Ejercicios: Cadenas de Markov en tiempo discreto

1. Considera la cadena de Markov con estados $\{1, 2, 3\}$, matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \\ 0.1 & 0.9 & 0 \end{pmatrix}$$

y que empieza en el tiempo 0 con distribución $\pi = (0.5, 0.5, 0)$

a) las matrices de transición de orden 2 y 3

b) la distribución de las variables aleatorias $X(2)$ y $X(3)$

c) la medidas características $\mathbb{E}[X(2)]$, $\mathbb{E}[X^2(3)]$

d) intenta calcular la distribución conjunta de $(X(2), X(3))$

e) calcula la medida característica $\mathbb{E}[X(2)\,X(3)]$

Solution

a) Tenemos que

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{pmatrix} 0.07 & 0.75 & 0.18 \\ 0.04 & 0.72 & 0.24 \\ 0.01 & 0.57 & 0.42 \end{pmatrix} \quad P^{(3)} = P^3 = \begin{pmatrix} 0.025 & 0.633 & 0.342 \\ 0.028 & 0.660 & 0.312 \\ 0.043 & 0.723 & 0.234 \end{pmatrix}$$

b) Definimos $\pi(2)$ y $\pi(3)$ las distribuciones de $X(2)$ y $X(3)$ tenemos que

$$\pi(2) = \pi\, P^{(2)} = (5.5\,\%\, 73.5\,\%\, 21\,\%)$$

y

$$\pi(3) = \pi\, P^{(3)} = (2.65\,\%,\, 64.65\,\%\, 32.7\,\%)$$

c) Calculamos el valor medio de $X(2)$ como

$$\mathbb{E}[X(2)] = 1 \times \pi_1(2) + 2 \times \pi_2(2) + 3 \times \pi_3(2) = 2.155$$

y el momento de orden 2 de $X(3)$ como

$$\mathbb{E}[X^2(3)] = 1^2 \times \pi_1(3) + 2^2 \times \pi_2(3) + 3^2 \times \pi_3(3) = 5.5555$$

d) Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(2) = 1, X(3) = 1) &= \mathbb{P}(X(2) = 1, X(3) = 1 | X(2) = 1)\mathbb{P}(X(2) = 1) \\ &= \mathbb{P}(X(3) = 1 | X(2) = 1)\mathbb{P}(X(2) = 1) \\ &= p_{1,1}\,\pi_1(2) = 0.1 \times 5.5\,\% = 0.55\,\% \end{aligned}$$

y en general tenemos que con $i, j \in \{1, 2, 3\}$

$$p_{2,3}(i, j) = \mathbb{P}(X(2) = i, X(3) = j) = p_{i,j}\,\pi_i(2)$$

por lo tanto

$p_{2,3}(i,j)$	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	0.0055	0.0165	0.033
$i = 2$	0	0.4410	0.294
$i = 3$	0.0210	0.1890	0

e) Calculamos la medidas característica del vector $(X(2), X(3))$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(2)\,X(3)] = \sum_{i,j} i\,j\,p_{2,3}(i,j) =& 1 \times 1 \times 0.0055 + 1 \times 2 \times 0.0165 \\ & + 1 \times 3 \times 0.033 + \ldots = 4.8625 \end{aligned}$$

2. Una empresa aseguradora produce un contrato de seguro de 3 años para un trabajador de alto riesgo según el siguiente modelo de Cadena de Markov homogénea:

Estados:

1 en activo

2 inactivo

3 jubilado

4 muerto

Matriz de transición:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.6 & 0.0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los cambios de estados solo ocurren al final de año y el beneficio por muerte es de 10.000€ y se paga al final del año que haya muerte. Al momento del contrato el trabajador se encuentra en estado inactivo.

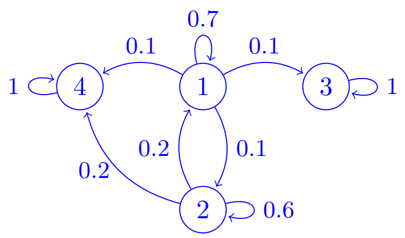
Hallar

a) el valor presente del beneficio potencial de muerte antes de estipular el contrato asumiendo un taso de interés del 4 % anuo.

b) el precio del contrato en el caso la empresa aseguradora tuviera una función de utilidad exponencial negativa de parámetro $a = (1000€)^{-1}$ y usara el principio de la utilidad nula.

Solution

El diagrama de transición de la cadena de Markov es



a) El coste para la empresa aseguradora en el primer año será

$$C_1 = 10000€ \times \mathbb{P}_2(X(1) = 4) = 10000€ \times p_{24} = 2000€$$

Igualmente tenemos que al final del segundo y del tercer año se espera que habrá pagado

$$\begin{aligned} C_2 &= 10000€ \times p_{24}^{(2)} = 10000€ \times 0.34 = 3400€; \\ C_3 &= 10000€ \times p_{24}^{(3)} = 10000€ \times 0.442 = 4420€ . \end{aligned}$$

Las cantidades pagada cada año serán $\Delta C_1 = C_1 = 2000€$ y

$$\Delta C_2 = C_2 - C_1 = 1400€ ; \qquad \Delta C_3 = C_3 - C_2 = 1020€ .$$

Por lo tanto el valor presente del beneficio incluida la tasa de interés será

$$C = \frac{\Delta C_1}{1.04} + \frac{\Delta C_2}{1.04^2} + \frac{\Delta C_3}{1.04^3} = 1923.08€ + 1294.38€ + 906.78€ = 4124.24€ .$$

b) Sabiendo que el estado 4 es absorbente la probabilidad que la cadena entre, por ejemplo, en este estado en el tercer año, será igual a la probabilidad de que esté en el tercer año en el estado 4 y que no lo estaba en el año 2 es decir

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_2(X(3) = 4, X(2) \neq 4) &= \mathbb{P}_2(X(3) = 4) - \mathbb{P}_2(X(3) = 4, X(2) = 4) \\ &= \mathbb{P}_2(X(3) = 4) - \mathbb{P}_2(X(2) = 4) = p_{24}^{(3)} - p_{24}^{(2)} . \end{aligned}$$

Por lo tanto el gasto para la empresa es una variable aleatoria de valor

$$C = \begin{cases} 1923.08€ & \text{con prob. } p_{24} \\ 1294.38€ & \text{con prob. } p_{24}^{(2)} - p_{24} \\ 906.78€ & \text{con prob. } p_{24}^{(3)} - p_{24}^{(2)} \\ 0€ & \text{con prob. } 1 - p_{24}^{(3)} \end{cases} = \begin{cases} 1923.08€ & \text{con prob. } 20\,\% \\ 1294.38€ & \text{con prob. } 14\,\% \\ 906.78€ & \text{con prob. } 10.2\,\% \\ 0€ & \text{con prob. } 55.8\,\% \end{cases}$$

y por lo tanto función generadora de momentos

$$M_C(t) = \mathbb{E}[e^{t\,C}] = 0.2\,e^{1923.08€\,t} + 0.14\,e^{1294.38€\,t} + 0.102\,e^{906.78€\,t} + 0.558$$

que calculada en $a = 1/1000€$ es igual a

$$M_C(1/1000€) = 0.2\,e^{1.92308} + 0.14\,e^{1.29438} + 0.102\,e^{0.90678} + 0.558 = 2.6898\ .$$

El precio del contrato será dado por la fórmula

$$\pi = \frac{1}{a}\log M_C(a) = 1000€ \log M_C(1/1000€) = 989.47€$$

3. Considera la Cadena de Markov homogénea con estados $\{1,2,3\}$ y matriz de transiciones:

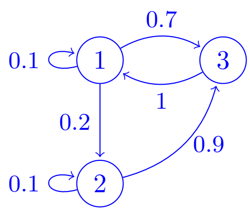
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.7 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dibuja el diagrama de transición
b) Determina las clases y sus períodos
c) Calcula la distribución estacionaria π
d) Calcula la distribución de $X(3)$ sabiendo que la cadena haya empezado en el estado 3 al tiempo 0.
e) Calcula la distribución de $X(3)$ en el caso la distribución inicial fuera $\pi(0) = (0, 0.5, 0.5)$.
f) Calcula la distribución de $X(3)$ en el caso la distribución inicial fuera la distribución estacionaria π.
g) Calcula los valores de $\mathbb{E}_3[X(3)]$ y $\mathbb{E}_{\pi(0)}[X(3)]$ y $\mathbb{E}_\pi[X(3)]$.
h) Calcula los valores de $\mathbb{E}_3[h(X(3))]$ y $\mathbb{E}_{\pi(0)}[h(X(3))]$ y $\mathbb{E}_\pi[h(X(3))]$ con $h(x) = x^2$.

Nota: Puedes usar R para comprobar tus cálculos.

Solution

a) El diagrama de transición esta es



b) Todos lo estados comunican entre si, por eso hay una sola clase y la cadena es irreducible. Como $p_{11} = 0.1 > 0$ el estado 1 es aperiódico y así serán los otros estados, ya que pertenecen a la misma clase.

c) Tenemos que resolver el sistema $\pi(\mathbf{P} - \mathbb{I}) = 0$, es decir

$$\begin{cases} -0.9\,\pi_1 & & & + & \pi_3 & = 0 \\ 0.2\,\pi_1 & - & 0.9\,\pi_2 & & & = 0 \\ 0.7\,\pi_1 & & 0.9\,\pi_2 & - & \pi_3 & = 0 \end{cases}$$

Como las ecuaciones arriba son dependientes tenemos que añadir otra, es decir

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

y la solución es la misma que calcular

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0.9 & 0.2 & 1 \\ 0 & -0.9 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0.4712042 & 0.104712 & 0.4240838 \end{pmatrix} \\ \text{o usando números racionales} \\ \begin{pmatrix} 90/191 & 20/191 & 81/191 \end{pmatrix} \end{array}$$

d) Llamamos $\pi(3|3)$ la distribución de $X(3)$ empezando en 3 al tiempo 0. Tenemos que

$$\pi(3|3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.321 & 0.146 & 0.533 \\ 0.180 & 0.181 & 0.639 \\ 0.710 & 0.040 & 0.250 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.71 & 0.04 & 0.25 \end{pmatrix}\ .$$

e) Llamamos $\pi(3|\pi(0))$ la distribución de $X(3)$ empezando con distribución $\pi(0)$ al tiempo 0. Tenemos que

$$\pi(3|\pi(0)) = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.445 & 0.1105 & 0.4445 \end{pmatrix} .$$

f) Llamamos $\pi(3|\pi)$ la distribución de $X(3)$ empezando con distribución estacionaria π al tiempo 0. Ya sabemos que por estacionariedad la distribución de $X(3)$ será igual a π, pero lo comprobamos,

$$\pi(3|\pi) = \begin{pmatrix} 0.4712042 & 0.104712 & 0.4240838 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.4712042 & 0.104712 & 0.4240838 \end{pmatrix} .$$

g) Al conocer la distribución de $X(3)$ es sencillo calcular su media, por ejemplo

$$\mathbb{E}_3[X(3)] = \sum_{x=1}^{3} x\, \pi_x(3|3) = \pi(3|3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^t = 1.54 .$$

donde $\pi_x(3|3)$ es la componente x del vector $\pi(3|3)$. Igualmente tenemos que

$$\mathbb{E}_{\pi(0)}[X(3)] = \pi(3|\pi(0)) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^t = 1.9995$$
$$\mathbb{E}_{\pi}[X(3)] = \pi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^t = 1.95288 .$$

h) Usando el vector $h(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ tenemos que

$$\mathbb{E}_3[X^2(3)] = \pi(3|3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}^t = 3.12$$
$$\mathbb{E}_{\pi(0)}[X^2(3)] = \pi(3|\pi(0)) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}^t = 4.8875$$
$$\mathbb{E}_{\pi}[X^2(3)] = \pi \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}^t = 4.706806 .$$

4. Considera la Cadena de Markov homogénea, $X(n)$, con matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} .$$

a) Dibuja el diagrama de transición, determina las clases y sus períodos

Considera 1 como tiempo inicial, calcula:

b) $\mathbb{P}_1(X(4) = 2)$, $\mathbb{P}_1(X(4) = 2|X(3) = 1)$, $\mathbb{P}(X(6) = 2|X(4) = 2, X(2) = 1)$.

Llamando $X_{[4]} = 2112$ el suceso $X(1) = 2$, $X(2) = 1, X(3) = 1, X(4) = 2$, calcula:

c) $\mathbb{P}_1(X_{[4]} = 2112)$, $\mathbb{P}_2(X_{[4]} = 2112)$, $\mathbb{P}(X_{[4]} = 2112|X_{[2]} = 21)$.

d) La distribución del tiempo de regreso en 1 para $n = 1, 2, 3, 4$ y n, es decir $\mathbb{P}_1(T_1 = n)$, con $n \geq 2$.

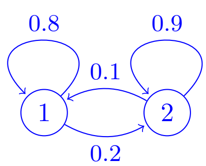
e) La distribución estacionaria.

f) La fracción de tiempo que la cadena estará en el estado 1 en un tiempo infinito, es decir $\lim_n N_1(n)/n$.

g) El tiempo medio de regreso al estado 1, es decir $\mathbb{E}_1[T_1]$.

Solution

a) El diagrama de transición esta es



La cadena es aperiódica y irreducible. Por lo tanto admite una única distribución estacionaria.

b) Calculamos las matrices de transición de orden mayor que 1,

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.66 & 0.34 \\ 0.17 & 0.83 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.562 & 0.438 \\ 0.219 & 0.781 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}^4 = \begin{pmatrix} 0.4934 & 0.5066 \\ 0.2533 & 0.7467 \end{pmatrix} .$$

La probabilidades pedidas serán igual a

$$\mathbb{P}_1(X(4) = 2) = p_{12}^{(3)} = 0.438$$
$$\mathbb{P}_1(X(4) = 2|X(3) = 1) = p_{12} = 0.2$$
$$\mathbb{P}(X(6) = 2|X(4) = 2, X(2) = 1) = \mathbb{P}(X(6) = 2|X(4) = 2) = p_{22}^{(2)} = 0.83$$

c) Tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1(X_{[4]} = 2112) &= \mathbb{P}(X_{[4]} = 2112 | X(1) = 1) = 0 \\
\mathbb{P}_2(X_{[4]} = 2112) &= \mathbb{P}_1(X_{[4]} = 2112 | X_{[3]} = 211)\, \mathbb{P}_1(X_{[3]} = 211) \\
&= \mathbb{P}(X(4) = 2 | X(3) = 1)\, \mathbb{P}_1(X_{[3]} = 211) = \ldots = p_{21}\, p_{11}\, p_{12} = 0.016 \\
\mathbb{P}(X_{[4]} = 2112 | X_{[2]} = 21) &= \mathbb{P}_1(X_{[3]} = 112) = p_{11}\, p_{12} = 0.16
\end{aligned}$$

d) Calculamos la distribución del tiempo de regreso

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1(T_1 = 1) &= \mathbb{P}_1(X_{[2]}) = 11) = p_{11} = 0.8 \\
\mathbb{P}_1(T_1 = 2) &= \mathbb{P}_1(X_{[3]}) = 121) = p_{12}\, p_{21} = 0.02 \\
\mathbb{P}_1(T_1 = 3) &= \mathbb{P}_1(X_{[4]}) = 1221) = p_{12}\, p_{22}\, p_{21} = 0.018 \\
\mathbb{P}_1(T_1 = 4) &= \mathbb{P}_1(X_{[5]}) = 12221) = p_{12}\, p_{22}^2\, p_{21} = 0.0162 \\
\mathbb{P}_1(T_1 = n) &= \mathbb{P}_1(X_{[5]}) = 1\underbrace{2 \cdots 2}_{n-1}1) = p_{12}\, p_{22}^{n-2}\, p_{21} = 0.02 \times 0.9^{n-1}
\end{aligned}$$

e) La distribución estacionaria satisface las dos ecuaciones

$$\begin{aligned}
0.8\, \pi_1 + 0.1\, \pi_2 &= \pi_1 \\
0.2\, \pi_1 + 0.9\, \pi_2 &= \pi_2
\end{aligned}$$

que son equivalentes. Tenemos que añadir la ecuación

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

La solución es

$$\pi_1 = 1/3 = 0.3333 \quad \text{y} \quad \pi_2 = 2/3 = 0.6667\ .$$

f) por los Teoremas límites tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = \frac{1}{\mu_{11}} = \pi_1 = \frac{1}{3}$$

y entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_1(n)}{n} = \frac{1}{\mu_{11}} = \frac{1}{3}$$

con probabilidad uno.

g) por el apartado anterior tenemos que $\mathbb{E}_1[T_1] = \mu_{11} = 3$.

5. Considera la Cadena de Markov homogénea con matriz de transiciones:

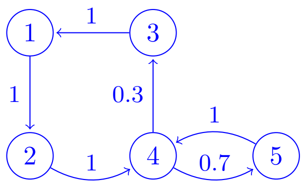
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Dibuja el diagrama de transición
b) Determina las clases y sus períodos
c) Encuentra la distribución del tiempo de parada T_{11}
d) Calcula la distribución estacionaria
e) Es la distribución estacionaria igual que la límite?
Comparas los valores de $\mathbb{P}_1(X(2n) = 1)$ y $\mathbb{P}_1(X(2n+1) = 1)$, por n intero grande.

Nota: Este ejercicio está pensado para que se use R para resolverlo.

Solution

a) El diagrama de transición esta es



b) Todos lo estados comunican entre si, por eso hay una sola clase y la cadena es irreducible. Calculamos el período del estado 5

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_{55}^{(n)}$	0	0.7	0	0.49	0	0.553	0	0.5341	...

y entonces $d(5) = 2$, y también el período de los demás estados será igual a dos.

c) Tenemos que $T_{11} = 4$ solo si no pasamos por 5, y pasa con probabilidad 0.3, valdrá 6 si pasamos una vez por 5 con probabilidad 0.7×0.3 y valdrá $4 + 2n$ si pasamos n veces por 5 con probabilidad $0.7^n \times 0.3$. Es decir

$$\mathbb{P}(T_{11} = 4 + 2n) = 0.7^n \times 0.3$$

d) Para calcular la distribución estacionaria π tenemos que resolver el sistema

$$\pi \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0.3 & -1 & 0.7 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y tenemos que $\pi = (0.115385, 0.115385, 0.115385, 0.384615, 0.269231)$.

e) Usando R por n grande tenemos estos valores de $p_{11}^{(0)}$

n	5000	5001	5002	5003	5004	5005	5006	5007	5008
$p_{11}^{(n)}$	23.08 %	0	23.08 %	0	23.08 %	0	23.08 %	0	...

y entonces nunca en el límite podremos encontrar la cadena en el estado 1 en los pasos impares mientras en los pasos par tenemos una probabilidad constante de 23.08 %. Es decir no existe distribución limite, mientras en el apartado anterior hemos encontrado una distribución estacionaria.

6. Una empresa aseguradora produce un contrato de seguro de vida de 3 años para trabajadores de dos tipos, de alto riesgo (I) y de bajo riesgo (II). La empresa no conoce la naturaleza del trabajador que quiere hacer el contrato, pero sabe que el 60 % de los trabajadores que quieren contratar sus seguros son de alto riesgo.

   El modelo que usa la empresa para calcular el precio del contrato es una cadena de Markov y para cada tipo de trabajador considera 3 posibles estados: activo, inactivo y muerto. Si el trabajador es de tipo (I) pasará de activo a inactivo en el año siguiente con una probabilidad del 30 % mientras seguirá activo con una probabilidad del 65 %. En el caso el trabajador sea del tipo (II) las probabilidades anteriores serán del 10 % y del 89 %. Un trabajador del tipo (I) en estado inactivo se dará de alta el año siguiente con una probabilidad del 10 % y se quedará de baja con una probabilidad del 70 % mientras para un trabajador del tipo (II) las mismas transiciones se habrán con probabilidades del 70 % y 25 %. Las probabilidades que quedan serán para una transición al estado de muerte.

   Asumiendo que la indemnización en caso de muerte es de 5000€, con un taso de interés del 9 % halla:

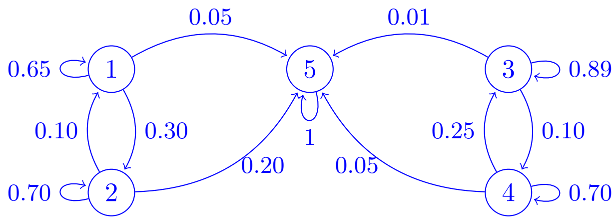
   a) la matriz de transición de la cadena de Markov y dibuja el diagrama de transición.
   b) las diferentes clases de la cadena de Markov y sus periodos.
   c) el precio del contrato de forma teórica si el trabajador empieza en estado inactivo
   d) comprueba el resultado simulando la cadena con R

Solution

a) Consideramos los siguientes estados de la cadena de Markov

tipo (I)		tipo (II)		
activo	inactivo	activo	inactivo	muerto
1	2	3	4	5

El diagrama de transición de la cadena de Markov es



y la matriz de transición será

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.30 & 0 & 0 & 0.05 \\ 0.10 & 0.70 & 0 & 0 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0.89 & 0.10 & 0.01 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.70 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Hay dos clases con estados transitorios $T_1 = \{1, 2\}$ y $T_2 = \{3, 4\}$ y una clase de estados recurrentes $R = \{5\}$. Todos los estados son aperiódicos.

c) Asumiendo $\pi_2 = 60\,\%$ y $\pi_4 = 40\,\%$, la empresa habrá pagado en media hasta el final del primer año una cantidad

$$\begin{aligned} C_1 &= 5000€ \times (\mathbb{P}_2(X(1) = 5)\,\mathbb{P}(X(0) = 2) + \mathbb{P}_4(X(1) = 5)\,\mathbb{P}(X(0) = 4)) \\ &= 5000€ \times (\pi_2\, p_{25} + \pi_4\, p_{45}) = 5000€ \times (0.6 \times 0.2 + 0.4 \times 0.05) = 700€ \end{aligned}$$

Y desde el inicio del contrato hasta el final de los años dos y tres, respectivamente,

$$\begin{aligned} C_2 &= 5000€ \times (\mathbb{P}_2(X(2) = 5)\,\mathbb{P}(X(0) = 2) + \mathbb{P}_4(X(2) = 5)\,\mathbb{P}(X(0) = 4)) \\ &= 5000€ \times (\pi_2\, p_{25}^{(2)} + \pi_4\, p_{45}^{(2)}) = 5000€ \times (0.6 \times 0.345 + 0.4 \times 0.0875) = 1210€ \\ C_3 &= 5000€ \times (\mathbb{P}_2(X(3) = 5)\,\mathbb{P}(X(0) = 2) + \mathbb{P}_4(X(3) = 5)\,\mathbb{P}(X(0) = 4)) \\ &= 5000€ \times (\pi_2\, p_{25}^{(3)} + \pi_4\, p_{45}^{(3)}) = 5000€ \times (0.6 \times 0.45575 + 0.4 \times 0.117225) = 1601.7€\ . \end{aligned}$$

Naturalmente la cantidad media pagada al final de los tres años incluye la cantidad pagada al final del segundo año, como también esta última incluye la pagada en medio el año anterior. Eso porqué el estado 5 es absorbente y se un trabajador pasa en este estado durante un año se quedará en este estado los años sucesivos.
Para calcular las cantidades medias pagadas solo durante el curso de un año tenemos que

$$\Delta C_1 = C_1 = 700€, \quad \Delta C_2 = C_2 - C_1 = 510€, \quad \Delta C_3 = C_3 - C_2 = 391.7€.$$

Por lo tanto el valor presente del beneficio incluida la tasa de interés será

$$C = \frac{\Delta C_1}{1.09} + \frac{\Delta C_2}{1.09^2} + \frac{\Delta C_3}{1.09^3} = 642.2018€ + 429.2568€ + 302.4643€ = 1373.923€\ .$$

d) Cargamos el código para Cadenas de Markov y declaramos la matriz de transición

```
> source("~/R-Markov-Chain.R")
> matP<-t(matrix(c(0.65,0.30,0,0,0.05,0.10,0.70,0,0,0.20,0,0,0.89,
+ 0.10,0.01,0,0,0.25,0.70,0.05,0,0,0,0,1),5))
> matP
     [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,] 0.65  0.3 0.00  0.0 0.05
[2,] 0.10  0.7 0.00  0.0 0.20
[3,] 0.00  0.0 0.89  0.1 0.01
[4,] 0.00  0.0 0.25  0.7 0.05
[5,] 0.00  0.0 0.00  0.0 1.00
```

Declaramos el vector inicial, y el número de veces que queremos repetir el experimento

```
> vecpi<-c(0,0.6,0,0.4,0)
> N<-1000000
```

Declaramos la función que calcula el coste. recuerda que la coordinada n del vector simulado de un camino de una cadena de Markov contiene el estado de la cadena al tiempo $n-1$, ya que la primera coordinada del vector corresponde al tiempo 0.

```
> cost <- function(n) if(is.na(n)){0}else{5000/((1.09)^(n-1))}
```

Simulamos la cadena de Markov, miramos con la función `match` cual es el primer momento que hemos alcanzado el estado 5, si hay algunos, y con la función definida, `cost`, calculamos el correspondiente coste con interés. La función `mean` nos dará la media aritmética de los costes simulados.

```
> mean(replicate(N,cost(match(5,simMC(matP,4,dist=vecpi)))))
[1] 1375.315
```

7. *Contrato de seguro*: Una empresa aseguradora produce un contrato de seguro de 3 años para un trabajador de alto riesgo según un modelo de Cadena de Markov homogénea con estados (1 - en activo, 2 - inactivo, 3 - jubilado, 4 - muerto) y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.65 & 0.15 & 0.15 & 0.05 \\ 0.15 & 0.65 & 0.0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se asume que los cambios de estados solo ocurren al final de año y el beneficio por muerte es de 15.000€ y se paga al final del año que haya muerte, y que al momento del contrato el trabajador se encuentra en estado inactivo.

Hallar:

a) el valor presente del beneficio potencial de muerte antes de estipular el contrato asumiendo un taso de interés del 3 % anuo.
b) el número medio de años que se espera el trabajador pasará en activo
c) el número medio de años que se espera el trabajador se quedará inactivo

Si el contrato fuera con duración de 10 años

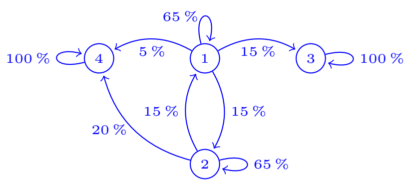
d) como cambiaría el valor encontrado en el apartado c)) ?

Y si fuera a tiempo indefinido, hallar

e) la probabilidad que el trabajador acabara el contrato sin recibir el beneficio por muerte
f) la probabilidad que el trabajador volviera a darse de alta

Solution

a) El diagrama de estados de la cadena de Markov es



Al final del primer año la empresa habrá pagado el beneficio solo si el trabajador se encontrará en el tiempo 1 en el estado 4, es decir

$$C_1 = 15000€ \times \mathbb{P}_2(X(1) = 4) = 15000€ \times p_{24} = 15000€ \times 0.2 = 3000€ .$$

Igualmente tenemos para el segundo y el tercer año

$$\begin{aligned} C_2 &= 15000€ \times p_{24}^{(2)} = 15000€ \times 0.3375 = 5062.5€; \\ C_3 &= 15000€ \times p_{24}^{(3)} = 15000€ \times 0.43625 = 6543.75€ . \end{aligned}$$

Para considerar el interés, tenemos que considerar no solo la cantidad pagada sino también en que año se ha pagado. Definimos esta cantidades como el coste medio a final de un año menos el coste medio del año anterior, que corresponde exactamente al coste añadido por el año corriente.

Esto por qué el estado 4 es absorbente y si un año el trabajador se encuentra en este estado se quedará en este estado también los años sucesivos pero cobrará el beneficio solo una vez. Entonces tenemos $\Delta C_1 = C_1 = 3000€$ y

$$\Delta C_2 = C_2 - C_1 = 2062.5€ \quad \Delta C_3 = C_3 - C_2 = 1481.25€$$

y el valor presente del beneficio potencial de muerte antes de estipular el contrato será

$$\tilde{C} = \frac{\Delta C_1}{1.03} + \frac{\Delta C_2}{1.03^2} + \frac{\Delta C_3}{1.03^3} = 6212.27€ \ .$$

b) Los estados transitorios son $T = \{1, 2\}$. Calculamos la matriz de transición por los estados transitorios $\mathbf{Q}$ como

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 65\,\% & 15\,\% \\ 15\,\% & 65\,\% \end{pmatrix} .$$

Las matrices de los tiempos medios pasados por los estados transitorios en n años se calculan de forma recursiva, poniendo $\mathbf{M}_0 = \mathbb{I}$ y $\mathbf{M}_n = \mathbb{I} + \mathbf{Q}\,\mathbf{M}_{n-1}$. Tenemos que

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 1.65 & 0.15 \\ 0.15 & 1.65 \end{pmatrix} , \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 2.095 & 0.345 \\ 0.345 & 2.095 \end{pmatrix} .$$

El número medio de años que se espera el trabajador pasará en activo antes de jubilarse, morirse o antes que se acaba la duración del contrato (años 0, 1 y 2) será

$$\mathbb{E}_2[N_1(2)] = \mathbf{M}_2[2, 1] = 0.345 \ .$$

c) El número medio de años que se espera el trabajador se quedará inactivo antes de jubilarse, morirse o antes que se acaba la duración del contrato (años 0, 1 y 2) será

$$\mathbb{E}_2[N_2(2)] = \mathbf{M}_2[2, 2] = 2.095 \ .$$

d) Si queremos considerar 10 años tenemos que calcular la matriz $\mathbf{M}_9$ que es igual a

$$\mathbf{M}_9 = \begin{pmatrix} 3.23059 & 1.23254 \\ 1.23254 & 3.23059 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto el número medio de años que se espera el trabajador se quedará inactivo antes de jubilarse, morirse o antes que se acaba la duración del contrato (años $0, 1, \ldots, 9$) será

$$\mathbb{E}_2[N_2(9)] = \mathbf{M}_9[2, 2] = 3.23059 \ .$$

e) Tenemos que los estados transitorios son $T = \{1, 2\}$ y el estado 4 es recurrente. Aplicamos entonces la fórmula

$$f_R = \mathbf{M}\,p_R$$

con $R = \{4\}$, $f_R = \begin{pmatrix} f_{1,4} \\ f_{2,4} \end{pmatrix}$, $p_R = \begin{pmatrix} p_{1,4} \\ p_{2,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.2 \end{pmatrix}$ y $\mathbf{M}$ la matriz de número de pasos medios por los estados transitorios. Esta matriz se calcula según la fórmula $\mathbf{M} = (\mathbb{I} - \mathbf{Q})^{-1}$ y es igual a

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3.5 & 1.5 \\ 1.5 & 3.5 \end{pmatrix} .$$

Por lo tanto tenemos que

$$\begin{pmatrix} f_{1,4} \\ f_{2,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.5 & 1.5 \\ 1.5 & 3.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.475 \\ 0.775 \end{pmatrix}$$

y la probabilidad que el trabajador acabara su contrato indefinido sin recibir el beneficio por muerte es igual a

$$\mathbb{P}(\text{no recibir el beneficio}) = 1 - f_{2,4} = 1 - 0.775 = 22.5\,\% \ .$$

f) La probabilidad que el trabajador volviera a darse de alta será dada por

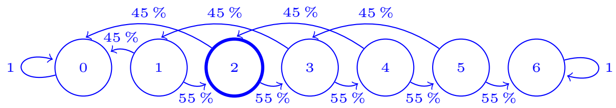
$$\mathbb{P}_2(N_1(\infty) > 0) = f_{2,1} = \frac{m_{2,1}}{m_{1,1}} = \frac{\mathbf{M}_{2,1}}{\mathbf{M}_{1,1}} = \frac{1.5}{3.5} = 42.86\,\%$$

8. Considera un juego donde un jugador tiene un número inicial de 2 monedas. Cada vez que juega puede ganar una moneda con una probabilidad del 55 % y perder *dos* con la restante probabilidad. El juego termina si el jugador pierde todas sus monedas o cuando llegue a tener 6 monedas en total (puede que en la última jugada tenga que perder una sola moneda).

   a) Modelar este juego por una cadena de Markov
   b) Calcula el número medio de jugadas en que el jugador tendrá 2 monedas
   c) Calcula el número medio de jugadas en que el jugador tendrá 5 monedas
   d) Calcula la probabilidad que el jugador tiene de ganar
   e) Calcula la probabilidad que el jugador tenga en alguna de las jugadas 4 monedas
   f) Calcula el número medio de jugadas en que el jugador tendrá 5 monedas considerando solo las primeras 5, 10 y 15 jugadas

Solution

a) El diagrama de transición de la cadena de Markov será



y la matriz de transición de dimensiones 7×7

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 45\,\% & 0 & 55\,\% & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 45\,\% & 0 & 0 & 55\,\% & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 45\,\% & 0 & 0 & 55\,\% & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 45\,\% & 0 & 0 & 55\,\% & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45\,\% & 0 & 0 & 55\,\% \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los estados 0, y 6 son absorbentes y los estados $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ son transitorios.

b) Definimos la matriz de transición por los estados transitorios $\mathbf{Q}$ como

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 55\,\% & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 55\,\% & 0 & 0 \\ 45\,\% & 0 & 0 & 55\,\% & 0 \\ 0 & 45\,\% & 0 & 0 & 55\,\% \\ 0 & 0 & 45\,\% & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y calculamos la matriz $\mathbf{M}$ según la fórmula $\mathbf{M} = (\mathbb{I} - \mathbf{Q})^{-1}$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1.23009 & 0.803095 & 0.511304 & 0.281217 & 0.154669 \\ 0.418339 & 1.46017 & 0.929643 & 0.511304 & 0.281217 \\ 0.760617 & 0.836679 & 1.69026 & 0.929643 & 0.511304 \\ 0.376505 & 0.864156 & 0.836679 & 1.46017 & 0.803095 \\ 0.342278 & 0.376505 & 0.760617 & 0.418339 & 1.23009 \end{pmatrix} .$$

El tiempo medio que el jugador tendrá 2 monedas será igual a

$$\mathbb{E}_2[N_2(\infty)] = m_{2,2} = \mathbf{M}_{2,2} = 1.46017 .$$

c) Igualmente el tiempo medio que el jugador tendrá 5 monedas será igual a

$$\mathbb{E}_2[N_5(\infty)] = m_{2,5} = \mathbf{M}_{2,5} = 0.281217 .$$

d) Tenemos que los estados transitorios son $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y el estado 6 es recurrente. Aplicando la fórmula

$$f_R = \mathbf{M}\, p_R$$

con $R = \{6\}$ y $f_R = (f_{1,6}, f_{2,6}, f_{3,6}, f_{4,6}, f_{5,6})'$, y $p_R = (0, 0, 0, 0, 55\,\%)'$ tenemos que

$$\begin{pmatrix} f_{1,6} \\ f_{2,6} \\ f_{3,6} \\ f_{4,6} \\ f_{5,6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.23009 & 0.803095 & 0.511304 & 0.281217 & 0.154669 \\ 0.418339 & 1.46017 & 0.929643 & 0.511304 & 0.281217 \\ 0.760617 & 0.836679 & 1.69026 & 0.929643 & 0.511304 \\ 0.376505 & 0.864156 & 0.836679 & 1.46017 & 0.803095 \\ 0.342278 & 0.376505 & 0.760617 & 0.418339 & 1.23009 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0850681 \\ 0.154669 \\ 0.281217 \\ 0.441702 \\ 0.676548 \end{pmatrix}$$

y entonces la probabilidad que el jugador gane todas las monedas es

$$\mathbb{P}(\text{ganar}) = f_{2,6} = 15.47\,\% .$$

e) La probabilidad de que el jugador llegue a tener 4 monedas antes de acabar el juego se calcula como

$$f_{2,4} = \frac{m_{2,4}}{m_{4,4}} = \frac{\mathbf{M}_{2,4}}{\mathbf{M}_{4,4}} = \frac{0.511304}{1.46017} = 35.01\,\%$$

f) Usando la fórmula recursiva $\mathbf{M}_{n+1} = \mathbb{I} + \mathbf{Q}\,\mathbf{M}_n$ con $\mathbf{M}_0 = \mathbb{I}$ tenemos que

$$\mathbf{M}_5 = \begin{pmatrix} 1.13613 & 0.699738 & 0.426033 & 0.166375 & 0.0915063 \\ 0.348573 & 1.27225 & 0.774606 & 0.426033 & 0.166375 \\ 0.633769 & 0.697146 & 1.40838 & 0.774606 & 0.426033 \\ 0.22275 & 0.695025 & 0.697146 & 1.27225 & 0.699738 \\ 0.285196 & 0.22275 & 0.633769 & 0.348573 & 1.13613 \end{pmatrix} \quad \mathbf{M}_{10} = \begin{pmatrix} 1.21442 & 0.785858 & 0.476481 & 0.262065 & 0.144136 \\ 0.389848 & 1.42883 & 0.903787 & 0.476481 & 0.262065 \\ 0.739462 & 0.779697 & 1.64325 & 0.903787 & 0.476481 \\ 0.350864 & 0.83595 & 0.779697 & 1.42883 & 0.785858 \\ 0.318967 & 0.350864 & 0.739462 & 0.389848 & 1.21442 \end{pmatrix}$$

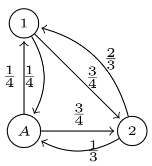
$$\mathbf{M}_{15} = \begin{pmatrix} 1.22747 & 0.796056 & 0.505496 & 0.278023 & 0.150368 \\ 0.413588 & 1.45495 & 0.919084 & 0.505496 & 0.278023 \\ 0.751978 & 0.827176 & 1.68242 & 0.919084 & 0.505496 \\ 0.372229 & 0.852637 & 0.827176 & 1.45495 & 0.796056 \\ 0.33839 & 0.372229 & 0.751978 & 0.413588 & 1.22747 \end{pmatrix}$$

y podemos calcular las cantidades pedidas como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_2[N_5(5)] &= \mathbf{M}_5\ [2,5] = 0.166375 \\ \mathbb{E}_2[N_{10}(5)] &= \mathbf{M}_{10}[2,5] = 0.262065 \\ \mathbb{E}_2[N_{15}(5)] &= \mathbf{M}_{15}[2,5] = 0.278023\ . \end{aligned}$$

9. La maquina de una empresa produce los productos por un proceso que necesita 2 diferentes fases y cada día se elige la fase del trabajo según un modelo de cadena de Markov. En cada fase hay una diferente probabilidad que la maquina se averíe (A), y en este caso la empresa tiene que pagar un coste de 7 para arreglarla, lo que también necesita un día.

El diagrama de transición es el siguiente



a) Escribe la matriz de transición, determina las clases de la cadena, caracteriza sus estados y determina sus periodos.

b) Determinar, en régimen estacionario, el gasto medio mensual que la empresa tiene que pagar para los arreglos.

c) Modificando apropiadamente el modelo, calcular, empezando en el estado 1, los números medios de pasos que la maquina hace en el estado 1 y en el estado 2 antes de terminar necesitando un arreglo.

d) La probabilidad, empezando en el estado 2 de acabar en necesidad de un arreglo antes de pasar por el estado 1.

Solution

a) La matriz de transición es

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Todos los estados comunican entre ellos, por eso tenemos una sola clase, por lo tanto todos son recurrentes positivos. Empezando desde el estado 1 podemos volver en 2 y también en 3 pasos, lo que hace el periodo de todos y cada uno de ellos igual a 1.

b) La distribución estacionaria es $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_A)$ y resuelve el sistema

$$\pi \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 1/4 \\ 1 & -1 & 1/3 \\ 1 & 3/4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{llll} \pi_1 & +\pi_2 & +\pi_A & = 1 \\ \frac{3}{4}\pi_1 & -\pi_2 & +\frac{1}{3}\pi_A & = 0 \\ \frac{1}{4}\pi_1 & +\frac{1}{3}\pi_2 & -\pi_A & = 0 \end{array} \right.$$

y la solución es

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 1/4 \\ 1 & -1 & 1/3 \\ 1 & 3/4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{12}{35} & \frac{3}{7} & \frac{8}{35} \\ \frac{64}{105} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{105} \\ \frac{4}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{35} & \frac{15}{35} & \frac{8}{35} \end{pmatrix}$$

La maquina pasará $8/35$ parte de sus días en el estado A, y por lo tanto el gasto medio mensual será de

$$C = 7 \times 30 \times \frac{8}{35} = 48\ .$$

c) Hacemos el estado A absorbente, de tal forma que los demás serán transitorios. La matriz $\mathbf{Q}$ de transición en los estados transitorios será

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

y la matriz de número medio de pasos para los estados transitorios será

$$\mathbf{M} = (\mathbb{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3/4 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3/4 \\ -2/3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix}\ .$$

El número de pasos medios por el estado 1 y 2 respectivamente, empezando por el estado 1 y antes de acabar en el estado A serán

$$m_{11} = 2 \quad \text{y} \quad m_{12} = \frac{3}{2}\ .$$

d) La probabilidad, empezando en el estado 2 de pasar por el estado 1 antes de acabar en el estado A es

$$f_{21} = \frac{m_{21}}{m_{11}} = \frac{4}{6}\ ,$$

y por lo tanto la probabilidad buscada es $1 - f_{21} = 33.33\,\%$.

10. Se considere el juego de un jugador con probabilidad 40 % de ganar y 30 % de empatar. La monedas en juego son 6 y el jugador empieza con 3.

a) Describe el proceso usando una cadena de Markov, dibuja el diagrama de transición y caracteriza sus estados y calcula sus periodos.

b) Define un proceso martingala que sirva para calcular la probabilidad que el jugador tiene de ganar.

c) Encuentra la probabilidad que el jugador tiene de acabar el juego ganando todas las monedas.

d) El número medio de jugadas que el jugador juega antes de acabar el juego.

Solution

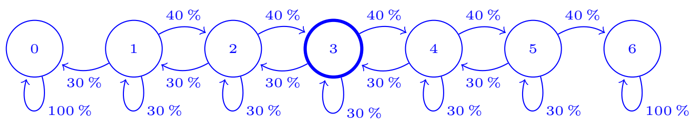
a) Definimos con S_n el número de monedas del jugador al acabarse del turno n. Tenemos que

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$$

donde X_{n+1} es la cantidad ganada/perdida en la jugada $n+1$ y es independiente de los resultados anteriores y con distribución

$$X_{n+1} = \begin{cases} 1 & \text{con prob. } 40\,\% \\ 0 & \text{con prob. } 30\,\% \\ -1 & \text{con prob. } 30\,\% \end{cases}$$

Por la definición del proceso S_n se ve que el futuro depende solo por el valor presente y no por el pasado, por lo tanto S_n es una cadena de Markov. Su diagrama de transición es



y la matriz de transición es $\mathbf{P} \in \mathcal{M}^{7\times 7}$,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 30\,\% & 30\,\% & 40\,\% & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30\,\% & 30\,\% & 40\,\% & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30\,\% & 30\,\% & 40\,\% & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 30\,\% & 30\,\% & 40\,\% & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30\,\% & 30\,\% & 40\,\% \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los estados 0 y 6 son absorbentes y entonces forman cada uno de ellos una clase recurrente positiva de período 1, los estados $T = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ son transitorios con período 1 ya que por lo menos se puede volver en cada uno de ellos después de 2 y también 3 pasos.

b) Introducimos el proceso

$$M_n = \theta^{S_n}$$

y encontramos el valor de θ que lo hace martingala.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_{n+1}|M_n, M_{n-1}, \ldots, M_1] &= \mathbb{E}[\theta^{S_{n+1}}|M_n, M_{n-1}, \ldots, M_1] \\ &= \mathbb{E}[\theta^{S_n + X_{n+1}}|M_n, M_{n-1}, \ldots, M_1] \\ &= \mathbb{E}[\theta^{S_n}\,\theta^{X_{n+1}}|M_n, M_{n-1}, \ldots, M_1] \\ &= \mathbb{E}[M_n\,\theta^{X_{n+1}}|M_n, M_{n-1}, \ldots, M_1] \\ &= M_n\,\mathbb{E}[\theta^{X_{n+1}}] \end{aligned}$$

Para que M_n sea una martingala se necesita que la función característica $\phi_X(z) = \mathbb{E}[z^X]$ calculada en θ sea igual a 1, es decir

$$\phi_X(\theta) = \mathbb{E}[\theta^{X_{n+1}}] = 1 \ .$$

Calculamos $\phi_X(\theta)$ como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\theta^X] &= \theta\,\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=0) + \frac{1}{\theta}\,\mathbb{P}(X=-1) \\ &= 40\,\%\,\theta + 30\,\% + 30\,\%\,\frac{1}{\theta} = 1 \ . \end{aligned}$$

La ecuación admite como soluciones $\theta = 1$ y $\theta = 3/4$, y la prima se descarta ya que $M_n = 1$ constante es una martingala pero que no conlleva ninguna información útil.

c) Definimos el tiempo de parada

$$T = \text{ínf}\{n : \ S_n = 0 \text{ o } S_n = 6\}$$

y las probabilidades $\bar{f}_3 = 1 - f_3 = \mathbb{P}(S_T = 0)$ y $f_3 = \mathbb{P}(S_T = 6)$.
Siendo $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$ y $|M_n| \leq 6$ se puede aplicar el *teorema del muestreo opcional*, es decir

$$\mathbb{E}[M_T] = M_0 = (3/4)^3 \ .$$

Calculando $\mathbb{E}[M_T]$ como

$$\mathbb{E}[M_T] = (3/4)^0\,\bar{f}_3 + (3/4)^6\,f_3 = 1 + ((3/4)^6 - 1)\,f_3$$

tenemos que la probabilidad de ganar para el jugador es

$$f_3 = \frac{1-(3/4)^3}{1-(3/4)^6} = \frac{64}{91} \approx 70.33\,\%$$

d) Usando la ecuación de Wald tenemos que

$$\mathbb{E}[S_T] = \mathbb{E}[T]\mathbb{E}[X]$$

con $\mathbb{E}[X] = 1 \times 40\,\% + 0 \times 30\,\% - 1 \times 30\,\% = 1/10$. Calculando

$$\mathbb{E}[S_T] = 0 \times \bar{f}_3 + 6 \times f_3 = \frac{384}{91}$$

tenemos que

$$\mathbb{E}[T] = \frac{384}{91} \times 10 = \frac{3840}{91} \approx 42.1978 \ .$$