Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba
Departamento de Eletrônica

Espaços Métricos - Capítulo 1

Fabio Zhao Yuan Wang*

Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são listas $x = (x_1, \cdots, x_n)$ onde $x_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$. Há três maneiras de definir distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$. Dados $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$,

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|, \qquad d''(x,y) = \max_{i\in\mathbb{N}_{\leq n}} |x_i - y_i|.$$

Proposição 1: Sejam d, d' e d'' métricas de $\mathbb{R}^n$ definidas como a pouco. Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos que:

$$d''(x, y) \overset{(1)}{\leq} d(x,y) \overset{(2)}{\leq} d'(x,y) \overset{(3)}{\leq} n \cdot d''(x,y),$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

.....

Dem: Vejamos a desigualdade (1). Seja $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ tal que $|x_j - y_j| = d''(x,y)$, então,

$$|x_j - y_j| = \sqrt{(x_j - y_j)^2} \leq \sqrt{(x_j - y_j)^2 + C},$$

onde $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Note que, para $A = \mathbb{N}_{\leq n} \setminus \{j\}$, temos que $d_j(x,y) = \sqrt{\sum_{i\in A} |x_i - y_i|} \geq 0$, visto que d_j é na verdade a métrica d aplicada a pontos em $\mathbb{R}^{n-1}$. Deste modo, seja $c = d_j^2(x,y)$. Com isto,

$$d''(x,y) = |x_j - y_j| \leq \sqrt{(x_j - y_j)^2 + d_j^2(x,y)} = \sqrt{d^2(x,y)} = d(x,y),$$

como queríamos.

---

tst

* Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cidade, Paraná, Brasil. fabioyuan@gmail.com.