GOBIERNO DEL ESTADO DE MÉXICO	**PRÁCTICA 1** Ing. y Esp. Rodolfo Guadalupe Alcántara Rosales	TES TECNOLÓGICO DE ESTUDIOS SUPERIORES JILOTEPEC

5

NOMBRE DE LA PRÁCTICA	**ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN**			**No.**	**UNIDAD 5**
ASIGNATURA:	**ECUACIONES DIFERENCIALES**	**CARRERA:**	**ISIC**	**PLAN:**	**2014**

Nombre: Fabiola Castañeda Mondragón
Grupo: 3401

Objetivo: Calcular el volumen de sólidos utilizando la integral triple.

No. atributo	Atributos de egreso del PE que impactan en la asignatura	No. Criterio	Criterios de desempeño	No. Indicador	Indicadores
2	El estudiante diseñará esquemas de trabajo y procesos, usando metodologías congruentes en la resolución de problemas de Ingeniería en Sistemas Computacionales	CD1	Identifica metodologías y procesos empleados en la resolución de problemas	I1	Identificación y reconocimiento de distintas metodologías para la resolución de problemas
		CD2	Diseña soluciones a problemas, empleando metodologías apropiadas al área	I1	Uso de metodologías para el modelado de la solución de sistemas y aplicaciones
				I2	Diseño algorítmico (Representación de diagramas de transiciones)
3	El estudiante plantea soluciones basadas en tecnologías empleando su juicio ingenieril para valorar necesidades, recursos y resultados esperados.	CD1	Emplea los conocimientos adquiridos para el desarrollar soluciones	I1	Elección de metodologías, técnicas y/o herramientas para el desarrollo de soluciones
				I2	Uso de metodologías adecuadas para el desarrollo de proyectos
				I3	Generación de productos y/o proyectos
		CD2	Analiza y comprueba resultados	I1	Realizar pruebas a los productos obtenidos
				I2	Documentar información de las pruebas realizadas y los resultados

1. Resuelve cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a)

$$\boxed{(x^2+y^2+1)\,dx+(x^2-2xy)\,dy=0}$$

Verificar si es una ecuación exacta

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}.$$

Donde $M = (x^2 + y^2 + 1)$ y $N = (x^2 - 2xy)$.

Cálculo de las derivadas parciales de la misma

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2x - 2y$$

Los resultados no son iguales, por lo tanto no se utilizará el método de ecuaciones exactas.

Procedemos a calcular el factor integrante:

$$\mu(x,y) = \frac{e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} dx}}{e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} dx}}$$

donde $\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N}$ es una función que solo depende de x.

Calculamos:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{N} = \frac{2x-2y-2y}{x^2-2xy} = \frac{2x-4y}{x(x-2y)}$$

Posterior a eso buscamos una función:

$$\frac{df}{dx} = \frac{2x-4y}{x(x-2y)}$$

Integramos ambos lados con respecto a x.

$$f(x) = \int \frac{2x-4y}{x(x-2y)} dx = \ln|x(x-2y)|$$

Por lo tanto, el factor integrante será:

$$\mu(x,y) = e^{f(x)} = e^{\ln|x(x-2y)|} = |x(x-2y)|$$

Una vez obtenido el factor integrante lo multiplicamos por la ecuación original

$$(x^2+y^2+1)|x(x-2y)|dx + (x^2-2xy)|x(x-2y)|dy = 0$$

$$x(x^2+y^2+1)(x-2y)dx + x(x^2-2xy)(x-2y)dy = 0$$

$$x^2(x^2+y^2+1)(x-2y)dx - 2xy(x^2-2xy)(x-2y)dy = 0$$

$$x^3(x^2+y^2+1)(x-2y)dx - 2xy(x^2-2xy)(x-2y)dy = 0$$

Derivada total

$$f(y) = -2\ln|x+y^2| + C$$

$$d\left(\frac{x^4}{4}(x^2+y^2+1)\right) - d\left(\frac{x^4y}{2}(x-2y)\right) = 0$$

$$d\left(\frac{x^4}{4}(x^2+y^2+1) - \frac{x^4y}{2}(x-2y)\right) = 0$$

Solución general de la ecuación:

$$\boxed{\frac{x^4}{4}(x^2+y^2+1) - \frac{x^4y}{2}(x-2y) = C}$$

b) $$\boxed{(x+y^2)dx - 2xydy = 0}$$

Verificamos si la ecuación es exacta

$M = (x+y^2)$ y $N = -2xy$:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2y$$

No es una ecuación exacta, entonces se busca un factor integrante para hacerla exacta:

$$\mu(x,y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dx}$$

Calculamos:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-2y-2y}{x+y^2} = \frac{-4y}{x+y^2}$$

Buscamos una función f(X)

$$\frac{df}{dy} = \frac{-4y}{x+y^2}$$

Ahora Integramos ambos lados:

El factor integrante es:

$$\mu(x,y) = e^{f(y)} = e^{-2\ln|x+y^2|} = \frac{1}{|x+y^2|^2}$$

Ahora lo multiplicamos por la ecuación original.

$$\frac{x+y^2}{|x+y^2|^2}dx - \frac{2xy}{|x+y^2|^2}dy = 0$$

$$x(x+y^2)|x+y^2|^{-2}dx - 2xy|x+y^2|^{-2}dy = 0$$

$$x(x+y^2)^2dx - 2xydx - 2xydy = 0$$

$$x(x^2+2xy^2+y^4)dx - 2xy(dx+dy) = 0$$

$$x^3dx + 2x^2y^2dx - 2xy(dx+dy) - 2xydy = 0$$

$$x^3dx + 2x^2y^2dx - 2xydx - 2xydy - 2xydy = 0$$

$$x^3dx + 2x^2y^2dx - 2xydx - 4xydy = 0$$

$$x^3dx + 2x^2y^2dx - 2xy(dx+2ydy) = 0$$

$$x^3dx + 2x^2y^2dx - 2xyd(x+y^2) = 0$$

$$d\left(\frac{x^4}{4}\right) + d\left(\frac{2x^2y^3}{3}\right) = 0$$

$$d\left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^2y^3}{3}\right) = 0$$

Integramos en ambos lados

$$\boxed{\frac{x^4}{4} + \frac{2x^2y^3}{3} = C}$$

c) $\boxed{(xy + y^2 + x^2)dx - x^2dy = 0}$

Mediante las derivadas parciales de M y N verificamos si la ecuación es exacta

$$M = (xy + y^2 + x^2) \text{ y } N = -x^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x + 2y$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = -2x$$

Como no es una ecuación exacta, se busca un factor integrante para hacerla exacta:

$$\mu(x, y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dx}$$

Calculamos:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{-2x-(x+2y)}{xy+y^2+x^2} = \frac{-3x-2y}{x(x+y)+y^2}$$

Buscamos una función f(x)

$$\frac{df}{dx} = \frac{-3x-2y}{x(x+y)+y^2}$$

Posteriormente integramos ambos lados:

$$f(x, y) = -\ln|x(x+y) + y^2| + g(y)$$

El factor integrante es:

Donde $g(y)$ es una función de y.

Dado que $g(y)$ puede depender solo de y, no necesitamos integrar la parte con respecto a x. Entonces, $g'(y)$ debe ser igual a $-2y$, ya que esa es la parte que involucra a y en $f(x, y)$.

Entonces, $g(y) = -y^2 + C$, donde C es una constante de integración.

Por lo tanto, la función $f(x, y)$ será:

$$f(x, y) = -\ln|x(x+y) + y^2| - y^2 + C$$

Ahora se tiene que multiplicar la ecuación original por el factor integrante

5

$$\frac{xy+y^2+x^2}{|x(x+y)+y^2|}dx - \frac{x^2}{|x(x+y)+y^2|}dy = 0$$

$$xye^{-y^2+C}dx - \frac{x^2}{|x(x+y)+y^2|}e^{-y^2+C}dy = 0$$

$$xye^{-y^2+C}dx - \frac{x^2}{|x(x+y)+y^2|}e^{-y^2+C}dy = 0$$

$$xydx - \frac{x^2}{|x(x+y)+y^2|}dy = 0$$

$$xydx - \frac{x^2}{x(x+y)+y^2}dy = 0$$

Solución general de la ecuación

$$d\left(\frac{x^2y}{2}\right) - d\left(\frac{x^3}{3(x+y)}\right) = 0$$

$$d\left(\frac{x^2y}{2} - \frac{x^3}{3(x+y)}\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{x^2y}{2} - \frac{x^3}{3(x+y)} = C}$$

d) $\boxed{\sqrt{y} = -y' - xy' \quad , \quad y(0) = 1}$

Primero organizamos la ecuación en la forma estándar

$$\sqrt{y} = -y' - xy'$$

Quitamos la raíz

$$y = (-y' - xy')^2$$

$$y = (y' + xy')^2$$

$$y = (1 + x)y'^2$$

Derivamos ambos lados con respecto a x

$$\frac{dy}{dx} = (1 + x)2y'y'' + y'$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Sustituimos le valor de y´

$$y = (1 + x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Dividimos los lados entre (1+x)

$$\frac{1}{1+x}y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Integramos ambos lados con respecto a x:

$$\int \frac{1}{1+x} y \, dx = \int \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

Hacemos cambio de variable

$$\int \frac{y}{u} \, du = \int \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

$$\int \frac{y}{u} \, du = \int (y')^2 \, du$$

$$\int \frac{y}{u} \, du = \int (y')^2 \, du$$

Integramos de ambos lados

$$\ln |u| + C_1 = \int (y')^2 \, du + C_2$$

$$\ln |u| = \int (y')^2 \, du + C$$

$$\ln |1 + x| = \int (y')^2 \, du + C$$

Cuando $x = 0, y = 1$, así que:

$$\ln |1 + 0| = \int (y')^2 \, du + C$$

$$0 = \int (y')^2 \, du + C$$

$$C = 0$$

Solución general de la ecuación es:

$$\ln|1+x| = \int (y')^2\, du$$

$$e^{\ln|1+x|} = e^{\int (y')^2\, du}$$

$$1+x = e^{\int (y')^2\, du}$$

$$\boxed{1+x = e^{\int (y')^2\, du}}$$

2. A una paciente que se encuentra enferma, se le suministra penicilina Q por vía intravenosa a una razón de 85mg/hora y va disminuyendo a una razón 0.1Q. Encuentre el modelo de la ecuación diferencial y obtenga la solución general.

Datos:

- $\frac{dQ}{dt}$ es la tasa de cambio de la cantidad de penicilina en el cuerpo de la paciente.
- 85 representa la tasa constante de administración de penicilina en mg/hora.
- $0.1Q$ representa la tasa de eliminación de penicilina, que es proporcional a la cantidad presente Q.

Con base a los datos anteriores, la ecuación diferencial que modela esta situación es:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = 85 - 0.1Q}$$

Modelo de la ecuación diferencial

Tasa de cambio de la cantidad de penicilina en el cuerpo de la paciente en función del tiempo.

Separamos variables:

$$\frac{dQ}{85-0.1Q} = dt$$

Integramos por ambos lados:

$$\int \frac{1}{85-0.1Q}\, dQ = \int dt$$

Reescribimos la integral

$$-\frac{1}{0.1}\int \frac{1}{u}\, du = \int dt$$

$$-10\ln|u| = t + C$$

Reemplazamos u

$$-10\ln|85-0.1Q| = t + C$$

$$85-0.1Q| = e^{-0.1t-C}$$

Solución general de la ecuación diferencial

$$85 - 0.1Q = Ae^{-0.1t}$$
$$Q = 850 - 10Ae^{-0.1t}$$

Solución general de la ecuación diferencial

Conclusión

Las ecuaciones diferenciales de primer orden son fundamentales en matemáticas y tienen una amplia gama de aplicaciones en diversas disciplinas científicas y de ingeniería. Su estudio es crucial para comprender fenómenos físicos, biológicos y sociales que cambian con respecto al tiempo o a otras variables. La capacidad de resolver y analizar estas ecuaciones es fundamental para modelar y predecir el comportamiento de sistemas dinámicos en la naturaleza y en el mundo construido por el hombre. Además, la comprensión de las ecuaciones diferenciales de primer orden es esencial para el desarrollo de teorías más avanzadas en el campo de la matemática aplicada, como la teoría de ecuaciones diferenciales parciales y la dinámica de sistemas no lineales. En resumen, el estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden es esencial para comprender y abordar problemas complejos en una variedad de campos científicos y de ingeniería.