Ejercicios de Tema 0

Bernardo D'Auria

Universidad Carlos III de Madrid

Procesos Estocásticos
Grado en Estadística y Empresa

Outline

Ejercicio

El departamento de calidad de una fábrica de elementos de sujeción ha evaluado que cierto tipo de anclajes metálicos producidos pueden ser defectuosos debido a las siguientes causas:

defectos en la rosca y defectos en las dimensiones.

Se ha calculado que el 6 % de los anclajes que producen tiene defectos en la rosca, mientras que el 9 % tiene defectos en las dimensiones. Sin embargo, el 90 % de los anclajes no tienen ningún tipo de defectos.

¿Cuál es la probabilidad de que un anclaje tenga ambos tipos de defectos?

Solución:

$$\mathbb{P}(\text{defectuoso}) = 0.05$$

Ejercicio

El departamento de calidad de una fábrica de elementos de sujeción ha evaluado que cierto tipo de anclajes metálicos producidos pueden ser defectuosos debido a las siguientes causas:

defectos en la rosca y defectos en las dimensiones.

Se ha calculado que el 6 % de los anclajes que producen tiene defectos en la rosca, mientras que el 9 % tiene defectos en las dimensiones. Sin embargo, el 90 % de los anclajes no tienen ningún tipo de defectos.

¿Cuál es la probabilidad de que un anclaje tenga ambos tipos de defectos?

Solución:

$$\mathbb{P}(\text{defectuoso}) = 0.05$$

Ejercicio - Ing. Técnica Teleco Junio 2007 - C1a

Tres máquinas A, B y C producen respectivamente en un día 60, 30 y 10 piezas iguales.

Las probabilidades de producir piezas defectuosas para cada máquina son 0.10, 0.20 y 0.40 respectivamente.

La producción es mezclada al final del día, y de ella se saca al azar una pieza que resulta correcta.

¿Cuál es la probabilidad de que dicha pieza haya sido producida por la primera máquina?

Solución

Definimos los sucesos: $c =$ "La pieza es correcta" $d =$ "La pieza es defectuosa" En términos de probabilidad lo que se nos pide es calcular $\mathbb{P}(A|c)$, por tanto, del teorema de Bayes se tiene que:

$$\mathbb{P}\{A|c\} = \frac{\mathbb{P}\{A \cap c\}}{\mathbb{P}\{c\}}$$

De los datos del enunciado se deduce que:
$\mathbb{P}\{c|A\} = 1 - \mathbb{P}\{d|A\} = 1 - 0.10 = 0.90$ y que
$\mathbb{P}\{A\} = 60/100 = 0.60$.

Por tanto, nos resta obtener $\mathbb{P}\{c\}$ para ello utilizamos el teorema de la probabilidad total con respecto al suceso c:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{c\} &= \mathbb{P}\{c|A\}\mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{c|B\}\mathbb{P}\{B\} + \mathbb{P}\{c|C\}\mathbb{P}\{C\} \\ &= (0.9 \times 0,6) + (0.8 \times 0.3) + (0.6 \times 0.1) = 84\,\%\end{aligned}$$

Se concluye entonces que:

$$\mathbb{P}\{A|c\} = \frac{0.9 \times 0.6}{0.84} = 64.3\,\%$$

Ejercicio

Sea X una variable aleatoria con la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k\,x, & \text{si } 0 \leq x \leq 3; \\ k(6-x), & \text{si } 3 \leq x \leq 6; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

a) Hallar k para que $f(x)$ sea función de densidad.

b) Calcular $\mathbb{P}(X > 3)$ y $\mathbb{P}(1.5 \leq X \leq 4.5)$.

c) Calcular la trasformada de Laplace $\tilde{F}(s) = \mathbb{E}[e^{-sX}]$ y $\mathbb{E}[X]$.

Solución:

a) $k = 1/9$;

b) $\mathbb{P}(X > 3) = 1/2$, $\quad \mathbb{P}(1.5 \leq X \leq 4.5) = 3/4$;

c) $\tilde{F}(s) = e^{-6s}\left(e^{3s} - 1\right)^2/(9s^2)$, $\quad \mathbb{E}[X] = -\tilde{F}'(0) = 3$.

Ejercicio

Sea X una variable aleatoria con la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k\,x, & \text{si } 0 \leq x \leq 3; \\ k(6-x), & \text{si } 3 \leq x \leq 6; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

a) Hallar k para que $f(x)$ sea función de densidad.

b) Calcular $\mathbb{P}(X > 3)$ y $\mathbb{P}(1.5 \leq X \leq 4.5)$.

c) Calcular la trasformada de Laplace $\tilde{F}(s) = \mathbb{E}[e^{-sX}]$ y $\mathbb{E}[X]$.

Solución:

a) $k = 1/9$;

b) $\mathbb{P}(X > 3) = 1/2$, $\quad \mathbb{P}(1.5 \leq X \leq 4.5) = 3/4$;

c) $\tilde{F}(s) = e^{-6s}\left(e^{3s} - 1\right)^2 / (9s^2)$, $\quad \mathbb{E}[X] = -\tilde{F}'(0) = 3$.

Outline

Ejercicio

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0; \\ a\, e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcula el valor de a para que $f(x)$ sea una función de densidad.
b) Calcula la función de distribución.
c) ¿Cuánto vale $\mathbb{P}(X = \frac{1}{2})$?
d) Calcular $\mathbb{E}[X]$ y $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X]$
e) Que distribución tiene $Y = X | X > 0$
f) Calcular la función generatriz de momentos, $M_Y(t) = \mathbb{E}[e^{tY}]$ y los momentos de primer y segundo orden.

Solución

a) $a = 1/2$;

b)

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1+x) & \text{si } -1 \leq x \leq 0; \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases} ;$$

c) $\mathbb{P}(X = \frac{1}{2}) = 0$;

d) $\mathbb{E}[X] = 1/4$ y $\mathbb{V}\text{ar}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}^2[X] = 53/48$;

e) $Y = X | X > 0 \sim \text{Exp}(1)$

f) $M_Y(t) = 1/(1-t)$, $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{V}\text{ar}[Y] = 1$.

Ejercicio

M3

Dada la siguiente función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(x+y)^2, & 0 < x, y < 1; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

a) Calcular, integrando en la región apropiada:
   $\mathbb{P}(X > Y)$, $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$ y $\mathbb{P}(X \leq 1/2)$.
b) Calcular las dos distribuciones marginales.

Solución:

a) $\mathbb{P}(X > Y) = 1/2$, $\mathbb{P}(X + Y \leq 1) = 3/14$ y $\mathbb{P}(X \leq 1/2) = 2/7$.
b)
$$\begin{cases} f_X(x) & = \frac{2}{7}(3x^2 + 3x + 1) \quad 0 \leq x \leq 1; \\ f_Y(y) & = \frac{2}{7}(3y^2 + 3y + 1) \quad 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Ejercicio

M3

Dada la siguiente función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(x+y)^2, & 0 < x, y < 1; \\ 0, & \text{resto}. \end{cases}$$

a) Calcular, integrando en la región apropiada:
$\mathbb{P}(X > Y)$, $\mathbb{P}(X + Y \leq 1)$ y $\mathbb{P}(X \leq 1/2)$.

b) Calcular las dos distribuciones marginales.

Solución:

a) $\mathbb{P}(X > Y) = 1/2$, $\mathbb{P}(X + Y \leq 1) = 3/14$ y $\mathbb{P}(X \leq 1/2) = 2/7$.

b)
$$\begin{cases} f_X(x) &= \frac{2}{7}(3x^2 + 3x + 1) \quad 0 \leq x \leq 1; \\ f_Y(y) &= \frac{2}{7}(3y^2 + 3y + 1) \quad 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$