Variance Models

Fabio Solorzano

March 2025

1 Moving Average (MA)

Si asumimos que la media de los rendimientos es 0, entonces la función de varianza se simplifica

$$\sigma^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} R_i^2$$

Podemos usar esta función para estimar la varianza del siguiente periodo t estableciendo una ventana m

$$\sigma_{t,m}^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} R_{t-i}^2$$

Este modelo de varianza asigna el mismo peso a todas las observaciones dentro de la ventana temporal. La principal ventaja es su simplicidad de implementación y comprensión. Sin embargo, presenta dos limitaciones importantes: ignora completamente la información fuera de la ventana y considera con igual importancia tanto datos recientes como antiguos dentro de la ventana.

2 Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)

Una carencia del modelo MA es que considera igual de importantes los valores viejos que los valores nuevos. Para arreglar esto podemos establecer un promedio ponderado tal que

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^{m} w_i R_{t-i}^2$$

Donde los pesos w_i deben satisfacer la condición $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$ para asegurar una estimación insesgada. En el caso del EWMA, se asignan pesos que decaen exponencialmente mientras nos alejamos en el tiempo:

$$w_i = \frac{\lambda^{i-1}(1-\lambda)}{1-\lambda^m}$$

Donde λ es el factor de decaimiento ($0 < \lambda < 1$). Un valor de λ cercano a 1 asigna más peso a observaciones históricas, mientras que un valor cercano a 0 favorece las observaciones recientes.

2.1 Formulación recursiva del EWMA

Una de las ventajas más importantes del EWMA es que puede expresarse de forma recursiva, lo que simplifica enormemente su implementación:

$$\sigma_t^2 = (1-\lambda)R_{t-1}^2 + \lambda\sigma_{t-1}^2$$

Esta formulación requiere solamente conocer el valor previo de la varianza estimada σ_{t-1}^2 y el rendimiento cuadrado más reciente R_{t-1}^2. La recursividad permite procesar eficientemente series de tiempo largas sin necesidad de almacenar todos los datos históricos.

Para inicializar el proceso recursivo cuando no se dispone de un valor inicial para σ_1^2, se pueden utilizar diferentes estrategias:

- Utilizar la primera observación: $\sigma_1^2 = R_1^2$
- Calcular la varianza muestral de las primeras n observaciones
- Utilizar el promedio a largo plazo teórico, si se conoce

3 Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (ARCH)

El modelo ARCH, introducido por Engle (1982), fue el primer modelo formal para capturar la volatilidad variable en el tiempo. A diferencia de los modelos MA y EWMA, el ARCH se basa en un enfoque estadístico más riguroso que modela la varianza condicional como un proceso autorregresivo de los rendimientos al cuadrado.

En el modelo ARCH(q), la varianza condicional depende de los últimos q rendimientos al cuadrado:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i R_{t-i}^2$$

Donde:

- $\omega > 0$ es una constante que representa el nivel base de volatilidad
- $\alpha_i \geq 0$ son parámetros que determinan la influencia de los rendimientos pasados

Para asegurar que el proceso sea estacionario en covarianza, se requiere que $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i < 1$.

3.1 Derivación del modelo ARCH

El modelo ARCH parte de la idea de que los rendimientos financieros R_t pueden representarse como:

$$R_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad z_t \sim N(0,1)$$

Donde μ_t es la media condicional (que puede modelarse independientemente o asumirse como cero), ε_t es el término de error o innovación, σ_t es la desviación estándar condicional, y z_t es una variable aleatoria normal estándar independiente e idénticamente distribuida.

La clave del modelo ARCH es que la varianza condicional σ_t^2 varía en el tiempo y depende de forma cuadrática de los valores pasados de ε_t:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2$$

Dado que $\varepsilon_t = R_t - \mu_t$, si asumimos por simplicidad que $\mu_t = 0$, entonces $\varepsilon_t = R_t$ y obtenemos la formulación presentada inicialmente.

4 Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity (GARCH)

El modelo GARCH, propuesto por Bollerslev (1986), extiende el modelo ARCH incorporando también la dependencia de las varianzas condicionales pasadas. En un modelo GARCH(p,q), la varianza condicional sigue el proceso:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i R_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Donde:

- $\omega > 0$ es la constante de nivel base
- $\alpha_i \geq 0$ son los parámetros ARCH que capturan el impacto de shocks recientes
- $\beta_j \geq 0$ son los parámetros GARCH que reflejan la persistencia de la volatilidad

Para garantizar la estacionariedad en covarianza, se requiere que $\sum_{i=1}^{q} \alpha_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j < 1$.

4.1 El modelo GARCH(1,1)

El caso más común en aplicaciones prácticas es el GARCH(1,1):

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha R_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

Este modelo simple captura eficientemente la mayoría de las características de la volatilidad financiera con solo tres parámetros. La interpretación de estos parámetros es intuitiva:

- ω representa el nivel de volatilidad de largo plazo
- α indica el impacto de nueva información (shocks recientes)
- β mide la persistencia de la volatilidad

4.2 Propiedades del GARCH(1,1)

En el modelo GARCH(1,1), la varianza incondicional de largo plazo es:

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$$

La condición $\alpha + \beta < 1$ no solo garantiza estacionariedad, sino que también determina la velocidad con que la volatilidad revierte a su media de largo plazo. Un valor $\alpha + \beta$ cercano a 1 indica alta persistencia en la volatilidad.

4.3 Estimación de modelos GARCH

Los modelos GARCH se estiman típicamente mediante máxima verosimilitud. Asumiendo normalidad condicional, la función de log-verosimilitud a maximizar es:

$$\mathcal{L}(\theta) = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\log(\sigma_t^2) + \frac{R_t^2}{\sigma_t^2}\right]$$

Donde $\theta = (\omega, \alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_p)$ es el vector de parámetros.

No existe solución analítica para este problema de optimización, por lo que se requieren métodos numéricos iterativos como Newton-Raphson o BFGS para encontrar los estimadores de máxima verosimilitud.

5 Comparación entre modelos

Cada uno de los modelos presentados tiene ventajas y limitaciones específicas:

Modelo	**Ventajas**	**Limitaciones**
MA	Simplicidad, fácil interpretación	Pesos iguales, solo datos recientes
EWMA	Recursividad, mas peso a datos cercanos	Elección arbitraria de λ
ARCH	Fundamento estadístico riguroso	Requiere muchos parámetros
GARCH	Parsimonia, captura persistencia	Mayor complejidad computacional