

Espaços Métricos - Capítulo 1

Fabio Zhao Yuan Wang*

Considere o espaço euclidiano \mathbb{R}^n . Os pontos de \mathbb{R}^n são listas $x = (x_1, \dots, x_n)$ onde $x_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$. Há três maneiras de definir distância entre dois pontos em \mathbb{R}^n . Dados $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$,

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad d'(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad d''(x, y) = \max_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}} |x_i - y_i|.$$

Proposição 1: Sejam d , d' e d'' métricas de \mathbb{R}^n definidas como a pouco. Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos que:

$$d''(x, y) \stackrel{(1)}{\leq} d(x, y) \stackrel{(2)}{\leq} d'(x, y) \stackrel{(3)}{\leq} n \cdot d''(x, y),$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

Dem: Vejamos a desigualdade (1). Seja $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ tal que $|x_j - y_j| = d''(x, y)$, então,

$$|x_j - y_j| = \sqrt{(x_j - y_j)^2} \leq \sqrt{(x_j - y_j)^2 + C},$$

onde $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Note que, para $A = \mathbb{N}_{\leq n} \setminus \{j\}$, temos que $d_j(x, y) = \sqrt{\sum_{i \in A} |x_i - y_i|^2} \geq 0$, visto que d_j é na verdade a métrica d aplicada a pontos em \mathbb{R}^{n-1} . Com isto, seja $C = d_j^2(x, y)$,

$$d''(x, y) = |x_j - y_j| \leq \sqrt{(x_j - y_j)^2 + d_j^2(x, y)} = \sqrt{d^2(x, y)} = d(x, y).$$

Para a desigualdade (2), considere $(d')^2$ e seja $a_i = |x_i - y_i|$ para $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$, ou seja,



$$\begin{aligned} (d'(x, y))^2 &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_i \cdot a_j \right) = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_i \cdot a_j \right) \\ &= d^2(x, y) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_i \cdot a_j \right) \geq d^2(x, y), \end{aligned} \quad (\text{eq1})$$

visto que d' e d são não-negativos, de (eq1), segue que $d(x, y) \leq d'(x, y)$.

Por fim, para a desigualdade (3), note que para todo $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$, $|x_k - y_k| \leq \max_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}} |x_i - y_i|$, (★). Sendo assim, aplicando n vezes a expressão em (★) e em seguida, combinando cada uma delas numa só expressão, segue que,

$$d'(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \leq n \cdot \max_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}} |x_i - y_i| = d''(x, y),$$

como queríamos. □

*  Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cidade, Paraná, Brasil.  fabioyuan@gmail.com.

Daqui, vejamos outros exemplos de espaços métricos.

Exemplo 1: Seja X um conjunto arbitrário. Uma função real $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *limitada* quando existe uma constante $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$. Note que a soma e o produto de funções limitadas são também limitadas. Denotando o conjunto das funções limitadas que vão de X a \mathbb{R} como $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$, é possível definirmos uma métrica em $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ tal que, para $f, g \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$,

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|. \quad (m1)$$

Esta é a chamada *métrica da convergência uniforme*, ou *métrica do sup*.

Note que, para $X = \mathbb{N}_{\leq n}$ e $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas, é possível construir as sequências $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_{\leq n}}$ e $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_{\leq n}}$, tais que para todo $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$, temos que $x_k = f(k)$ e $y_k = g(k)$. Deste modo, se temos $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que a i -ésima coordenada de x equivale a x_i , e análogamente para y , tem-se que (m1) pode ser reduzida a métrica d'' de \mathbb{R}^n .

Exemplo 2: (*Espaços vetoriais normados*) Considere um espaço vetorial E sobre o corpo \mathbb{R} . Uma *norma* em E é uma função $|\cdot| : E \rightarrow \mathbb{R}$, que a cada vetor $x \in E$ é associado o número real $|x|$, denominado *norma de x* , de modo a serem cumpridas as seguintes condições para cada $u, v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

N1) Se $x \neq 0_E$, então $|x| \neq 0_{\mathbb{R}}$;

N2) $|\lambda \cdot x| = |\lambda| |x|$;

N3) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Um *espaço vetorial normado* é um par $(E, |\cdot|)$ onde E é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e $|\cdot|$ é uma *norma* em E . Exemplos de espaços vetoriais normados são $(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n, |\cdot|')$ e $(\mathbb{R}^n, |\cdot|'')$, onde, para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se tem

$$|x| = d(x, 0_{\mathbb{R}^n}), \quad |x|' = d'(x, 0_{\mathbb{R}^n}), \quad |x|'' = d''(x, 0_{\mathbb{R}^n})$$

Outro exemplo de espaço vetorial normado é $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, onde $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Note que foi utilizado a notação $\|f\|$ para denotar a norma da função f , a fim de não confundir com a função $|f| : X \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $|f|(x) = |f(x)|$, a qual chamamos de '*função módulo de f* '.

Todo espaço vetorial normado $(E, |\cdot|)$ torna-se um espaço métrico por meio da definição $d(x, y) = |x - y|$. Esta métrica diz-se *proveniente da norma $|\cdot|$* . Por exemplo, as métricas d , d' e d'' em \mathbb{R}^n são provenientes das normas $|\cdot|$, $|\cdot|'$ e $|\cdot|''$, respectivamente. Também, a métrica do sup em $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ é proveniente da norma que acabamos de introduzir neste espaço. Podemos então escrever $\|f - g\|$ em vez de $d(f, g)$.

Note que as propriedades de uma métrica que provém de uma norma resultam imediatamente das análogas para a norma. Por exemplo, a desigualdade triangular é obtida através de (N3).

Exemplo 3: (*Espaços vetoriais com produto interno*) Seja E um espaço vetorial real. Um *produto interno* em E é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de vetores $x, y \in E$ um número real $\langle x, y \rangle$ chamado o produto interno de x por y , de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para $x, x', y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

P1) $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$;

P2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;

P3) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

P4) $x \neq 0 \implies \langle x, x \rangle > 0$.

A partir do produto interno, define-se a norma de um vetor $x \in E$ pondo $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, ou seja, $|x|^2 = \langle x, x \rangle$. As propriedades N1 e N2 são imediatas. Quanto a N3, ela decorre da *Desigualdade de Cauchy-Schwarz*, $|\langle x, y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$.

Para a demonstração da forma geral da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, isto é, a Desigualdade de Hölder, considere os seguintes lemas:

Lema 1: (Desigualdade de Young) Para qualquer a, b não-negativos, e sejam p e q expoentes conjugados, isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{onde, } p, q > 1,$$

temos que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Dem: Considere a função $f(x) = x^p$. Note que, como $p > 1$, então $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$. Se x é não-negativo, então x^{p-2} também é não-negativo. Mais ainda,

$$p > 1 \implies (p-1) > 0 \implies p(p-1) > 0,$$

sendo assim, $f''(x) \geq 0$. Deste modo, temos que $f(x)$ é uma função convexa para todo x não-negativo. Das propriedades de funções convexas, temos que, para quaisquer $x, a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Com isto, seja $a = 1$,

$$f(x) \geq f(1) + f'(1)(x-1) = 1^p + p(1)^{p-1}(x-1) = 1 + p(x-1),$$

ou seja,

$$x^p \geq 1 + p(x-1), \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad p > 1.$$

Visto que, por hipótese, a e b são não-negativos, então $x = ab^{1-q} \geq 0$, deste modo,

$$\begin{aligned} (ab^{1-q})^p &\geq 1 + p(ab^{1-q} - 1), \\ \frac{a^p b^{(1-q)p}}{p} &\geq \frac{1}{p} + (ab^{1-q} - 1) \implies \frac{a^p b^{-q}}{p} \geq \frac{1}{p} + (ab^{1-q} - 1), \\ \frac{a^p}{p} &\geq b^q \left(\frac{1}{p} - 1 \right) + ab \implies \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab. \end{aligned}$$

Com isto, temos o que queríamos. \square

Lema 2: Sejam p e q expoentes conjugados e considere duas sequências numéricas $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}}$ e $(y_i)_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}}$, tais que,

$$\sum_{i=1}^n |x_i|^p = 1, \quad \sum_{i=1}^n |y_i|^q = 1,$$

então,

$$\sum_{i=1}^n |x_i \cdot y_i| \leq 1.$$

Dem: Ora, da Desigualdade de Young, como $|x_i| \geq 0$ e $|y_i| \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$, então,

$$|x_i| \cdot |y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q}, \quad \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n}$$

deste modo,

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |y_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

como queríamos. \square

Teorema: (Desigualdade de Hölder) Sejam p e q expoentes conjugados e considere as sequências $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}}$ e $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}}$. Então,

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$$

Dem: Se x ou y são nulos, temos o que queríamos. Considere x e y não-nulos e as sequências $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}}$ e $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}}$ tais que $\alpha_i = \left| \frac{x_i}{(\sum_{w=1}^n |x_w|^p)^{1/p}} \right|$ e $\beta_i = \left| \frac{y_i}{(\sum_{w=1}^n |y_w|^q)^{1/q}} \right|$. Com isto, temos que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^p = 1, \quad \sum_{i=1}^n \beta_i^q = 1.$$

Deste modo, do **Lema 2**,

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \leq 1$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^n \left(\left| \frac{x_i}{(\sum_{w=1}^n |x_w|^p)^{1/p}} \right| \left| \frac{y_i}{(\sum_{w=1}^n |y_w|^q)^{1/q}} \right| \right) \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

como queríamos. \square

Note que, para demonstrar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, basta utilizar a Desigualdade de Hölder com $p = q = 2$ e em seguida aplicar a desigualdade triangular.

Mais ainda, para o caso $n \rightarrow \infty$, a Desigualdade de Hölder e o **Lema 2** são satisfeitos quando as sequências x e y são elementos de ℓ^w , onde $w = \max\{p, q\}$.

Teorema: (Desigualdade de Minkowski) Seja $p > 1$ e considere as sequências x e y em ℓ^p , então,

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{1/p}$$

Dem: Considere as sequências $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$