Tema IV

Cadenas de Markov en tiempo continuo

Bernardo D'Auria

Universidad Carlos III de Madrid

Procesos Estocásticos
Grado en Estadística y Empresa

Objetivo del tema

El objetivo principal de esta tema es introducir los conceptos de:

- Cadena de Markov en tiempo continuo
- Generador de la cadena
- Proceso de Poisson
- Distribución límite y estacionaria

Cadenas de Markov en tiempo continuo

Sea $E = \{1, 2, \dots, N\}$ el número de estados donde generalmente vamos a asumir $N < \infty$.

Para cada $t \in \mathbb{R}$, el proceso $X(t) \in E$ y se definen los elementos de E como los posibles estados del proceso.

Como en el caso discreto la propiedad de Markov corresponde con la idea que el valor presente del proceso contiene toda la información para poder predecir su evolución en el futuro. Definimos $\mathcal{X}_t = \{X_s, 0 \leq s \leq t\}$, como la historia del proceso hasta el tiempo t.

Propiedad de Markov

Definición (Propiedad de Markov)

Si se conoce el valor actual, $X(t)$, de la cadena, no es necesario conocer el pasado, $\mathcal{X}(t)$, para predecir el futuro, $X(t+s)$, con $s > 0$. Es decir

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_t = i, X_u = i(u), \quad 0 \leq u \leq t) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_t = i) \ .$$

que también escribimos como

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_t = i, \mathcal{X}_t) = \mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_t = i) = p_{ij}(t, t+s) \ .$$

La probabilidad condicionada,

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j, | X_t = i) = p_{ij}(t, t+s) \ ,$$

toma el nombre de probabilidad de transición.

Estacionariedad

Nosotros estamos interesados solo al caso de cadenas de Markov estacionarias, o homogeneas en el tiempo.

Definición (Cadena de Markov estacionaria)

Una cadena de Markov es estacionaria si sus probabilidades de transición no dependen del tiempo inicial, sino solo del intervalo de tiempo. Es decir

$$\mathbb{P}(X_{t+s} = j | X_t = i) = \mathbb{P}(X_s = j | X_0 = i) = p_{ij}(s)$$

La matriz de transición de orden s, $\mathrm{P}(s)$, se define como la matriz cuya componentes son las probabilidades de transición calculadas en s.

$$\mathrm{P}(s) = (p_{ij}(s))_{i,j \in E} \quad s \geq 0 \ .$$

Propriedad de Markov Fuerte

Una cadena de Markov tiempo continuo cumple con la propiedad de Markov fuerte.

Definición (Propriedad de Markov Fuerte)

Sea T un tiempo de parada. Asumiendo $T < \infty$, y conocido el valor que la cadena asume en este tiempo, $X(T) = i$, no es necesario conocer el pasado, $\mathcal{X}_T = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$, para predecir el futuro, $X(T+t), t \geq 0$. Es decir,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(T+t) = j | X(T) = i,\, X(s) = i(s)\ 0 \leq s < T) = \\ \mathbb{P}(X(T+t) = j | X(T) = i)\ . \end{aligned}$$

que también escribimos como

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(T+t) = j | X(T) = i, \mathcal{X}_T) &= \mathbb{P}(X(T+t) = j | X(T) = i) \\ &= p_{ij}(T, T+t)\ . \end{aligned}$$

Propriedad de Markov Fuerte

En particular, si asumimos el proceso estacionario, con $T < \infty$,

$$(X(T+t)|X(T) = i, t \geq 0) \stackrel{\mathrm{d}}{=} (X(t)|X(0) = i, t \geq 0)$$

y es independiente de $(X(t), 0 \leq t \leq T)$.

Definición (Propriedad de Markov Fuerte, estacionariedad)

Sea T un tiempo de parada. Asumiendo $T < \infty$, y conocido el valor que la cadena asume en este tiempo, $X(T) = i$, no es necesario conocer el pasado, $\mathcal{X}_T = \{X_t, 0 \leq t \leq T\}$, para predecir el futuro, $X(T+t), t \geq 0$. Es decir,

$$\mathbb{P}(X(T+t) = j|X(T) = i,\, X(s) = i(s)\; 0 \leq s < T) = \mathbb{P}_i(X(t) = j)\ .$$

Que también puede escribirse como

$$\mathbb{P}(X(T+t) = j|X(T) = i, \mathcal{X}_T) = \mathbb{P}_i(X(t) = j) = p_{ij}(t)$$

$$\mathbb{P}(X(T+t) = j|\mathcal{X}_T) = \mathbb{P}_{X(T)}(X(t) = j) = p_{X(T),j}(t)\ .$$

Tiempos de espera y Cadena incrustada

La cadena de Markov en tiempo continuo se define a partir de una sucesión de tiempos de espera que determina una sucesión de tiempos de saltos entre los estados de la cadena.

Si se mira la cadena solo en los instantes de los saltos, esta aparece como si fuera una cadena de Markov a tiempo discreto, que definimos como la cadena incrustada.

Continuidad a la derecha y limites a la izquierda

Se asume que el proceso es continuo a la derecha y con limites a la izquierda, es decir

$$\lim_{s\uparrow t} X(s) = X(t^-) \quad \lim_{s\downarrow t} X(s) = X(t) \ .$$

La continuidad a la derecha y la numerabilidad de E implican que cuando el proceso salta en un estado se queda allí por una cantidad de tiempo positiva, que toma el nombre de tiempo de espera.

Un tiempo de espera es una variable aleatoria que puede depender del estado donde se encuentra la cadena una vez cumplido el salto.

Para que la cadena cumpla con la propiedad de Markov, se puede demostrar que los tiempos de espera son independientes y distribuidos según una exponencial, cuyo parámetro depende del estado actual de la cadena.

Ausencia de memoria de la esponencial

Proposición (Ausencia de memoria)

Sea $S \sim Exp(\lambda)$ una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro λ, entonces S cumple la siguiente relación

$$\mathbb{P}\{S > t + s | S > t\} = \mathbb{P}\{S > s\}, \quad t, s \geq 0 \ .$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{S > t + s | S > t\} &= \frac{\mathbb{P}\{S > t + s, S > t\}}{\mathbb{P}\{S > t\}} = \frac{\mathbb{P}\{S > t + s\}}{\mathbb{P}\{S > t\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}\{S > s\}\end{aligned}$$

$\square$

Tiempos de salto y de espera y Cadena incrustada

Definición (Tiempos de salto)

Los tiempos de salto son tiempos de paradas que indican cuando el proceso cambia de valor, es decir, con $\inf\{\emptyset\} = \infty$*,*

$$J_0 = 0 \ , \quad J_{n+1} = \inf\{t > J_n : X(t) \neq X(t-)\} \quad n \geq 0 \ .$$

Definición (Tiempos de espera)

Los tiempos de espera indican cuanto tiempo el proceso se queda en un estado después de un salto, con $n \geq 1$*,*

$$S_n = \begin{cases} J_n - J_{n-1} & \text{si } J_{n-1} < \infty \\ \infty & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Definición (Cadena incrustada)

La cadena incrustada, $Y(n)$*, asociada a una cadena de Markov en tiempo continuo,* $X(t)$*, se define como*

$$Y(n) = X(J_n) \ .$$

Distribución de los tiempos de salto y de espera

Proposición

Los tiempos de espera son variables aleatorias independientes distribuidas según una exponencial de parámetro dependiente del valor actual de la cadena

$$S_n | Y_{n-1} \sim Exp(q(Y_{n-1})) \quad n \geq 1 \; .$$

Los parámetros $q_i = q(i)$ con $i \in E$, son necesarios para definir la cadena de Markov $X(t)$.

Proposición

Los tiempos de salto se distribuyen según una suma de variables aleatorias exponenciales independientes,

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} S_k \quad n \geq 1 \; .$$

En particular si $q_i = q > 0$ para todos los $i \in E$,

$$J_n \sim Erlang(n, q) = \Gamma(n, q) \; .$$

La cadena incrustada

Proposición

La cadena incrustada, $Y(n)$, asociada a la cadena de Markov $X(t)$, continua y homogénea en el tiempo, es una cadena de Markov homogénea y en tiempo discreto con probabilidades de transición igual a

$$\begin{aligned}\pi_{ij} &= \mathbb{P}\{Y(n+1) = j | Y(n) = i\} \\ &= \mathbb{P}\{X(J_{n+1}) = j | X(J_n) = i\} \\ &= \mathbb{P}\{X(J_{n+1}) = j | X(J_n) = i, \mathcal{X}_{J_n}\} \ .\end{aligned}$$

Los parámetros π_{ij} con $i, j \in E$, $i \neq J$, o bien la matriz de transición Π de la cadena Y, son necesarios para definir la cadena de Markov $X(t)$.
Nota que $\pi_{ii} = 0$ para todos los $i \in E$ con parametro $q_i \neq 0$.

Generador

Los parámetros suficientes para construir una cadenas de Markov en tiempo continuo por lo tanto son

paramétros para los tiempos de espera	$q_i \geq 0$	$i \in E$
paramétros de la cadena incrustada	$\pi_{ij} \geq 0$	$i, j \in E,\ i \neq j$.

Toda esta información puede resumirse en una única matriz, que se llama generador.

Definición (Generador)

El generador de una cadena de Markov tiempo continua $X(t)$ es una Q-matriz definida como

$$\mathrm{Q} = (q_{ij})_{i,j \in E}$$

donde

$$q_{ij} = \begin{cases} -q_i & \text{cuando } i = j \\ q_i \pi_{ij} & \text{cuando } i \neq j \end{cases}$$

Matriz de transición de la cadena incrustada

Llamamos a la matriz de transición de la cadena incrustada, Π, como matriz de saltos.

Proposición

La matriz de saltos, Π, se puede calcular a partir del generador, Q, de la cadena de Markov continua en el tiempo como

$$\Pi = (\pi_{ij})_{i,j \in E}$$

donde

$$\pi_{ij} = \begin{cases} 0 & \textit{cuando } i = j & \textit{y } q_i > 0 \\ 1 & \quad '' \quad '' & \textit{y } q_i = 0 \\ q_{ij}/q_i & \textit{cuando } i \neq j & \textit{y } q_i > 0 \\ 0 & \quad '' \quad '' & \textit{y } q_i = 0 \end{cases}$$

Q-matriz

Hemos definido el generador de una cadena de Markov tiempo continua como una matriz, diciendo que esta es del tipo Q-matriz. Vamos a ver que propiedades tiene que cumplir una matriz para ser de este tipo.

Definición (Q-matriz)

Una Q-matriz, $Q = (q_{ij})_{i,j}$, es una matriz que cumple las siguientes propriedades

- $-\infty < q_{ii} \leq 0$ *por cualquier* i;
- $q_{ij} \geq 0$ *en el caso* $i \neq j$;
- $\sum_j q_{ij} = 0$ *por cualquier* i.

Relación entre Q y P(t)

Proposición

Sea $X(t)$ una cadena de Markov tiempo continua con

- *generador* Q
- *matriz de transición de orden t,* P(t)

entonces

$$\mathrm{P}(t) = \exp\{\mathrm{Q}\, t\} = e^{\mathrm{Q}\, t} \,.$$

Proposición (Ecuaciones diferenciales)

$$\begin{aligned} &\textit{hacia adelante:} \quad && \mathrm{P}'(t) = \phantom{\mathrm{Q}}\,\mathrm{P}(t)\,\mathrm{Q}\,, && \mathrm{P}(0) = \mathbb{I} \\ &\textit{hacia atrás:} \quad && \mathrm{P}'(t) = \mathrm{Q}\,\mathrm{P}(t)\,, && \mathrm{P}(0) = \mathbb{I} \end{aligned}$$

Distribución al tiempo t

Proposición

Si $\nu(t)$ indica la distribución de $X(t)$, tenemos que

$$\nu(t) = \nu(0)\,\mathrm{P}(t) = \nu(0)\,e^{\mathrm{Q}\,t}$$

y en general

$$\nu(t+s) = \nu(s)\,\mathrm{P}(t) = \nu(s)\,e^{\mathrm{Q}\,t} \quad \forall s \geq 0\ .$$

Matriz exponencial

Se recuerda brevemente la definición de una matriz exponencial.

$$\exp\{A\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Si además la matriz A se pude diagonalizar como $A = U\,D\,U^{-1}$ con D diagonal, se tiene que

$$\exp\{A\} = U\,\exp\{D\}\,U^{-1},$$

lo que simplifica el cálculo ya que por

$$D = \mathrm{diag}\{d_1, \ldots, d_n\} \Rightarrow e^{D} = \mathrm{diag}\{e^{d_1}, \ldots, e^{d_n}\}\ .$$

Clasificación de los estados

Definición (Accesibilidad)

Un estado $j \in E$ es accesible desde un estado $i \in E$, $(i \to j)$, si con probabilidad positiva es posible empezando en i estar en un momento dato (incluido el instante inicial) en el estado j.

$$i \to j \iff \exists t \geq 0 : P(X(t) = j | X(0) = i) > 0$$

Proposición (Accesibilidad)

Sean $i, j \in E$ dos estados diferentes, $i \neq j$, entonces son equivalentes las siguientes condiciones

- $i \to j$
- $i \to j$ *por la cadena incrustada*
- $q_{ii_1} q_{i_1 i_2} \cdots q_{i_{n-1} i_n} q_{i_n j} > 0$ *por algunos* $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i_n \in E$
- $p_{ij}(t) > 0$ *para todos* $t > 0$
- $p_{ij}(t) > 0$ *para algún* $t > 0$

Clasificación de los estados

Igual que en el caso tiempo discreto, definimos la comunicabilidad entre los estados.

Definición (Comunicabilidad)

Dos estados $i, j \in E$ se comunican, $(i \leftrightarrow j)$ si uno y cada uno de ellos es accesible por el otro.

$$i \leftrightarrow j \iff i \to j \text{ y } j \to i$$

Definición (Clase de estados)

Un conjunto de estados que comunican entre ellos se llama clase

En las cadenas de Markov tiempo continuo NO EXISTE el concepto de periodo.

Ejemplo de clasificación

Sea $E = \{0, 1, \ldots, 9\}$, y dado el siguiente generador Q donde $*$ denota un número non nulo.

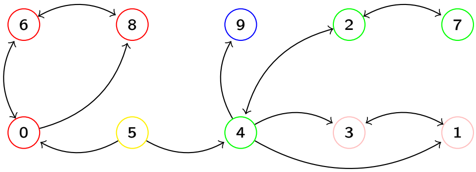
$$
Q = \begin{pmatrix}
* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\
0 & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & * & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\
0 & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\
* & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\
0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Ejemplo de clasificación

Sea $E = \{0, 1, \ldots, 9\}$, y dado el siguiente generador Q donde $*$ denota un número non nulo.

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hay 5 clases:
$C_1 = \{0, 6, 8\}$, $C_2 = \{1, 3\}$, $C_3 = \{2, 4, 7\}$, $C_4 = \{5\}$, $C_5 = \{9\}$.



Tiempos de primera visita

Parecido al caso de cadenas de Markov en tiempo discreto, se define el tiempo de primera visita de un conjuntos de estados $C \subset E$ como

$$T_C = \inf\{t \geq J_1 : X(t) \in C\} \ .$$

Para los casos en que el proceso no toca el conjunto C se define $T_C = \infty$. En este caso la variable aleatoria T_C toma valores reales positivos.

Asumiendo que la cadena empiece en el estado $i \in E$ definimos

$$T_{iC} = \{T_C | X_0 = i\}$$

En el caso que $C = \{j\}$ definimos $T_{ij} = T_{i\{j\}}$, que es el tiempo de visita al estado j empezando desde el estado i.

Comentario

En el caso $i = j$, $T_i = T_{ii}$ se llama tiempo de regreso.

Estados transitorios y recurrentes

- $i \in E$ es recurrente si $\mathbb{P}_i(\{t \geq 0 : X(t) = i\}$ es infinito $) = 1$.
- $i \in E$ es transitorio si $\mathbb{P}_i(\{t \geq 0 : X(t) = i\}$ es infinito $) = 0$.

Teorema

- *Existen solo dos tipos de estados: transitorios y recurrentes.*
- *El tipo de un estado es el mismo para la cadena en tiempo continuo y su cadena incrustada.*
- *Dos estados en la misma clase son del mismo tipo.*

Clasificación de los estados

Teorema

Si para un estado $i \in E$ tenemos que

- $q_i = 0$ *o* $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$, *entonces i es recurrente*
- $q_i > 0$ *y* $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$, *entonces i es transitorio*

Los estados se pueden clasificar de la siguiente forma

Transitorio $\mathbb{P}_i\{T_i < \infty\} < 1$	Recurrente $q_i = 0$ o $\mathbb{P}_i\{T_i < \infty\} = 1$	
	Nulo	Positivo
$\mathbb{E}_i[T_i] = \infty$	$\mathbb{E}_i[T_i] = \infty$	$q_i = 0$ o $\mathbb{E}_i[T_i] < \infty$

Clasificación de los estados

Teorema

La propiedad de recurrencia positiva es una propiedad de clase.

$$i \leftrightarrow j \text{ y } i \text{ recurrente nulo } \Rightarrow j \text{ recurrente nulo.}$$

Teorema

Si Q *es el generador de una cadena irreducible, entonces*

$$\text{cada estado es recurrente positivo}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{existe una distribución estacionaria } \nu.$$

En el caso exista la distribución estacionaria se cumple que

$$\mathbb{E}_i[T_i] = 1/(\nu_i\, q_i) \quad \text{por cualquier } i \in E\ .$$

Distribución estacionaria

Definición (Distribución estacionaria)

Una distribución ν *se dice estacionaria por una cadena de Markov* X*, si empezando por ella la distribución de* $X(t)$ *sigue siendo* ν *para cada* $t > 0$*.*

Teorema (Propiedad de la distribución estacionaria)

Una distribución ν *es estacionaria para una cadena de Markov con generador* Q*, si se verifica la siguiente igualdad*

$$\nu\,\mathsf{Q} = \vec{0}.$$

Distribución estacionaria

Teorema

Sea Q un generador de una cadena de Markov tiempo continua y sea Π la matriz de saltos asociada. Los siguientes son equivalentes:

- ν *es estacionaria para Q;*
- π *es estacionaria para Π, con* $\pi_i = \frac{q_i\,\nu_i}{\sum_k q_k\,\nu_k}$.

Teorema (Cadena de Markov irreducible)

Si una cadena tiene un número finito de estados y es irreducible (contiene solo una clase), entonces la distribución estacionaria existe y es única.

Como en el caso discreto, si la cadena de Markov no es irreducible pueden existir más que una distribución estacionaria.

Cálculo de la distribución estacionaria

Importante: Se asume que la cadena es irreducible o que contiene solo una clase recurrente.

Hay que resolver el sistema

$$\nu\, \mathsf{Q} = \vec{0}\ .$$

Una solución seria el vector nulo, que no es una distribución válida, ya que necesitamos que la suma de todas sus componentes sea 1.

Siendo $\det(\mathsf{Q}) = 0$, la matriz Q no tiene inversa.

Por lo tanto hay que quitar una ecuación, por ejemplo la que corresponde a su primera columna y añadir la ecuación

$$\nu\, \vec{1} = 1\ .$$

Ejemplo

Dato el siguiente generador

$$Q = \begin{pmatrix} -5.0 & 3.5 & 1.5 \\ 0.0 & -1.0 & 1.0 \\ 4.0 & 6.0 & -10.0 \end{pmatrix}$$

es fácil comprobar que tiene determinante nulo. Añadiendo la condición $\nu \vec{1} = 1$, vamos a resolver el siguiente sistema

$$\nu \begin{pmatrix} 1 & 3.5 & 1.5 \\ 1 & -1.0 & 1.0 \\ 1 & 6.0 & -10.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que nos da, como distribución estacionaria,

$$\begin{aligned} \nu &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.075472 & 0.830189 & 0.0943396 \\ 0.207547 & -0.216981 & 0.0094340 \\ 0.132075 & -0.047170 & -0.0849057 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7.55\,\% & 83.02\,\% & 9.43\,\% \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Teoremas límites

Definimos el tiempo total de visita al estado j hasta el tiempo t como

$$N_j(t) = \int_0^t 1\{X(s) = j\}\, ds,$$

y definimos $N_{ij}(t) = \Big(N_j(t) | X(0) = i\Big)$.

Teorema

Sean i, j dos estados con $i \leftrightarrow j$ y $\nu_j = (q_j\, \mathbb{E}_j[T_j])^{-1}$,

$$\mathbb{P}_i\left(\lim_{t\to\infty} \frac{N_j(t)}{t} = \nu_j\right) = 1$$

es decir

$$\frac{N_{ij}(t)}{t} \overset{t\to\infty}{\to} \nu_j \quad \textit{con prob. 1.}$$

Si el estado j es transitorio o recurrentes nulo, $\nu_j = 0$; mientras si el estado j es recurrentes positivos , $\nu_j > 0$.

Teoremas límites

El resultado anterior se puede expresar usando las probabilidades de transición $p_{ij}(t)$.

Teorema

Sean i, j dos estados con $i \leftrightarrow j$ y $\nu_j = (q_j \, \mathbb{E}_j[T_j])^{-1}$,

$$\nu_j = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t p_{ij}(s)\, ds$$
$$= \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$$

Si el estado j es transitorio o recurrentes nulo, $\nu_j = 0$;
mientras si el estado j es recurrentes positivos , $\nu_j > 0$.

En particular

$$\mathbb{E}[N_{ij}(t)] = \int_0^t p_{ij}(s)\, ds \ , \quad t \geq 0 \ .$$

Cadena de Markov irreducible

Si una cadena de Markov es irreducibe solo hay dos posibilidades:

(i) todos los estados son transitorios o recurrentes nulos (tienen que ser en número infinito) y no hay distribución límite o estacionaria ya que $p_{ij}(t) \to \nu_j = 0$ para $t \to \infty$

(ii) todos los estados son recurrentes positivos y existe una única distribución límite o estacionaria dada por

$$\nu_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) > 0$$

Resumem de clasificación de los estados y teoremas límites.

	Transitorio	Recurrente	
		Nulo	Positivo
$\mathbb{P}_j\{T_j < \infty\}$	< 1	$= 1$	$= 1$
$\mathbb{E}_j[T_j]$	$= \infty$	$= \infty$	$< \infty$
$\nu_j = 1/(q_j\,\mathbb{E}_j[T_j])$	$= 0$	$= 0$	> 0
$i \leftrightarrow j, N_{ij}(t)/t$	$\to 0$	$\to 0$	$\to \nu_j$
$i \leftrightarrow j, \int_0^t p_{ij}(s)\,ds/t$	$\to 0$	$\to 0$	$\to \nu_j$
$i \leftrightarrow j, p_{ij}(t)$	$\to 0$	$\to 0$	$\to \nu_j$

Distribuciones límites

La distribución límite $\nu(\infty)$, si existe está dada por

$$\nu_j(\infty) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_{\nu(0)}(X(t) = j)$$

y puede ser no única si la cadena no es irreducible, no existir si la cadena nos es recurrente positiva y puede depender de la distribución inicial $\nu(0)$.

Una distribución límite es también estacionaria.

Tiempos medio de permanencia en estados transitorios

Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de los estados transitorios y H la sub-matriz de transición de un estado transitorio a otro estado transitorio

$$\mathrm{H} = (q_{ij}) \quad i, j \in \mathcal{T}$$

Sea $N_j(\infty)$ el tiempo pasado en j durante todo el tiempo y m_{ij} su media habiendo empezado la cadena en el estado i:

$$N_j(\infty) = \int_0^\infty 1\{X(s) = j\}\, ds \ , \quad m_{ij} = \mathbb{E}_i[N_j(\infty)] \ .$$

Definimos la matriz $\mathrm{M} = (m_{ij}) \qquad i, j \in \mathcal{T}$.

Teorema

$$\mathrm{M} = (-\mathrm{H})^{-1}$$

Probabilidad de tocar un estado transitorio

Si tenemos dos estados transitorios, $i, j \in \mathcal{T}$, la probabilidad de pasar por j empezando en i, antes de dejar los estados en $\mathcal{T}$, es

$$f_{ij} = \mathbb{P}_i(T_j < \infty) = \mathbb{P}_i(N_j(\infty) > 0)$$

$$m_{ij} = \mathbb{E}_i[m_{jj}\, 1\{T_j < \infty\}] = m_{jj}\, \mathbb{P}_i(T_j < \infty) = m_{jj}\, f_{ij} \ .$$

Razonando de forma parecida al caso discreto se puede demostrar el siguiente resultado

Teorema

$$i, j \in \mathcal{T} \ , \quad f_{ij} = \frac{m_{ij}}{m_{jj}}$$

Transición entre clases

Fijamos $\mathcal{C}$ como una clase de estados recurrentes, es decir para cada $i, j \in \mathcal{C}$ hay que $i \leftrightarrow j$ y $\mathcal{C} \subset \mathcal{R}$, donde $\mathcal{R}$ es el conjunto de todos los estados recurrentes, entonces

Teorema

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{R}\,, \quad i \in \mathcal{C}\,, j \notin \mathcal{C}\;: \quad q_{ij} = 0$$

Sea $\mathcal{T}$ el conjunto de todos los estados transitorios y recordando que $f_{ij} = \mathbb{P}_i(T_j < \infty)$, tenemos que

Teorema

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{R}\,, \quad i \in \mathcal{T}\,, j \in \mathcal{C}\;: \quad f_{ij} = \sum_{k \in \mathcal{T}} h_{ik}\, f_{kj} + \sum_{k \in \mathcal{C}} q_{ik}$$

Transición entre clases

Definimos $f_{\mathcal{C}}$ el vector columna con componentes

$$f_{\mathcal{C}}(i) = \mathbb{P}_i(T_{\mathcal{C}} < \infty) \quad i \in \mathcal{T},\ \mathcal{C} \subset \mathcal{R}\ ,$$

donde $f_{\mathcal{C}}(i)$ indica la probabilidad de tocar el conjunto $\mathcal{C}$ empezando en el estado $i \in \mathcal{T}$, y definimos $q_{\mathcal{C}}$ el correspondiente vector columna de componentes

$$q_{\mathcal{C}}(i) = \sum_{j \in \mathcal{C}} q_{ij} \quad i \in \mathcal{T},\ \mathcal{C} \subset \mathcal{R}\ ,$$

tenemos que

Teorema

$$\mathcal{C} \subset \mathcal{R} \ : \quad f_{\mathcal{C}} = \mathsf{M}\, q_{\mathcal{C}}$$

Proceso de Poisson Homogéneo

Definición

La cadena de Markov $N(t)$ con valores en $\mathbb{N}$ y generador

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

se llama Procesos de Poisson homogéneo de tasa $\lambda > 0$.

Lo que hace un Proceso de Poisson es contar el número de saltos en el intervalo $[0, t]$ de una cadena de Markov tiempo continua con tasa de saltos constante, λ.

Proceso de Poisson Homogéneo

Un proceso de Poisson homogéneo tiene las siguientes propiedades

- es no negativo - $N(t) \geq 0$
- es a valores enteros - $N(t) \in \mathbb{N}$
- es no decreciente - $N(t) \geq N(s)$ si $t \geq s$
- $N(t) - N(s)$ se distribuye según un a $\mathrm{Po}(\lambda(t-s))$
- $N(t) - N(s)$ es independiente de $\mathcal{N}_t = \{N(s), 0 \leq s \leq t\}$.

Caracterizan un proceso de Poisson homogéneo con tasa $\lambda > 0$

- una sucesión no decreciente de tiempos de saltos $\{J_n, n \geq 1\}$ con $J_n \sim \mathrm{Erlang}(n, \lambda)$.
- una sucesión de tiempos de espera $\{S_n, n \geq 1\}$ con $S_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, i.i.d.

Timepos de saltos

Teorema

Si se condiciona con respecto al número de llegadas en un intervalo, los tiempos de llegada están distribuidos como variables aleatorias uniformes ordenadas.

Es decir, definiendo

$$Y_{(k)} = (J_k | N(t) = n) \quad k = 1, \ldots, n$$

entonces $\{Y_k, k = 1, \ldots, n\}$ *son i.i.d. con* $Y_k \sim U(0, t)$, *y* $Y_{(k)}$ *es la* k*-ésimo valor entre los* Y_k *ordenados de forma creciente,*

$$\min\{Y_1, \ldots, Y_n\} = Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \ldots \leq Y_{(n)} = \max\{Y_1, \ldots, Y_n\} \ .$$

Separación y unión de Procesos de Poisson

Teorema (Separación)

Sea $N(t)$ un proceso de Poisson homogéneo con intensidad λ. Si a cada llegada se asocia de forma independiente un color

- *azul (A) con probabilidad p*
- *rojo (R) con probabilidad $1-p$*

entonces los procesos de contar las llegadas de color azules y rojas, $N_A(t)$ y $N_R(t)$, son procesos de Poisson homogéneos independientes con intensidades de llegada

$$\lambda_A = p\,\lambda \text{ y } \lambda_R = (1-p)\,\lambda\ .$$

Teorema (Unión)

Sean $N_A(t)$ y $N_R(t)$ dos procesos de Poisson homogéneos independientes, con intensidades de llegada λ_A y λ_R, su suma

$$N(t) = N_A(t) + N_R(t)$$

es un proceso de Poisson con parametro $\lambda = \lambda_A + \lambda_R$.