MAT77C - Fundamentos de Análise - Lista 8

Fabio Zhao Yuan Wang*

1. **Sejam** $a, b \in \mathbb{R}$ **em que** $a < b$**. Mostre que** (a, b)**,** $(-\infty, b)$**,** $(a, +\infty)$ **são conjuntos abertos.**

Dem: Vejamos que $A = (a, b)$ é um conjunto aberto. Note que para todo $x \in A$, $x \in \mathbb{R}$ e $a < x < b$, (1.0). Sejam $\overline{a} = x - a$ e $\overline{b} = b - x$. Como $x > a$, segue que $\overline{a} = x - a > 0$, ou seja $\overline{a} > 0$, analogamente temos $\overline{b} > 0$. Com isto, considere $r = \min(\overline{a}, \overline{b})$, vejamos então, que para todo $x \in A$, $\left(x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}\right) \subset A$. Ora, como $r = \min(\overline{a}, \overline{b})$, segue que $r \leq \overline{a}$ e $r \leq \overline{b}$. Ao considerar $r \leq \overline{a}$, isto é, $-r \geq -\overline{a}$, podemos verificar que,

$$x - \frac{r}{2} \geq x - \frac{\overline{a}}{2} = x - \frac{x-a}{2} = \frac{x+a}{2},$$

e, como $x > a$, segue que $x - \frac{r}{2} \geq \frac{x+a}{2} > \frac{a+a}{2} = a$, isto é, $x - \frac{r}{2} > a$. Agora, considere $r \leq \overline{b}$, ou seja,

$$x + \frac{r}{2} \leq x + \frac{\overline{b}}{2} = x + \frac{b-x}{2} = \frac{b+x}{2},$$

mas como $x < b$, segue que $x + \frac{r}{2} < \frac{b+b}{2} = b$, portanto $x + \frac{r}{2} < b$. Ademais, visto que $\overline{b} > 0$ e $\overline{a} > 0$, temos que $r = \min(\overline{a}, \overline{b}) > 0$, ou seja, $-r < r$. Isto posto, temos que,

$$a < x - \frac{r}{2} < x + \frac{r}{2} < b \tag{1.1}$$

e como para todo $x \in A$ temos (1.0), então (1.1) pode ser expressa por $\left(x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}\right) \subset A$. Com isso, podemos concluir que $A \subset \text{int}A$. Mais ainda, pela definição de pontos interiores, temos que $\text{int}A \subset A$, portanto $A = \text{int}A$ que, pela definição de abertos, segue que $A = (a, b)$ é um aberto, como queríamos.

Vejamos que $B = (-\infty, b)$ é um conjunto aberto. Análogo ao caso anterior, considere $\overline{b} = b - x > 0$ tal que $x \in B$. Como $x + \frac{\overline{b}}{2} = \frac{b+x}{2} < \frac{b+b}{2} = b$, e $-\overline{b} < \overline{b}$, então

$$x - \frac{\overline{b}}{2} < x + \frac{\overline{b}}{2} < b \tag{1.2}$$

e, visto que $x \in B$ se, e somente se, $x \in \mathbb{R}$ e $x < b$, segue que $\left(x - \frac{\overline{b}}{2}, x + \frac{\overline{b}}{2}\right) \subset B$, (1.3). Mais ainda, como para todo $x \in B$ temos (1.2), e por conseguinte (1.3), então $B \subset \text{int}B$ e, da definição de pontos interiores, $\text{int}B \subset B$, ou seja $B = \text{int}B$. Em vista disso, pela definição de abertos, segue que B é aberto, como queríamos.

Vejamos agora que $C = (a, \infty)$ é um conjunto aberto. Como visto anteriormente, sejam $x \in A$ e $\overline{a} = x - a > 0$. Visto que $x - \frac{\overline{a}}{2} = \frac{x+a}{2} > a$ e $-\overline{a} < \overline{a}$, então,

$$a < x - \frac{\overline{a}}{2} < x + \frac{\overline{a}}{2}, \tag{1.4}$$

Portanto $\left(x - \frac{\overline{a}}{2}, x + \frac{\overline{a}}{2}\right) \subset C$, (1.5). Já que para todo $x \in C$ temos (1.5), segue que $C \subset \text{int}C$, e da definição de pontos interiores, $\text{int}C \subset C$, ou seja $C = \text{int}C$, sendo assim, C é aberto, como queríamos. □

* Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cidade, Paraná, Brasil. fabioyuan@gmail.com.

2. **Seja $A \subset \mathbb{R}$. Mostre que $a \in A$ é um ponto de acumulação de A se, e somente se, toda vizinhança V de a, contém um ponto de $A \backslash \{a\}$, isto é, $V \cap (A \backslash \{a\}) \neq \emptyset$.**
Dem: Suponhamos que $a \in A$ é um ponto de acumulação de A, ou seja, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \in A \backslash \{a\}$ e $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Como $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \in \mathbb{N}$, temos $|x_n - a| < \epsilon$ com $n \geq n_0$, ou seja

$$|x_n - a| < \epsilon \iff -\epsilon < x_n - a < \epsilon \implies a - \epsilon < x_n < a + \epsilon \tag{2.1}$$

e, como (2.1) vale para todo $\epsilon > 0$, é conveniente escolher um ϵ suficiente pequeno, tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ é uma vizinhança de a de raio ϵ centrada em a que esteja contida em A e que denotaremos por $V_\epsilon(a)$. Com isto, como $\epsilon > 0$, existe um ponto $a - \frac{\epsilon}{2} \in (a - \epsilon, a + \epsilon) = V_\epsilon(a) = V_\epsilon(a) \cap A$ que é diferente de a, ou seja, em particular, $a - \frac{\epsilon}{2} \in (V_\epsilon(a) \cap A) \backslash \{a\} = V_\epsilon(a) \cap (A \backslash \{a\})$. Com isto, temos o que queríamos.
Por outro lado, suponhamos que toda vizinhança V de a contém um ponto de $A \backslash \{a\}$, (2.2). Ora, como (2.2) vale para qualquer vizinhança $V(a)$, então, seja $V(a) = (\alpha, \beta)$, tal que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha < \beta$. Da hipótese, sabemos que $V(a) \cap (A \backslash \{a\}) \neq \emptyset$, portanto, podemos construir uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $V(a)$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Com isto, sejam $\overline{\alpha} = a - \alpha$ e $\overline{\beta} = \beta - a$, e $r = \min(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$, e, considere a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n = a + \frac{r}{n+1}$. Note que $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, mais ainda, por construção, para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in V(a) \backslash \{a\}$, portanto, a é um ponto de acumulação, como queríamos. □

3. **Mostre que todo conjunto enumerável tem interior vazio. Dê exemplos de conjuntos com interior vazio.**
Antes da demonstração, devemos relembrar da seguinte proposição e de um teorema demonstrados em aula.
Proposição: Seja A um conjunto contável. Se $B \subset A$, então B é contável.
A proposição acima é logicamente equivalente a seguinte afirmação:
Proposição: Sejam dois conjuntos A e B tais que $B \subset A$. Se A é contável então B é contável.
Mais ainda, a contrapositiva da reescrita proposta nos diz que:
Lema: Sejam dois conjuntos A e B tais que $B \subset A$. Se B não é contável, então A não é contável.

Teorema: Todo intervalo $\mathcal{I}$, não-degenerado é não-enumerável.

Demonstração do exercício proposto: Seja um conjunto qualquer $A \subset \mathbb{R}$ enumerável, ou seja, contável, e, afim de contradição, suponha que int$A \neq \emptyset$, isto é, existe pelo menos um $a \in$ int$A \subset A$. Note que, se $A = \emptyset$, temos uma contradição; Visto que há pelo menos um $a \in$ int$A$, da definição de ponto interior, existe $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset A$. Como $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ é um intervalo não-degenerado, do teorema citado, segue que $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ é não-enumerável, portanto $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ não é contável. Daqui, visto que int$A \subset A$ e int$A$ não é contável, segue do lema acima que A não é contável, o que contradiz a hipótese. Portanto int$A = \emptyset$, como queríamos. □
Exemplos de conjuntos com interior vazio:
(a) Qualquer conjunto unitário, isto é, $A = \{a\}$ onde $a \in \mathbb{R}$, tem interior vazio, visto que para todo $\epsilon > 0$, $(a - \epsilon, a + \epsilon) \not\subset A$. **Exemplo:** $A_0 = \{0\}, A_1 = \{1\}, A_{\{} - 1\} = \{-1\}$ tem interior vazio.
(b) Qualquer conjunto finito contido nos reais, isto é, $A = \{x_0, \ldots, x_n\}$ onde $n \in \mathbb{N}$ e $x_k \in \mathbb{R}$ para todo $k \in \mathbb{Z} \cap [0, n]$ e $x_i < x_j$ quando $i < j$, tem interior vazio.

Demonstração alternativa para este caso em específico: Considere $d = \min\{|x_i - x_{i+1}|; i = 0, 1, \ldots, n-1\}$, para cada $d > \epsilon_0 > 0$ e $k \in \mathbb{Z} \cap [0, n]$, não existe $a \in A$ tal que $a \neq x_k$ e $a \in (x_k - \epsilon_0, x_k + \epsilon_0)$, já que, caso contrário, violaríamos a definição de d; ou seja, $(x_k - \epsilon_0, x_k + \epsilon_0) \not\subset A$. Note que, para todo $\epsilon > 0$ existe pelo menos um ϵ_0 como descrito anteriormente, tal que $I_{0,k} = (x_k - \epsilon_0, x_k + \epsilon_0) \subset (x_k - \epsilon, x_k + \epsilon) = I_{1,k}$ com $k \in \mathbb{Z} \cap [0, n]$, portanto, como $I_{0,k} \not\subset A$, $I_{0,k} \subset I_{1,k}$ e $I_{0,k} \cap I_{1,k} \neq \emptyset$, segue que $I_{1,k} \not\subset A$, em outras palavras, para cada $k \in \mathbb{Z} \cap [0, n]$ e $\epsilon > 0$, $(x_k - \epsilon, x_k + \epsilon) \not\subset A$, isto é, int$A = \emptyset$. **Exemplo:** $A_0 = \{0, 1\}, A_1 = \{0, 1, 2\}, A_3 = \{0, 1, 2, 3\}$ tem interior vazio.

4. **Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$. Mostre que**

a) int$(A \cup B) =$ int$(A) \cup$ int(B)

Dem:

b) int$(A \cap B) =$ int$(A) \cap$ int(B)