Metodos Computacionales 2 Tarea 5

Punto 1

Resolver la ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{du}{dt} = u^q \qquad t \in [0, 10]$$

Para $q = 1$: $\frac{du}{dt} = u$ note la ecuación es separable:

$\frac{du}{u} = dt$ → se puede resolver como:

$$\int \frac{du}{u} = \int dt \rightarrow \ln(u) = t$$

dando así: $u = e^t$ mostrando así el enunciado

Para $q < 1$

$$\int \frac{du}{u^q} = \int dt \Rightarrow \int u^{-q} du = \int dt \rightarrow \frac{u^{1-q}}{1-q} = t + C$$

$$u = (t(1-q) + C_1)^{1/1-q} \rightarrow \text{Para } q < 1$$

Para $q > 1$ Se usa la ecuación de Bernouli:

$\frac{du}{dt} = u^q \rightarrow V = u^{1-q}$ $\quad \frac{dV}{du} = (1-q)u^{-q}$ y $\frac{dV}{du} = \frac{dV}{dt}\frac{dt}{du}$

dando así: $\frac{dV}{dt} = \frac{(1-q)}{u^q}\frac{du}{dt}$ dando así

$\frac{1}{u^q}\frac{du}{dt} = 1$ y $\frac{1}{u^q}\frac{du}{dt} = \frac{1}{1-q}\frac{dV}{dt}$ de modo que la ecuación diferencial esta dada como:

$\frac{1}{1-q}\frac{dV}{dt} = 1 \Rightarrow V = (1-q)\int dt = t(1-q) + C_2$ haciendo la sustitución $V = U$ se tiene

$u(t) = t(1-q) + C_2$ mostrando así la expresión inicial donde se busca que la Ecuación sea igual en las fronteras

$$e^t\Big|_0 = \left(t(1-q)+C_1\right)^{1/1-q}\Big|_0$$

$$1 = C_1^{1/1-q} \rightarrow C_1 = 1$$

Para $q>1$

$$e^t\Big|_0 = t(1-q)+C_2\Big|_0$$

$$1 = C_2$$

de modo que $C_1 = C_2 = 1$ dando así:

Para $q=1$: $U(t) = e^t$

Para $q<1$: $U(t) = \left(t(1-q)+1\right)^{1/1-q}$

Para $q>1$: $U(t) = t(1-q)+1$

Mostrando así las expresiones iniciales