

MAT77C - Fundamentos de Análise - Lista 1

Fabio Zhao Yuan Wang*

1. Como vimos, existe uma função injetora $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $s(n) = n + 1$, em que $s(n)$ chama-se *sucessor* de n . A partir disso, podemos definir a operação *soma* em \mathbb{N} , que satisfaz a seguinte lei de recursão:

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $n + 1 = s(n)$;
- Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $n + s(m) = s(n + m)$.

Também podemos definir a operação de produto em \mathbb{N} , que satisfaz a seguinte lei de recursão:

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $n \cdot 1 = n$;
- Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $n \cdot s(m) = nm + n$.

Mostre que valem as seguintes propriedades:

a) (Comutatividade da soma) Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $m + n = n + m$.

Antes, considere a seguinte proposição:

.....
Proposição: Seja $m \in \mathbb{N}$, então $m + 1 = 1 + m$.



Demonstração da proposição: Considere $S \subset \mathbb{N}$ tal que, $S = \{m \in \mathbb{N}; m + 1 = 1 + m\}$. Note que $1 \in S$, já que $(1) + 1 = 2 = 1 + (1)$; Vejamos agora que $s(S) \subset S$. Seja $m \in S$, então:

$$\begin{aligned} s(m) + 1 &= (m + 1) + 1, && \text{(Definição da função sucessor)} \\ &= (1 + m) + 1, && \text{(Visto que } m \in S) \\ &= 1 + (m + 1), && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}) \\ &= 1 + s(m). && \text{(Definição da função sucessor)} \end{aligned}$$

Deste modo, já que $1 \in S$ e $s(S) \subset S$, pelo Princípio da Indução, temos que $S = \mathbb{N}$, como queríamos. \square

.....
Dem: Considere $S \subset \mathbb{N}$ tal que $S = \{m \in \mathbb{N}; m + n = n + m, n \in \mathbb{N}\}$. Da proposição anterior, temos que $1 \in S$, visto que $1 + n = n + 1$. Vejamos que $s(S) \subset S$. Tomando $m \in S$,

$$\begin{aligned} s(m) + n &= (m + 1) + n, && \text{(Definição da função sucessor)} \\ &= m + (1 + n), && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}) \\ &= m + (n + 1), && \text{(Proposição anterior)} \\ &= (m + n) + 1, && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}) \\ &= (n + m) + 1, && \text{(Visto que } m \in S) \\ &= n + (m + 1), && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}) \\ &= n + s(m). && \text{(Definição da função sucessor)} \end{aligned}$$

*  Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cidade, Paraná, Brasil.  fabioyuan@gmail.com.

Visto que $1 \in S$ e $s(S) \subset S$, pelo Princípio da Indução, temos $S = \mathbb{N}$, como queríamos. \square

b) **(Lei do cancelamento da soma)** Para cada $m, n, p \in \mathbb{N}$, se $m + p = n + p$, então $m = n$.

Dem: Seja $S \subset \mathbb{N}$ tal que $S = \{p \in \mathbb{N}; (m + p = n + p) \implies m = n, m, n \in \mathbb{N}\}$. Ora, $1 \in S$, já que, se $m + 1 = n + 1$, então $s(m) = s(n)$, e, como s é injetora por definição, então $m = n$. Vejamos que $s(S) \subset S$. Tomando $p \in S$ e $m + s(p) = n + s(p)$,

$$\begin{aligned} m + s(p) &= n + s(p), & & \\ m + (p + 1) &= n + (p + 1), & & \text{(Definição da função sucessor)} \\ (m + p) + 1 &= (n + p) + 1, & & \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N} \text{)} \\ s(m + p) &= s(n + p), & & \text{(Definição da função sucessor)} \\ m + p &= n + p, & & \text{(Injetividade da função sucessor)} \\ m &= n. & & \text{(Já que } p \in S \text{)} \end{aligned}$$

Deste modo, como $1 \in S$ e $s(S) \subset S$, pelo Princípio da Indução, temos $S = \mathbb{N}$. \square

c) **(Comutatividade do produto)** Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $mn = nm$.

Antes, considere as seguintes proposições:

Proposição 1: Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \cdot 1 = 1 \cdot n$.

Demonstração da proposição: Seja $T \subset \mathbb{N}$ tal que $T = \{n \in \mathbb{N}; n \cdot 1 = 1 \cdot n\}$, queremos mostrar que $T = \mathbb{N}$. Ora, $1 \in T$, já que pela definição do produto em \mathbb{N} , $(1) \cdot 1 = 1 = 1 \cdot (1)$. Vejamos que $s(T) \subset T$. Tomando $n \in T$, temos que:

$$\begin{aligned} s(n) \cdot 1 &= s(n), & & \text{(Definição do produto em } \mathbb{N} \text{)} \\ &= n + 1, & & \text{(Definição da função sucessor)} \\ &= 1 \cdot n + 1, & & \text{(Da definição do produto e sabendo que } n \in T, n = n \cdot 1 = 1 \cdot n \text{)} \\ &= 1 \cdot s(n). & & \text{(Definição do produto em } \mathbb{N}, m \cdot s(n) = mn + m \text{)} \end{aligned}$$

Portanto, como $1 \in T$ e $s(T) \subset T$, segue do Princípio da Indução que $T = \mathbb{N}$. \square

Dem: