Ejercicios: Introducción y conceptos básicos

1. Sea Y una variable aleatoria de Bernoulli con parámetro $p = 0.7$, y sea X otra variable aleatoria definida por
$$X = 5\,Y + 6$$
Calcular:
   a) La función de probabilidad. Dibujar la función.
   b) La media y la varianza.
   c) La función generatriz.
   d) Las siguientes probabilidades: $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 5)$, $\mathbb{P}(3 \leq X < 8)$ y $\mathbb{P}(6 < X \leq 12)$.

2. La función de densidad de una v.a. X viene dada por:
$$f(x) = \begin{cases} k\,x^2(1-x) & x \in (0,1) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$
   a) Calcular k para que f sea función de densidad.
   b) Calcular la función de distribución de probabilidad.
   c) Calcular $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$.

   Indicio: Recuerda que $\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}$

3. Una fábrica de bombillas produce dos tipos de bombillas de aspecto exterior semejante. El 70 % son de tipo A, con un tiempo de vida (en años) representado por la variable aleatoria X, con función de distribución:
$$F_X(x) = (1 - e^{-x})\,1\{x \geq 0\}$$
El 30 % restante son de tipo B, con una duración representada por la variable Y con función de distribución:
$$F_Y(y) = (1 - e^{-2y})\,1\{y \geq 0\}$$
   a) Si tomamos una bombilla al azar, ¿qué probabilidad hay de que dure más de un año?
   b) Si una bombilla elegida al azar dura más de un año, ¿qué probabilidad hay de que sea del tipo A?.

   Indicio: Recuerda que $1\{x \geq 0\}$ es la función indicadora del conjunto $x \geq 0$, es decir vale 1 si x es non negativo y 0 en el resto.

4. Comprueba la *Desigualdad de Jensen* usando la función $h(x) = x^2 + x$:
   a) Comprueba que $h(x)$ es convexa, verificando que la derivada segunda es positiva.
   b) En el caso de $X \sim \mathrm{Bin}(4, \frac{1}{2})$
   c) En el caso de $X \sim \mathrm{Exp}(1)$
   d) En el caso de $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

   Indicio: Recuerda que $\int_0^\infty x^k\, e^{-x} dx = k!$

5. Calcular las siguientes funciones
   a) Sea $X \sim \mathrm{Be}(p)$. Calcula función generatriz de momentos, $M_X(t)$.
   b) Sea $X \sim \mathrm{U}([0,1])$. Calcula la trasformata de Laplace $\tilde{F}_X(s)$.

6. Tenemos el experimento del lanzamiento de dos dados. Dos científicos hacen juntos las pruebas. Uno toma nota del valor del primer dado y la suma de los valores de los dos dados, y los comunica con el vector $\vec{X} = (X_1, X_2)$. El otro anota el valor del primer dado y se equivoca en anotar el segundo dado. En lugar de anotar el 5 y el 6 sigue anotando un 4. Comunica sus valores por el vector $\vec{Y} = (Y_1, Y_2)$.
   a) Calcula la función de masa del vector $\vec{X}$
   b) Calcula las medias $\mathbb{E}[X_1]$ y $\mathbb{E}[X_1^2 + X_2]$
   c) Calcula la función de distribución del vector $\vec{Y}$

d) Calcula la media $\mathbb{E}[(Y_1 + Y_2)^2]$

7. El vector aleatorio discreto bivariante (X, Y) está definido en el rectángulo $OABC$.

$$O = (0, 0) \quad A = (0, 4) \quad B = (2, 4) \quad C = (2, 0).$$

con función de probabilidad

$$p_{X,Y}(x, y) = k\, y^2.$$

a) Determinar el valor de k;
b) Calcular las probabilidades marginales;
c) Calcular las probabilidades condicionadas $p(x|y)$, $p(y|x)$;
d) Calcular las medias condicionadas $\mathbb{E}[X|Y]$ y $\mathbb{E}[Y|X]$;
e) ¿Son X e Y independientes?
f) Calcular $\mathbb{P}(Y - 2X < 0)$.

Indicio: No es necesario sino útil saber que $\sum_{y=0}^{k} y^2 = \frac{1}{6}k(1 + k)(1 + 2k)$.

8. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad conjunta

$$f_{(X,Y)} = \begin{cases} k\,x & \text{cuando } 0 \le x \le 1 \text{ y } 0 \le y \le 1 - x \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Hallar el valor de k
b) Calcular la media $\mathbb{E}[Y]$
c) Calcular la densidad marginal de X
d) Calcular la densidad condicionada $f_{Y|X=x}(y)$
e) Calcular la media condicionada $\mathbb{E}[Y|X]$

9. Dado el vector aleatorio (X, Y, Z) discreto con función de masa conjunta $p(x, y, z)$

Z=0		
X/Y	5	6
1	0.05	0.25
2	0.05	0.00
3	0.15	0.15

Z=1		
X/Y	5	6
1	0.05	0.05
2	0.05	0.10
3	0.00	0.10

cuyas componentes toman valores en estos conjuntos: $X \in \{1, 2, 3\}$, $Y \in \{5, 6\}$ y $Z \in \{0, 1\}$.

Calcula *explícitamente* las siguientes cantidades, y verifica las propiedades de la media condicionada:

a) $\mathbb{E}[X|Z]$, $\mathbb{E}[Y|Z]$, $\mathbb{E}[Z|Z]$
b) $\mathbb{E}[X|Y, Z]$ y $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y, Z]|Z]$
c) $\mathbb{E}[Y|X]$ y verifica que $\mathbb{E}[X^2\, Y|X] = X^2\mathbb{E}[Y|X]$
d) $\mathbb{E}[4|Z]$, $\mathbb{E}[4\, Y|Z]$
e) $\mathbb{E}[Y^2|Z]$ y $\mathbb{E}[4X + Y^2|Z]$

10. Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes y uniformes continuas entre 0 y 1, y sean Y_1, Y_2 e Y_3 independientes y uniformes discretas entre 0 y 4.

Calcula:

a) La función de densidad y la función de distribución de $X_1 + X_2$
b) La función de probabilidad y la función de distribución de $Y_1 + Y_2$ e $Y_1 + Y_2 + Y_3$

11. Sea $N \sim \text{Po}(10)$ y sean X_i variables independientes, distribuidas como $X \sim \text{Exp}(3)$. Define también $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$ la Poisson compuesta.

Calcula:

a) La función generadora de los momentos de X, $M_X(t)$ para $t < 3$

b) Los momentos de ordenes 1 y 2 de X.

c) Calcula la media de Z.

Indicio: Para verificar el valor de los momentos puede ser útil $\int_0^\infty x^k e^{-x}\,dx = k!$.

12. Supongamos que (N, X_1, X_2) puedan ser no independientes y intentamos verificar si es valida siempre o no la relación

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}[X]$$

cuando $Z = \sum_{i=1}^N X_i$.

La componente N toma valores $\{0, 1, 2\}$, mientras las variables X_1 y X_2 son igual de distribuidas (como vas a verificar) y toman valores $\{2, 4, 6\}$. La función de masa *conjunta*, $p_{(N,X_1,X_2)}(n, x_1, x_2) = p(n, x_1, x_2)$ está dada en la siguientes tablas

$n = 0$		x_2		
		2	4	6
x_1	2	0.003	0.006	0.021
	4	0.006	0.012	0.042
	6	0.021	0.042	0.147

$n = 1$		x_2		
		2	4	6
x_1	2	0.005	0.01	0.035
	4	0.01	0.02	0.07
	6	0.035	0.07	0.245

$n = 2$		x_2		
		2	4	6
x_1	2	0.04	0	0
	4	0	0.12	0
	6	0	0	0.04

Calcula:

a) Las funciones de probabilidad marginales $p_N(n)$ $p_{X_1}(x)$ y $p_{X_2}(x)$

b) Calcula la función de probabilidad conjunta $p_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)$. El vector (X_1, X_2) es independiente?

c) Es el vector (N, X_1, X_2) independiente? Es decir, verifica que $p(n, x_1, x_2) = p_N(n)\,p_{X_1}(x)\,p_{X_2}(x)$

d) Calcula $\mathbb{E}[N]$, $\mathbb{E}[X_1]$ y $\mathbb{E}[X_2]$

e) Se verifica que $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}[X]$?

Ahora construye un vector independiente (N, X_1, X_2) a partir de las marginales anteriores, es decir defines $p(n, x_1, x_2) = p_N(n)\,p_{X_1}(x)\,p_{X_2}(x)$.

f) Las funciones de probabilidad conjunta $p(n, x_1, x_2)$. El vector (X_1, X_2) es independiente?

g) Calcula la función de probabilidad conjunta $p_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)$

h) Calcula $\mathbb{E}[N]$, $\mathbb{E}[X_1]$ y $\mathbb{E}[X_2]$

i) Se verifica que $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}[X]$?

13. Se sacan un número X al azar entre 1 y 5, y otro número Y al azar entre 2 y 6. Calcula

a) $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{E}[Y]$

b) $\mathbb{E}[X|X + Y = 4]$

c) La función de probabilidad de $\mathbb{E}[X|X + Y]$

d) La función de probabilidad de $\mathbb{E}[X|X * Y]$

e) La media de $\mathbb{E}[X|X + Y]$ y de $\mathbb{E}[X|X * Y]$

14. Considera un espacio de probabilidad $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{12}\}$, con todos los sucesos sencillos equiprobables. En este espacio están definidas tres variables aleatorias, X, Y y Z, según la siguiente tabla

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}	ω_{11}	ω_{12}
$X(\omega)$	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-2	-2	2	2
$Y(\omega)$	1	2	2	4	4	4	4	5	5	5	5	5
$Z(\omega)$	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2

Hallar:

a) $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{E}[Z]$

b) $\mathbb{E}[Y|X]$, $\mathbb{E}[Y|Z]$, $\mathbb{E}[Y|X, Z]$

c) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|Z]]$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X, Z]]$

d) $\mathbb{E}[Y|g(X)]$ con $g(x) = x^2$, $\mathbb{E}[Y|X, g(X)]$ y $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X, g(X)]|g(X)]$.

e) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|g(X)]]$ siempre con $g(x) = x^2$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X, g(X)]]$ y $\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X, g(X)]|g(X)]]$

15. Calcula las media de las variables aleatorias positivas usando el método tradicional (usando la función de masa o la función de densidad) y las formulas

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \geq 0} \bar{F}(x) \qquad\qquad \mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \bar{F}(x)\, dx$$

válidas respectivamente para el caso discreto y continuo, y con $\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x)$.

a) X a valores discretos con función de masa: $p(5) = 0.1$; $p(7) = 0.2$; $p(8) = 0.5$ y $p(10) = 0.2$.

b) $X \sim \mathrm{Exp}(5)$

c) $X \sim \mathrm{U}(0, 10)$

d) X con función de densidad $f(x) = 3/26\, x^2\, 1\{1 \leq x \leq 3\}$

e) X con cola de distribución igual a $\bar{F}(x) = (1 - x^{-2})\, 1\{x \geq 1\}$

16. **Problema del minero** Hay un minero que quiere salir de la mina, pero se encuentra en un sitio bajo tierra con 3 salidas.

Solo una salida lo lleva a salir de la mina en 3 horas, mientras las otras dos salidas lo llevan por caminos de 6 y 3 horas que lo vuelven a llevar en el mismo sitio.

El minero elige cada vez una salida al azar olvidándose de sus elecciones anteriores.

Halla

a) el tiempo medio que el minero necesita para salir de la mina

b) la función generatriz y de los momentos del tiempo que el minero necesita para salir de la mina