Lista 8

Fabio Zhao Yuan Wang*

1. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ em que $a < b$. Mostre que (a, b), $(-\infty, b)$, (a, ∞) são conjuntos abertos.

   Dem: Vejamos que $A = (a, b)$ é um conjunto aberto. Note que para todo $x \in A$, $x \in \mathbb{R}$ e $a < x < b$. Mais ainda, sejam $\overline{a} = x - a$ e $\overline{b} = b - x$. Como $x > a$, segue que $\overline{a} = x - a > 0$, ou seja $\overline{a} > 0$, analogamente temos $\overline{b} > 0$. Com isto, considere $r = \min(\overline{a}, \overline{b})$, vejamos então, que para todo $x \in A$, $\left(x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}\right) \subset A$. Ora, como $r = \min(\overline{a}, \overline{b})$, segue que $r \leq \overline{a}$ e $r \leq \overline{b}$. Ao considerar $r \leq \overline{a}$, isto é, $-r \geq -\overline{a}$, podemos verificar que,

$$x - \frac{r}{2} \geq x - \frac{\overline{a}}{2} = x - \frac{x - a}{2} = \frac{x + a}{2},$$

   e, como $x > a$, segue que $x - \frac{r}{2} \geq \frac{x+a}{2} > \frac{a+a}{2} = a$, isto é, $x - \frac{r}{2} > a$. Agora, considere $r \leq \overline{b}$, isto é, $-r \geq -\overline{b}$. Visto que,

$$x - \frac{r}{2} \leq x - \frac{\overline{b}}{2} = x - \frac{b - x}{2}$$

* Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cidade, Paraná, Brasil. fabioyuan@gmail.com.