Tema I

Introducción y conceptos básicos

Bernardo D'Auria

Universidad Carlos III de Madrid

Procesos Estocásticos

Grado en Estadística y Empresa

Objetivo del tema

El objetivo principal de esta tema es recordar y introducir los conceptos básicos de:

- Medidas características
- Transformadas de Fourier y Laplace. Funciones características.
- Probabilidad y Media condicionadas
- Definición de Procesos Estocásticos

Medidas caracteristicas

Las medidas características son cantidades que se pueden usar para resumir las propiedades de una variable aleatoria. La más utilizada es la media

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, \mathbb{P}(X \in dx) = \begin{cases} \sum_{x \in E} x \, p_X(x) & \text{v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \, f(x) \, dx & \text{v.a. continua} \end{cases}$$

En general si se defina la esperanza de una función, $h(\cdot)$, como

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \, \mathbb{P}(X \in dx) = \begin{cases} \sum_{x \in E} h(x) \, p_X(x) & \text{v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \, f(x) \, dx & \text{v.a. continua} \end{cases}$$

Medidas caracteristicas

Las medidas características son cantidades que se pueden usar para resumir las propiedades de una variable aleatoria. La más utilizada es la media

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathbb{P}(X \in dx) = \begin{cases} \sum_{x \in E} x\,p_X(x) & \text{v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx & \text{v.a. continua} \end{cases}$$

En general si se defina la esperanza de una función, $h(\cdot)$, como

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,\mathbb{P}(X \in dx) = \begin{cases} \sum_{x \in E} h(x)\,p_X(x) & \text{v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,f(x)\,dx & \text{v.a. continua} \end{cases}$$

Medidas caracteristicas

Se definen los momentos de orden n como

$$\mu_X^{(n)} = \mathbb{E}[X^n]$$

como la media de X ponderada por la función $h(x) = x^n$, y los momentos centrados de orden n

$$\mu_X^{[n]} = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^n]$$

ponderando con la función $h(x) = (x - \mathbb{E}[X])^n$.

La varianza de X se define como el segundo momento centrado,

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \mu_X^{[2]} = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \ .$$

Calcular la media de v.a. “positivas”

Si tenemos una variable aleatoria positiva, es decir

$$\mathbb{P}(X \geq 0) = 1 \ ,$$

entonces la media se puede calcular con la fórmula

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_{x=0}^{\infty} \bar{F}_X(x) & \text{v.a. discreta} \\ \\ \int_0^{\infty} \bar{F}_X(x)\, dx & \text{v.a. continua} \end{cases}$$

donde $\bar{F}_X(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}(X > x)$, es la función cola de distribución.

Probabilidad como media de func. indicadoras

La probabilidad de que $X \in A$ se puede escribir como

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A \mathbb{P}(X \in dx) = \int 1_A(x)\,\mathbb{P}(X \in dx)$$

$$= \begin{cases} \sum_{x \in E} 1_A(x)\,p_X(x) & \text{v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(x)\,f(x)\,dx & \text{v.a. continua} \end{cases}$$

donde $1_A(x)$ es la función indicadora del conjunto A, es decir

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Por lo tanto podemos escribir

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{E}[1_A(X)]$$

Probabilidad como media de func. indicadoras

La probabilidad de que $X \in A$ se puede escribir como

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A \mathbb{P}(X \in dx) = \int 1_A(x)\, \mathbb{P}(X \in dx)$$

$$= \begin{cases} \sum_{x \in E} 1_A(x)\, p_X(x) & \text{v.a. discreta} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} 1_A(x)\, f(x)\, dx & \text{v.a. continua} \end{cases}$$

donde $1_A(x)$ es la función indicadora del conjunto A, es decir

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

Por lo tanto podemos escribir

$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{E}[1_A(X)]$$

Funciones que caracterizan una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria, se definen las siguientes funciones

- La función característica, $\psi_X(s)$,

$$\psi_X(t) = \mathbb{E}[e^{i\,t\,X}] \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

- La función generatriz de momentos, $M_X(t)$,

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{t\,X}] \quad t \in \mathbb{R} \ .$$

- La función generatriz, $\phi_X(z)$, generalmente cuando X es discreta,

$$\phi_X(z) = \mathbb{E}[z^X] \quad z \in \mathbb{C} \quad |z| < 1 \ .$$

- La trasformata de Laplace, $\tilde{F}_X(s)$, solo cuando $X \geq 0$,

$$\tilde{F}_X(s) = \mathbb{E}[e^{-s\,X}] \quad s \in \mathbb{R} \ .$$

Todas estas funciones caracterizan la variable aleatoria, es decir si dos variables aleatorias, X e Y, tienen una de estas funciones iguales entonces todas serán iguales y $X \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y$.

Función generatriz de momentos para calcular momentos

Sea X una variable aleatoria, y sea

$$M_X(t) = \mathbb{E}[e^{t\,X}] \quad t \in \mathbb{R} \;.$$

su función generatriz de momentos.

Es posible calcular los momentos de X de cualquier orden derivando la función $M_X(t)$ tantas veces cuanto es el orden del momento y calculando el valor de esta derivada en 0.

Es decir vale la siguiente fórmula

$$\mu_X^{(n)} = \mathbb{E}[X^n] = \left.\frac{dM_X(t)}{dt^n}\right|_{t=0} \quad .$$

Ejemplos de Variables Aleatorias

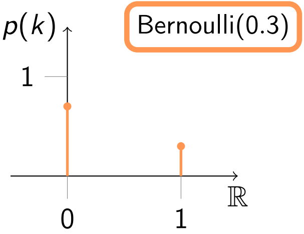
Variable aleatoria Bernoulli de parametro $p \in [0,1]$.

$$X \sim \text{Be}(p)$$

Tiene función de probabilidad

$$p_X(k) = \begin{cases} q & k = 0 \\ p & k = 1 \end{cases}$$

donde $q = 1 - p$.



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = p$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = p\,q$
- $\phi_X(z) = q + p\,z$
- $M_X(t) = q + p\,e^t$

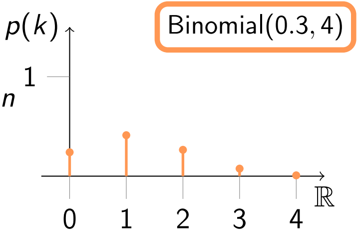
Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Binomial de parámetros $p \in [0,1]$ y $n \in \mathbb{N}$.

$$X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$$

Tiene función de probabilidad

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k \, (1-p)^{n-k} \quad 0 \leq k \leq n$$



donde $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ con $k \leq n$.

Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = n\,p$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = n\,p\,(1-p)$
- $\phi_X(z) = (1 - p + p\,z)^n$
- $M_X(t) = (1 - p + p\,e^t)^n$

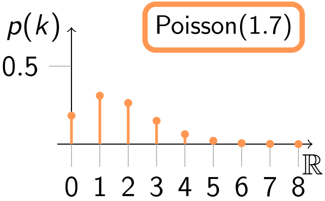
Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Poisson de parámetros $\nu > 0$.

$$X \sim \mathrm{Po}(\nu)$$

Tiene función de probabilidad

$$p_X(k) = \frac{\nu^k}{k!} e^{-\nu} \quad k \geq 0 \ .$$



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = \nu$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \nu$
- $\phi_X(z) = \exp(\nu(z-1))$
- $M_X(t) = \exp(\nu(e^t - 1))$

Ejemplos de Variables Aleatorias

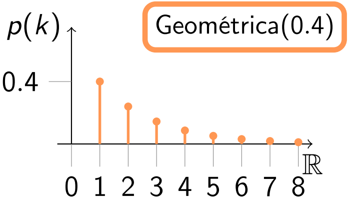
Variable aleatoria Geométrica de parámetros $p > 0$.

$$X \sim \text{Geo}(p)$$

Tiene función de probabilidad

$$p_X(k) = p\, q^{k-1} \quad k \geq 1\ .$$

donde $p + q = 1$.



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = 1/p$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = q/p^2$
- $\phi_X(z) = \frac{z\,p}{1-z\,q}$
- $M_X(t) = \frac{pe^t}{1-qe^t} \quad t < -\ln(q)$

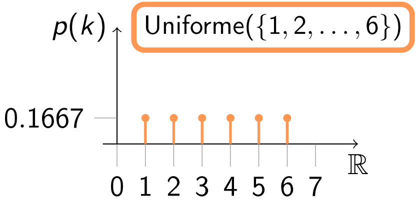
Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Uniforme Discreta entre 1 y N, con $N \geq 1$.

$$X \sim \mathrm{U}(\{1, 2, \ldots, N\})$$

Tiene función de probabilidad

$$p_X(k) = 1/N \quad k \in \{1, \ldots, N\} \ .$$



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = \frac{N+1}{2}$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \frac{N^2-1}{12}$
- $\phi_X(z) = \frac{z}{N}\frac{1-z^N}{1-z}$
- $M_X(t) = \frac{e^t}{N}\frac{1-e^{N\,t}}{1-e^t}$

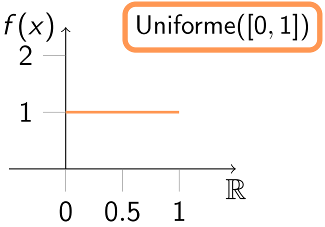
Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Uniforme Continua entre a y b, con $b > a$.

$$X \sim \mathrm{U}([a,b])$$

Tiene función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} (b-a)^{-1} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = \frac{b+a}{2}$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$
- $\psi_X(t) = \frac{e^{i\,t\,b} - e^{i\,t\,a}}{i\,t(b-a)}$
- $M_X(t) = \frac{e^{t\,b} - e^{t\,a}}{t(b-a)}$

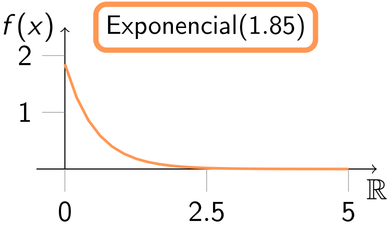
Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Exponencial con parametro $\lambda > 0$.

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

Tiene función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda\, x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = 1/\lambda^2$
- $M_X(t) = \lambda/(\lambda - t)$
- $\tilde{F}_X(s) = \lambda/(\lambda + s)$

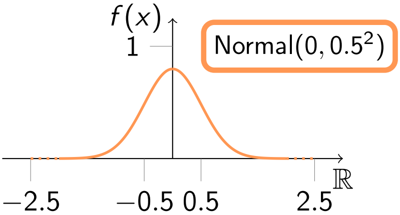
Ejemplos de Variables Aleatorias

Variable aleatoria Normal con parámetros $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma \geq 0$.

$$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$$

Tiene función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



Medidas características

- $\mathbb{E}[X] = \mu$
- $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \sigma$
- $\psi_X(t) = \exp\left(i\,\mu\,t - \frac{\sigma^2\,t^2}{2}\right)$
- $M_X(t) = \exp\left(\mu\,t + \frac{\sigma^2\,t^2}{2}\right)$

Vect. Aleatorios - Medidas caracteristicas

Sea $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un vector aleatorio y $h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ una función, se denota la media de la función h aplicada al vector como

$$\mathbb{E}[h(X_1, X_2, \ldots, X_n)] \, .$$

Si el vector es discreto tenemos que

$$\mathbb{E}[h(X_1, X_2, \ldots, X_n)] = \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} h(x_1, \ldots, x_n)\, p(x_1, \ldots, x_n) \, ,$$

y si es continuo tenemos que

$$\mathbb{E}[h(X_1, \ldots, X_n)] = \int \cdots \int h(x_1, \ldots, x_n)\, f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n \, .$$

Vectores Aleatorios - Independencia

Dos variables aleatorias X e Y se dicen independientes, $X \perp Y$, si por cualquiera dos conjuntos A y B se tiene que

$$\mathbb{P}(X \in A,\ Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B)\ .$$

En particular esto es equivalente a decir que, por cualquiera dos funciones $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$ tenemos que

$$\mathbb{E}[f(X)\,g(Y)] = \mathbb{E}[f(X)]\,\mathbb{E}[g(Y)]\ .$$

En el caso discreto eso quiere decir que

$$\mathbb{P}_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}_X(x)\,\mathbb{P}_Y(y)$$

y en el caso continuo

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$$

es decir las funciones conjuntas son el producto de las marginales.

Probabilidades condicionadas - caso discreto

Por simplicidad consideramos simplemente el caso bivariante, y consideramos un vector (X,Y) que supongamos discreto.

Al igual que tratando con sucesos, se puede calcular la probabilidad de que $X \in A$ una vez que ya sabemos que $Y \in B$.

Esto se define como

$$\mathbb{P}(X \in A | Y \in B) = \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y \in B)}{\mathbb{P}(Y \in B)} \ .$$

Si fijamos el éxito $Y = y$ tenemos que la nueva variable aleatoria $X|Y = y$, asume valores con probabilidad positiva solo en el nuevo espacio muestral $E|Y = y$.

En el caso discreto $X|Y = y$ tendrá función de masa

$$p_{X|Y=y}(x) = \frac{p_{X,Y}(x, y)}{p_Y(y)}$$

Probabilidades condicionadas - caso continuo

En el caso continuo, usando la definición de probabilidad condicionada

$$\mathbb{P}(X \in A | Y \in B) = \frac{\mathbb{P}(X \in A, Y \in B)}{\mathbb{P}(Y \in B)} \, .$$

tenemos que

$$\mathbb{P}(X \in dx | Y \in dy) = \frac{\mathbb{P}(X \in dx, Y \in dy)}{\mathbb{P}(Y \in dy)} = \frac{f_{X,Y}(x,y)\, dx\, dy}{f_Y(y)\, dy}$$

entonces como $\mathbb{P}(X \in dx | Y \in dy) = f_{X|Y=y}(x)\, dx$ tenemos que la función de densidad de $X | Y = y$ es

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} \, .$$

Comentario

Nota que en el caso continuo se ha condicionado la variable aleatoria X al caso del éxito de un suceso con probabilidad nula, $Y = y$!

Medias condicionadas

Teniendo en cuenta de que $X|Y = y$ sigue siendo una variable aleatoria, se pueden calcular sus funciones características, como su media

$$\mathbb{E}[X|Y = y] = \begin{cases} \sum_{x \in E} x \, p_{X|Y=y}(x) & \text{caso discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{X|Y=y}(x) \, dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

o la media de una función $h(\cdot)$

$$\mathbb{E}[h(X)|Y = y] = \begin{cases} \sum_{x \in E} h(x) \, p_{X|Y=y}(x) & \text{caso discreto} \\ \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \, f_{X|Y=y}(x) \, dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

Media condicionada

La media condicionada

$$\mathbb{E}[X|Y=y] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x\in E} x\, p_{X|Y=y}(x) & \text{caso discreto} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{X|Y=y}(x)\, dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

es función del resultado y obtenido por Y. Si se calcula su valor antes de saber el resultado obtenido para Y se tiene una variable aleatoria que se denota por

$$\mathbb{E}[X|Y]$$

Propiedades de la media condicionada

La media condicionada $\mathbb{E}[X|Y]$ tiene las siguientes propiedades

- $\mathbb{E}[a\,X + b\,Z|Y] = a\,\mathbb{E}[X|Y] + b\,\mathbb{E}[Z|Y]$
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]]$
- $\mathbb{E}[f(Y)\,X|Y] = f(Y)\,\mathbb{E}[X|Y]$
- $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Z,Y]|Y] = \mathbb{E}[X|Y]$

- C constante $\Rightarrow \mathbb{E}[C|Y] = C$
- $X \perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$

Además, usando la función indicadora, se puede expresar la probabilidad condicionada como

$$\mathbb{P}(X \in A|Y) = \mathbb{E}[1_A(X)|Y] \ .$$

Ejemplo

Consideramos como experimento el lanzamiento de dos dados (X, Y).

Definimos la variable aleatoria $Z = X + Y$ y hallamos la esperanza condicionada de X dado Z, es decir $\mathbb{E}[X|Z]$.

Tenemos de inmediato que

$$\mathbb{E}[X|Z = 2] = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[X|Z = 12] = 6$$

y

Ejemplo

Consideramos como experimento el lanzamiento de dos dados (X, Y).

Definimos la variable aleatoria $Z = X + Y$ y hallamos la esperanza condicionada de X dado Z, es decir $\mathbb{E}[X|Z]$.

Tenemos de inmediato que

$$\mathbb{E}[X|Z=2] = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[X|Z=12] = 6$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|Z=3] &= \sum_{x=1}^{x=6} x\,\mathbb{P}(X=x|Z=3) \\
&= 1\,\mathbb{P}(X=1|Z=3) + 2\,\mathbb{P}(X=1|Z=3) \\
&= 1\,\frac{\mathbb{P}(X=1, Y=2)}{\mathbb{P}(Z=3)} + 2\,\frac{\mathbb{P}(X=2, Y=1)}{\mathbb{P}(Z=3)} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Ejemplo

Consideramos como experimento el lanzamiento de dos dados (X, Y).

Definimos la variable aleatoria $Z = X + Y$ y hallamos la esperanza condicionada de X dado Z, es decir $\mathbb{E}[X|Z]$.

Tenemos de inmediato que

$$\mathbb{E}[X|Z = 2] = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{E}[X|Z = 12] = 6$$

y al final

$$\mathbb{E}[X|Z = z] = \frac{z}{2}$$

es decir la función de probabilidad de $\mathbb{E}[X|Z]$ es

$$\mathbb{E}[X|Z] = \begin{cases} 1 & \text{con prob. } 1/36; \quad 1.5 \quad \text{con prob. } 2/36; \\ 2 & \text{con prob. } 3/36; \quad 2.5 \quad \text{con prob. } 4/36; \\ 3 & \text{con prob. } 5/36; \\ 3.5 & \text{con prob. } 6/36; \\ 4 & \text{con prob. } 5/36; \quad 4.5 \quad \text{con prob. } 4/36; \\ 5 & \text{con prob. } 3/36; \quad 5.5 \quad \text{con prob. } 2/36; \\ 6 & \text{con prob. } 1/36; \end{cases}$$

Suma de var. aleatorias independientes

Sean, X, y Y dos variables aleatorias independientes, tenemos que la suma $Z = X + Y$ tiene esta distribución

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \le z) = \mathbb{E}[1(X+Y \le z)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[1(X+Y \le z)|Y]]$$

en el caso discreto

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \sum_{y=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[1(X+Y \le z)|Y=y]\mathbb{P}(Y=y) \\ &= \sum_{y=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X \le z-y)\mathbb{P}(Y=y) \end{aligned}$$

es decir

$$p_Z(z) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X = z-y)\mathbb{P}(Y=y) = p_X \star p_Y(z)$$

donde datas dos funciones discretas $g(k)$ y $h(k)$ se define su convolución

$$g \star h(k) = h \star g(k) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g(k-i)\, h(i)$$

Suma de var. aleatorias independientes

Sean, X, y Y dos variables aleatorias independientes, tenemos que la suma $Z = X + Y$ tiene esta distribución

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{E}[1(X+Y \leq z)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[1(X+Y \leq z)|Y]]$$

en el caso continuo

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_{y=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}[1(X+Y \leq z)|Y = y]\,\mathbb{P}(Y \in dy) \\ &= \int_{y=-\infty}^{\infty} \mathbb{P}(X \leq z - y)\, f_Y(y)\, dy \end{aligned}$$

es decir

$$f_Z(z) = \int_{y=-\infty}^{\infty} f_X(z-y)\,\mathbb{P}(Y \in dy) = f_X \star f_Y(z)$$

donde datas dos funciones continuas $g(x)$ y $h(x)$ se define su convolución

$$g \star h(x) = h \star g(x) = \int_{u=-\infty}^{\infty} g(x-u)\, h(u)\, du$$

Suma de var. aleatorias independientes

Sean, X, y Y dos variables aleatorias independientes, tenemos que la suma $Z = X + Y$ tiene esta distribución

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{E}[1(X + Y \leq z)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[1(X + Y \leq z)|Y]]$$

en los dos caso se puede también escribir

$$F_Z(z) = \int_{y=-\infty}^{\infty} F_X(z-y)\, dF_Y(y) = F_X \circledast F_Y(z)$$

donde la convolución de Stieltjes de dos funciones no decrecientes $G(x)$ y $H(x)$ se define como

$$G \circledast H(x) = H \circledast G(x) = \int_{u=-\infty}^{\infty} G(x-u)\, H'(u)\, du$$

Suma de var. aleatorias independientes

La función característica de la suma

$$\begin{aligned}\psi_Z(z) &= \mathbb{E}[e^{i\,z\,Z}] = \mathbb{E}[e^{i\,z\,(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{i\,z\,X}\,e^{i\,z\,Y}] \\ &\stackrel{\text{ind}}{=} \mathbb{E}[e^{i\,z\,X}]\,\mathbb{E}[\,e^{i\,z\,Y}] = \psi_X(z)\,\psi_Y(z)\end{aligned}$$

Lo mismo vale para las otras funciones

$$\begin{aligned}M_Z(t) &= M_X(t)\,M_Y(t) \\ \phi_Z(z) &= \phi_X(z)\,\phi_Y(z) \\ \tilde{F}_Z(s) &= \tilde{F}_X(s)\,\tilde{F}_Y(s)\end{aligned}$$

Esto es útil al momento de calcular los momentos de la suma de variables aleatorias independientes usando la función generatriz de momentos, M_Z, por la fórmula

$$\mu_Z^{(n)} = \mathbb{E}[Z^n] = \left.\frac{dM_Z(t)}{dt^n}\right|_{t=0} .$$

Ejemplo: Distribución Poisson compuesta

Sea N una variable aleatoria de Poisson de parametro ν, y sea X_1, X_2, … una sucesión de variables aleatorias independientes y igualmente distribuidas independientes de N.

La variable aleatoria de Poisson compuesta, Z, se define como la suma aleatoria de N de esas variables, es decir

$$Z = \sum_{n=1}^{N} X_n$$

y vale 0 si $N = 0$.

Tenemos que, con $X \sim X_1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= & \mathbb{E}[N]\,\mathbb{E}[X] & &= \nu\,\mathbb{E}[X\ ] = \nu\,\mu_X^{(1)} \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] &= & \mathbb{E}[N]\,\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + \mathbb{E}^2[X]\,\mathbb{V}\mathrm{ar}[N] & &= \nu\,\mathbb{E}[X^2] = \nu\,\mu_X^{(2)}
\end{aligned}$$

Definición de Proceso Estocástico

Un Proceso Estocástico en tiempo discreto $X = (X_n, n \geq 0)$, es una colección numerable de variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$.

Es decir a cada experimento $\omega \in \Omega$ corresponde una secuencia infinita de valores in $\mathbb{R}$:

$$X : \omega \in \Omega \to X(\omega) = (x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty \ .$$

Fijado un valor de ω, la secuencia $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$, que nos da la trayectoria del proceso a lo largo de todo el tiempo, $n \geq 0$, toma el nombre de camino muestral.

Si fijamos un instante de tiempo $n \in \mathbb{N}$ tenemos la realización del proceso al tiempo n, es decir la variable aleatoria

$$X(n) \text{ o } X_n : \omega \in \Omega \to X_n(\omega) = x_n \in \mathbb{R} \ .$$

Distribuciones de Dimensiones Finitas

Para poder calcular la probabilidad de sucesos relacionados con el proceso X, tenemos que conocer las distribuciones de los vectores $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ por cualquier indices finitos $t_1, t_2, \ldots t_n \in \mathbb{N}$.

Es decir, fijado un número $n < \infty$, n instantes de tiempo, $t_1, t_2, \ldots t_n \in \mathbb{N}$ y un equivalente número de niveles $x_1, x_2, \ldots x_n \in \mathbb{R}$ se necesita conocer el valor de la distribución conjunta

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbb{P}(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq t_2, \ldots, X_{t_n} \leq t_n) \ .$$

La colección de funciones

$$\{F_{t_1,t_2,\ldots,t_n} : n < \infty \text{ y } t_1, t_2, \ldots t_n \in \mathbb{N}\}$$

se llama distribuciones de dimensiones finitas o DDF .

Consistencia de las DDF

Para que las DDF sean consistentes, hay que cumplirse la siguiente propiedad

$$\lim_{x_k \to \infty} F_{t_1,\ldots,t_{k-1},t_k,t_{k+1},\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots,x_n)$$
$$= F_{t_1,\ldots,t_{k-1},t_{k+1},\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)$$

Además, dada un colección de funciones de distribución coherentes, siempre es posible construir un proceso X sobre un espacio de probabilidad que tenga esta colección como DDF.

Versiones, modificaciones y procesos indistinguibles

Datos dos procesos estocásticos, X y Y, decimos que

- son versiones el uno del otro si tienen las mismas DDF
- son modifaciones el uno del otro si están definidos sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ y

$$\mathbb{P}(X_n = Y_n) = 1 \quad n \in \mathbb{N}$$

- son indistinguibles si

$$\mathbb{P}(X_n = Y_n, n \in \mathbb{N}) = 1$$

Es inmediato verificar que modifaciones $\Rightarrow$ versiones.

En tiempo discreto, modifaciones $\iff$ indistinguibles.

Dos procesos que son versiones el uno del otro no tienen porque estar definidos sobre el mismo espacio de probabilidad.

Medidas caracteristicas

Dado un proceso, X, es posible definir medidas características que van a ser funciones del tiempo.

Por ejemplo, así se definen la media, la varianza y la función de autocovarianza de un proceso.

$$\begin{aligned}
\text{media:} \quad & \mu_X(n) = \mathbb{E}[X(n)] \\
\text{varianza:} \quad & \sigma_X^2(n) = \mathbb{V}\mathrm{ar}[X(n)] = \mathbb{E}[(X(n) - \mu_X(n))^2] \\
\text{autocorrelación:} \quad & R_X(n,m) = \mathbb{E}[X(n)X(m)] \\
\text{autocovarianza:} \quad & \mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n,m) = \mathbb{E}[(X(n) - \mu_X(n))(X(m) - \mu_X(m))]
\end{aligned}$$

Sean X y Y dos procesos, se definen las funciones

$$\begin{aligned}
\text{correlación:} \quad & R_{X,Y}(n,m) = \mathbb{E}[X(n)Y(m)] \\
\text{covarianza:} \quad & \mathbb{C}\mathrm{ov}_{X,Y}(n,m) = \mathbb{E}[(X(n) - \mu_X(n))(Y(m) - \mu_Y(m))]
\end{aligned}$$

Cuando $\mathbb{C}\mathrm{ov}_{X,Y}(n,m) = 0$ los procesos se dicen incorrelados y se dicen ortogonales cuando $R_{X,Y}(n,m) = 0$.

Procesos Gaussianos y independientes

Un proceso, X se dice Gaussiano si por cualquier indices finitos $t_1, t_2, \ldots t_n \in \mathbb{N}$ el vector $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ es distribuido según una Normal multivariante.

Un proceso Gaussiano está caracterizado por sus funciones de media $\mu_X(n)$ y de autocovarianza $\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n, m)$.

Dos procesos, X y Y, se dicen independientes si los vectores $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n})$ y $(Y_{s_1}, Y_{s_2}, \ldots, Y_{s_m})$ son independientes, por cualquier valor de los indices $t_1, t_2, \ldots t_n \in \mathbb{N}$ y $s_1, s_2, \ldots s_m \in \mathbb{N}$, $n, m < \infty$.

Tenemos que

independientes $\Rightarrow$ incorrelados.

independientes $\not\Leftarrow$ incorrelados.

independientes $\Leftarrow$ incorrelados + Gaussianos.

Estacionariedad fuerte y debil

Un proceso se dice estacionario en sentido fuerte si la familia de FFD es invariable por translaciones del tiempo.

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n} = F_{t_1+s,t_2+s,\ldots,t_n+s}$$

para todos los $n < \infty$, $t_1, t_2, \ldots t_n \in \mathbb{N}$ y $s \in \mathbb{N}$.

Se dice estacionario en sentido débil si las funciones media y autocorrelacion cumplen con la propiedad de invariancia.

$$\mu_X(n) = \mu_X(n+s) = \mu_X(0)$$
$$\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n,m) = \mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n+s,m+s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}_X(0,m-n)$$

para todos los n, m y $s \in \mathbb{N}$.

Es inmediato verificar que

estacionario en sentido fuerte $\Rightarrow$estacionario en sentido débil.

estacionario en sentido fuerte $\not\Leftarrow$estacionario en sentido débil.

estacionario en sentido fuerte $\Leftarrow$estacionario en sentido débil

$+$ Gaussianos.

Bibliografia I

- S. M. Ross
  Stochastic processes.
  John Wiley and Sons, Inc., 2ed., 1996.
  Capítulo I
- R. Durrett.
  Essentials of stochastic processes.
  Springer., 1999.
  Apéndice A