

1.1) Sea f una función continua por tramos en el intervalo $-T/2 \leq t \leq T/2$, el teorema de convergencia de series de Fourier implica que la serie de Fourier de f converge en la media a f en cualquier intervalo finito. Por lo tanto, se puede aplicar el teorema de integración, el cual nos dice:

Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)$ converge en la media en el intervalo $a \leq t \leq b$, entonces la serie integrada $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^x a_k(t) dt \right)$ converge uniformemente en el intervalo $a \leq x \leq b$, y

$$\int_a^x \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) dt \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^x a_k(t) dt \right)$$

Con este teorema se puede concluir que la serie de Fourier de f puede integrarse término a término en cualquier intervalo finito.

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \quad \text{en la media}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) dt \\ &= \frac{a_0}{2} t \Big|_{t_1}^{t_2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{t_1}^{t_2} a_n \cos(n\omega_0 t) dt + \int_{t_1}^{t_2} b_n \sin(n\omega_0 t) dt \right) \\ &= \frac{a_0}{2} (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin(n\omega_0 t) \cdot \frac{1}{n\omega_0} \Big|_{t_1}^{t_2} - b_n \cos(n\omega_0 t) \cdot \frac{1}{n\omega_0} \Big|_{t_1}^{t_2} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} (a_n \sin(n\omega_0 t_2) - a_n \sin(n\omega_0 t_1) - b_n \cos(n\omega_0 t_2) + b_n \cos(n\omega_0 t_1)) \\ &= \frac{a_0}{2} (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} [-b_n (\cos(n\omega_0 t_2) - \cos(n\omega_0 t_1)) + a_n (\sin(n\omega_0 t_2) - \sin(n\omega_0 t_1))] \end{aligned}$$

y la convergencia es uniforme.