \frac{y^2}{90} \times 3 = \frac{y^2}{30}$$

cuando $(x, y) \in OABC$ y 0 en el resto.

d) Tenemos que, con $0 \le y \le 4$,

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \sum_{x=0}^{2} x \, p(x|y) = \frac{1}{3} \sum_{x=0}^{2} x = 1$$

y entonces $\mathbb{E}[X|Y] = 1$.

Asumiendo $0 \leq x \leq 2$, tenemos que

$$\mathbb{E}[Y|X=x] = \sum_{y=0}^{4} y\, p(y|x) = \sum_{y=0}^{4} \frac{y^3}{30} = \frac{10}{3}$$

y entonces $\mathbb{E}[Y|X] = 10/3$.

e) Teniendo que

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{y^2}{90} = \frac{1}{3} \times \frac{y^2}{30} = p_X(x) \times p_Y(y)$$

las variable X e Y son independientes. De echo también resulta que las medias condicionadas son variables aleatorias deterministas.

f)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y-2X<0) &= \sum_{x=0}^{2} \mathbb{P}(Y-2X<0|X=x)\mathbb{P}(X=x) \\
&= \frac{1}{3}\mathbb{P}(Y<2) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(Y<4) \\
&= \frac{1}{90} + \frac{7}{45} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

8. —— ***Solution*** ——

a) Usando la igualdad $\int f(x,y)\,dx\,dy = 1$ tenemos que

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} k\,x\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1} k\,x\,(1-x)\,dx = k\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = k \times \frac{1}{6} = 1\ .$$

Al final tenemos que $k = 6$.

b) Primero tenemos que calcular la función de densidad marginal $f_Y(y)$, recordando que $f_{X,Y}(x,y) = 0$ cuando $x > 1-y$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_0^{1-y} 6\,x\,dx = 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-y} = 3(1-y)^2$$

y por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y\,f_Y(y)\,dy = \int_0^1 3y\,(1-y)^2\,dy \\
&= 3\int_0^1 y - 2y^2 + y^3\,dy = 3\left[\frac{y^2}{2} - 2\frac{y^4}{4} + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

c) La densidad marginal de X se calcula como

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_0^{1-x} 6x\,dy = 6(1-x)\,x$$

d) La densidad condicionada de Y se calcula como

$$f(y|x) = f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{6x}{6x\,(1-x)} = \frac{1}{1-x}$$

por lo tanto la variable aleatoria $Y|X=x$ es una uniforme entre 0 y $1-x$.

e) Como la media de una uniforme cae a mitad de su intervalo de definición tenemos que

$$\mathbb{E}[Y|X] = \frac{1-X}{2}$$

9. —— ***Solution*** ——

a) Calculamos $\mathbb{E}[X|Z]$. Primero calculamos la función de masa conjunta del vector (X,Z), $p_{X,Z}(x,z)$.

$p_{X,Z}(x,z)$	0	1
1	0.3	0.1
2	0.05	0.15
3	0.3	0.1

Por ejemplo

$$p_{X,Z}(2,0) = \sum_{y=5}^{6} p(2,y,0) = p(2,5,0) + p(2,6,0) = 0.05 + 0.00 = 0.05 \ .$$

Calculamos las probabilidades condicionadas de las variables aleatorias $(X|Z=0)$ y $(X|Z=1)$ como

	$p_{X\|Z=0}(x)$
1	46.15 %
2	7.69 %
3	46.15 %

	$p_{X\|Z=1}(x)$
1	28.57 %
2	42.86 %
3	28.57 %

donde por ejemplo hemos usado que

$$p_{X|Z=1}(2) = \mathbb{P}(X=2|Z=1) = \frac{\mathbb{P}(X=2, Z=1)}{\mathbb{P}(Z=1)} = \frac{p_{X,Z}(2,1)}{p_Z(1)} = \frac{0.15}{0.35} = 42.86\,\%$$

con $p_Z(0) = 0.65$ y $p_Z(1) = 0.35$ la distribución marginal de Z.
Podemos ahora calcular

$$\mathbb{E}[X|Z=0] = \sum_{x=1}^{3} x\,\mathbb{P}(X=x|Z=0) = 1 \times p_{X|Z=0}(1) + 2 \times p_{X|Z=0}(2) + 3 \times p_{X|Z=0}(3) = 2$$

$$\mathbb{E}[X|Z=1] = \sum_{x=1}^{3} x\,\mathbb{P}(X=x|Z=1) = 1 \times p_{X|Z=1}(1) + 2 \times p_{X|Z=1}(2) + 3 \times p_{X|Z=1}(3) = 2$$

y entonces la variable aleatoria $\mathbb{E}[X|Z]$ es determinista igual a 2, es decir

	$p_{\mathbb{E}[X\|Z]}(x)$
2	100 %

ya que vale 2 cuando $Z=0$ y también 2 cuando $Z=1$.
Calculamos la variable aleatoria $\mathbb{E}[Y|Z]$. La funciones de masa conjunta $p_{(Y,Z)}(y,z)$ y condicionadas $p_{Y|Z=0}(y)$ y $p_{Y|Z=1}(y)$ serán dada por

$p_{Y,Z}(y,z)$	0	1
5	0.25	0.1
6	0.4	0.25

y	$p_{Y\|Z=0}(y)$
5	38.46 %
6	61.54 %

y	$p_{Y\|Z=1}(y)$
5	28.57 %
6	71.43 %

y entonces

$$\mathbb{E}[Y|Z=0] = \sum_{y=5}^{6} x\,\mathbb{P}(Y=y|Z=0) = 5 \times p_{Y|Z=0}(5) + 6 \times p_{Y|Z=0}(6) = \frac{73}{13} \approx 5.61 \ ;$$

$$\mathbb{E}[Y|Z=1] = \sum_{y=5}^{6} y\,\mathbb{P}(Y=y|Z=1) = 5 \times p_{Y|Z=1}(5) + 6 \times p_{Y|Z=1}(6) = \frac{40}{7} \approx 5.71 \ .$$

Por lo tanto la variable aleatoria $\mathbb{E}[Y|Z]$ tendrá distribución

y	$p_{\mathbb{E}[Y\|Z]}(y)$
5.61	65 %
5.71	35 %

Nota que las probabilidades son tomadas desde la distribución marginal de la variable Z, $p_Z(0) = 0.65$ y $p_Z(1) = 0.35$.
Repitiendo todo el procedimiento podemos verificar que $\mathbb{E}[Z|Z] = Z$ ya que conociendo el valor de Z, esto ya para de ser aleatorio y siendo determinista coincide con su media estocastica. Por lo tanto, la variable aleatoria $\mathbb{E}[Z|Z]$ tiene distribución

z	$p_{\mathbb{E}[Z\|Z]}(z)$
0	65 %
1	35 %

b) Par calcular $\mathbb{E}[X|Y,Z]$ calculamos las funciones de masa de las variables aleatorias $(X|Y=y, Z=z)$, con $y \in \{5,6\}$ y $z \in \{0,1\}$.
Tenemos

	$p_{X\|(Y=5,Z=0)}(x)$		$p_{X\|(Y=5,Z=1)}(x)$		$p_{X\|(Y=6,Z=0)}(x)$		$p_{X\|(Y=6,Z=1)}(x)$
x= 1	20 %	x= 1	50 %	x= 1	62.5 %	x= 1	20 %
2	20 %	2	50 %	2	0 %	2	40 %
3	60 %	3	0	3	37.5 %	3	40 %

donde por ejemplo

$$p_{X|(Y=6,Z=0)}(1) = \mathbb{P}(X=1|Y=6,Z=0) = \frac{\mathbb{P}(X=1,Y=6,Z=0)}{\mathbb{P}(Y=6,Z=0)}$$
$$= \frac{p(1,6,0)}{p_{Y,Z}(6,0)} = \frac{0.25}{0.4} = 62.5\,\%$$

Calculando las medias estocásticas tenemos

E[X|Y=y,Z=z]	z=0	z=1
y = 5	12/5	3/2
y = 6	7/4	11/5

donde por ejemplo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X|Y=6,Z=0] &= \sum_{x=1}^{3} x\, p_{X|(Y=6,Z=0)}(x)\\ &= 1 \times p_{X|(Y=6,Z=0)}(1) + 2 \times p_{X|(Y=6,Z=0)}(2) + 3 \times p_{X|(Y=6,Z=0)}(3)\\ &= 1 \times 0.625 + 2 \times 0 + 3 \times 0.375 = 1.75 = \frac{7}{4}\,.\end{aligned}$$

En fin usando la función de distribución conjunta de (Y,Z) podemos escribir la distribución de la variable aleatoria $\mathbb{E}[X|Y,Z]$ como

$$\mathbb{E}[X|Y,Z] = \begin{cases} 12/5 & \text{con prob. } 0.25\\ 3/2 & \text{con prob. } 0.1\\ 7/4 & \text{con prob. } 0.4\\ 11/5 & \text{con prob. } 0.25\end{cases}$$

Para evidenciar mejor la dependencia de $\mathbb{E}[X|Y,Z]$ por el vector aleatorio (Y,Z) podemos resumir su función de distribución en la siguiente tabla

p(y,z)	25 %	40 %	10 %	25 %
Y	5	6	5	6
Z	0	0	1	1
$\mathbb{E}[X\|Y,Z]$	12/5	7/4	3/2	11/5

Caracterizamos ahora la variable aleatoria $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z]$, calculando los valores $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z=0]$ y $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z=1]$ y sus probabilidades. Tenemos que las variable aleatorias $(\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z=0)$ y $(\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z=1)$ tienen distribuciones de probabilidad

	$p_{\mathbb{E}[X\|Y,Z]\|Z=0}(x)$		$p_{\mathbb{E}[X\|Y,Z]\|Z=1}(x)$
x= 12/5	38.46 %	x= 3/2	28.57 %
7/4	61.54 %	11/5	71.43 %

donde las probabilidades son dadas por la distribución de $Y|Z=0$ y $Y|Z=1$.
Por ejemplo

$$\begin{aligned}p_{\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z=0}(7/4) &= \mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y,Z]=7/4|Z=0) = \mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y,0]=7/4|Z=0)\\ &= \sum_{y=5}^{6} \mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y,0]=7/4, Y=y|Z=0)\\ &= \mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y,0]=7/4, Y=5|Z=0) + \mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y,0]=7/4, Y=6|Z=0)\\ &= \mathbb{P}(\mathbb{E}[X|5,0]=7/4, Y=5|Z=0) + \mathbb{P}(\mathbb{E}[X|6,0]=7/4, Y=6|Z=0)\\ &= \mathbb{P}(12/5=7/4, Y=5|Z=0) + \mathbb{P}(7/4=7/4, Y=6|Z=0)\\ &= \mathbb{P}(Y=6|Z=0) = p_{Y|Z=0}(6) = 61.54\,\%\end{aligned}$$

Calculando los valor medios tenemos

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z=0] = \frac{12}{5} \times 38.36\,\% + \frac{7}{4} \times 61.54\,\% = 2 = \mathbb{E}[X|Z=0]$$
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z=1] = \frac{3}{2} \times 28.57\,\% + \frac{11}{5} \times 71.43\,\% = 2 = \mathbb{E}[X|Z=1]$$

concluyendo con que la variable aleatoria $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z]$ es determinista igual a 2. De hecho, pro la teoría ya sabemos que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z] = \mathbb{E}[X|Z]$ que ya hemos visto en el apartado anterior ser determinista, igual a 2.

c) el valor de $\mathbb{E}[Y|X]$ se puede calcular como en el apartado anteriores hemos calculado los valor de $\mathbb{E}[X|Z]$ o $\mathbb{E}[Y|Z]$ y tenemos

p(x)	40 %	20 %	40 %
X	1	2	3
$\mathbb{E}[Y\|X]$	23/4	11/2	45/8

y para $\mathbb{E}[X^2\,Y|X]$ tenemos

p(x)	40 %	20 %	40 %
X	1	2	3
$\mathbb{E}[X^2\,Y\|X]$	23/4	22	405/8

Se puede verificar multiplicando a última línea de la tabla de $\mathbb{E}[Y|X]$ por X^2 que coincide con la última línea de la tabla anterior y que por lo tanto se verifica que

$$\mathbb{E}[X^2\,Y|X] = X^2\mathbb{E}[Y|X]\ .$$

d) Las variables aleatorias $\mathbb{E}[4|Z]$ y $\mathbb{E}[4Y|Z]$ se calculan como

p(z)	65 %	35 %
Z	0	1
$\mathbb{E}[4\|Z]$	4	4

p(z)	65 %	35 %
Z	0	1
$\mathbb{E}[4Y\|Z]$	292/13	160/7

Se observa que $\mathbb{E}[4|Z] = 4$ es determinista y que $\mathbb{E}[4Y|Z] = 4\mathbb{E}[Y|Z]$.

e) Las variables aleatorias $\mathbb{E}[Y^2|Z]$ y $\mathbb{E}[4X+Y^2|Z]$ se calculan como

p(z)	65 %	35 %
Z	0	1
$\mathbb{E}[Y^2\|Z]$	413/13	230/7

p(z)	65 %	35 %
Z	0	1
$\mathbb{E}[4X+Y^2\|Z]$	1037/13	566/7

Se observa que $\mathbb{E}[4X+Y^2|Z] = 4\mathbb{E}[X|Z] + \mathbb{E}[Y^2|Z]$.

10. ——— ***Solution*** ———

a) La función de densidad de $X_1 + X_2$ se calcula con la convolución de las dos funciones de densidad marginales

$$\begin{aligned} f_{X_1+X_2}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x-y)\, f_{X_2}(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} 1\{0 \le x-y \le 1\} 1\{0 \le y \le 1\}\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} 1\{x-1 \le y \le x\} 1\{0 \le y \le 1\}\, dy = \int_{0}^{1} 1\{x-1 \le y \le x\}\, dy \end{aligned}$$

es decir

$$f_{X_1+X_2}(x) = \begin{cases} \int_0^x 1\, dy = x & 0 \le x \le 1 \\ \int_{x-1}^1 1\, dy = 2-x & 1 \le x \le 2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

La función de distribución es dada por la integral de la función de densidad y por lo tanto

$$F_{X_1+X_2}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 \le x \le 1 \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2} & 1 \le x \le 2 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

b) Tenemos que

$$p_{Y_1+Y_2}(y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{Y_1}(y-x)\, p_{Y_2}(x)$$

con $p_Y(y) = 1/5$ por $y = 0, 1, \ldots 4$. Entonces

$$p_{Y_1+Y_2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{25} y & 0 \le y \le 4 \\ \frac{1}{25}(9-y) & 5 \le y \le 8 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

y tenemos que

$$p_{Y_1+Y_2+Y_3}(y) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} p_{Y_1+Y_2}(y-x)\, p_{Y_3}(x)$$

y por lo tanto sus valores por $y = 0,\ 1,\ \ldots 12$ serán

$$\left\{ \frac{1}{125}, \frac{3}{125}, \frac{6}{125}, \frac{2}{25}, \frac{3}{25}, \frac{18}{125}, \frac{19}{125}, \frac{18}{125}, \frac{3}{25}, \frac{2}{25}, \frac{6}{125}, \frac{3}{125}, \frac{1}{125} \right\}$$

y 0 en el resto. Los valores de la función de distribución se obtienen cumulando estos valores. Tenemos que los valores de $F_{Y_1+Y_2}(y)$ por $y = 0,\ 1,\ \ldots 8$ son

$$\left\{ \frac{1}{25}, \frac{3}{25}, \frac{6}{25}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{19}{25}, \frac{22}{25}, \frac{24}{25}, 1 \right\}$$

y de $F_{Y_1+Y_2+Y_3}(y)$ por $y = 0,\ 1,\ \ldots 12$ son

$$\left\{ \frac{1}{125}, \frac{4}{125}, \frac{2}{25}, \frac{4}{25}, \frac{7}{25}, \frac{53}{125}, \frac{72}{125}, \frac{18}{25}, \frac{21}{25}, \frac{23}{25}, \frac{121}{125}, \frac{124}{125}, 1 \right\} .$$

11. ——— ***Solution*** ———

a) Tenemos que

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{t\,X}] = \int_0^\infty e^{t\,x} 3 e^{-3x}\, dx = \frac{3}{t-3} \int_0^\infty e^{(t-3)x}\, d(t-3)x = \frac{3}{t-3} e^{(t-3)x} \Big|_0^\infty = \frac{3}{3-t}$$

b) Calculamos $M'_X(t) = \frac{3}{(3-t)^2}$ y $M''_X(t) = \frac{6}{(3-t)^3}$ y por lo tanto $\mu_X^{(1)} = \mathbb{E}[X] = \frac{1}{3}$ y $\mu_X^{(2)} = \mathbb{E}[X^]= \frac{2}{9}$. Para comprobarlo, tenemos que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x\, 3\, e^{-3x}\, dx = \frac{1}{3} \int_0^\infty x\, 3\, e^{-3x}\, d(3x) = \frac{1}{3} \int_0^\infty y\, e^{-y}\, dy = \frac{1}{3}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2\, 3\, e^{-3x}\, dx = \frac{1}{9} \int_0^\infty (3x)^2\, e^{-3x}\, d(3x) = \frac{1}{9} \int_0^\infty y^2\, e^{-y}\, dy = \frac{2}{9} .$$

c) Tenemos que

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^N X_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\sum_{i=1}^N X_i | N]] .$$

Como $\mathbb{E}[\sum_{i=1}^N X_i | N = n] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i | N = n] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \frac{n}{3}$ tenemos que

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\frac{N}{3}] = \frac{10}{3} .$$

12. ——— ***Solution*** ———

a) Calculamos

$$p_N(0) = \sum_{x_1,x_2} p(0, x_1, x_2) = 0.3; \quad p_N(1) = \sum_{x_1,x_2} p(1, x_1, x_2) = 0.5; \quad p_N(2) = \sum_{x_1,x_2} p(2, x_1, x_2) = 0.2 .$$

Procediendo de forma similar para X_1 y X_2 tenemos que

x_1	2	4	6
$p_{X_1}(x_1)$	0.12	0.28	0.6

x_2	2	4	6
$p_{X_2}(x_2)$	0.12	0.28	0.6

y entonces X_1 y X_2 tienes la misma distribución.

b) Calculamos la conjunta en $(x_1, x_2) = (2, 4)$

$$p_{(X_1,X_2)}(2,4) = \sum_n p(n,2,4) = 0.016$$

y calculando para los otros valores de $(x_1, x_2) \in \{2, 4, 6\}^2$ tenemos

$p_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)$		x_2		
		2	4	6
x_1	2	0.048	0.016	0.056
	4	0.016	0.152	0.112
	6	0.056	0.112	0.432

Verificando que

$$0.016 = p_{(X_1,X_2)}(2,4) \neq p_{X_1}(2)\, p_{X_2}(4) = 0.0336$$

tenemos también que X_1 y X_2 no son independientes.

c) Ya hemos verificado que X_1 y X_2 no son independientes, lo mismo valdrá entonces para el vector (N, X_1, X_2) por ejemplo

$$0 = p(2,2,6) \neq p_N(2)\, p_{X_1}(2)\, p_{X_2}(6) > 0 \ .$$

d) Calculamos la media

$$\mathbb{E}[N] = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.2 = 0.9$$
$$\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 2 \times 0.12 + 4 \times 0.28 + 6 \times 0.6 = 4.96$$

e) Definimos $h(n, x_1, x_2) = \sum_{i=1}^n x_i$, tenemos que $Z = h(N, X_1, X_2)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] =& \mathbb{E}[\sum_{i=1}^N X_i] = \mathbb{E}[h(N,X_1,X_2)] = \sum_{n,x_1,x_2} h(n,x_1,x_2)\, p(n,x_1,x_2) \\
=& \ \ 0 \times (p(0,2,2) + \ldots + p(0,6,6)) + 2 \times (p(1,2,2) + p(1,2,4) + p(1,2,6)) \\
& + 4 \times (p(1,4,2) + p(1,4,4) + p(1,4,6)) + 6 \times (p(1,6,2) + p(1,6,4) + p(1,6,6)) \\
& + 4 \times (p(2,2,2) + 6 \times p(2,2,4) + 8 \times p(2,2,6)) + 6 \times p(2,4,2) \\
& + 8 \times p(2,4,4) + 10 \times p(2,4,6)) + 8 \times (p(2,6,2) + 10 \times p(2,6,4) + 12 \times p(2,6,6)) \\
=& \ \ 4.2
\end{aligned}$$

y no se verifica la igualdad ya que

$$4.2 = E[Z] \neq \mathbb{E}[N]\, \mathbb{E}[X] = 0.9 \times 4.96 = 4.464$$

f) Calculamos

$n = 0$		x_2		
		2	4	6
x_1	2	0.00432	0.01008	0.0216
	4	0.01008	0.02352	0.0504
	6	0.0216	0.0504	0.108

$n = 1$		x_2		
		2	4	6
x_1	2	0.0072	0.0168	0.036
	4	0.0168	0.0392	0.084
	6	0.036	0.084	0.18

$n = 2$		x_2		
		2	4	6
x_1	2	0.00288	0.00672	0.0144
	4	0.00672	0.01568	0.0336
	6	0.0144	0.0336	0.072

g) Calculamos la conjunta en $(x_1, x_2) = (2, 4)$

$$p_{(X_1,X_2)}(2,4) = \sum_n p(n,2,4) = 0.0336$$

y calculando para los otros valores de $(x_1, x_2) \in \{2, 4, 6\}^2$ tenemos

$p_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)$		x_2		
		2	4	6
x_1	2	0.0144	0.0336	0.072
	4	0.0336	0.0784	0.168
	6	0.072	0.168	0.36

Verificamos, por ejemplo para le caso de $(x_1, x_2) = (2, 4)$, la independencia

$$0.0336 = p_{(X_1,X_2)}(2, 4) = p_{X_1}(2)\, p_{X_2}(4) = 0.0336$$

y lo mismo vale para todos (x_1, x_2) y por lo tanto X_1 y X_2 son independientes.

h) Ya hemos verificado que X_1 y X_2 no son independientes, lo mismo valdrá entonces para el vector (N, X_1, X_2) por ejemplo

$$0 = p(2, 2, 6) \neq p_N(2)\, p_{X_1}(2)\, p_{X_2}(6) > 0\ .$$

i) Los valores de las medias son los mismos que antes, ya que las distribuciones marginales son las mismas: $\mathbb{E}[N] = 0.9$, $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = 4.96$.

j) Definimos $h(n, x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{n} x_i$, tenemos que $Z = h(N, X_1, X_2)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] =& \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i] = \mathbb{E}[h(N, X_1, X_2)] = \sum_{n,x_1,x_2} h(n, x_1, x_2)\, p(n, x_1, x_2) \\
=&\ 0 \times (p(0, 2, 2) + \ldots + p(0, 6, 6)) + 2 \times (p(1, 2, 2) + p(1, 2, 4) + p(1, 2, 6)) \\
&+ 4 \times (p(1, 4, 2) + p(1, 4, 4) + p(1, 4, 6)) + 6 \times (p(1, 6, 2) + p(1, 6, 4) + p(1, 6, 6)) \\
&+ 4 \times (p(2, 2, 2) + 6 \times p(2, 2, 4) + 8 \times p(2, 2, 6)) + 6 \times p(2, 4, 2) \\
&+ 8 \times p(2, 4, 4) + 10 \times p(2, 4, 6)) + 8 \times (p(2, 6, 2) + 10 \times p(2, 6, 4) + 12 \times p(2, 6, 6)) \\
=&\ 4.464
\end{aligned}$$

y se verifica la igualdad

$$4.464 = E[Z] = \mathbb{E}[N]\, \mathbb{E}[X] = 0.9 \times 4.96 = 4.464\ .$$

13. ——— ***Solution*** ———

a) $\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{5} k\, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^{5} k = 3$ y $\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=2}^{6} k\, \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{5} \sum_{k=2}^{6} k = 4$.

b) Calcular la media según

$$\mathbb{E}[X|X + Y = 4] = \sum_{k=1}^{5} k\, \mathbb{P}(X = k|X + Y = 4)$$

y tenemos que $\mathbb{P}(X + Y = 4) = 2/25$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = 1|X + Y = 4) &= \mathbb{P}(X = 1, Y = 3)/\mathbb{P}(X + Y = 4) = 1/2 \\
\mathbb{P}(X = 2|X + Y = 4) &= \mathbb{P}(X = 2, Y = 2)/\mathbb{P}(X + Y = 4) = 1/2 \\
\mathbb{P}(X = 3|X + Y = 4) &= \mathbb{P}(X = 3, Y = 1)/\mathbb{P}(X + Y = 4) = 0 \\
\mathbb{P}(X = 4|X + Y = 4) &= \mathbb{P}(X = 4, Y = 0)/\mathbb{P}(X + Y = 4) = 0 \\
\mathbb{P}(X = 5|X + Y = 4) &= \mathbb{P}(X = 5, Y = -1)/\mathbb{P}(X + Y = 4) = 0
\end{aligned}$$

y

$$\mathbb{E}[X|X + Y = 4] = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

c) Calculamos la función de probabilidad de $X + Y$ usando la convolución

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = n - x) = \frac{1}{5} \sum_{x=1}^{5} \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = n - x)$$

y repitiendo igual que el apartado anterior tenemos que

$\mathbb{E}[X\|X + Y = n]$	1	3/2	2	5/2	3	7/2	4	9/2	5
n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\mathbb{P}(X + Y = n)$	1/25	2/25	3/25	4/25	5/25	4/25	3/25	2/25	1/25

y por lo tanto

x	1	3/2	2	5/2	3	7/2	4	9/2	5
$\mathbb{P}(\mathbb{E}[X\|X+Y]=x)$	1/25	2/25	3/25	4/25	5/25	4/25	3/25	2/25	1/25

d) Calculamos la función de probabilidad de $X*Y$

$\mathbb{E}[X\|X*Y=n]$	1	1	3/2	1	2	3	3	7/2	3	4	4	3	9/2	4	5	5
n	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30
$\mathbb{P}(X*Y=n)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$

y por lo tanto

x	1	3/2	2	3	7/2	4	9/2	5
$\mathbb{P}(\mathbb{E}[X\|X*Y]=x)$	3/25	2/25	3/25	7/25	2/25	4/25	2/25	2/25

e) La media de $\mathbb{E}[X|X+Y]$ se calcula como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|X+Y]] &= 1\times\frac{1}{25}+\frac{3}{2}\times\frac{2}{25}+2\times\frac{3}{25}+\frac{5}{2}\times\frac{4}{25}\\ &\quad +3\times\frac{5}{25}+\frac{7}{2}\times\frac{4}{25}+4\times\frac{3}{25}+\frac{9}{2}\times\frac{2}{25}+5\times\frac{1}{25}=3\end{aligned}$$

y la media de $\mathbb{E}[X|X*Y]$ se calcula como

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|X*Y]] &= 1\times\frac{3}{25}+\frac{3}{2}\times\frac{2}{25}+2\times\frac{3}{25}\\ &\quad +3\times\frac{7}{25}+\frac{7}{2}\times\frac{2}{25}+4\times\frac{4}{25}+\frac{9}{2}\times\frac{2}{25}+5\times\frac{2}{25}=3\end{aligned}$$

y en ambos los casos tenemos que coincide con la media incondicional de X, es decir

$$\mathbb{E}[X]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|X+Y]]=\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|X*Y]]\ .$$

14. ——— ***Solution*** ———

a) Calculamos $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[Z]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= -1\times\frac{4}{12}+1\times\frac{4}{12}-2\times\frac{2}{12}+2\times\frac{2}{12}=0\\ \mathbb{E}[Y] &= 1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{2}{12}+4\times\frac{4}{12}+5\times\frac{5}{12}=\frac{23}{6}\\ \mathbb{E}[Z] &= 1\times\frac{6}{12}+2\times\frac{6}{12}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

b) $\mathbb{E}[Y|X]$, $\mathbb{E}[Y|Z]$, $\mathbb{E}[Y|X,Z]$

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}	ω_{11}	ω_{12}
$\mathbb{E}[Y\|X](\omega)$	9/4	9/4	9/4	9/4	17/4	17/4	17/4	17/4	5	5	5	5
$\mathbb{E}[Y\|Z](\omega)$	21/6	21/6	25/6	25/6	21/6	21/6	25/6	25/6	21/6	21/6	25/6	25/6
$\mathbb{E}[Y\|X,Z](\omega)$	3/2	3/2	3	3	4	4	9/2	9/2	5	5	5	5

c) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|Z]]$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X,Z]]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]] &= \frac{9}{4}\times\frac{4}{12}+\frac{17}{4}\times\frac{4}{12}+5\times\frac{4}{12}=\frac{23}{6}=\mathbb{E}[Y]\\ \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|Z]] &= \frac{21}{6}\times\frac{1}{2}+\frac{25}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{23}{6}=\mathbb{E}[Y]\\ \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X,Z]] &= \frac{3}{2}\times\frac{2}{12}+3\times\frac{2}{12}+4\times\frac{2}{12}+\frac{9}{2}\times\frac{2}{12}+5\times\frac{4}{12}=\frac{23}{6}=\mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

d) $\mathbb{E}[Y|g(X)]$ con $g(x)=x^2$, $\mathbb{E}[Y|X,g(X)]$ y $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X,g(X)]|g(X)]$.

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}	ω_{11}	ω_{12}
X	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-2	-2	2	2
$\mathbb{E}[Y\|X]$	9/4	9/4	9/4	9/4	17/4	17/4	17/4	17/4	5	5	5	5
$g(X)$	1	1	1	1	1	1	1	1	4	4	4	4
$\mathbb{E}[Y\|g(X)]$	13/4	13/4	13/4	13/4	13/4	13/4	13/4	13/4	5	5	5	5
$\mathbb{E}[Y\|X,g(X)]$	9/4	9/4	9/4	9/4	17/4	17/4	17/4	17/4	5	5	5	5
$\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y\|X,g(X)]\|g(X)]$	13/4	13/4	13/4	13/4	13/4	13/4	13/4	13/4	5	5	5	5

Es importante notar que $\mathbb{E}[Y|X,g(X)] = \mathbb{E}[Y|X]$ y $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X,g(X)]|g(X)] = \mathbb{E}[Y|g(X)]$.

e) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|g(X)]]$ siempre con $g(x) = x^2$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X,g(X)]]$ y $\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X,g(X)]|g(X)]]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|g(X)]] &= \frac{13}{4} \times \frac{2}{3} + 5 \times \frac{1}{3} = \frac{23}{6} = \mathbb{E}[Y] \\
\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X,g(X)]] &= \frac{9}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{17}{4} \times \frac{1}{3} + 5 \times \frac{1}{3} = \frac{23}{6} = \mathbb{E}[Y] \\
\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X,g(X)]|g(X)]] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|g(X)]] = \mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

15. ——— ***Solution*** ———

a) Se calcula

$$\mathbb{E}[X] = 5 \times 0.1 + 7 \times 0.2 + 8 \times 0.5 + 10 \times 0.2 = 7.9$$

Calculamos $\bar{F}(x)$:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	>10
$\bar{F}(x)$	1	1	1	1	1	0.9	0.9	0.7	0.2	0.2	0	0

y sumando la última linea tenemos que

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{0 \le x \le 9} \bar{F}(x) = 7.9$$

b) Se calcula con $f(x) = 5\exp\{-5x\}$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty 5\,x\,e^{-5x}\,dx = 1/5$$

Calculamos $\bar{F}(x)$

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = e^{-5x}$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty e^{-5x}\,dx = 1/5 \;.$$

c) Se calcula con $f(x) = \frac{1}{10}\,1\{0 \le x \le 10\}$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{10} \frac{1}{10}\,x\,dx = 5$$

Calculamos $\bar{F}(x)$

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \left(1 - \frac{1}{10}\,x\right)\,1\{0 \le x \le 10\}$$

por lo tanto

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{10} \left(1 - \frac{1}{10}\,x\right)\,dx = 10 - 5 = 5 \;.$$

d) Se calcula con $f(x) = \frac{3}{26}x^2\,1\{1 \le x \le 3\}$

$$\mathbb{E}[X] = \int_1^3 \frac{3}{26}x^3\,dx = \frac{30}{13}$$

Calculamos $\bar{F}(x)$

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ \frac{27}{26} - \frac{x^3}{26} & 1 \le x < 3 \\ 0 & 3 \le x \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^3 \bar{F}(x)\,dx = \int_0^1 dx = + \int_1^3 \frac{27}{26} - \frac{x^3}{26}\,dx = \frac{30}{13} \;.$$

e) Con

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ x^{-2} & x \ge 1 \end{cases}$$

tenemos que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \bar{F}(x)\, dx = \int_0^1 1\, dx + \int_1^\infty x^{-2}\, dx = x\Big|_0^1 - \frac{1}{x}\Big|_1^\infty = 1 + 1 = 2\ .$$

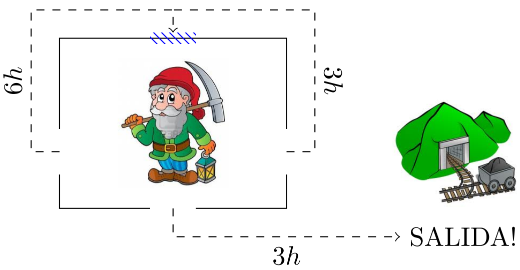
Calculamos la densidad

$$f(x) = -\bar{F}'(x) = 2x^{-3}\, 1\{x \ge 1\}$$

y usando la fórmula

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^\infty x\, f(x)\, dx = \int_1^\infty 2x^{-2}\, dx = 2\ .$$

16. ——— ***Solution*** ———



a) Si llamamos T el tiempo que tarda para salir el minero, imaginamos que la salida 1 es la que lo llevaría a salir de la mina y llamamos X la primera elección de salida, es decir

$$X = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } 1/3 \\ 2 & \text{con probabilidad } 1/3 \\ 3 & \text{con probabilidad } 1/3 \end{cases}$$

tenemos que

$$T = 1\{X=1\}\, 3h + 1\{X=2\}\, (6h + \tilde{T}) + 1\{X=3\}\, (3h + \tilde{T})$$

donde $\tilde{T}$ es el tiempo que tardaría a salir si habiendo elegido la salida equivocada el minero se encontrara otra ves en el sito inicial y tuviera que elegir otra vez. $\tilde{T}$ tiene la misma distribución de T ya que el minero repite la misma elección igual que al tiempo 0, y es independiente de la primera elección, X. Si calculamos la esperanza tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] &= \mathbb{E}[1\{X=1\}\, 3h + 1\{X=2\}\, (6h + \tilde{T}) + 1\{X=3\}\, (3h + \tilde{T})] \\ &= 3h\, \mathbb{E}[1\{X=1\}] + \mathbb{E}[1\{X=2\}]\, \mathbb{E}[(6h + \tilde{T})] + \mathbb{E}[1\{X=3\}]\, \mathbb{E}[(3h + \tilde{T})] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el valor esperado de una función indicadora es igual a la probabilidad del suceso donde la función indicadora toma valor 1 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[T] &= 3h\, \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)\, (6h + \mathbb{E}[\tilde{T}]) + \mathbb{P}(X=3)\, (3h + \mathbb{E}[\tilde{T}]) \\ &= 1h + 2h + \frac{1}{3}\mathbb{E}[T] + 1h + \frac{1}{3}\mathbb{E}[T] \end{aligned}$$

y resolviendo tenemos que $\mathbb{E}[T] = 12h$.

b) Repitiendo el mismo procedimiento per usando la función generatriz tenemos que

$$z^T = 1\{X=1\}\, z^3 + 1\{X=2\}\, z^{6+\tilde{T}} + 1\{X=3\}\, z^{3+\tilde{T}}$$

Si calculamos la esperanza tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[z^T] &= \mathbb{E}[1\{X=1\}\, z^3 + 1\{X=2\}\, z^{6+\tilde{T}} + 1\{X=3\}\, z^{3+\tilde{T}}] \\ &= z^3\, \mathbb{E}[1\{X=1\}] + \mathbb{E}[1\{X=2\}]\, \mathbb{E}[z^{6+\tilde{T}}] + \mathbb{E}[1\{X=3\}]\, \mathbb{E}[z^{3+\tilde{T}}] \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el valor esperado de una función indicadora es igual a la probabilidad del suceso donde la función indicadora toma valor 1 tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[z^T] &= z^3\, \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)\, z^6\, \mathbb{E}[z^{\tilde{T}}] + \mathbb{P}(X=3)\, z^3\, \mathbb{E}[z^{\tilde{T}}] \\ &= \frac{z^3}{3} + \frac{z^6}{3}\mathbb{E}[z^T] + \frac{z^3}{3}\mathbb{E}[z^T] \end{aligned}$$

donde hemos usado el hecho que $\tilde{T}$ tiene la misma distribución que T. Entonces llamando la función generatriz $\phi_T(z) = \mathbb{E}[z^T]$, tenemos que

$$\phi_T(z) = \frac{z^3}{3} + \frac{z^6}{3}\phi_T(z) + \frac{z^3}{3}\phi_T(z)$$

y resolviendo

$$\phi_T(z) = \frac{z^3}{3 - z^3 - z^6} \ .$$

La función generadora de los momentos $M_T(t)$ se calcula como $\phi_T(e^t)$ y por lo tanto será igual a

$$M_T(t) = \frac{e^{3t}}{3 - e^{3t} - e^{6t}} \ .$$