Rispondiamo alle seguenti domande:

1) quanti numeri privi di successore genera il j-esimo passo? 2^j

2) quanti passi dura l'algoritmo?

$\log n$: $2^j = n \Rightarrow j = \log n$

3) quali processori attivo al j-esimo passo?

$$1 \leq k \leq n - 2^{j-1}$$

4) Sia $S[k]$ la posizione del successivo di $M[k]$

come inizializzo S?

$S[k] = k+1$ e $S[n] = 0$

5) Dato P_k, quale istruzione su M deve eseguire?

$$M[k] + M[S[k]] \rightarrow M[S[k]]$$

come deve fare l'aggiornamento di S?

$$S[k] = (S[k] == 0 \, ? \, 0 : S[S[k]])$$

<u>Algoritmo parallelo</u> (M ed S già inizializzati)

for $J = 1$ To $\log n$ do
  for $1 \leq k \leq n - 2^{J-1}$ <u>par do</u>

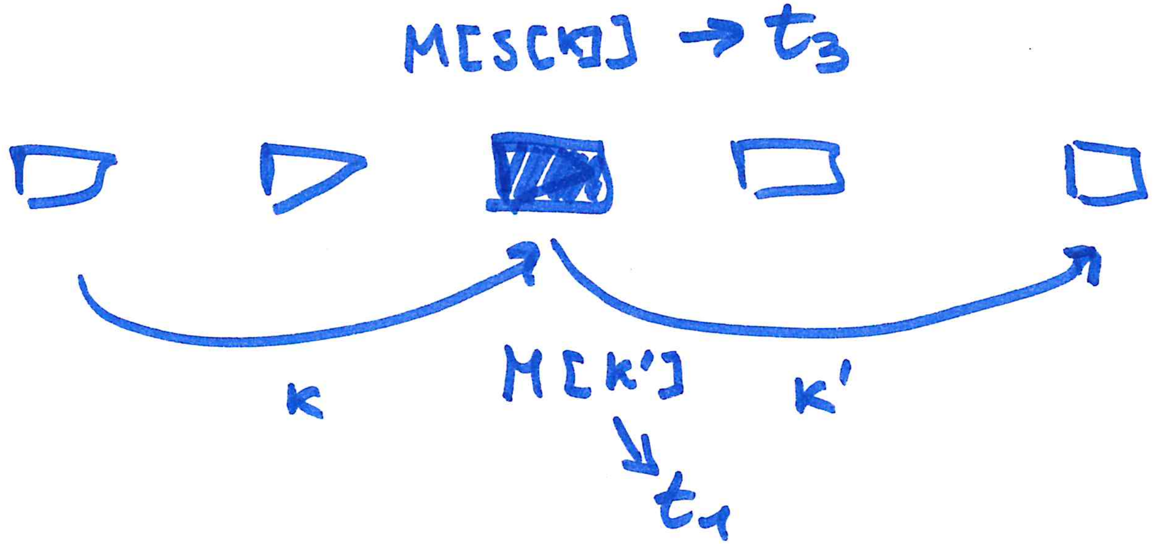
$$\begin{cases} M[S[k]] = M[k] + M[S[k]] \\ S[k] = (S[k] == 0 \, ? \, 0 : S[S[k]]) \end{cases}$$

si può evitare il test uguale a zero

Problema? Risp. **NO**

k	$M[k]$	$M[S[k]]$
	$=$	
k'	$M[k']$	$M[S[k']]$

Esempio



DATI

P_k

M[k] t_1 LD

S[k] t_2 LD

M[S[k]] t_3 LD

t

M[k'] t_1 LD

$P_{k'}$

S[k'] t_2 LD

M[S[k']] t_3 LD

k k k' k'

≠

≠

≠

S[k] ≠ S[k']

CORRETTEZZA :

1 è EREW P-RAM

P_K lavora su $M[k]$ e $M[S[k]]$:

se $i \neq j \Rightarrow S[i] \neq S[j]$ quindi hanno successori $\neq$

(eccetto il caso $S[i] = S[j] = 0$)

2 dimostro $M[k] = \sum_{i=1}^{k} M[i]$, $1 \leq k \leq n$

Si lavora sulla proprietà (del J-esimo passo)

$$(*) \quad M[t] = \begin{cases} M[t] + \dots + M[1] & t \leq 2^J \\ M[t] + \dots + M[t-2^J+1] & t > 2^J \end{cases}$$

Infatti se (*) vera si ha per $J = \log n$:

$$M[t] = \begin{cases} M[t] + \dots + M[1] & \text{per } t \leq 2^J = 2^{\log n} = n \\ \text{—} & \text{per } t > 2^J = n \end{cases}$$

Si dimostra per induzione su J:

<u>CASO BASE</u>:
$J = 1$

per $t \leq 2$

$t = 1$ $\quad M[1] = M[1]$

$t = 2$ $\quad M[2] = M[1] + M[2]$ ✓

per $t > 2$

$$M[\underbrace{k+1}_{t}] = M[\underbrace{k}_{t-1}] + M[\underbrace{k+1}_{t}] \checkmark$$

Passo induttivo : vera per $J-1$ e dimostro per J

Prima di iniziare il J-esimo passo quanto vale S?

$$S[K] = \begin{cases} K + 2^{J-1} & K \leq n - 2^{J-1} \\ 0 & K > n - 2^{J-1} \end{cases}$$

0) le celle con indice $\leq 2^{J-1}$ sono già apposto la proprietà (*) è vera per $J-1$

1) celle con indice

$$2^{J-1} < t \leq 2^{J} \Rightarrow t = 2^{J-1} + a$$

Coda → $M[a + 2^{J-1}] = M[a] + M[a + 2^{J-1}]$

$a \leq 2^{J-1}$ $\qquad$ $t > 2^{J-1}$

$$M[1] + \dots + M[a] + M[a+1] + \dots + M[a + 2^{J-1}]$$

2) Celle con indice $t > 2^J$ $\qquad t = a + 2^J$

codice $\rightarrow$ $M[\underbrace{a + 2^J}_{\underbrace{a + 2^{J-1}} + 2^{J-1}}] = M[a + 2^{J-1}] + M[a + 2^J]$

$t > 2^{J-1}$ $\qquad$ $t > 2^{J-1}$

$M[a+1] + \dots + M[a + 2^{J-1}] \quad + \quad M[a + 2^{J-1} + 1] + \dots + M[a + 2^J]$

è vera la (*)