MAT77C - Fundamentos de Análise - Lista 1

Fabio Zhao Yuan Wang*

1. **Como vimos, existe uma função injetora $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que $s(n) = n + 1$, em que $s(n)$ chama-se *sucessor* de n. A partir disso, podemos definir a operação *soma* em $\mathbb{N}$, que satisfaz a seguinte lei de recursão:**

- **Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $n + 1 = s(n)$;**
- **Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $n + s(m) = s(n + m)$.**

Também podemos definir a operação de produto em $\mathbb{N}$, que satisfaz a seguinte lei de recursão:

- **Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $n \cdot 1 = n$;**
- **Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $n \cdot s(m) = nm + n$.**

Mostre que valem as seguintes propriedades:

a) **(Comutatividade da soma) Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $m + n = n + m$.**
Antes, considere a seguinte proposição:

....

Proposição: Seja $m \in \mathbb{N}$, então $m + 1 = 1 + m$.
Demonstração da proposição: Considere $S \subset \mathbb{N}$ tal que, $S = \{m \in \mathbb{N}; m + 1 = 1 + m\}$. Note que $1 \in S$, já que $(1) + 1 = 2 = 1 + (1)$; Vejamos agora que $s(S) \subset S$. Seja $m \in S$, então:

$$\begin{aligned}
s(m) + 1 &= (m + 1) + 1, && \text{(Definição da função sucessor)}\\
&= (1 + m) + 1, && \text{(Visto que } m \in S)\\
&= 1 + (m + 1), && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N})\\
&= 1 + s(m). && \text{(Definição da função sucessor)}
\end{aligned}$$

Deste modo, já que $1 \in S$ e $s(S) \in S$, pelo Princípio da Indução, temos que $S = \mathbb{N}$, como queríamos. □

....

Dem: Considere $S \subset \mathbb{N}$ tal que $S = \{m \in \mathbb{N}; m + n = n + m, n \in \mathbb{N}\}$. Da proposição anterior, temos que $1 \in S$, visto que $1 + n = n + 1$. Vejamos que $s(S) \subset S$. Tomando $m \in S$,

$$\begin{aligned}
s(m) + n &= (m + 1) + n, && \text{(Definição da função sucessor)}\\
&= m + (1 + n), && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N})\\
&= m + (n + 1), && \text{(Proposição anterior)}\\
&= (m + n) + 1, && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N})\\
&= (n + m) + 1, && \text{(Visto que } m \in S)\\
&= n + (m + 1), && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N})\\
&= n + s(m). && \text{(Definição da função sucessor)}
\end{aligned}$$

* Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cidade, Paraná, Brasil. fabioyuan@gmail.com.

Visto que $1 \in S$ e $s(S) \subset S$, pelo Princípio da Indução, temos $S = \mathbb{N}$, como queríamos. □

b) **(Lei do cancelamento da soma) Para cada $m, n, p \in \mathbb{N}$, se $m + p = n + p$, então $m = n$.**
Dem: Seja $S \subset \mathbb{N}$ tal que $S = \{p \in \mathbb{N}; (m + p = n + p) \implies m = n, \quad m,n \in \mathbb{N}\}$. Ora, $1 \in S$, já que, se $m + 1 = n + 1$, então $s(m) = s(n)$, e, como s é injetora por definição, então $m = n$. Vejamos que $s(S) \subset S$. Tomando $p \in S$ e $m + s(p) = n + s(p)$,

$$\begin{aligned}
m + s(p) &= n + s(p), && \\
m + (p + 1) &= n + (p + 1), && \text{(Definição da função sucessor)} \\
(m + p) + 1 &= (n + p) + 1, && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}\text{)} \\
s(m + p) &= s(n + p), && \text{(Definição da função sucessor)} \\
m + p &= n + p, && \text{(Injetividade da função sucessor)} \\
m &= n. && \text{(Já que } p \in S\text{)}
\end{aligned}$$

Deste modo, como $1 \in S$ e $s(S) \subset S$, pelo Princípio da Indução, temos $S = \mathbb{N}$. □

c) **(Comutatividade do produto) Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $mn = nm$.**
Antes, considere as seguintes proposições:

. . . .

Proposição 1: Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \cdot 1 = 1 \cdot n$.
Demonstração da proposição: Seja $T \subset \mathbb{N}$ tal que $T = \{n \in \mathbb{N}; n \cdot 1 = 1 \cdot n\}$, queremos mostrar que $T = \mathbb{N}$. Ora, $1 \in T$, já que pela definição do produto em $\mathbb{N}$, $(1) \cdot 1 = 1 = 1 \cdot (1)$. Vejamos que $s(T) \subset T$. Tomando $n \in T$, temos que:

$$\begin{aligned}
s(n) \cdot 1 &= s(n), && \text{(Definição do produto em } \mathbb{N}\text{)} \\
&= n + 1, && \text{(Definição da função sucessor)} \\
&= 1 \cdot n + 1, && \text{(Da definição do produto e sabendo que } n \in T,\ n = n \cdot 1 = 1 \cdot n\text{)} \\
&= 1 \cdot s(n). && \text{(Definição do produto em } \mathbb{N},\ m \cdot s(n) = mn + m\text{)}
\end{aligned}$$

Portanto, como $1 \in T$ e $s(T) \subset T$, segue do Princípio da Indução que $T = \mathbb{N}$. □

. . . .

Proposição 2: (Distributiva comutada) Para cada $m, n, p \in \mathbb{N}$, temos que

$$(n + p)m = nm + pm.$$

Demonstração da proposição: Considere $R = \{m \in \mathbb{N}; (n + p)m = nm + pm, \quad n,p \in \mathbb{N}\}$. Note que $1 \in R$, visto que, da definição de produto, $(n+p) \cdot 1 = n+p = n \cdot 1 + p \cdot 1$. Vejamos que $s(R) \subset R$. Assumindo $m \in R$, temos que:

$$\begin{aligned}
(n + p)s(m) &= (n + p)m + (n + p), && \text{(Definição do produto em } \mathbb{N}\text{)} \\
&= (nm + pm) + (n + p), && \text{(Visto que } m \in R,\ (n + p)m = nm + pm\text{)} \\
&= nm + (pm + (p + n)), && \text{(Associatividade e comutatividade da soma em } \mathbb{N}\text{)} \\
&= nm + (n + (pm + p)), && \text{(Associatividade e comutatividade da soma em } \mathbb{N}\text{)} \\
&= (nm + n) + (pm + p), && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}\text{)} \\
&= n \cdot s(m) + p \cdot s(m). && \text{(Definição do produto em } \mathbb{N}\text{)}
\end{aligned}$$

Sendo assim, já que $1 \in R$ e $s(R) \subset R$, segue do Princípio da Indução que $R = \mathbb{N}$. □

. . . .

Dem: Seja $S = \{n \in \mathbb{N} | m \cdot n = n \cdot m, \quad m \in \mathbb{N}\}$. Vejamos que $S = \mathbb{N}$. Da proposição 1, temos que $1 \in S$. Para verificar que $s(S) \subset S$, suponhamos que $n \in S$, tendo assim:

$$\begin{aligned} m \cdot s(n) &= mn + m, && \text{(Definição do produto em } \mathbb{N}) \\ &= nm + m, && \text{(Visto que } n \in S,\ mn = nm) \\ &= nm + 1m, && \text{(Da proposição 1, } m = m \cdot 1 = 1 \cdot m) \\ &= (n+1)m, && \text{(Distributiva comutada)} \\ &= s(n) \cdot m. && \text{(Definição da função sucessor)} \end{aligned}$$

Deste modo, como $1 \in S$ e $s(S) \subset S$, do Princípio da Indução, temos que $S = \mathbb{N}$, como queríamos. □

d) **(Distributividade) Para cada $m,n,p \in \mathbb{N}$, temos que $m(n+p) = mn + mp$.**
Dem: Ora, da *distributiva comutada*, demonstrada no item anterior, temos que, para cada $m,n,p \in \mathbb{N}$, $(n+p)m = nm + pm$. Portanto,

$$\begin{aligned} m(n+p) &= (n+p)m, && \text{(Comutatividade do produto em } \mathbb{N}) \\ &= nm + pm, && \text{(Distributiva comutada)} \\ &= mn + mp. && \text{(Comutatividade do produto em } \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Com isto, temos o que queríamos. □

e) **(Lei do cancelamento do produto) Para cada $m,n,p \in \mathbb{N}$, se $mp = np$, então m=n.**
Antes, mostraremos a unicidade da identidade do produto em $\mathbb{N}$.

. . . .

Proposição: (Unicidade da identidade do produto) Para todo $n \in N$, se $mn = m$, então $m = 1$.
Demonstração da proposição: A fim de absurdo, suponhamos que $m \neq 1$, isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = s(k)$, ou seja $mn = n$ pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} n &= s(k) \cdot n, && \\ &= n \cdot s(k), && \text{(Comutatividade do produto em } \mathbb{N}) \\ &= nk + n. && \text{(Definição do produto em } \mathbb{N}) \qquad (\star) \end{aligned}$$

Porém, como visto em aula, para cada $x,y \in \mathbb{N}$, $x \neq x + y$, sendo assim, ($\star$) é um absurdo. Deste modo, temos o que queríamos. □

. . . .

Dem: Considere os conjuntos $S = \{p \in \mathbb{N}; mp = np \implies m = n, \quad m,n \in \mathbb{N}\}$ e $T = \{m \in \mathbb{N}; mp = np \implies m = n, \quad n \in \mathbb{N}, p \in S\}$. Por construção, segue que $T \subset S$. Ora, $1 \in T$, já que, da unicidade da identidade no produto e da proposição 1 do item c, $1 \cdot p = np \implies n = 1$. Vejamos que $s(T) \subset T$, supondo que $m \in T$ e escolhendo $n \in \mathbb{N}$ e $p \in S$ de tal forma que $s(m)p = np$, queremos mostrar que $s(m) = n$, sendo assim,

$$\begin{aligned} s(m)p &= np, && \\ p \cdot s(m) &= pn, && \text{(Comutatividade do produto em } \mathbb{N}) \\ pm + p &= pn. && \text{(Definição do produto em } \mathbb{N}) \qquad ((1)) \end{aligned}$$

Note que, se $n = 1$, $p = p + pm$, o que por ($\star$), teremos um absurdo. Portanto $n \neq 1$, ou seja, existe $\omega \in \mathbb{N}$ tal que $n = s(\omega)$. Sendo assim, (1) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
pm + p = pn &= p \cdot s(\omega), \\
pm + p &= p\omega + p, && \text{(Definição do produto em } \mathbb{N}) \\
pm &= p\omega, && \text{(Lei do cancelamento da soma em } \mathbb{N}) \\
mp &= \omega p, && \text{(Comutatividade do produto em } \mathbb{N}) \\
m &= \omega, && \text{(Já que } p \in S \text{ e } m \in T) \\
s(m) &= s(\omega), && \text{(Injeção da função sucessor)} \\
s(m) &= n. && \text{(Já que } n = s(\omega))
\end{aligned}
$$

Dito isto, já que como $1 \in T$ e $s(T) \subset T$, segue do Princípio da Indução que $T = \mathbb{N}$, mais ainda, $T \subset S \subset \mathbb{N}$, mas como $T = \mathbb{N}$, segue que $S = \mathbb{N}$, como queríamos. □

f) **(Unicidade da identidade do produto) Para todo $n \in \mathbb{N}$, se $mn = n$, então $m = 1$**
Demonstrado como proposição em (1e).

2. **Sejam $m, n, p \in \mathbb{N}$. Mostre que**

a) **Se $m \leq n$ e $n < p$, então $m < p$.**
Dem: Da hipótese, temos que $n < p$, isto é, $p = n + k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Ademais, $m \leq n \equiv (n = m) \vee (n = m + \omega)$ para algum $\omega \in \mathbb{N}$. Com isto, suponhamos que $n = m$, portanto $p = n + k = m + k$, isto é $m < p$; Agora, suponhamos que $n = m + \omega$,

$$
\begin{aligned}
p &= n + k, \\
&= (m + \omega) + k, \\
&= m + (\omega + k) = m + k_1, \quad k_1 \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

ou seja, $m < p$. Já que $(n = m) \wedge (n < p) \implies m < p$ e $(m < n) \wedge (n < p) \implies m < p$, segue que $(m \leq n) \wedge (n < p) \implies m < p$. □

b) **Se $m < n$ e $n \leq p$, então $m < p$.**
Dem: Da hipótese, $m < n$, isto é, $n = m+k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, e, $n \leq p \equiv (p = n) \vee (p = n+k_1)$ para algum $k_1 \in \mathbb{N}$. Supondo $p = n$,segue que $m+k = n = p$, isto é, $m < p$; Agora, supondo $p = n + k_1$,

$$
\begin{aligned}
p &= n + k_1, \\
&= (m + k) + k_1, \\
&= m + (k + k_1) = m + k_2, \quad k_2 \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

ou seja, $m < p$. Semelhante ao item anterior, segue que $(m < n) \wedge (n \leq p) \implies m < p$. □

c) **Se $m \leq n$ e $n \leq p$, então $m \leq p$.**
Dos itens (a) e (b), sabemos que:

- $(m < n) \vee (n = p) \implies m < p$;
- $(m < n) \vee (n < p) \implies m < p$;
- $(m = n) \vee (n < p) \implies m < p$.