

## MAT77C - Fundamentos de Análise - Lista 1

Fabio Zhao Yuan Wang\*

1. Como vimos, existe uma função injetora  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , tal que  $s(n) = n + 1$ , em que  $s(n)$  chama-se *sucessor* de  $n$ . A partir disso, podemos definir a operação **soma** em  $\mathbb{N}$ , que satisfaz a seguinte lei de recursão:

- Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $n + 1 = s(n)$ ;
- Para cada  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos que  $n + s(m) = s(n + m)$ .

Também podemos definir a operação de produto em  $\mathbb{N}$ , que satisfaz a seguinte lei de recursão:

- Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos que  $n \cdot 1 = n$ ;
- Para cada  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos que  $n \cdot s(m) = nm + n$ .

**Mostre que valem as seguintes propriedades:**

a) **(Comutatividade da soma)** Para cada  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos que  $m + n = n + m$ .

Antes, considere a seguinte proposição:

.....  
**Proposição:** Seja  $m \in \mathbb{N}$ , então  $m + 1 = 1 + m$ .



**Demonstração da proposição:** Considere  $S \subset \mathbb{N}$  tal que,  $S = \{m \in \mathbb{N}; m + 1 = 1 + m\}$ . Note que  $1 \in S$ , já que  $(1) + 1 = 2 = 1 + (1)$ ; Vejamos agora que  $s(S) \subset S$ . Seja  $m \in S$ , então:

$$\begin{aligned} s(m) + 1 &= (m + 1) + 1, && \text{(Definição da função sucessor)} \\ &= (1 + m) + 1, && \text{(Visto que } m \in S) \\ &= 1 + (m + 1), && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}) \\ &= 1 + s(m). && \text{(Definição da função sucessor)} \end{aligned}$$

Deste modo, já que  $1 \in S$  e  $s(S) \subset S$ , pelo Princípio da Indução, temos que  $S = \mathbb{N}$ , como queríamos.  $\square$

.....  
**Dem:** Considere  $S \subset \mathbb{N}$  tal que  $S = \{m \in \mathbb{N}; m + n = n + m, n \in \mathbb{N}\}$ . Da proposição anterior, temos que  $1 \in S$ , visto que  $1 + n = n + 1$ . Vejamos que  $s(S) \subset S$ . Tomando  $m \in S$ ,

$$\begin{aligned} s(m) + n &= (m + 1) + n, && \text{(Definição da função sucessor)} \\ &= m + (1 + n), && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}) \\ &= m + (n + 1), && \text{(Proposição anterior)} \\ &= (m + n) + 1, && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}) \\ &= (n + m) + 1, && \text{(Visto que } m \in S) \\ &= n + (m + 1), && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}) \\ &= n + s(m). && \text{(Definição da função sucessor)} \end{aligned}$$

\*  Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cidade, Paraná, Brasil.  [fabioyuan@gmail.com](mailto:fabioyuan@gmail.com).

Visto que  $1 \in S$  e  $s(S) \subset S$ , pelo Princípio da Indução, temos  $S = \mathbb{N}$ , como queríamos.  $\square$

b) **(Lei do cancelamento da soma)** Para cada  $m, n, p \in \mathbb{N}$ , se  $m + p = n + p$ , então  $m = n$ .

**Dem:** Seja  $S \subset \mathbb{N}$  tal que  $S = \{p \in \mathbb{N}; (m + p = n + p) \implies m = n, m, n \in \mathbb{N}\}$ . Ora,  $1 \in S$ , já que, se  $m + 1 = n + 1$ , então  $s(m) = s(n)$ , e, como  $s$  é injetora por definição, então  $m = n$ . Vejamos que  $s(S) \subset S$ . Tomando  $p \in S$  e  $m + s(p) = n + s(p)$ ,

$$\begin{aligned} m + s(p) &= n + s(p), & \\ m + (p + 1) &= n + (p + 1), & \text{(Definição da função sucessor)} \\ (m + p) + 1 &= (n + p) + 1, & \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}) \\ s(m + p) &= s(n + p), & \text{(Definição da função sucessor)} \\ m + p &= n + p, & \text{(Injetividade da função sucessor)} \\ m &= n. & \text{(Já que } p \in S) \end{aligned}$$

Deste modo, como  $1 \in S$  e  $s(S) \subset S$ , pelo Princípio da Indução, temos  $S = \mathbb{N}$ .  $\square$

c) **(Comutatividade do produto)** Para cada  $m, n \in \mathbb{N}$ , temos que  $mn = nm$ .

Antes, considere as seguintes proposições:

**Proposição 1:** Seja  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \cdot 1 = 1 \cdot n$ .

**Demonstração da proposição:** Seja  $T \subset \mathbb{N}$  tal que  $T = \{n \in \mathbb{N}; n \cdot 1 = 1 \cdot n\}$ , queremos mostrar que  $T = \mathbb{N}$ . Ora,  $1 \in T$ , já que pela definição do produto em  $\mathbb{N}$ ,  $(1) \cdot 1 = 1 = 1 \cdot (1)$ . Vejamos que  $s(T) \subset T$ . Tomando  $n \in T$ , temos que:

$$\begin{aligned} s(n) \cdot 1 &= s(n), & \text{(Definição do produto em } \mathbb{N}) \\ &= n + 1, & \text{(Definição da função sucessor)} \\ &= 1 \cdot n + 1, & \text{(Da definição do produto e sabendo que } n \in T, n = n \cdot 1 = 1 \cdot n) \\ &= 1 \cdot s(n). & \text{(Definição do produto em } \mathbb{N}, m \cdot s(n) = mn + m) \end{aligned}$$

Portanto, como  $1 \in T$  e  $s(T) \subset T$ , segue do Princípio da Indução que  $T = \mathbb{N}$ .  $\square$

**Proposição 2:** (Distributiva comutada) Para cada  $m, n, p \in \mathbb{N}$ , temos que

$$(n + p)m = nm + pm.$$

**Demonstração da proposição:** Considere  $R = \{m \in \mathbb{N}; (n + p)m = nm + pm, n, p \in \mathbb{N}\}$ . Note que  $1 \in R$ , visto que, da definição de produto,  $(n + p) \cdot 1 = n + p = n \cdot 1 + p \cdot 1$ . Vejamos que  $s(R) \subset R$ . Assumindo  $m \in R$ , temos que:

$$\begin{aligned} (n + p)s(m) &= (n + p)m + (n + p), & \text{(Definição do produto em } \mathbb{N}) \\ &= (nm + pm) + (n + p), & \text{(Visto que } m \in R, (n + p)m = nm + pm) \\ &= nm + (pm + (n + p)), & \text{(Associatividade e comutatividade da soma em } \mathbb{N}) \\ &= nm + (n + (pm + p)), & \text{(Associatividade e comutatividade da soma em } \mathbb{N}) \\ &= (nm + n) + (pm + p), & \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}) \\ &= n \cdot s(m) + p \cdot s(m). & \text{(Definição do produto em } \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Sendo assim, já que  $1 \in R$  e  $s(R) \subset R$ , segue do Princípio da Indução que  $R = \mathbb{N}$ .  $\square$

**Dem:** Seja  $S = \{n \in \mathbb{N} \mid m \cdot n = n \cdot m, \quad m \in \mathbb{N}\}$ . Vejamos que  $S = \mathbb{N}$ . Da proposição 1, temos que  $1 \in S$ . Para verificar que  $s(S) \subset S$ , suponhamos que  $n \in S$ , tendo assim:

$$\begin{aligned} m \cdot s(n) &= mn + m, && \text{(Definição do produto em } \mathbb{N} \text{)} \\ &= nm + m, && \text{(Visto que } n \in S, mn = nm \text{)} \\ &= nm + 1m, && \text{(Da proposição 1, } m = m \cdot 1 = 1 \cdot m \text{)} \\ &= (n + 1)m, && \text{(Distributiva comutada)} \\ &= s(n) \cdot m. && \text{(Definição da função sucessor)} \end{aligned}$$

Deste modo, como  $1 \in S$  e  $s(S) \subset S$ , do Princípio da Indução, temos que  $S = \mathbb{N}$ , como queríamos.  $\square$

d) **(Distributividade)** Para cada  $m, n, p \in \mathbb{N}$ , temos que  $m(n + p) = mn + mp$ .

**Dem:** Ora, da *distributiva comutada*, demonstrada no item anterior, temos que, para cada  $m, n, p \in \mathbb{N}$ ,  $(n + p)m = nm + pm$ . Portanto,

$$\begin{aligned} m(n + p) &= (n + p)m, && \text{(Comutatividade do produto em } \mathbb{N} \text{)} \\ &= nm + pm, && \text{(Distributiva comutada)} \\ &= mn + mp. && \text{(Comutatividade do produto em } \mathbb{N} \text{)} \end{aligned}$$

Com isto, temos o que queríamos.  $\square$

e) **(Lei do cancelamento do produto)** Para cada  $m, n, p \in \mathbb{N}$ , se  $mp = np$ , então  $m = n$ . Antes, mostraremos a unicidade da identidade do produto em  $\mathbb{N}$ .

.....  
**Proposição:** (Unicidade da identidade do produto) Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se  $mn = m$ , então  $m = 1$ .

**Demonstração da proposição:** A fim de absurdo, suponhamos que  $m \neq 1$ , isto é, existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $m = s(k)$ , ou seja  $mn = n$  pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} n &= s(k) \cdot n, \\ &= n \cdot s(k), && \text{(Comutatividade do produto em } \mathbb{N} \text{)} \\ &= nk + n. && \text{(Definição do produto em } \mathbb{N} \text{)} \end{aligned} \quad (\star)$$

Porém, como visto em aula, para cada  $x, y \in \mathbb{N}$ ,  $x \neq x + y$ , sendo assim,  $(\star)$  é um absurdo. Deste modo, temos o que queríamos.  $\square$

.....  
**Dem:** Considere os conjuntos  $S = \{p \in \mathbb{N}; mp = np \implies m = n, \quad m, n \in \mathbb{N}\}$  e  $T = \{m \in \mathbb{N}; mp = np \implies m = n, \quad n \in \mathbb{N}, p \in S\}$ . Por construção, segue que  $T \subset S$ . Ora,  $1 \in T$ , já que, da unicidade da identidade no produto e da proposição 1 do item c,  $1 \cdot p = np \implies n = 1$ . Vejamos que  $s(T) \subset T$ , supondo que  $m \in T$  e escolhendo  $n \in \mathbb{N}$  e  $p \in S$  de tal forma que  $s(m)p = np$ , queremos mostrar que  $s(m) = n$ , sendo assim,

$$\begin{aligned} s(m)p &= np, \\ p \cdot s(m) &= pn, && \text{(Comutatividade do produto em } \mathbb{N} \text{)} \\ pm + p &= pn. && \text{(Definição do produto em } \mathbb{N} \text{)} \end{aligned} \quad ((1))$$

Note que, se  $n = 1$ ,  $p = p + pm$ , o que por  $(\star)$ , teremos um absurdo. Portanto  $n \neq 1$ , ou seja, existe  $\omega \in \mathbb{N}$  tal que  $n = s(\omega)$ . Sendo assim, (1) pode ser reescrito da seguinte forma:

$pm + p = pn = p \cdot s(\omega),$	
$pm + p = p\omega + p,$	(Definição do produto em $\mathbb{N}$ )
$pm = p\omega,$	(Lei do cancelamento da soma em $\mathbb{N}$ )
$mp = \omega p,$	(Comutatividade do produto em $\mathbb{N}$ )
$m = \omega,$	(Já que $p \in S$ e $m \in T$ )
$s(m) = s(\omega),$	(Injeção da função sucessor)
$s(m) = n.$	(Já que $n = s(\omega)$ )

Dito isto, já que como  $1 \in T$  e  $s(T) \subset T$ , segue do Princípio da Indução que  $T = \mathbb{N}$ , mais ainda,  $T \subset S \subset \mathbb{N}$ , mas como  $T = \mathbb{N}$ , segue que  $S = \mathbb{N}$ , como queríamos.  $\square$

- f) **(Unicidade da identidade do produto)** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se  $mn = n$ , então  $m = 1$   
Demonstrado como proposição em (1e).