Clique $\leq_p$ Cobertura de Vértices

Fabíola Maria Kretzer

16100725

Trabalho da disciplina INE5415-Teoria da Computação

Reduções entre Problemas

Propriedades

Um problema de decisão Q é NP-Completo se atender às duas seguintes propriedades:

- $Q \in NP$;
- algum problema reconhecidamente NP-Completo Q′ se reduz a Q.

Reduções entre Problemas

Propriedades

- Como visto em aula, 3-SAT foi um dos primeiros a ser provado NP-Completo;
- Isso é uma forma de provar que Clique é um problema reconhecidamente NP-Completo, fazendo a redução 3-SAT $\leq_p$ Clique;
- Assim podemos fazer o problema do Clique se reduzir a Cobertura de Vértices e provar que este também é NP-Completo.

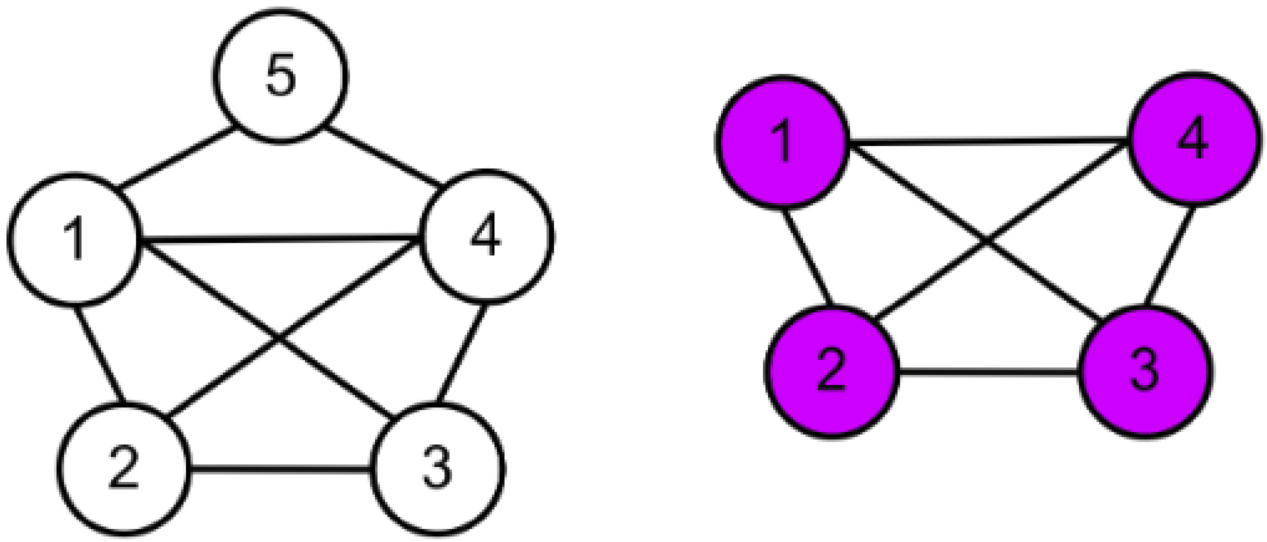
Clique

Definição

- Um Clique em um grafo não orientado G=(V, E) é um subconjunto de vértices C ⊆ V, tal que para cada dois vértices em C, existe uma aresta os conectando.
- O problema de Clique Máximo consiste em detectar um clique de tamanho máximo em G;
- A versão de decisão deste problema pergunta se existe um clique de tamanho k no grafo G.

.

Clique



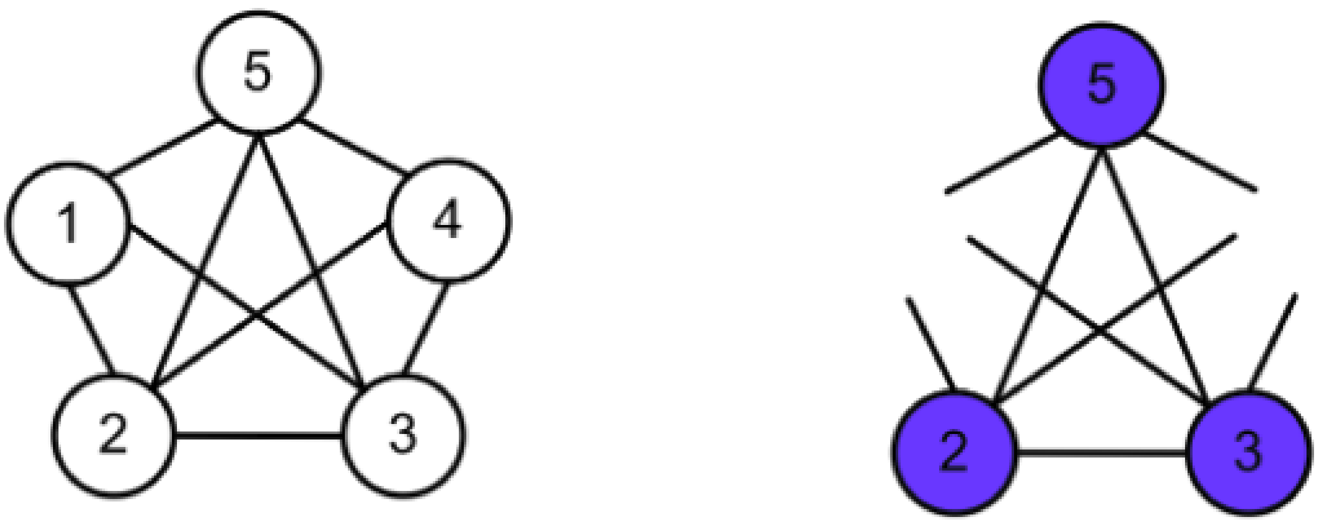
Grafo G e um clique de tamanho $k = 4$ no mesmo grafo.

Cobertura de Vértices

Definição

- Uma Cobertura de Vértices em um grafo não orientado G=(V, E) é um subconjunto V′ de V tal que para cada aresta (u,v) do grafo G, u ou v pertencem a V′;
- O problema de Cobertura de Vértices Mínima consiste em encontrar a cobertura de vértices de um grafo que requer o menor número de vértices;
- A versão de decisão do problema de cobertura de vértices pergunta se existe em um grafo G uma cobertura de vértices de tamanho k.

Cobertura de Vértices



Grafo de exemplo e uma possível cobertura de vértices (não mínima).

Clique $\leq_p$ Cobertura de Vértices

Verificação da Propriedade 1:

Para um grafo $G=(V, E)$, uma solução consiste em um conjunto V' de vértices e um inteiro k;

Inicialmente, conferimos se $|V'| = k$;

Posteriormente, conferimos para cada aresta (u,v) de G, se u ou v pertencem a V';

Caso todos os testes sejam satisfeitos, temos uma solução válida;

A verificação pode ser realizada em tempo polinomial;

Portanto, Cobertura de Vértices $\in$ NP.

Clique $\leq_p$ Cobertura de Vértices

Verificação da Propriedade 2:

A redução se baseia na noção de grafo complementar;

Para um grafo G=(V, E), o seu grafo complementar G'=(V, E'), em que as arestas de E' são todas as que não pertencem a E;

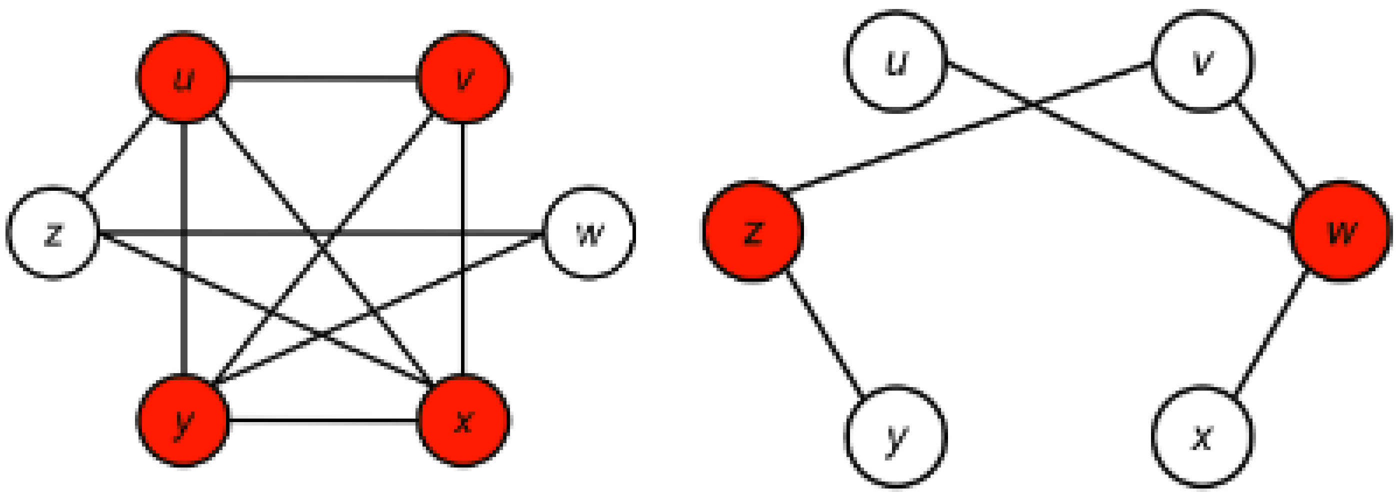
Tomamos como entrada o grafo G e a cardinalidade do clique k;

Calculamos o complemento G';

O resultado é o grafo G' e a cardinalidade da cobertura $|V| - k$;

O grafo G tem um clique de tamanho k se e somente se o grafo G' tem uma cobertura de vértices de tamanho $|V| - k$.

Clique $\leq_p$ Cobertura de Vértices



Clique V' em G e cobertura de vértices $V - V'$ em G.

Clique $\leq_p$ Cobertura de Vértices

Verificação da Propriedade 2:

Todos os pares de vértices em V' são adjacentes, pois trata-se de um clique;

Uma aresta qualquer $\{u,v\}$ pertencente a E' não pertence a E, logo, u ou v não pertencem a V'

- Se ambos pertencessem, seriam adjacentes, mas tal aresta não existe.

Equivalentemente, pelo menos um entre u e v está em $V - V'$

- Portanto, a aresta $\{u,v\}$ está coberta por $V - V'$.

Todas as arestas de E são cobertas por $V - V'$, implicando em uma cobertura de tamanho $|V| - k$ em G'.

Clique $\leq_p$ Cobertura de Vértices

Verificação da Propriedade 2:

Logo, Clique e Cobertura de Vértices obtêm as mesmas respostas para a mesma instância, e desta forma, Cobertura de Vértices $\in$ NP-Completo.

Referências

<http://www.decom.ufop.br/marco/site_media/uploads/pcc104/26_aula_26.pdf>. Acesso em: Novembro de 2017.