Tema III

Martingalas en tiempo discreto

Bernardo D'Auria

Universidad Carlos III de Madrid

Procesos Estocásticos

Grado en Estadística y Empresa

Objetivo del tema

El objetivo principal de esta tema es introducir los conceptos de:

- Martingala, submartingala y supermartingala
- Teorema del muestreo opcional
- Teorema limites

Martingalas en tiempo discreto

La martingala es un concepto que generaliza la idea de juego justo.

En un juego justo, tenemos la misma probabilidad de ganar y de perder ($p = q = 1/2$), y por lo tanto si en el instante presente (n) tenemos una cuantía S_n, el valor esperado de la cuantía en el instante futuro ($n+1$) será

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|S_n] = (S_n + 1) \times p + (S_n - 1) \times q = S_n \ ,$$

es decir es igual al valor actual.

Definición

Se define martingala en tiempo discreto un proceso $\{M_n,\, n \geq 1\}$ *con la siguientes propiedades*

$$\mathbb{E}[|M_n|] < \infty \quad n \geq 1$$

y

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n,\, M_{n-1},\, \ldots,\, M_1] = M_n \, .$$

Sub-martingalas y super-martingalas

Si la igualdad se sustituye por una desigualdad se habla de sub o super martingala.

Definición

Se define submartingala en tiempo discreto un proceso $\{M_n,\, n \geq 1\}$ *con la siguientes propiedades*

$$\mathbb{E}[|M_n|] < \infty \quad n \geq 1$$

y

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n,\, M_{n-1},\, \dots,\, M_1] \geq M_n\,.$$

Definición

Se define supermartingala en tiempo discreto un proceso $\{M_n,\, n \geq 1\}$ *con la siguientes propiedades*

$$\mathbb{E}[|M_n|] < \infty \quad n \geq 1$$

y

$$\mathbb{E}[M_{n+1}|M_n,\, M_{n-1},\, \dots,\, M_1] \leq M_n\,.$$

Valor esperado de una martingala

Si $\{M_n,\, n \geq 1\}$ es una martingala, evaluando el valor esperado del valor condicionado futuro tenemos que

$$\mathbb{E}[M_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_{n+1} | M_n,\, M_{n-1},\, \ldots,\, M_1]] = \mathbb{E}[M_n]\,,$$

y por lo tanto tenemos que para cada $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[M_1]\ .$$

Igualmente tenemos que, para una sub-martingala,

$$\mathbb{E}[M_n] \geq \mathbb{E}[M_1]$$

y, para una super-martingala,

$$\mathbb{E}[M_n] \leq \mathbb{E}[M_1]\ .$$

Ejemplo de martingala: El paseo aleatorio

Definición

Sea $\{X_k,\, k \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias de igual distribución e independientes, se define un paseo aleatorio en tiempo discreto un proceso $\{S_n,\, n \geq 1\}$ el proceso

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

Cuando los pasos $\{X_k,\, k \geq 1\}$ tienen un tamaño medio nulo

$$\mathbb{E}[X_k] = 0\,,$$

el paseo aleatorio S_n es una martingala. De hecho

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_{n+1}|S_n,\, \ldots,\, S_1] &= \mathbb{E}[X_{n+1} + S_n|S_n,\, \ldots,\, S_1] \\
&= \mathbb{E}[X_{n+1}|S_n,\, S_{n-1},\, \ldots,\, S_1] + \mathbb{E}[S_n|S_n,\, \ldots,\, S_1] \\
&= \mathbb{E}[X_{n+1}] + S_n = S_n
\end{aligned}$$

Tiempo de paradas y proceso parado

Una variable aleatoria discreta T, es un tiempo de parada para el proceso $\{M_n,\, n \geq 1\}$ si el suceso $\{T = n\}$ es función solo de las primeras n variables

$$\{T = n\} = f(M_1, \ldots, M_n)\,.$$

Es decir una variable aleatoria es un tiempo de parada solo si la decisión de parar depende de la información presente y pasada pero no futura.

El proceso parado en T se indica con $M_{n\wedge T}$, y vale

$$M_{n\wedge T} = \begin{cases} M_n & \text{cuando } n < T \\ M_T & \text{cuando } n \geq T \end{cases}$$

y en el caso M_n es una martingala también lo es $M_{n\wedge T}$.

En general con $a \wedge b$ se indica el mínimo entre a y b.

Teorema del muestreo opcional

El teorema del muestreo opcional es debido a Doob, y es muy importante en el estudio de las martingalas. Ese teorema extiende el cálculo del valor esperado de una martingala como su valor en el origen al caso de tiempos de parada.

Teorema (Teorema del muestreo opcional)

Sea M_n una martingala y T un tiempo de parada. Si una de la siguientes condiciones se cumplen, para todos los $n \geq 1$ y una dada constante $C < \infty$

- $|M_{n \wedge T}| < C$
- $\mathbb{P}(T < C) = 1$
- $\mathbb{E}[T] < \infty$ y $\mathbb{E}[|M_{n+1} - M_n||M_n, M_{m-1}, \ldots, M_1] < C$

entonces

$$\mathbb{E}[M_T] = \mathbb{E}[M_1] \ .$$

Teorema del muestreo opcional

El teorema del muestreo opcional es debido a Doob, y es muy importante en el estudio de las martingalas. Ese teorema extiende el cálculo del valor esperado de una martingala como su valor en el origen al caso de tiempos de parada.

Teorema (Teorema del muestreo opcional)

Sea M_n una submartingala y T un tiempo de parada. Si una de la siguientes condiciones se cumplen, para todos los $n \geq 1$ y una dada constante $C < \infty$

- $|M_{n \wedge T}| < C$
- $\mathbb{P}(T < C) = 1$
- $\mathbb{E}[T] < \infty$ *y* $\mathbb{E}[|M_{n+1} - M_n| | M_n, M_{m-1}, \ldots, M_1] < C$

entonces

$$\mathbb{E}[M_T] \geq \mathbb{E}[M_1] \ .$$

Teorema del muestreo opcional

El teorema del muestreo opcional es debido a Doob, y es muy importante en el estudio de las martingalas. Ese teorema extiende el cálculo del valor esperado de una martingala como su valor en el origen al caso de tiempos de parada.

Teorema (Teorema del muestreo opcional)

Sea M_n una supermartingala y T un tiempo de parada. Si una de la siguientes condiciones se cumplen, para todos los $n \geq 1$ y una dada constante $C < \infty$

- $|M_{n \wedge T}| < C$
- $\mathbb{P}(T < C) = 1$
- $\mathbb{E}[T] < \infty$ y $\mathbb{E}[|M_{n+1} - M_n||M_n, M_{m-1}, \ldots, M_1] < C$

entonces

$$\mathbb{E}[M_T] \leq \mathbb{E}[M_1] \ .$$

El problema de la ruina del jugador - $p = 1/2$

Consideramos el juego justo, es decir

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{con prob. } 1/2 \\ -1 & \text{con prob. } 1/2 \end{cases}$$

tenemos que el número de monedas, S_n, poseída por el jugador al tiempo n es una martingala. De hecho si definimos

$$S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[S_{n+1}|S_n, S_{n-1}, \ldots, S_1] &= \mathbb{E}[X_{n+1} + S_n|S_n, S_{n-1}, \ldots, S_1] \\ &= \mathbb{E}[X_{n+1}] + S_n = S_n \ . \end{aligned}$$

y entonces $\mathbb{E}[S_n] = S_0$ para cualquier $n \geq 0$.

El problema de la ruina del jugador - $p = 1/2$

Definimos el tiempo de parada del juego, T, como el primer momento en que el proceso S_n alcanza el valor N o el valor 0

$$T = \min\{n : S_n = 0 \text{ o } S_n = N\} \ .$$

Ya que $|S_{n \wedge T}| \leq N$ podemos usar la primera condición del teorema del muestreo opcional y entonces

$$\mathbb{E}_i[S_T] = i$$

ya que $\mathbb{E}_i[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot | S_0 = i\,]$. Siendo

$$S_T = 0 \times 1\{S_T = 0\} + N \times 1\{S_T = N\}$$

tenemos que

$$i = \mathbb{E}_i[S_T] = 0 \times \mathbb{P}_i(S_T = 0) + N \times \mathbb{P}_i(S_T = N) = N\, f_i$$

y por lo tanto

$$f_i = \frac{i}{N} \ .$$

El problema de la ruina del jugador - $p \neq 1/2$

En el caso de juego no justo tenemos que el proceso S_n no es una martingala y por lo tanto el análisis anterior no vale. Tenemos que encontrar otro proceso relacionado que sea una martingala.

Con $q = 1 - p$, definimos el proceso $W_n = (q/p)^{S_n}$ y probamos que es una martingala. Tenemos que

$$W_{n+1} = (q/p)^{S_{n+1}} = (q/p)^{S_n + X_{n+1}} = W_n \, (q/p)^{X_{n+1}}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_{n+1} | W_n, \ldots, W_1] &= \mathbb{E}\left[W_n \, (q/p)^{X_{n+1}} \middle| W_n, \ldots, W_1 \right] \\ &= W_n \, \mathbb{E}\left[(q/p)^{X_{n+1}} \right] = W_n \ . \end{aligned}$$

ya que

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{q}{p} \right)^{X_{n+1}} \right] = \frac{p}{q} \times q + \frac{q}{p} \times p = 1 \ .$$

El problema de la ruina del jugador - $p \neq 1/2$

Definimos el tiempo de parada del juego, T, como el primer momento en que el proceso S_n alcanza el valor N o el valor 0

$$\begin{aligned} T &= \min\{n : S_n = 0 \text{ o } S_n = N\} \\ &= \min\{n : W_n = 1 \text{ o } W_n = (q/p)^N\} \ . \end{aligned}$$

Ya que $|W_{n \wedge T}| \leq (q/p \vee p/q)^N$, con $a \vee b = \max\{a, b\}$, podemos usar la primera condición del teorema del muestreo opcional

$$\mathbb{E}[W_T | S_0 = i\ ] = (q/p)^i \ ,$$

y razonando como en el caso del juego justo tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W_T | S_0 = i\ ] &= 1 \times \mathbb{P}_i(S_T = 0) + (q/p)^N \times \mathbb{P}_i(S_T = N) \\ &= 1 - f_i + (q/p)^N f_i \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$f_i = \frac{1 - (q/p)^i}{1 - (q/p)^N} \ .$$

Ecuación de Wald

La ecuación de Wald extiende el calculo del valor medio de una suma de variables aleatorias independientes al caso de un numero aleatorio de variables a sumar no independiente de los sumandos.

Teorema (Ecuación de Wald)

Sea $\{X_k,\, k \geq 1\}$ una sucesión de variables aleatorias de igual distribución e independientes, y sea T un tiempo de parada para esta secuencia, entonces

$$\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{T} X_k\right] = \mathbb{E}[T]\,\mathbb{E}[X_1]\ .$$

Tiempo medio para que termine el juego del jugador

La ecuación de Wald permite calcular el tiempo medio para que termine el juego (no justo) de un jugador.

Sea $S_n = S_0 + \sum_{k=1}^{n} X_k$ la cantidad poseída por el jugador en el momento n donde $\{X_k, k \geq 1\}$ son las cantidades ganadas o perdidas en el juego k. Con $p \neq 1/2$ tenemos que $\mathbb{E}[X_1] = 2p - 1$.

Definimos el tiempo de parada del juego, T, como

$$T = \text{mín}\{n : S_n = 0 \text{ o } S_n = N\}$$

y aplicando la ecuación de Wald tenemos que

$$\mathbb{E}_i[S_T] = \mathbb{E}_i\left[i + \sum_{k=1}^{T} X_k\right] = i + \mathbb{E}_i\left[\sum_{k=1}^{T} X_k\right] = i + \mathbb{E}_i[T]\,\mathbb{E}[X_1]$$

donde se recuerda que $\mathbb{E}_i[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot | S_0 = i]$.

Tiempo medio para que termine el juego del jugador

La ecuación de Wald permite calcular el tiempo medio para que termine el juego (no justo) de un jugador.

Siendo

$$S_T = 0 \times 1\{S_T = 0\} + N \times 1\{S_T = N\}$$

tenemos que

$$\mathbb{E}_i[S_T] = 0 \times \mathbb{P}_i(S_T = 0) + N \times \mathbb{P}_i(S_T = N) = N\, f_i$$

con f_i la probabilidad de acabar el juego ganando, habiendo empezado con i monedas.

Por lo tanto con $q = 1 - p$

$$\mathbb{E}_i[T] = \frac{\mathbb{E}_i[S_T] - i}{\mathbb{E}[X_1]} = \frac{N\, f_i - i}{2p - 1} = \frac{N\left(1 - (q/p)^i\right) - i\left(1 - (q/p)^N\right)}{(p-q)\left(1 - (q/p)^N\right)}.$$