MAT77C - Fundamentos de Análise - Lista 1

Fabio Zhao Yuan Wang*

1. **Como vimos, existe uma função injetora $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tal que $s(n) = n + 1$, em que $s(n)$ chama-se *sucessor* de n. A partir disso, podemos definir a operação *soma* em $\mathbb{N}$, que satisfaz a seguinte lei de recursão:**

- **Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $n + 1 = s(n)$;**
- **Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $n + s(m) = s(n + m)$.**

Também podemos definir a operação de produto em $\mathbb{N}$, que satisfaz a seguinte lei de recursão:

- **Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $n \cdot 1 = n$;**
- **Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $n \cdot s(m) = nm + n$.**

Mostre que valem as seguintes propriedades:

a) **(Comutatividade da soma) Para cada $m, n \in \mathbb{N}$, temos que $m + n = n + m$.**
Antes, considere a seguinte proposição:

. . . .

Proposição: Seja $m \in \mathbb{N}$, então $m + 1 = 1 + m$.
Demonstração da proposição: Considere $S \subset \mathbb{N}$ tal que, $S = \{m \in \mathbb{N}; m + 1 = 1 + m\}$. Note que $1 \in S$, já que $(1) + 1 = 2 = 1 + (1)$; Vejamos agora que $s(S) \subset S$. Seja $m \in S$, então:

$$
\begin{aligned}
s(m) + 1 &= (m + 1) + 1, && \text{(Definição da função sucessor)}\\
&= (1 + m) + 1, && \text{(Visto que } m \in S\text{)}\\
&= 1 + (m + 1), && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}\text{)}\\
&= 1 + s(m). && \text{(Definição da função sucessor)}
\end{aligned}
$$

Deste modo, já que $1 \in S$ e $s(S) \in S$, pelo Princípio da Indução, temos que $S = \mathbb{N}$, como queríamos. □

. . . .

Dem: Considere $S \subset \mathbb{N}$ tal que $S = \{m \in \mathbb{N}; m + n = n + m, n \in \mathbb{N}\}$. Da proposição anterior, temos que $1 \in S$, visto que $1 + n = n + 1$. Vejamos que $s(S) \subset S$. Tomando $m \in S$,

$$
\begin{aligned}
s(m) + n &= (m + 1) + n, && \text{(Definição da função sucessor)}\\
&= m + (1 + n), && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}\text{)}\\
&= m + (n + 1), && \text{(Proposição anterior)}\\
&= (m + n) + 1, && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}\text{)}\\
&= (n + m) + 1, && \text{(Visto que } m \in S\text{)}\\
&= n + (m + 1), && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}\text{)}\\
&= n + s(m). && \text{(Definição da função sucessor)}
\end{aligned}
$$

* Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cidade, Paraná, Brasil. fabioyuan@gmail.com.

Visto que $1 \in S$ e $s(S) \subset S$, pelo Princípio da Indução, temos $S = \mathbb{N}$, como queríamos. □

b) **(Lei do cancelamento da soma) Para cada** $m, n, p \in \mathbb{N}$**, se** $m + p = n + p$**, então** $m = n$**.**
Dem: Seja $S \subset \mathbb{N}$ tal que $S = \{p \in \mathbb{N}; (m + p = n + p) \implies m = n, \quad m,n \in \mathbb{N}\}$. Ora, $1 \in S$, já que, se $m + 1 = n + 1$, então $s(m) = s(n)$, e, como s é injetora por definição, então $m = n$. Vejamos que $s(S) \subset S$. Tomando $p \in S$ e $m + s(p) = n + s(p)$,

$$\begin{aligned}
m + s(p) &= n + s(p), && \\
m + (p + 1) &= n + (p + 1), && \text{(Definição da função sucessor)} \\
(m + p) + 1 &= (n + p) + 1, && \text{(Associatividade da soma em } bN\text{)} \\
s(m + p) &= s(n + p), && \text{(Definição da função sucessor)} \\
m + p &= n + p, && \text{(Injetividade da função sucessor)} \\
m &= n. && \text{(Já que } p \in S\text{)}
\end{aligned}$$

Deste modo, como $1 \in S$ e $s(S) \subset S$, pelo Princípio da Indução, temos $S = \mathbb{N}$. □

c) **(Comutatividade do produto) Para cada** $m, n \in \mathbb{N}$**, temos que** $mn = nm$**.**
Antes, considere as seguintes proposições:

. . . .

Proposição 1: Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \cdot 1 = 1 \cdot n$.
Demonstração da proposição: Seja $T \subset \mathbb{N}$ tal que $T = \{n \in \mathbb{N}; n \cdot 1 = 1 \cdot n\}$, queremos mostrar que $T = \mathbb{N}$. Ora, $1 \in T$, já que pela definição do produto em $\mathbb{N}$, $(1) \cdot 1 = 1 = 1 \cdot (1)$. Vejamos que $s(T) \subset T$. Tomando $n \in T$, temos que:

$$\begin{aligned}
s(n) \cdot 1 &= s(n), && \text{(Definição do produto em } \mathbb{N}\text{)} \\
&= n + 1, && \text{(Definição da função sucessor)} \\
&= 1 \cdot n + 1, && \text{(Da definição do produto e sabendo que } n \in T,\ n = n \cdot 1 = 1 \cdot n\text{)} \\
&= 1 \cdot s(n). && \text{(Definição do produto em } \mathbb{N},\ m \cdot s(n) = mn + m\text{)}
\end{aligned}$$

Portanto, como $1 \in T$ e $s(T) \subset T$, segue do Princípio da Indução que $T = \mathbb{N}$. □

. . . .

Proposição 2: (Distributiva comutada) Para cada $m, n, p \in \mathbb{N}$, temos que

$$(n + p)m = nm + pm.$$

Demonstração da proposição: Considere $R = \{m \in \mathbb{N}; (n + p)m = nm + pm, \quad n,p \in \mathbb{N}\}$. Note que $1 \in R$, visto que, da definição de produto, $(n+p) \cdot 1 = n+p = n \cdot 1 + p \cdot 1$. Vejamos que $s(R) \subset R$. Assumindo $m \in R$, temos que:

$$\begin{aligned}
(n + p)s(m) &= (n + p)m + (n + p), && \text{(Definição do produto em } \mathbb{N}\text{)} \\
&= (nm + pm) + (n + p), && \text{(Visto que } m \in R,\ (n + p)m = nm + pm\text{)} \\
&= nm + (pm + (p + n)), && \text{(Associatividade e comutatividade da soma em } \mathbb{N}\text{)} \\
&= nm + (n + (pm + p)), && \text{(Associatividade e comutatividade da soma em } \mathbb{N}\text{)} \\
&= (nm + n) + (pm + p), && \text{(Associatividade da soma em } \mathbb{N}\text{)} \\
&= n \cdot s(m) + p \cdot s(m). && \text{(Definição do produto em } \mathbb{N}\text{)}
\end{aligned}$$

Sendo assim, já que $1 \in R$ e $s(R) \subset R$, segue do Princípio da Indução que $R = \mathbb{N}$. □

. . . .

Dem: Seja $S = \{n \in \mathbb{N} | m \cdot n = n \cdot m, \quad m \in \mathbb{N}\}$. Vejamos que $S = \mathbb{N}$.