Tema 7. Intervalos de confianza y contrastes de hipótesis basados en remuestreos

basado en

B. Efron, R. Tibshirani (1993). An Introduction to the bootstrap.

O. Kirchkamp (2019). Resampling methods.

Curso 2022/2023

Introducción

- Los errores estándar se usan a menudo para calcular intervalos de confianza ***aproximados*** para los parámetros que se estudian.

- Dado un estimador $\hat{\theta}$ y un error estándar $\widehat{se}$, el intervalo de confianza al 95 % habitual es

$$\hat{\theta} \pm 1{,}96 \cdot \widehat{se}$$

  donde $z_{0{,}025} = 1{,}96$ procede de una distribución normal estándar.

- En el campo de los intervalos de confianza existen diferentes técnicas bootstrap y es un área de desarrollo teórico en evolución constante.

Introducción

- Supongamos que los datos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ proceden de una distribución desconocida F.

- Si el tamaño muestral n es grande la distribución de $\hat{\theta}$ converge a una normal de media θ y varianza $\widehat{se}^2$, es decir

$$\frac{\hat{\theta} - \theta}{\widehat{se}} \sim N(0, 1)$$

- De este modo, se obtiene un intervalo de confianza estándar con probabilidad de recubrimiento igual a $1 - \alpha$

$$\left[\hat{\theta} - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\widehat{se}; \hat{\theta} - z_{\frac{\alpha}{2}}\widehat{se}\right]$$

donde z_α es el percentil 100α-ésimo de una distribución normal.

Introducción

- La propiedad de recubrimiento implica que aproximadamente en el $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$ de las ocasiones este intervalo contiene el verdadero valor de θ.
- El bootstrap se puede usar para mejorar los intervalos de confianza; de hecho, cuando n es muy grande los intervalos bootstrap y los aproximados convergen a los mismos valores.
- Se puede calcular el estimador *plug-in* ($\hat{\theta} = t(\hat{F})$) del parámetro de interés $\theta = t(F)$ y, a su vez, un error estándar $\widehat{se}$ basado en un método bootstrap o en un método *jackknife*.

Ejemplo

- Se podría usar un enfoque *exacto* para los intervalos de confianza:
  (I) Funciona incluso con muestras pequeñas.
  (II) Pero requiere el conocimiento de la *verdadera* distribución.
  (III) Para aplicarse a veces hay que hacer transformaciones de los datos.

- En el caso del ejemplo de los aparatos de aire acondicionado, si el número de fallos sigue una distribución de **Poisson**, entonces los tiempos entre fallos siguen una **distribución exponencial**.

Ejemplo

- Supongamos que la función de densidad es

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- Para estimar λ se puede usar el estimador de máxima verosimilitud (MLE):

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_i x_i} = \frac{1}{\overline{x}}$$

Ejemplo

- Al asumir una distribución exponencial, se puede calcular el intervalo de confianza exacto para el parámetro (o para la media). Ver:

```
en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution
```

$$IC_{\frac{1}{\lambda}} = \left[\frac{\bar{x} \cdot 2n}{\chi^2_{2n,1-\frac{\alpha}{2}}} ; \frac{\bar{x} \cdot 2n}{\chi^2_{2n,\frac{\alpha}{2}}} \right]$$

donde $\chi^2_{n,\alpha}$ es el percentil 100α-ésimo de una distribución χ^2_n.

- De este modo se obtiene un intervalo igual a

```
[1]  65.89765 209.17415
```

Aproximación a la normal

- La aproximación a la normal se puede hacer cuando la muestra es grande.
- Así, la media muestral se distribuye asintóticamente como una normal aplicando el *TCL* (Teorema Central del Límite).
- Aproximación normal basada en estimadores paramétricos de σ:

```
confint(lm(hours ~ 1, data=aircondit))
```

```
                 2.5 %   97.5 %
(Intercept) 21.52561 194.6411
```

Intervalos t de Student

- Una manera de mejorar los intervalos asintóticos, cuando las muestras son pequeñas, es usar intervalos t de Student.
- En 1908 Gosset (the *Student*) calculó la distribución de:

$$t = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\widehat{se}} \sim t_{n-1}$$

- Mediante esta aproximación el intervalo queda como

$$\left[\hat{\theta} - t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \widehat{se} \ ; \ \hat{\theta} - t_{n-1,\alpha/2} \cdot \widehat{se}\right]$$

  donde $t_{n-1,\alpha}$ es el percentil α de una distribución t de Student.
- Pero no tiene en cuenta el ajuste necesario de los intervalos de confianza cuando aparece *asimetría*.
- Se puede mejorar esta aproximación mediante los intervalos bootstrap t.

Intervalos bootstrap t

- Usando el bootstrap se pueden obtener intervalos ajustados sin necesidad de asumir normalidad en los datos.
- Los intervalos que se construyen reciben el nombre de aproximación *bootstrap-t*.
- En este método se calcula una tabla de cuantiles de t directamente a partir de los datos que se tienen.
- Esta tabla se usa entonces para construir intervalos de confianza de la misma manera que en el caso de los intervalos clásicos.
- La tabla de valores remuestreados se construye generando B muestras bootstrap y luego calculando la versión bootstrap del estadístico t para cada uno de ellos.

Intervalos bootstrap t

- El método consiste en generar B muestras bootstrap $\mathbf{x}^{*1}, \mathbf{x}^{*2}, \ldots, \mathbf{x}^{*B}$. A continuación, para cada una de ellas se calcula

$$Z^*(b) = \frac{\hat{\theta}^*(b) - \hat{\theta}}{\widehat{se}^*(b)}$$

- donde $\hat{\theta}^*(b) = s(\mathbf{x}^{*b})$ es el valor de $\hat{\theta}$ para la muestra bootstrap $\mathbf{x}^{*b}$ y $\widehat{se}^*(b)$ es el valor estimado del error estándar de $\hat{\theta}^*$ para la muestra bootstrap $\mathbf{x}^{*b}$.

- El α-esimo percentil de $Z^*(b)$ se estima mediante el valor $\hat{t}_\alpha$ tal que

$$\frac{\#\left\{Z^*(b) \leq \hat{t}_\alpha\right\}}{B} = \alpha$$

Intervalos bootstrap t

- Por ejemplo, si $B = 1000$ el estimador del punto 5 % es el 50-esimo valor mayor de los $Z^*(b)$ ordenados y el estimador del punto 95 % es el 950-esimo valor mayor de los $Z^*(b)$ ordenados.

- De este modo, el estimador bootstrap-t que queda es

$$\left[\hat{\theta} - \hat{t}_{1-\alpha/2} \cdot \widehat{se};\ \hat{\theta} - \hat{t}_{\alpha/2} \cdot \widehat{se}\right]$$

- Es necesario considerar un número de réplicas B mayor que en el caso del cálculo de los errores estándar bootstrap.

- Por otro lado, los percentiles bootstrap-t pueden diferir bastante de los percentiles t de Student habituales.

Ejemplo

- Se puede observar que se necesitan extraer muchas muestras bootstrap para obtener unos resultados ajustados.
- Si comparamos ahora los cuantiles de la distribución original *t* de Student con los cuantiles bootstrap se obtienen resultados muy diferentes.

```
alfa = 0.05
(extremos = quantile(bT, c(1-alfa/2, alfa/2)))
```

```
     2.5%       97.5%
 1.492036   -4.688775
```

```
(t.standard = qt(c(alfa/2,1-alfa/2),N-1))
```

```
[1] -2.200985  2.200985
```

Características de los intervalos bootstrap-t

- Los valores de la t de Student o de la normal son simétricos alrededor del cero. De este modo se obtienen intervalos simétricos alrededor del estimador del parámetro $\hat{\theta}$.
- Por el contrario, los percentiles bootstrap-t pueden ser *asimétricos* con respeto al estimador, lo que lleva a obtener intervalos que son más largos o cortos a la derecha o la izquierda.
- Esta asimetría representa una mejora en el recubrimiento que tienen estos intervalos.
- El procedimiento bootstrap-t es una buena opción particularmente en estadísticos de localización como la media muestral, la mediana o los percentiles muestrales.

Desventajas de los intervalos bootstrap-t

- Pero hay problemas computacionales y de interpretación en los intervalos bootstrap-t.
- En el denominador del estadístico $Z^*(b)$ se necesita conocer $\widehat{se}^*(b)$, es decir, la desviación estándar de $\hat{\theta}^*$ para cada muestra bootstrap $\mathbf{x}^{*b}$.
- En el caso de la media, existe una expresión explícita para calcularlo, pero para muchos estadísticos no se tiene una expresión formal para ello.
- La única opción sería calcular un estimador bootstrap del error estándar para **cada** muestra bootstrap lo cual no es muy operativo.

Desventajas de los intervalos bootstrap-t

- Otro problema que se presenta en los intervalos bootstrap-t es que se puede comportar de manera errática con muestras pequeñas.
- También los intervalos bootstrap-t **no** son invariantes cuando se aplican transformaciones al parámetro original que se estima.
- A veces, interesa transformar los datos para encontrar mejores estimadores de θ. Por ejemplo, cambiando la escala de las observaciones.
- Pero a menudo no se sabe cuál es la mejor transformación para aplicar a los datos.

Intervalos *básicos*

- Otra opción para intervalos bootstrap, son los *intervalos básicos*

- Si se asume que $\hat{\theta} - \theta$ se puede aproximar o tiene la misma distribución que $\hat{\theta}^* - \hat{\theta}$, entonces, el intervalo básico se define como

$$IC_{bas} = \left[2\hat{\theta} - \hat{\theta}^*_{1-\frac{\alpha}{2}};\ 2\hat{\theta} - \hat{\theta}^*_{\frac{\alpha}{2}}\right]$$

- Propiedades de los intervalos básicos:

  (I) No son invariantes mediante transformaciones.

  (II) Corrigen el sesgo siempre que $\hat{\theta} - \theta$ tenga la misma distribución que $\hat{\theta}^* - \hat{\theta}$.

Intervalos tipo percentil

- Se pueden considerar otro tipo de intervalos basados en los *percentiles*.
- Supongamos que se obtiene una muestra $\mathbf{x}^*$ a partir de $\hat{P} \to \mathbf{x}^*$ y se calculan luego los estadísticos $\hat{\theta}^* = s(\mathbf{x}^*)$.
- Si se denomina $\hat{G}$ la función de distribución acumulada de $\hat{\theta}^*$, entonces, el *intervalo percentil* de nivel $1 - \alpha$ se define como los percentiles $\frac{\alpha}{2}$ y $1 - \frac{\alpha}{2}$ de $\hat{G}$:

$$\left[\hat{\theta}_{\%low};\ \hat{\theta}_{\%up}\right] = \left[\hat{G}^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right);\ \hat{G}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

Intervalos tipo percentil

- Como por definición $\hat{G}^{-1}(\alpha) = \hat{\theta}^*_{(\alpha)}$ se puede reescribir también el intervalo como

$$\left[\hat{\theta}_{\%low};\ \hat{\theta}_{\%up}\right] = \left[\hat{\theta}^*_{(\frac{\alpha}{2})};\ \hat{\theta}^*_{(1-\frac{\alpha}{2})}\right]$$

- La expresión anterior se refiere a una situación ideal donde hay infinitas réplicas bootstrap. En la práctica se toma un número finito B de ellas.

- Se generan B conjuntos de datos bootstrap independientes $\mathbf{x}^{*1}, \mathbf{x}^{*2}, \ldots, \mathbf{x}^{*B}$ y se calculan los respectivos estimadores $\hat{\theta}^*(b) = s(\mathbf{x}^{*b})$, donde $b = 1, \ldots, B$.

Intervalos tipo percentil

- Se denomina como $\hat{\theta}^*_{B(\alpha)}$ el precentil α-esimo de los valores $\hat{\theta}^*(b)$, es decir, el $B \cdot \alpha$-esimo valor en la lista ordenada de las B réplicas de $\hat{\theta}^*$.
- Por ejemplo, si $B = 2000$ y $\alpha = 0{,}05$ entonces $\hat{\theta}^*_{B(\alpha)}$ es el valor 100-esimo en la lista ordenada de réplicas.
- Del mismo modo, se razonaría con $\hat{\theta}^*_{B(1-\alpha)}$, el precentil $1 - \alpha$-esimo de los valores.

Intervalos tipo percentil

- De este modo, el intervalo percentil $1-\alpha$ se define como

$$\left[\hat{\theta}_{\%low};\ \hat{\theta}_{\%up}\right] \approx \left[\hat{\theta}^{*}_{B(\frac{\alpha}{2})};\ \hat{\theta}^{*}_{B(1-\frac{\alpha}{2})}\right]$$

- Si la distribución de $\hat{\theta}^{*}$ es aproximadamente normal, entonces los intervalos precentil y normal estándar coinciden.

```
   2.5%     97.5%
48.6625  190.7583
```

Intervalos tipo percentil

- Para mejorar los intervalos de confianza es necesario realizar a veces transformaciones distintas a la clásica del logaritmo.
- El método del percentil permite incorporar de manera automática dicho tipo de transformaciones.
- El siguiente lema formaliza el hecho de que el método del percentil siempre *descubre* cuál es la transformación correcta.

Intervalos tipo percentil

- **Lema del intervalo del percentil**:
  Supongamos que existe una función o transformación m del parámetro tal que convierte en normal a la distribución de $\hat{\theta}$, es decir $\hat{\phi} = m(\hat{\theta})$

$$\hat{\phi} \sim N(\phi, c^2)$$

  con una desviación estándar dada c.

- Entonces el intervalo del percentil basado en $\hat{\theta}$ se obtiene como la transformación inversa

$$\left[m^{-1}\left(\hat{\phi} - z_{1-\alpha} \cdot c\right);\ m^{-1}\left(\hat{\phi} - z_{\alpha} \cdot c\right)\right]$$

Intervalos tipo percentil

- Supongamos un ejemplo donde se genera una muestra de tamaño 10 de una distribución normal estándar.
- El parámetro de interés que se trata de estimar es $\theta = e^{\mu}$ donde μ es la media poblacional.
- El verdadero valor de θ es $e^{0} = 1$ y el estimador muestral es $\hat{\theta} = e^{\overline{x}}$.
- Si se generan muestras bootstrap $\hat{\theta}^{*}$ se obtiene una distribución bastante asimétrica y los intervalos percentil al 95 % resultan ser

$$\left[\hat{\theta}_{\%low};\ \hat{\theta}_{\%up}\right] = [0{,}75;\ 2{,}07]$$

- Si se calculan los intervalos estándar normales basados en un error estándar $\widehat{se} = 0{,}34$, se obtiene $1{,}25 \pm 1{,}96 \cdot 0{,}34 = [0{,}59;\ 1{,}92]$ que son muy diferentes a los anteriores.

Intervalos tipo percentil

- Sin embargo esta aproximación no es muy buena dado que la distribución del estadístico no es normal.
- Si se toma la transformación logaritmo sobre los datos y se considera el parámetro $\mu = \log(\theta)$ entonces se obtiene un intervalo estándar normal igual a $[-0{,}28;\ 0{,}73]$
- La distribución de los datos transformados es más simétrica y el intervalo estándar normal es más ajustado.
- Si se toma el antilogaritmo de los extremos de este intervalo, se obtiene $[0{,}76;\ 2{,}08]$ que es casi idéntico al obtenido mediante el percentil bootstrap.
- Es decir, el intervalo percentil encuentra de manera automática la transformación adecuada para los datos.

Intervalo de sesgo-corregido y acelerado *BCa*

- Los intervalos bootstrap-t y el percentil pueden conducir a estimaciones del intervalo de confianza algo erráticas, especialmente el intervalo percentil cuando el estimador es sesgado respecto al parámetro cuyo intervalo de confianza queremos aproximar.

- Se puede considerar una version mejorada del intervalo percentil llamada *BCa*, abreviatura que procede de sesgo-corregido (*bias-corrected*) y acelerado (*accelerated*).

- En la determination del intervalo *BCa* utilizaremos dos cantidades, $\hat{z}_0$ y $\hat{a}$.

- La primera, $\hat{z}_0$, se introduce para corregir el sesgo del estimador $\hat{\theta}$.

Intervalo de sesgo-corregido y acelerado *BCa*

- $\hat{z}_0$ se define como

$$\boxed{\hat{z}_0 = \Phi^{-1}\left(\frac{\#\left\{\hat{\theta}^*(b) < \hat{\theta}\right\}}{B}\right)}$$

- Representa el sesgo mediano de la estimation dada por las B réplicas bootstrap del estimador.

- Es decir, la discrepancia entre la mediana de dicha distribution de frecuencias y $\hat{\theta}$, en unidades normales.

- Obtenemos el valor $\hat{z}_0 = 0$, cuando exactamente la mitad de las observaciones son menores que $\hat{\theta}$.

Intervalo de sesgo-corregido y acelerado *BCa*

- La segunda cantidad, $\hat{a}$, denominada *aceleración*, corrige para el caso en que el error estándar $se(\hat{\theta})$ no sea constante, y se define en términos de los valores *jackknife*, como

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\theta}_{(\cdot)} - \hat{\theta}_{(i)}\right)^3}{6\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\theta}_{(\cdot)} - \hat{\theta}_{(i)}\right)^2\right]^{3/2}}$$

- donde $\hat{\theta}_{(i)}$ es la *i*-esima réplica *jackknife* del estimador tal que

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{(i)} &= s(\mathbf{x}_{(i)}) \\ \hat{\theta}_{(\cdot)} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_{(i)} \end{aligned}$$

Intervalo de sesgo-corregido y acelerado *BCa*

- El intervalo de sesgo-corregido y acelerado (intervalo *BCa*) de coeficiente de confianza $1-\alpha$ se define igual que el intervalo percentil con unos valores particulares α_1 y α_2

$$\left[\hat{\theta}^*_{\alpha_1};\ \hat{\theta}^*_{\alpha_2}\right]$$

- tal que

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \Phi\left(\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\hat{a}\left(\hat{z}_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)}\right)\\
\alpha_2 &= \Phi\left(\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}}{1-\hat{a}\left(\hat{z}_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\right)}\right)
\end{aligned}$$

- siendo $z_{\frac{\alpha}{2}}$ y $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ los cuantiles habituales de la normal estándar y Φ la función de distribución de una normal estándar.

Intervalo de sesgo-corregido y acelerado *BCa*

- Se puede observar que si $\hat{z}_0 = \hat{a} = 0$ queda

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{\alpha}{2} \\
\alpha_2 &= \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

  de forma que el intervalo *BCa* coincide con el intervalo percentil.

- El valor de $\hat{z}_0$ translada el intervalo a la derecha o la izquierda y $\hat{a}$ hace que el intervalo sea más ancho o más estrecho.

- En las aplicaciones de este intervalo se recomienda utilizar, al menos $B = 1000$ muestras bootstrap.

- Al igual que el intervalo percentil, el *BCa* también *adivina* las transformaciones del parámetro.

Contrastes de hipótesis Bootstrap

- Contraste de hipótesis de dos muestras bootstrap:

  (I) Se eligen B submuestras independientes $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{y}'$ tomadas **CON reemplazamiento** de la distribución conjunta $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

  (II) Se calcula $\widehat{\theta}^*(b)$ para cada muestra.

  (III) se calcula el nivel de significación alcanzado (ASL) (equivalente al *p-valor*)

$$ASL = \frac{\#\left\{\widehat{\theta}^*(b) > \widehat{\theta}\right\}}{B}$$

Contrastes de hipótesis BCa

- Los intervalos *BCa* resultan ser bastante eficientes para calcular intervalos de confianza.
- De este modo, la mejor opción es adaptarlos al caso de los contrastes de hipótesis.
- Se trata de calcular el valor de *ASL* a partir de intervalos de confianza para una probabilidad de recubrimiento cualquiera α.
- Se tiene que encontrar un nivel α tal que los extremos superior e inferior del intervalo de confianza coincidan con el α_1 o el α_2 observados.

Contrastes de hipótesis BCa

- Se tenía que los intervalos *BCa* se definían como

$$BCa = \left[\widehat{\theta}^*_{(\alpha_1)};\ \widehat{\theta}^*_{(\alpha_2)}\right]$$

- con

$$\alpha_2 = \Phi\left(\widehat{z}_0 + \frac{\widehat{z}_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}}{1 - \widehat{a}\left(\widehat{z}_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\right)}\right)$$

- Si al hacer los remuestreos se obtiene el valor α_2 correspondiente al estadístico observado $\widehat{\theta}$, entonces despejando el valor de $z_{\alpha/2}$ se obtiene que

$$ASL_{BCa} = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(\alpha_2) - \widehat{z}_0}{1 - \widehat{a}\left(\Phi^{-1}(\alpha_2) - \widehat{z}_0\right)} - \widehat{z}_0\right)$$

Varianza de los estimadores bootstrap

- La varianza de los estimadores bootstrap tiene dos causas o fuentes de variación:
  - (I) Una procede del muestreo aleatorio simple de tamaño n de la población cuyo parámetro queremos estimar.
  - (II) La otra procede del remuestreo bootstrap de tamaño B.
- Se trata de diseñar un método para estimar la varianza de los estimadores bootstrap, que se denomina *jackknife-after-bootstrap*.
- Se basa en utilizar aproximaciones jackknife en la estimación de la varianza de un estimador bootstrap.

Varianza de los estimadores bootstrap

- Tomamos el ejemplo de la estimación de $Var(\widehat{se}_B)$, la varianza del estimador bootstrap del error estándar de un estimador $\hat{\theta}$.
- El método *jackknife-after-bootstrap* consiste en eliminar primero uno de los i valores muestrales, $i = 1, \ldots, n$ y luego recalcular $\widehat{se}_B$ con las muestras bootstrap obtenidas, denominando a este valor $\widehat{se}_{B(i)}$.
- El *jackknife-after-bootstrap* se define como

$$Var_{jack}(\widehat{se}_B) = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\widehat{se}_{B(i)} - \widehat{se}_{B(\cdot)}\right)^2$$

donde

$$\widehat{se}_{B(\cdot)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \widehat{se}_{B(i)}$$

Varianza de los estimadores bootstrap

- Este método presenta la dificultad del cálculo de $\widehat{se}_{B(i)}$, ya que éste requiere un conjunto de muestras completamente nuevas para cada i.
- No obstante, podemos evitar este exceso de cálculo de la siguiente manera.
- Para cada dato x_i de los valores observados de la muestra, existen muestras bootstrap en las que no aparece x_i, pudiendo utilizarse estas muestras para estimar $\widehat{se}_{B(i)}$
- Por ejemplo, en este caso, lo estimaremos con la desviación típica de las muestras bootstrap que **no** contengan el dato x_i.

Varianza de los estimadores bootstrap

- Si C_i es el conjunto de muestras bootstrap que **no** contienen a x_i, el cual contiene $B_i \leq B$ elementos, utilizaremos el $\widehat{se}_{B(i)}$ siguiente

$$\widehat{se}_{B(i)} = \sqrt{\frac{1}{B_i} \sum_{b \in C_i} \left(s(\mathbf{x}^{*b}) - \bar{s}_i\right)^2}$$

donde

$$\bar{s}_i = \frac{1}{B_i} \sum_{b \in C_i} s(\mathbf{x}^{*b})$$

- Este método se puede aplicar, no solo en la estimación de la varianza del estimador bootstrap del error de muestreo, sino en todos los estimadores bootstrap.
- Esto falla si todas las B muestras bootstrap contienen algún dato x_i.
- Así, el número de muestras bootstrap que se debe utilizar es bastante elevado.