Espaços Métricos - Capítulo 1

Fabio Zhao Yuan Wang*

Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são listas $x = (x_1, \cdots, x_n)$ onde $x_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$. Há três maneiras de definir distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$. Dados $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$,

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|, \qquad d''(x,y) = \max_{i\in\mathbb{N}_{\leq n}} |x_i - y_i|.$$

Proposição 1: Sejam d, d' e d'' métricas de $\mathbb{R}^n$ definidas como a pouco. Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos que:

$$d''(x, y) \overset{(1)}{\leq} d(x,y) \overset{(2)}{\leq} d'(x,y) \overset{(3)}{\leq} n \cdot d''(x,y),$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

. . . .

Dem: Vejamos a desigualdade (1). Seja $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ tal que $|x_j - y_j| = d''(x,y)$, então,

$$|x_j - y_j| = \sqrt{(x_j - y_j)^2} \leq \sqrt{(x_j - y_j)^2 + C},$$

onde $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Note que, para $A = \mathbb{N}_{\leq n} \setminus \{j\}$, temos que $d_j(x,y) = \sqrt{\sum_{i\in A} |x_i - y_i|} \geq 0$, visto que d_j é na verdade a métrica d aplicada a pontos em $\mathbb{R}^{n-1}$. Com isto, seja $C = d_j^2(x,y)$,

$$d''(x,y) = |x_j - y_j| \leq \sqrt{(x_j - y_j)^2 + d_j^2(x,y)} = \sqrt{d^2(x,y)} = d(x,y).$$

Para a desigualdade (2), considere $(d')^2$ e seja $a_i = |x_i - y_i|$ para $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$, ou seja,

$$(d'(x,y))^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_i \cdot a_j\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_i \cdot a_j\right)$$

$$= d^2(x,y) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_i \cdot a_j\right) \geq d^2(x,y), \qquad \text{(eq1)}$$

visto que d' e d são não-negativos, de (eq1), segue que $d(x,y) \leq d'(x,y)$.
Por fim, para a desigualdade (3), note que para todo $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$, $|x_k - y_k| \leq \max_{i\in\mathbb{N}_{\leq n}} |x_i - y_i|$, $(\star)$. Sendo assim, aplicando n vezes a expressão em $(\star)$ e em seguida, combinando cada uma delas numa só expressão, segue que,

$$d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| \leq n \cdot \max_{i\in\mathbb{N}_{\leq n}} |x_i - y_i| = d''(x,y),$$

como queríamos. □

---

* Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cidade, Paraná, Brasil. fabioyuan@gmail.com.

Daqui, vejamos outros exemplos de espaços métricos.
Exemplo 1: Seja X um conjunto arbitrário. Uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se *limitada* quando existe uma constante $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$. Note que a soma e o produto de funções limitadas são também limitadas. Denotando o conjunto das funções limitadas que vão de X a $\mathbb{R}$ como $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$, é possível definirmos uma métrica em $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ tal que, para $f, g \in \mathcal{B}(X;\mathbb{R})$,

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|. \tag{m1}$$

Esta é a chamada *métrica da convergência uniforme*, ou *métrica do sup*.

Note que, para $X = \mathbb{N}_{\leq n}$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ limitadas, é possível construir as sequências $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_{\leq n}}$ e $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_{\leq n}}$, tais que para todo $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$, temos que $x_k = f(k)$ e $y_k = g(k)$. Deste modo, se temos $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que a i-ésima coordenada de x equivale a x_i, e análogamente para y, tem-se que (m1) pode ser reduzida a métrica d'' de $\mathbb{R}^n$.
Exemplo 2: *(Espaços vetoriais normados)* Considere um espaço vetorial E sobre o corpo $\mathbb{R}$. Uma *norma* em E é uma função $|\quad| : E \to \mathbb{R}$, que a cada vetor $x \in E$ é associado o número real $|x|$, denominado *norma de x*, de modo a serem cumpridas as seguintes condições para cada $u, v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

N1) Se $x \neq 0_E$, então $|x| \neq 0_{\mathbb{R}}$;
N2) $|\lambda \cdot x| = |\lambda||x|$;
N3) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Um *espaço vetorial normado* é um par $(E, |\quad|)$ onde E é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e $|\quad|$ é uma *norma* em E. Exemplos de espaços vetoriais normados são $(\mathbb{R}^n, |\quad|)$, $(\mathbb{R}^n, |\quad|')$ e $(\mathbb{R}^n, |\quad|'')$, onde, para $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se tem

$$|x| = d(x, 0_{\mathbb{R}^n}), \quad |x|' = d'(x, 0_{\mathbb{R}^n}), \quad |x|'' = d''(x, 0_{\mathbb{R}^n})$$

Outro exemplo de espaço vetorial normado é $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$, onde $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Note que foi utilizado a notação $||f||$ para denotar a norma da função f, a fim de não confundir com a função $|f| : X \to \mathbb{R}$, tal que $|f|(x) = |f(x)|$, a qual chamamos de '*função módulo de f*'.

Todo espaço vetorial normado $(E, |\quad|)$ torna-se um espaço métrico por meio da definição $d(x,y) = |x - y|$. Esta métrica diz-se *proveniente da norma* $|\quad|$. Por exemplo, as métricas d, d' e d'' em $\mathbb{R}^n$ são provenientes das normas $|\quad|$, $|\quad|'$ e $|\quad|''$, respectivamente. Também, a métrica do sup em $\mathcal{B}(X;\mathbb{R})$ é proveniente da norma que acabamos de introduzir neste espaço. Podemos então escrever $||f - g||$ em vez de $d(f,g)$.

Note que as propriedades de uma métrica que provém de uma norma resultam imediatamente das análogas para a norma. Por exemplo, a desigualdade triangular é obtida através de (N3).