Ejercicios del Tema I

Bernardo D'Auria

Universidad Carlos III de Madrid

Procesos Estocásticos

Grado en Estadística y Empresa

Outline

Ejercicio

Sea $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, calcula su valor medio.

Solución: usando la densidad

La densidad de una exponencial es $f(x) = \lambda \exp\{-\lambda x\} 1\{x \geq 0\}$ y para calcular la media usamos la definición

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx$$

y usando la densidad de la exponencial tenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\, dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty \lambda\, x\, e^{-\lambda x}\, d(\lambda x) \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty y\, e^{-y}\, dy = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty y\, de^{-y} \\ &= -\frac{1}{\lambda} y\, e^{-y}\Big|_0^\infty + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-y} dy = \frac{1}{\lambda} e^{-y}\Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda}\ .\end{aligned}$$

Ejercicio

Sea $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, calcula su valor medio.

Solución: usando la densidad

La densidad de una exponencial es $f(x) = \lambda \exp\{-\lambda x\} 1\{x \geq 0\}$ y para calcular la media usamos la definición

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x) \, dx$$

y usando la densidad de la exponencial tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^{\infty} \lambda \, x \, e^{-\lambda x} \, dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} \lambda \, x \, e^{-\lambda x} \, d(\lambda x) \\
&= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} y \, e^{-y} \, dy = -\frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} y \, de^{-y} \\
&= -\frac{1}{\lambda} y \, e^{-y} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-y} dy = \frac{1}{\lambda} e^{-y} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} \, .
\end{aligned}$$

Ejercicio

Sea $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, calcula su valor medio.

Solución: como v.a. positiva

Siendo la exponencial solo a valores positivos, para calcular su media podemos usar la fórmula

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \bar{F}_X(x)\, dx$$

donde $F_X(x) = \mathbb{P}(X > x)$ es la función cola de distribución y en particular, para la exponencial, es igual a $F_X(x) = e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, dx = -\frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, d(-\lambda x) \\ &= -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\lambda} \ .\end{aligned}$$

Ejercicio: Transformada de Laplace.

Sea X una variable aleatoria Exponencial de parámetro $\lambda > 0$, es decir $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Calcula su transformada de Laplace.

Solución:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda\, x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Sabemos que la densidad suma 1 es decir: $\int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = 1$

Ahora calculamos la transformada de Laplace

$$\tilde{F}_X(s) = \mathbb{E}[e^{-s\,X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\,x} f_X(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-s\,x} \lambda\, e^{-\lambda\,x}\, dx$$

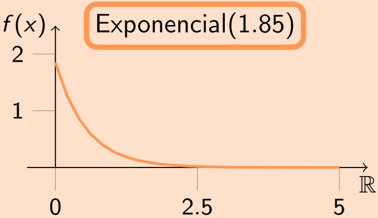
$$= \frac{\lambda}{s+\lambda} \int_0^\infty (s+\lambda)\, e^{-(s+\lambda)x}\, dx = \frac{\lambda}{s+\lambda}\,.$$

Ejercicio: Transformada de Laplace.

Sea X una variable aleatoria Exponencial de parámetro $\lambda > 0$, es decir $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Calcula su transformada de Laplace.

Solución:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$



Sabemos que la densidad suma 1 es decir: $\int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx = 1$

Ahora calculamos la transformada de Laplace

$$\tilde{F}_X(s) = \mathbb{E}[e^{-s\,X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\,x} f_X(x)\, dx = \int_0^\infty e^{-s\,x} \lambda\, e^{-\lambda\, x}\, dx$$

$$= \frac{\lambda}{s+\lambda} \int_0^\infty (s+\lambda)\, e^{-(s+\lambda)x}\, dx = \frac{\lambda}{s+\lambda}\ .$$

Outline

Ejemplo

Si $X(n)$ representa un proceso estocástico de media

$$\mu_X(n) = 3$$

y función de correlación

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n,m) = 9 + 4e^{-0.2|n-m|}.$$

Calcular la esperanza, la varianza y la covarianza de las variables aleatorias $Z = X(5)$ y $T = X(8)$.

Solución:

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[T] = 3;$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[T] = \mathbb{C}\mathrm{ov}_X(0,0) = 13;$$

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}[Z,T] = 9 + 4e^{-0.6}.$$

Ejemplo

Si $X(n)$ representa un proceso estocástico de media

$$\mu_X(n) = 3$$

y función de correlación

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n, m) = 9 + 4e^{-0.2|n-m|}.$$

Calcular la esperanza, la varianza y la covarianza de las variables aleatorias $Z = X(5)$ y $T = X(8)$.

Solución:

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[T] = 3;$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[T] = \mathbb{C}\mathrm{ov}_X(0, 0) = 13;$$

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}[Z, T] = 9 + 4e^{-0.6}.$$

Ejercicio

Tel.Tec.Feb.2007.C3

Sea $X(n)$ un proceso normal y débilmente estacionario con $E[X(n)] = 0$ y función de autocorrelación $\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n, m) = 1/(1 + (n - m)^2)$:

a) Calcula la probabilidad de que $X(0) + X(1) - X(2)$ sea positivo.

b) ¿Son $X(0)$ e $Y = X(0) - 2X(1)$ variables aleatorias independientes? Justifica la respuesta.

Solución: 1/2

a) *Calcula la probabilidad de que $X(0) + X(1) - X(2)$ sea positivo.*

Como $X(n)$ es un proceso normal, entonces la variable aleatoria $X(0) + X(1) - X(2)$ es Normal con media:

$$\mathbb{E}[X(0)+X(1)-X(2)] = \mathbb{E}[X(0)]+\mathbb{E}[X(1)]-\mathbb{E}[X(2)] = 0+0-0 = 0$$

Dada la simetría de la densidad de una distribución normal respecto a su media, tendremos que

$$\mathbb{P}(X(0) + X(1) - X(2) > 0) = \frac{1}{2}$$

Solución: 2/2

b) *¿Son $X(0)$ e $Y = X(0) - 2X(1)$ variables aleatorias independientes? Justifica la respuesta.*

Como $X(n)$ es un proceso estocástico normal, la variable aleatoria bidimensional $(X(0), X(1))$ tiene también distribución Normal. Nos preguntan si $X(0)$ e $Y = X(0) - 2X(1)$ son independientes. Entonces la variable aleatoria bidimensional dada por

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(0) \\ X(0) - 2X(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \end{pmatrix}$$

tiene distribution normal. De este, modo las variables $X(0)$ e $Y = X(0) - 2X(1)$ son independientes si y sólo si su covarianza es igual a cero. Para ver si es así, calculamos

$$\begin{aligned} \mathbb{C}\mathrm{ov}[X(0), X(0) - 2X(1)] &= \mathbb{E}[X(0)(X(0) - 2X(1))] - \mathbb{E}[X(0)]E[X(0) - 2X(1)] \\ &= E[X(0)^2 - 2X(0)X(1)] = E[X(0)^2] - 2E[X(0)X(1)] \\ &= \mathbb{C}\mathrm{ov}_X(0,0) - 2\,\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(0,1) = 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto las variables aleatorias $X(0)$ e Y son independientes.

Outline

Ejemplo - modificaciones $\neq$ indistinguibles

Tomamos $Z \sim \mathrm{U}(0,1)$ y definimos dos procesos

$$\mathrm{X} = (X(u), u \in [0,2]) \quad \text{y} \quad \mathrm{Y} = (Y(u), u \in [0,2])$$

como

$$\begin{aligned} X(u) &= 3 + 1\{Z = u\}, & u \in [0,2] \\ Y(u) &= 3, & u \in [0,2] \end{aligned}$$

Tenemos que X y Y son modificaciones, ya que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X(t) = Y(t)) &= \mathbb{P}(3 + 1\{Z = t\} = 3) \\ &= \mathbb{P}(1\{Z = t\} = 0) = \mathbb{P}(Z \neq t) = 1 \quad t \in [0,2] \end{aligned}$$

pero no son indistinguibles ya que

$$\mathbb{P}(X(t) = Y(t), \quad \forall t \in [0,2]) = 0 \ .$$

Ejercicio

Un transmisor envía pulsos rectangulares de altura y posición aleatorias. Cada pulso transmitido corresponde a una realización del proceso estocástico

$$X(n) = V\, h(n - N), \qquad n \geq 0,$$

donde el altura V del pulso es una variable aleatoria uniforme en $[0, v]$, y N es una variable aleatoria Geométrica de parámetro p, independiente de V, y la función determinista $h(x)$ es igual a

$$h(x) = 1_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1; \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Calcular la función valor medio del proceso estocástico $X(n)$.

Solución:

$$\mu_X(n) = \mathbb{E}[V\,h(n-N)] = \mathbb{E}[V]\mathbb{E}[h(n-N)] = \frac{v}{2}\mathbb{E}[h(n-N)]$$

$$h(n-k) = \begin{cases} 1 & 0 \le n-k \le 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases} = \begin{cases} 1 & n-1 \le k \le n \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(n-N)] &= \sum_k h(n-k)p_N(k) = \sum_{k=n-1}^{n} p_N(k) \\ &= p_N(n-1) + p_N(n) \end{aligned}$$

Usando $p_N(n) = p(1-p)^{n-1}$ por $n \ge 1$ tenemos

$$\mu_X(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ v\,p & n = 1 \\ v\,p\,(1-p)^{n-2}\,(2-p) & n > 1 \end{cases}$$

Ejercicio

Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias continuas, independientes, de media nula y varianza uno. Sea $X(n)$ el proceso estocástico discreto en el tiempo definido por

$$X(n) = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ con } n = 1, 2, \ldots$$

y sea

$$Y(n) = X(n+N) - X(n) \text{ con } N \text{ constante}$$

a) Calcular la media y la autocorrelación de $X(n)$.
b) ¿Es $X(n)$ estacionario en sentido débil?
c) Obtener la función de densidad de primer orden de $Y(n)$ suponiendo N grande.

Solución: 1/2

a) *Calcular la media y la autocovarianza de $X(n)$.*

La media de $X(n)$ viene dada por

$$\mu_X(n) = \mathbb{E}[X(n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k] = 0$$

que no depende de n. Como la media es nula, la autocovarianza se calcula:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n_1, n_2) &= \mathbb{E}[X(n_1)X(n_2)] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k_1=1}^{n_1} X_{k_1}\right)\left(\sum_{k_2=1}^{n_2} X_{k_2}\right)\right] \\
&= \mathbb{E}[(X_1 + \ldots + X_{n_1})(X_1 + \ldots + X_{n_2})] \\
&= \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2} \mathbb{E}[X_{k_1}X_{k_2}] = \sum_{k_1=1}^{n_1}\sum_{k_2=1}^{n_2} w_{k_1 k_2}
\end{aligned}$$

$$w_{k_1 k_2} = \begin{cases} \mathbb{E}[X_k^2] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_k^2] + (\mathbb{E}[X_k])^2 = 1, & k_1 = k_2 = k; \\ 0, & k_1 \neq k_2. \end{cases}$$

con lo que

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n_1, n_2) = \text{mín}(n_1, n_2)$$

y no es función solo de $m = n_2 - n_1$.

Solución: 2/2

b) *¿Es $X(n)$ estacionario en sentido débil?*

$X(n)$ **NO** es estacionario en sentido débil, porque no cumple simultáneamente que la función media no dependa de n y que a la vez la función de la autocorrelación sólo dependa de $m = n_2 - n_1$.

c) *Obtener la función de densidad de primer orden de $Y(n)$ suponiendo N grande.*

Siendo

$$Y(n) = X(n+N) - X(n) = \sum_{k=1}^{n+N} X_k - \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=n+1}^{n+N} X_k \ ,$$

por el Teorema Central del Límite se tiene que para N grande : $Y(n) \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$ donde

$$\mu_Y = \mathbb{E}[Y(n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=n+1}^{n+N} X_k\right] = \mathbb{E}[X_{n+1}] + \ldots + \mathbb{E}[X_{n+N}] = 0$$

$$\sigma_Y^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y(n)] = \mathbb{V}\mathrm{ar}\left[\sum_{k=n+1}^{n+N} X_k\right] \overset{\text{ind}}{=} \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_{n+1}] + \ldots + \mathbb{V}\mathrm{ar}[X_{n+N}] = N$$

Por tanto la función de densidad de primer orden de $Y(n)$ suponiendo N grande es

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2nN}} \exp\left(-\frac{1}{2N} y^2\right) .$$

Ejercicio

A partir de los procesos estocásticos $X(n)$ e $Y(n)$ incorrelados y de media cero, con funciones de autocorrelación $\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n, m)$ y $\mathbb{C}\mathrm{ov}_Y(n, m)$ respectivamente, se forma el proceso

$$Z(n) = X(n) + n\,Y(n).$$

a) Calcular la función de autocorrelación de $Z(n)$.

b) El proceso formado, ¿es estacionario en sentido débil?

Solución:

a) *Calcular la función de correlación de $Z(n)$*

La función de autocorrelación de $X(n)$ es $\mathbb{C}\text{ov}_X(n,m) = \mathbb{E}[X(n)X(m)]$ y análogamente para $Y(n)$. Además, por tratarse de procesos incorrelados,

$$\mathbb{C}\text{ov}_{XY}(n,m) = 0$$

o, de forma equivalente,

$$\mathbb{E}[X(n)Y(m)] = \mu_X(n)\mu_Y(m) = 0.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{C}\text{ov}_Z(n,m) = \mathbb{E}[Z(n)Z(m)] &= \mathbb{E}[(X(n) + n\,Y(n))(X(m) + m\,Y(m))] \\ &= \mathbb{C}\text{ov}_X(n,m) + n\,m\,\mathbb{C}\text{ov}_Y(n,m)\end{aligned}$$

b) *El proceso formado, ¿es estacionario en sentido débil?.*

La media es independiente del tiempo porque es nula pero la correlación no depende solamente de la distancia entre dos tiempos considerados. Por tanto, el proceso **NO** es estacionario en sentido débil.

Ejemplo de Estacionariedad débil

Se considera el proceso

$$X(n) = A\cos(\omega\, n) + B\sin(\omega\, n),$$

donde A y B son dos variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en $[-1,1]$.

Estudiar la estacionariedad en el sentido débil.

Solución:

El proceso $X(n)$ es estacionario en el sentido debil siendo la media estocástica

$$\mu_X(n) = \mathbb{E}[X(n)] = 0$$

una función constante del tiempo y la función de autocorrelación

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n,m) = \mathbb{E}[X(n)\,X(m)] = \frac{1}{3}\cos(\omega\,|n-m|)$$

solo una función de τ.

Ejemplo de Estacionariedad débil

Se considera el proceso

$$X(n) = A\cos(\omega\, n) + B\sin(\omega\, n),$$

donde A y B son dos variables aleatorias independientes uniformemente distribuidas en $[-1, 1]$.

Estudiar la estacionariedad en el sentido débil.

Solución:

El proceso $X(n)$ es estacionario en el sentido debil siendo la media estocástica

$$\mu_X(n) = \mathbb{E}[X(n)] = 0$$

una función constante del tiempo y la función de autocorrelación

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n, m) = \mathbb{E}[X(n)\, X(m)] = \frac{1}{3}\cos(\omega\,|n - m|)$$

solo una función de τ.

Ejercicio

La función de densidad de una v.a. Chi Cuadrado con n grados de libertad, $X \sim \chi^2(n)$, viene dada por

$$f(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} 1(x > 0).$$

Asuma que n es par $(n = 2m, m \in \mathbb{N})$ y utilice la función generadora de momentos $M_{Y_\lambda}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$ de una v.a. exponencial $Y_\lambda \sim \text{Exp}(\lambda)$ para:

1. Calcular la media de X haciendo uso explícito de su distribución cola $\bar{F}(x) = \mathbb{P}(X > x)$.
2. Calcular la función generadora de momentos $M_X(t)$ de X y usarla para comprobar el resultado del inciso anterior y obtener $\mathbb{V}(X)$.

Solución

1

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty \bar{F}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \int_x^\infty \frac{t^{m-1}e^{-\frac{t}{2}}}{2^m\Gamma(m)}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \int_0^t \frac{t^{m-1}e^{-\frac{t}{2}}}{2^m\Gamma(m)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{t^{m-1}e^{-\frac{t}{2}}}{2^m\Gamma(m)} \left(\int_0^t \mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2^m\Gamma(m)} \int_0^\infty t^m e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2^{m-1}\Gamma(m)} \int_0^\infty \frac{1}{2} t^m e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{M^{(m)}_{Y_{1/2}}(0)}{2^{m-1}\Gamma(m)} = 2\frac{m!}{\Gamma(m)}.
\end{aligned}
$$

Solución

2

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^\infty \frac{x^{m-1}e^{-\frac{x}{2}}}{2^m\Gamma(m)} e^{tx}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^m\Gamma(m)} \int_0^\infty x^{m-1}e^{-\left(\frac{1}{2}-t\right)x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^m\Gamma(m)\left(\frac{1}{2}-t\right)} \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}-t\right) x^{m-1}e^{-\left(\frac{1}{2}-t\right)x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{M^{(m-1)}_{Y_{\left(\frac{1}{2}-t\right)}}(0)}{2^m\Gamma(m)\left(\frac{1}{2}-t\right)} = \frac{(m-1)!}{2^m\Gamma(m)\left(\frac{1}{2}-t\right)^m}, \\
M_X'(0) &= 2\frac{m!}{\Gamma(m)}, \\
M_X''(0) &= 4\frac{(m+1)!}{\Gamma(m)}, \\
\mathbb{V}(X) &= M_X''(0) - (M_X'(0))^2.
\end{aligned}
$$

Ejercicio - Valor esperado de una variable aleatoria positiva

Sea X una variable aleatoria non negativa, $X \geq 0$, con distribución $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

Demuestra que el valor esperado de X se puede calcular según la fórmula

$$\mathbb{E}[X] = \begin{cases} \sum_{x=0}^{\infty} \bar{F}_X(x) & \text{v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \bar{F}_X(x)\, dx & \text{v.a. continua} \end{cases}$$

donde $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \mathbb{P}(X > x)$ es la función y cola de distribución .

Solución I

Caso discreto

Para el caso discreto hace falta desarrollar el cálculo del valor medio:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=0}^{\infty} x\, p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x\, p(x) = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=1}^{x} p(x)$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=y}^{\infty} p(x) = \sum_{y=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq y) = \sum_{y=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > y) = \sum_{y=0}^{\infty} \bar{F}(y) \ .$$

Caso continuo

Para el caso continuo, llamando $f(x) = F'(x)$ la densidad de la variable aleatoria tenemos que

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x\, f(x)\, dx = \int_0^{\infty} x\, F'(x)\, dx = \int_0^{\infty} x\, dF(x)$$

Solución II

La ultima expresión se puede sacar escribiendo la derivada formalmente como $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ que da $f(x)\,dx = dF(x)$ que a veces se escribe también como $dF(x) = \mathbb{P}(X \in dx)$.

Escribimos la media como

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{c\to\infty} \int_0^c x\,dF(x)$$

y usando la integración por partes tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^c x\,dF(x) &= x\,F(x)\Big|_0^c - \int_0^c F(x)\,dx = c\,F(c) - \int_0^c F(x)\,dx \\
&= \int_0^c F(c)\,dx - \int_0^c F(x)\,dx = \int_0^c (1 - F(x))\,dx\,.
\end{aligned}$$

Solución III

Y finalmente

$$\mathbb{E}[X] = \lim_{c\to\infty} \int_0^c (1 - F(x))\, dx = \int_0^\infty \bar{F}(x)\, dx \; .$$

Problema con v.a. no independientes

Sea

$$X(t) = A\sin(\omega n + \Phi)$$

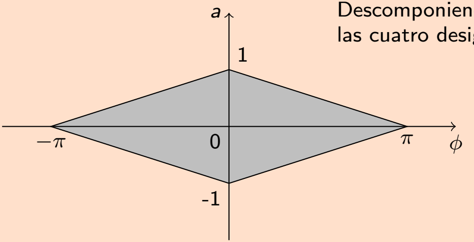
un proceso estocástico con A y Φ dos variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por

$$f_{\Phi,A}(\phi, a) = \begin{cases} k, & |\phi| + |\pi a| \leq \pi; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

a) Determinar la constante k para que $f_{\Phi,A}$ sea una función de densidad.
b) Calcular la función de media y de autocorrelación del proceso $X(n)$.
c) Estudiar la estacionariedad de $X(n)$ en sentido estricto y en sentido débil.

Solución: a)

a) *Determinar la constante k para que $f_{\Phi,A}$ sea una función de densidad.*



Descomponiendo la desigualdad $|\pi a| + |\phi| \leq \pi$ en las cuatro desigualdades

$$\begin{aligned} a &\leq \quad 1 - \phi/\pi \\ a &\geq -1 - \phi/\pi \\ a &\leq \quad 1 + \phi/\pi \\ a &\geq -1 + \phi/\pi \end{aligned}$$

se obtiene el recinto $\mathfrak{R}$ de la función $f_{Phi,A}$ dado en la figura.
Como el área de $\mathfrak{R}$ es igual a 2π resulta que $k = 1/2\pi$.

A continuación vamos a llamar con $\mathfrak{R}^+$ la parte derecha del recinto, es decir $\mathfrak{R}^+ = \mathfrak{R} \cap \left(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\right)$ y con $\mathfrak{R}^- = \mathfrak{R} \setminus \mathfrak{R}^+$ la parte izquierda.

Solución: b) 1/3

b) *Calcular la función media y de autocorrelación del proceso $X(t)$.*

Como las V.A. A y Φ no son independientes tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mu_X(t) &= \mathbb{E}[A\sin(\omega t+\Phi)] = \iint_{(\phi,a)\in\mathfrak{R}} a\sin(\omega t+\phi)\, f_{\Phi,\,A}(\phi,a)\,da\,d\phi \\
&= \iint_{(\phi,a)\in\mathfrak{R}^-} + \iint_{(\phi,a)\in\mathfrak{R}^+} a\sin(\omega t+\phi)\frac{da\,d\phi}{2\pi} \\
&= \int_{\phi=-\pi}^{0} \sin(\omega t+\phi)\int_{a=-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a\frac{da\,d\phi}{2\pi} + \int_{\phi=0}^{\pi}\sin(\omega t+\phi)\int_{a=-(1-\frac{\phi}{\pi})}^{(1-\frac{\phi}{\pi})} a\frac{da\,d\phi}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{0}[\sin(\omega t+\phi)+\sin(\omega t-\phi)]\left(\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a\,da\right)\frac{d\phi}{2\pi} = 0
\end{aligned}
$$

siendo

$$
\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a\,da = \left[\frac{a^2}{2}\right]_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} = 0
$$

Solución: b) 2/3

De forma análoga para calcular la función de autocorrelación tenemos que

$$R_X(t_1,t_2) = \mathbb{E}[A^2 \sin(\omega t_1 + \Phi)\sin(\omega t_2 + \Phi)] = \iint_{(\phi,a)\in\mathfrak{R}} a^2 \sin(\omega t_1 + \phi)\sin(\omega t_2 + \phi)\frac{da\,d\phi}{2\pi}$$

$$= \int_{-\pi}^{0}\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a^2[\sin(\omega t_1 + \phi)\sin(\omega t_2 + \phi) + \sin(\omega t_1 - \phi)\sin(\omega t_2 - \phi)]\frac{da\,d\phi}{2\pi}$$

y utilizando la fórmula $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$

$$= \int_{-\pi}^{0}\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a^2 \cos(\omega(t_1 - t_2))\frac{da\,d\phi}{2\pi}$$

$$- \int_{-\pi}^{0}\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a^2[\cos(\omega(t_1+t_2)+2\phi) + \cos(\omega(t_1+t_2)-2\phi)]\frac{da\,d\phi}{4\pi} = I_1 - I_2.$$

La primera integral, I_1, es igual a

$$I_1 = \frac{\cos(\omega(t_1-t_2))}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\left[\frac{a^3}{3}\right]_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} d\phi = \frac{\cos(\omega(t_1-t_2))}{3\pi}\int_{-\pi}^{0}\left(1+\frac{\phi}{\pi}\right)^3 d\phi$$

$$= \frac{1}{12}\cos(\omega(t_1-t_2))$$

Solución: b) 3/3

Utilizando la fórmula $\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$, la integral I_2 es

$$I_2 = \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(2\phi)\left(\int_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} a^2\,da\right)d\phi$$

$$= \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(2\phi)\left[\frac{a^3}{3}\right]_{-(1+\frac{\phi}{\pi})}^{(1+\frac{\phi}{\pi})} d\phi$$

$$= \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{3\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos(2\phi)\left(1+\frac{\phi}{\pi}\right)^3 d\phi = \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{3}\int_{0}^{1}\cos(2\pi x-2\pi)x^3\,dx$$

$$= \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{3}\int_{0}^{1}\cos(2\pi x)x^3\,dx$$

y utilizando tres veces la integración por partes obtenemos

$$= \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{3}\left(\frac{3}{4\pi^2}\right) = \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{4\pi^2}$$

Al final

$$R_X(t_1,t_2) = \frac{1}{12}\cos(\omega(t_1-t_2)) - \frac{\cos(\omega(t_1+t_2))}{4\pi^2}$$

Solución: c)

c) *Estudiar la estacionariedad de $X(t)$ en sentido estricto y en sentido débil.*

Como $R_X(t_1, t_2)$ no depende solo de $\tau = t_1 - t_2$ sino también de $t_1 + t_2$ el proceso **NO** es estacionario en el sentido débil y por lo tanto tampoco en el sentido estricto.

Ejercicio 1 - Parcial 1 - 2018

Sea $X(n)$ un proceso estocástico normal con media $\mu_X(n) = 0$ y autocovarianza $\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n, n+m) = e^{-2m}$, y sea Y una variable aleatoria continua, independiente de $X(n)$, con función de densidad,

$$f_Y(y) = \begin{cases} 4y(1-y^2) & 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Se define el proceso $Z(n) = Y + X(n)$. Calcula:

a) La media del proceso, $\mu_Z(n)$.

b) Su función de autocovarianza $\mathbb{C}\mathrm{ov}_Z(n, n+m)$.

c) ¿Es $Z(n)$ débilmente o estrictamente estacionario?

Solución

1. Primero calculamos la media de Y,

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 4y^2(1-y^2) = 4\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5}\right]\Big|_0^1 = \frac{8}{15}.$$

Luego,

$$\mu_Z(n) = \mathbb{E}[Y + X(n)] = \mathbb{E}[Y] + \mu_X(n) = \frac{8}{15}.$$

Solución II

2

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}_Z(n, n+m) = \mathbb{E}\left[(Y + X(n) - \mathbb{E}[Y])\,(Y + X(n+m) - \mathbb{E}[Y])\right]$$
$$= \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2 + \mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n, n+m)$$

Por otro lado,

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^1 4y^3(1-y^2)\mathrm{d}y = 4\left[\frac{y^4}{4} - \frac{y^6}{6}\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Luego,

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}_Z(n, n+m) = \frac{1}{3} - \frac{64}{225} + e^{-2m} = \frac{11}{225} + e^{-2m}$$

Solución III

3 Del apartado anterior se deduce que el proceso $Z(n)$ es estacionario en sentido débil, pero resulta que también lo es en el sentido fuerte, pues $X(n)$ es estacionario en sentido fuerte (es estacionario en sentido débil y gaussiano) y Y no depende del tiempo n.

Ejercicio

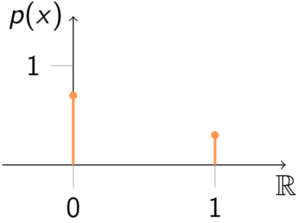
Sea X una variable aleatoria de Bernoulli de parámetro 0.3.

a) Dibujar su función de distribución
b) Calcular la media
c) Calcular la varianza

Solución

a) La función de probabilidad se da por

$$p_X(k) = \begin{cases} q = 0.7 & x = 0 \\ p = 0.3 & x = 1 \end{cases}$$



b) La media se calcula como

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x\, p(x) = 0 \times q + 1 \times p = p = 0.3\ .$$

c) La varianza se calcula como

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x - 0.3)^2\, p(x) = 0.3^2 \times 0.7 + 0.7^2 \times 0.3 = 0.21\ .$$

Ejercicio: Función generatriz.

Sea X una variable aleatoria de Poisson de parámetro $\nu > 0$, es decir $X \sim \text{Po}(\nu)$. Calcula su función generatriz.

Solución:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\nu^x}{x!} e^{-\nu} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Notamos que como la suma de la $p_X(x)$ tiene que dar 1 tenemos que

$$\sum_{x \geq 0} \frac{\nu^x}{x!} e^{-\nu} = e^{-\nu} \sum_{x \geq 0} \frac{\nu^x}{x!} = 1 \Rightarrow \sum_{x \geq 0} \frac{\nu^x}{x!} = e^{\nu} .$$

Usamos la definición de función generatriz y tenemos que

$$\phi_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{x \geq 0} z^x \, p_X(x) = \sum_{x \geq 0} z^x \, \frac{\nu^x}{x!} e^{-\nu}$$

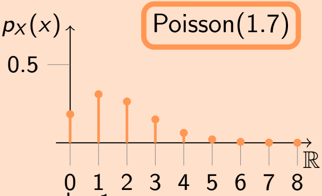
$$= e^{-\nu} \sum_{x \geq 0} \frac{(z\,\nu)^x}{x!} = e^{-\nu} e^{z\,\nu} = e^{-\nu(1-z)} .$$

Ejercicio: Función generatriz.

Sea X una variable aleatoria de Poisson de parámetro $\nu > 0$, es decir $X \sim \text{Po}(\nu)$. Calcula su función generatriz.

Solución:

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{\nu^x}{x!} e^{-\nu} & x \geq 0 \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$



Notamos que como la suma de la $p_X(x)$ tiene que dar 1 tenemos que

$$\sum_{x \geq 0} \frac{\nu^x}{x!} e^{-\nu} = e^{-\nu} \sum_{x \geq 0} \frac{\nu^x}{x!} = 1 \Rightarrow \sum_{x \geq 0} \frac{\nu^x}{x!} = e^{\nu} \; .$$

Usamos la definición de función generatriz y tenemos que

$$\begin{aligned} \phi_X(z) = \mathbb{E}[z^X] &= \sum_{x \geq 0} z^x \, p_X(x) = \sum_{x \geq 0} z^x \, \frac{\nu^x}{x!} e^{-\nu} \\ &= e^{-\nu} \sum_{x \geq 0} \frac{(z\,\nu)^x}{x!} = e^{-\nu} e^{z\,\nu} = e^{-\nu(1-z)} \; . \end{aligned}$$

Ejercicio

Un vector aleatorio (X, Y) está distribuido uniformemente en el cuadrado de vértices $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$ y $(-1, -1)$, es decir, la función de densidad conjunta es:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x, y \leq 1; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Determinar la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) $X^2 + Y^2 < 1$;

b) $2X - Y > 0$;

c) $|X + Y| < 2$.

Solución:

a) $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 < 1) = \pi/4$;

b) $\mathbb{P}(2X - Y > 0) = 1/2$;

c) $\mathbb{P}(|X + Y| < 2) = 1$.

Ejercicio

Un vector aleatorio (X, Y) está distribuido uniformemente en el cuadrado de vértices $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ y $(-1,-1)$, es decir, la función de densidad conjunta es:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & -1 \leq x, y \leq 1; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

Determinar la probabilidad de los siguientes sucesos:

a) $X^2 + Y^2 < 1$;

b) $2X - Y > 0$;

c) $|X + Y| < 2$.

Solución:

a) $\mathbb{P}(X^2 + Y^2 < 1) = \pi/4$;

b) $\mathbb{P}(2X - Y > 0) = 1/2$;

c) $\mathbb{P}(|X + Y| < 2) = 1$.

Ejercicio: Vectores aleatorios.

Se hace como experimento el lanzamientos de dos dados. Hay dos observadores que toman dos diferentes medidas. El primero apunta el resultado de las dos caras, mientras el segundo apunta dos veces repetidas el resultado de uno de los dos dados (por ejemplo el primero). Define $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ como los dos vectores aleatorios que representan las medidas tomadas por los dos observadores y dibuja un espacio muestral valido para el experimento. Luego calcula

$$\mathbb{P}(X_1 \geq 2, X_2 = 4) \quad \mathbb{P}(Y_1 \geq 2, Y_2 = 4)$$

¿Son iguales? Calcula la funciones de probabilidad y las funciones de distribuciones para los dos vectores.

Solución:

Un posible espacio muestral esta dado por el conjunto

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

Ejercicio: Vectores aleatorios.

Se hace como experimento el lanzamientos de dos dados. Hay dos observadores que toman dos diferentes medidas. El primero apunta el resultado de las dos caras, mientras el segundo apunta dos veces repetidas el resultado de uno de los dos dados (por ejemplo el primero). Define $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ como los dos vectores aleatorios que representan las medidas tomadas por los dos observadores y dibuja un espacio muestral valido para el experimento. Luego calcula

$$\mathbb{P}(X_1 \geq 2, X_2 = 4) \quad \mathbb{P}(Y_1 \geq 2, Y_2 = 4)$$

¿Son iguales? Calcula la funciones de probabilidad y las funciones de distribuciones para los dos vectores.

Solución:

Un posible espacio muestral esta dado por el conjunto

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

Solución: continua

Si llamamos $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ un genérico suceso simple tenemos que

$$\vec{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega)) = (\omega_1, \omega_2)$$

es decir que $X_1(\omega) = \omega_1$ y $X_2(\omega) = \omega_2$.

El suceso $\{X_1 \geq 2, X_2 = 4\} \subset \vec{X}(\Omega)$ se pude escribir como

$$\{X_1 \geq 2, X_2 = 4\} \overset{\vec{X}}{\leftarrow} \{(2,4),\ (3,4),\ (4,4),\ (5,4),\ (6,4)\} \subset \Omega$$

es decir todos los sucesos sencillos $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ dan, una vez transformados por $\vec{X}$, valores incluidos en el sucesos deseado.

Por lo tanto como todos los sucesos sencillos son equiprobables (con probabilidad $1/36$) tenemos que

$$\mathbb{P}(X_1 \geq 2, X_2 = 4) = \frac{5}{36}\ .$$

Solución: continua

Para el vector $\vec{Y}$ tenemos que

$$\vec{Y}(\omega) = (Y_1(\omega), Y_2(\omega)) = (\omega_1, \omega_1)$$

es decire que $Y_1(\omega) = \omega_1$ y $Y_2(\omega) = \omega_1$.

El suceso $\{Y_1 \geq 2, Y_2 = 4\} \subset \vec{Y}(\Omega)$ se pude escribir como

$$\{Y_1 \geq 2, Y_2 = 4\} \stackrel{\vec{Y}}{\leftarrow} \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6)\} \subset \Omega$$

es decir todos los sucesos sencillos $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ dan, una vez transformados por $\vec{Y}$, valores incluidos en el sucesos deseado.

Por lo tanto

$$\mathbb{P}(Y_1 \geq 2, Y_2 = 4) = \frac{1}{6} \; .$$

Solución: continua

Calculamos la función de masa del vector $\vec{X}$, tenemos que

$$p_{\vec{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{36} \quad \text{si } 1 \leq x_1, x_2 \leq 6$$

y la función de distribución será con $0 \leq x_1, x_2 \leq 6$

$$F_{\vec{X}}(x_1, x_2) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq x_1 \\ 0 \leq j \leq x_2}} p_{\vec{X}}(i, j) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq x_1 \\ 0 \leq j \leq x_2}} \frac{1}{36} = \frac{i \times j}{36} .$$

en resumen

$$F_{\vec{X}}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 < 0 \text{ o } x_2 < 0 \\ \frac{\min(i,6)}{6} \frac{\min(j,6)}{6} & \text{en el resto} \end{cases}$$

Solución: continua

Para el vector $\vec{Y}$ nunca puede ser que las dos componentes sean diferentes es decir

$$p_{\vec{Y}}(y_1, y_2) = 0 \quad \text{si } y_1 \neq y_2$$

y en el caso fueran igual con $0 \leq y_1, y_2 \leq 6$ tenemos que

$$p_{\vec{Y}}(y_1, y_2) = \frac{1}{6} \quad \text{si } y_1 = y_2$$

ya que el evento $(y, y) \in \vec{Y}(\Omega)$ se pude escribir como

$(y, y) \overset{\vec{Y}}{\leftarrow} \{(y, 1), (y, 2), (y, 3), (y, 4), (y, 5), (y, 6)\} \subset \Omega$.

La función de distribución será con $0 \leq y_1, y_2 \leq 6$

$$F_{\vec{Y}}(y_1, y_2) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq y_1 \\ 0 \leq j \leq y_2}} p_{\vec{Y}}(i, j) = \sum_{0 \leq i \leq \text{máx}(y_1, y_2)} p_{\vec{Y}}(i, i) = \frac{\text{máx}(y_1, y_2)}{6} .$$

en resumen

$$F_{\vec{Y}}(y_1, y_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } y_1 < 0 \text{ o } y_2 < 0 \\ \frac{\text{máx}(y_1, y_2)}{6} & \text{en el resto} \end{cases}$$

Ejercicio - Media condicionada

Dado el vector aleatorio (X, Y, Z) discreto con función de masa conjunta $p(x, y, z)$

Z=0		
X/Y	4	6
2	0.05	0.25
4	0.05	0.00

Z=1		
X/Y	4	6
2	0.05	0.05
4	0.05	0.10

Z=2		
X/Y	4	6
2	0.10	0.10
4	0.10	0.10

cuyas componentes toman valores en estos conjuntos: $X \in \{2, 4\}$, $Y \in \{4, 6\}$ y $Z \in \{0, 1, 2\}$.

Calcula *explícitamente* las siguientes cantidades, y verifica las propiedades de la media condicionada:

1. $\mathbb{E}[X|Z]$, $\mathbb{E}[Y|Z]$, $\mathbb{E}[Z|Z]$
2. $\mathbb{E}[X|Y, Z]$ y $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y, Z]|Z]$
3. $\mathbb{E}[Y|X]$ y verifica que $\mathbb{E}[X^3\,Y|X] = X^3\mathbb{E}[Y|X]$
4. $\mathbb{E}[3|Z]$, $\mathbb{E}[3\,Y|Z]$
5. $\mathbb{E}[Y^2|Z]$ y $\mathbb{E}[3X + Y^2|Z]$

Solución I

a) Calculamos $\mathbb{E}[X|Z]$. Calculamos la función de masa conjunta del vector (X, Z), $p_{X,Z}(x,z)$ y la función de masa marginal de Z, $p_Z(z)$.

$p_{X,Z}(x,z)$	0	1	2
2	0.3	0.1	0.2
4	0.05	0.15	0.2

	0	1	2
$p_Z(z)$	35 %	25 %	40 %

Por ejemplo

$$p_{X,Z}(2,0) = \sum_{y=4}^{6} p(2,y,0) = p(2,4,0) + p(2,6,0) = 0.05 + 0.25 = 0.3 \ .$$

Calculamos las probabilidades condicionadas de las variables aleatorias $(X|Z=0)$, $(X|Z=1)$ y $(X|Z=2)$ como

	$p_{X\|Z=0}(x)$
2	85.71 %
4	14.29 %

	$p_{X\|Z=1}(x)$
2	40 %
4	60 %

	$p_{X\|Z=2}(x)$
2	50 %
4	50 %

Solución II

donde por ejemplo hemos usado que

$$p_{X|Z=1}(2) = \mathbb{P}(X = 2|Z = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 2, Z = 1)}{\mathbb{P}(Z = 1)} = \frac{p_{X,Z}(2,1)}{p_Z(1)} = \frac{0.1}{0.25} = 0.40$$

con $p_Z(0) = 0.35$, $p_Z(1) = 0.25$ y $p_Z(2) = 0.40$ la distribución marginal de Z. Podemos ahora calcular

$$\mathbb{E}[X|Z = 0] = \sum_{x=2}^{4} x\,\mathbb{P}(X = x|Z = 0) = 2 \times p_{X|Z=0}(2) + 4 \times p_{X|Z=0}(4) = \frac{16}{7} \approx 2.29\ ;$$

$$\mathbb{E}[X|Z = 1] = \sum_{x=2}^{4} x\,\mathbb{P}(X = x|Z = 1) = 2 \times p_{X|Z=1}(2) + 4 \times p_{X|Z=1}(4) = \frac{16}{5} = 3.2\ ;$$

$$\mathbb{E}[X|Z = 2] = \sum_{x=2}^{4} x\,\mathbb{P}(X = x|Z = 2) = 2 \times p_{X|Z=2}(2) + 4 \times p_{X|Z=2}(4) = 3\ ,$$

y entonces la variable aleatoria $\mathbb{E}[X|Z]$ tiene la función de masa igual a

	$16/7$	$16/5$	3
$p_{\mathbb{E}[X\|Z]}(x)$	35 %	25 %	40 %

ya que vale $16/7$ cuando $Z = 0$, $16/5$ cuando $Z = 1$ y 3 cuando $Z = 2$.

Solución III

Calculamos la variable aleatoria $\mathbb{E}[Y|Z]$. La funciones de masa conjunta $p_{(Y,Z)}(y,z)$ y condicionadas $p_{Y|Z=0}(y)$, $p_{Y|Z=1}(y)$ y $p_{Y|Z=2}(y)$ serán dada por

$p_{Y,Z}(y,z)$	0	1	2
4	0.1	0.1	0.2
6	0.25	0.15	0.2

y	$p_{Y\|Z=0}(y)$	$p_{Y\|Z=1}(y)$	$p_{Y\|Z=2}(y)$
4	28.57 %	40 %	50 %
6	71.43 %	60 %	50 %

y entonces

$$\mathbb{E}[Y|Z=0] = \sum_{y=4}^{6} x\,\mathbb{P}(Y=y|Z=0) = 4 \times p_{Y|Z=0}(4) + 6 \times p_{Y|Z=0}(6) = \frac{38}{7} \approx 5.43\ ;$$

$$\mathbb{E}[Y|Z=1] = \sum_{y=4}^{6} y\,\mathbb{P}(Y=y|Z=1) = 4 \times p_{Y|Z=1}(4) + 6 \times p_{Y|Z=1}(6) = \frac{26}{5} = 5.2\ ;$$

$$\mathbb{E}[Y|Z=2] = \sum_{y=4}^{6} y\,\mathbb{P}(Y=y|Z=2) = 4 \times p_{Y|Z=2}(4) + 6 \times p_{Y|Z=2}(6) = 5\ .$$

Por lo tanto la variable aleatoria $\mathbb{E}[Y|Z]$ tendrá distribución

Solución IV

y	$p_{\mathbb{E}[Y\|Z]}(y)$
5	40 %
5.2	25 %
5.43	35 %

Repitiendo todo el procedimiento podemos verificar que $\mathbb{E}[Z|Z] = Z$ ya que conociendo el valor de Z, esto ya para de ser aleatorio y siendo determinista coincide con su media estocastica. Por lo tanto, la variable aleatoria $\mathbb{E}[Z|Z]$ tiene distribución

z	$p_{\mathbb{E}[Z\|Z]}(z)$
0	35 %
1	25 %
2	40 %

b) Par calcular $\mathbb{E}[X|Y,Z]$ calculamos las funciones de masa de las variables aleatorias $(X|Y=y, Z=z)$, con $y \in \{4,6\}$ y $z \in \{0,1,2\}$.
Tenemos

	$p_{X\|(Y=4,Z=0)}(x)$	
x=	2	50 %
	4	50 %

	$p_{X\|(Y=4,Z=1)}(x)$	
x=	2	50 %
	4	50 %

	$p_{X\|(Y=4,Z=2)}(x)$	
x=	2	50 %
	4	50 %

	$p_{X\|(Y=6,Z=0)}(x)$	
x=	2	100 %
	4	0 %

	$p_{X\|(Y=6,Z=1)}(x)$	
x=	2	33.33 %
	4	66.67 %

	$p_{X\|(Y=6,Z=2)}(x)$	
x=	2	50 %
	4	50 %

Solución V

donde por ejemplo

$$p_{X|(Y=6,Z=0)}(2) = \mathbb{P}(X = 2|Y = 6, Z = 0) = \frac{\mathbb{P}(X = 2, Y = 6, Z = 0)}{\mathbb{P}(Y = 6, Z = 0)}$$
$$= \frac{p(2,6,0)}{p_{Y,Z}(6,0)} = \frac{0.25}{0.25} = 100\,\%$$

Calculando las medias estocásticas tenemos

E[X|Y=y,Z=z]	z=0	z=1	z=3
y = 4	3	3	3
y = 6	2	10/3	3

donde por ejemplo

$$\mathbb{E}[X|Y = 6, Z = 1] = \sum_{x=2}^{4} x\, p_{X|(Y=6,Z=1)}(x)$$
$$= 2 \times p_{X|(Y=6,Z=1)}(2) + 4 \times p_{X|(Y=6,Z=1)}(4)$$
$$= 2 \times 0.3333 + 4 \times 0.6667 = 3.334 = \frac{10}{3}\ .$$

Solución VI

En fin usando la función de distribución conjunta de (Y, Z) podemos escribir la distribución de la variable aleatoria $\mathbb{E}[X|Y, Z]$ como

$$\mathbb{E}[X|Y,Z] = \begin{cases} 2 & \text{con prob. } 25\,\% \\ 3 & \text{con prob. } 60\,\% \\ 10/3 & \text{con prob. } 15\,\% \end{cases}$$

Para evidenciar mejor la dependencia de $\mathbb{E}[X|Y, Z]$ por el vector aleatorio (Y, Z) podemos resumir su función de distribución en la siguiente tabla

p(y,z)	10 %	25 %	10 %	15 %	20 %	20 %
Y	4	6	4	6	4	6
Z	0	0	1	1	2	2
$\mathbb{E}[X\|Y,Z]$	3	2	3	10/3	3	3

Caracterizamos ahora la variable aleatoria $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y, Z]|Z]$, calculando los valores $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y, Z]|Z = 0]$, $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y, Z]|Z = 1]$ y $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y, Z]|Z = 2]$ y sus probabilidades. Tenemos que las variables aleatorias $(\mathbb{E}[X|Y, Z]|Z = 0)$, $(\mathbb{E}[X|Y, Z]|Z = 1)$ y $(\mathbb{E}[X|Y, Z]|Z = 2)$ tienen distribuciones de probabilidad

		$p_{\mathbb{E}[X\|Y,Z]\|Z=0}(x)$
x=	2	71.43 %
	3	28.57 %

		$p_{\mathbb{E}[X\|Y,Z]\|Z=1}(x)$
x=	3	40 %
	10/3	60 %

		$p_{\mathbb{E}[X\|Y,Z]\|Z=2}(x)$
x=	3	100 %

Solución VII

donde las probabilidades son dadas por la distribución de $Y|Z=0$, $Y|Z=1$ y $Y|Z=2$.

Por ejemplo

$$\begin{aligned}
p_{\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z=0}(3) &= \mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y,Z]=3|Z=0) = \mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y,0]=3|Z=0) \\
&= \sum_{y=4}^{6} \mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y,0]=3, Y=y|Z=0) \\
&= \mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y,0]=3, Y=4|Z=0) + \mathbb{P}(\mathbb{E}[X|Y,0]=3, Y=6|Z=0) \\
&= \mathbb{P}(\mathbb{E}[X|4,0]=3, Y=4|Z=0) + \mathbb{P}(\mathbb{E}[X|6,0]=3, Y=6|Z=0) \\
&= \mathbb{P}(3=3, Y=5|Z=0) + \mathbb{P}(2=3, Y=6|Z=0) \\
&= \mathbb{P}(Y=6|Z=0) = p_{Y|Z=0}(6) = 71.43\,\%
\end{aligned}$$

Calculando los valor medios tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z=0] &= 2 \times 71.43\,\% + 3 \times 28.57\,\% = 2.29 = \mathbb{E}[X|Z=0] \\
\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z=1] &= 3 \times 40\,\% + \frac{10}{3} \times 60\,\% = 3.2 = \mathbb{E}[X|Z=1] \\
\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z=2] &= 3 \times 100\,\% = 3 = \mathbb{E}[X|Z=2]\ .
\end{aligned}$$

De hecho, la teoría nos dice que $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y,Z]|Z] = \mathbb{E}[X|Z]$ que hemos calculado en el apartado anterior.

Solución VIII

c) el valor de $\mathbb{E}[Y|X]$ se puede calcular como en el apartado anteriores hemos calculado los valor de $\mathbb{E}[X|Z]$ y de $\mathbb{E}[Y|Z]$. Tenemos

p(x)	60 %	40 %
X	2	4
$\mathbb{E}[Y\|X]$	16/3	5

y para $\mathbb{E}[X^3 Y|X]$ tenemos

p(x)	60 %	40 %
X	2	4
$\mathbb{E}[X^3 Y\|X]$	128/3	320

Se puede verificar multiplicando a última línea de la tabla de $\mathbb{E}[Y|X]$ por X^2 que coincide con la última línea de la tabla anterior y que por lo tanto se verifica que

$$\mathbb{E}[X^3 Y|X] = X^3 \mathbb{E}[Y|X] .$$

d) Las variables aleatorias $\mathbb{E}[3|Z]$ y $\mathbb{E}[3Y|Z]$ se calculan como

p(z)	35 %	25 %	40 %
Z	0	1	2
$\mathbb{E}[4\|Z]$	3	3	3

p(z)	35 %	25 %	40 %
Z	0	1	2
$\mathbb{E}[3Y\|Z]$	16.29	15.6	15

Se observa que $\mathbb{E}[3|Z] = 3$ es determinista y que $\mathbb{E}[3Y|Z] = 3\mathbb{E}[Y|Z]$.

Solución IX

- Las variables aleatorias $\mathbb{E}[Y^2|Z]$ y $\mathbb{E}[3X+Y^2|Z]$ se calculan como

p(z)	35 %	25 %	40 %
Z	0	1	2
$\mathbb{E}[Y^2\|Z]$	212/7	28	26

p(z)	35 %	25 %	40 %
Z	0	1	2
$\mathbb{E}[3X+Y^2\|Z]$	779/7	109	107

Se observa que $\mathbb{E}[3X+Y^2|Z] = 3\mathbb{E}[X|Z] + \mathbb{E}[Y^2|Z]$.

Ejemplo

Se define el proceso

$$X(n) = A\cos(2\pi f\, n + \Phi),$$

donde A y Φ son variables aleatorias independientes, siendo Φ una variable aleatoria $\mathrm{U}[-\pi, \pi]$, y $A \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

a) Calcular la función valor medio del proceso
b) Calcular la función de correlación del proceso
c) Estudiar la estacionariedad de $X(n)$ en sentido sentido débil.

Puede que sirven las siguientes relaciones trigonométricas:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right)$$

Ejemplo

Se define el proceso

$$X(n) = A\cos(2\pi f\, n + \Phi),$$

donde A y Φ son variables aleatorias independientes, siendo Φ una variable aleatoria $\mathrm{U}[-\pi, \pi]$, y $A \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

a) Calcular la función valor medio del proceso
b) Calcular la función de correlación del proceso
c) Estudiar la estacionariedad de $X(n)$ en sentido sentido débil.

Solución:

a) $\mu_X(n) = \mathbb{E}[A]\mathbb{E}[\cos(2\pi f\, n + \Phi)] = \frac{1}{\lambda} \cdot 0 = 0$
b) $\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n, m) = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{12}(n - m))$;
c) Como $\mathbb{C}\mathrm{ov}_X(n, m)$ es solo función de $n - m$ y $\mu_X(n) = 0$ no depende de n, el proceso $X(n)$ es estacionario en el sentido débil.

Ejercicio

El tiempo en minutos que un ordenador tarda en ejecutar una tarea es una v.a. $Y \sim \mathrm{Geo}(p)$.

Para hacer un estudio de la evolución temporal del sistema se construye el proceso estocástico $X(n)$ definido como el tiempo que resta para completar la tarea sabiendo que ya ha consumido n minutos.

a) Determina $\mathbb{E}[X(n)]$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X(n)]$, $\mathbb{E}[X^2(n)]$.
b) Indica si cada una de las funciones del apartado anterior depende del tiempo e interpreta el resultado.

Solución:

El proceso $X(n)$ se puede definir como $X(n) = \max\{0, Y - n\}$. Definiendo $q = 1 - p$

a)
$$\begin{aligned}
\mu_X(n) &= \mathbb{E}[X(n)1(Y > n)] + \mathbb{E}[X(n)1(Y \le n)] = \mathbb{E}[X(n)1(Y > n)] \\
&= \mathbb{E}[Y - n | Y > n]\,\mathbb{P}(Y > n) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathbb{E}[Y]\,\mathbb{P}(Y > n) = q^n/p \\
\mathbb{E}[X^2(n)] &= \mathbb{E}[X^2(n)1(Y > n)] + \mathbb{E}[X^2(n)1(Y \le n)] = \mathbb{E}[X^2(n)1(Y > n)] \\
&= \mathbb{E}[(Y - n)^2 | Y > n]\,\mathbb{P}(Y > n) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathbb{E}[Y^2]\,\mathbb{P}(Y > n) = (1 + q)q^n/p^2 \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X(n)] &= \mathbb{E}[X^2(n)] - \mu_X^2(n) = (1 + q)q^n/p^2 - q^{2n}/p^2 \\
&= (1 + q - q^n)q^n/p^2
\end{aligned}$$

b) Todas las funciones del apartado anterior dependen de n. Es decir que el proceso $X(n)$ no es estacionario, tampoco en el sentido débil.

Ejercicio

El tiempo en minutos que un ordenador tarda en ejecutar una tarea es una v.a. $Y \sim \mathrm{Geo}(p)$.

Para hacer un estudio de la evolución temporal del sistema se construye el proceso estocástico $X(n)$ definido como el tiempo que resta para completar la tarea sabiendo que ya ha consumido n minutos.

a) Determina $\mathbb{E}[X(n)]$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X(n)]$, $\mathbb{E}[X^2(n)]$.

b) Indica si cada una de las funciones del apartado anterior depende del tiempo e interpreta el resultado.

Solución:

El proceso $X(n)$ se puede definir como $X(n) = \text{máx}\{0, Y - n\}$. Definiendo $q = 1 - p$

a)
$$\begin{aligned}
\mu_X(n) &= \mathbb{E}[X(n)1(Y > n)] + \mathbb{E}[X(n)1(Y \leq n)] = \mathbb{E}[X(n)1(Y > n)] \\
&= \mathbb{E}[Y - n | Y > n]\, \mathbb{P}(Y > n) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathbb{E}[Y]\, \mathbb{P}(Y > n) = q^n/p \\
\mathbb{E}[X^2(n)] &= \mathbb{E}[X^2(n)1(Y > n)] + \mathbb{E}[X^2(n)1(Y \leq n)] = \mathbb{E}[X^2(n)1(Y > n)] \\
&= \mathbb{E}[(Y - n)^2 | Y > n]\, \mathbb{P}(Y > n) \stackrel{\mathrm{d}}{=} \mathbb{E}[Y^2]\, \mathbb{P}(Y > n) = (1 + q)q^n/p^2 \\
\mathbb{V}\mathrm{ar}[X(n)] &= \mathbb{E}[X^2(n)] - \mu_X^2(n) = (1 + q)q^n/p^2 - q^{2n}/p^2 \\
&= (1 + q - q^n)q^n/p^2
\end{aligned}$$

b) Todas las funciones del apartado anterior dependen de n. Es decir que el proceso $X(n)$ no es estacionario, tampoco en el sentido débil.

Ejercicio

Tel.Tec.Feb.2003.P1

Si X e Y son Variables Aleatorias independientes, con distribución Normal de media cero y varianza uno, se define el proceso Gaussiano

$$Z(n) = Xcos(2\pi n) + Ysin(2\pi n).$$

a) Determinar la función de distribución conjunta de las variables aleatorias $Z(n)$ y $Z(m)$ obtenidas por observar $Z(n)$ en los instantes n y m.

Solución:

a) *Determinar la función de distribución conjunta de las v.a. $Z(n)$ y $Z(m)$ obtenidas por observar $Z(n)$ en los instantes n y m.*

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
Z &= \begin{pmatrix} Z(n) \\ Z(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X\cos(2\pi n) + Y\sin(2\pi n) \\ X\cos(2\pi m) + Y\sin(2\pi m) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(2\pi n) & \sin(2\pi n) \\ \cos(2\pi m) & \sin(2\pi m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Z va a ser una Normal bivariante al ser una transformación linear de vector Normal bivariante $(X, Y) \sim \mathrm{N}(0_2, I_2)$.

$$0_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Entonces

$$Z \sim \mathrm{N}(0_2, AI_2A') = \mathrm{N}(0_2, AA') = \mathrm{N}\left(0_2, \begin{pmatrix} 1 & \sigma(n,m) \\ \sigma(n,m) & 1 \end{pmatrix}\right)$$

donde $\sigma(n,m) = \cos(2\pi n)\cos(2\pi m) + \sin(2\pi n)\sin(2\pi m) = \cos(2\pi|n-m|)$.
Por supuesto si $n = m$, la covarianza es 1, y el coeficiente de correlación es también uno, porque las dos variables son iguales.