Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Curitiba
Departamento de Eletrônica

Espaços Métricos - Capítulo 1

Fabio Zhao Yuan Wang*

Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Os pontos de $\mathbb{R}^n$ são listas $x = (x_1, \cdots, x_n)$ onde $x_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$. Há três maneiras de definir distância entre dois pontos em $\mathbb{R}^n$. Dados $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$,

$$d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|, \qquad d''(x,y) = \max_{i\in\mathbb{N}_{\leq n}}|x_i - y_i|.$$

Proposição 1: Sejam d, d' e d'' métricas de $\mathbb{R}^n$ definidas como a pouco. Para cada $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos que:

$$d''(x,y) \overset{(1)}{\leq} d(x,y) \overset{(2)}{\leq} d'(x,y) \overset{(3)}{\leq} n \cdot d''(x,y),$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

. . . .

Dem: Vejamos a desigualdade (1). Seja $j \in \mathbb{N}_{\leq n}$ tal que $|x_j - y_j| = d''(x,y)$, então,

$$|x_j - y_j| = \sqrt{(x_j - y_j)^2} \leq \sqrt{(x_j - y_j)^2 + C},$$

onde $C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Note que, para $A = \mathbb{N}_{\leq n} \setminus \{j\}$, temos que $d_j(x,y) = \sqrt{\sum_{i\in A}|x_i - y_i|} \geq 0$, visto que d_j é na verdade a métrica d aplicada a pontos em $\mathbb{R}^{n-1}$. Com isto, seja $C = d_j^2(x,y)$,

$$d''(x,y) = |x_j - y_j| \leq \sqrt{(x_j - y_j)^2 + d_j^2(x,y)} = \sqrt{d^2(x,y)} = d(x,y).$$

Para a desigualdade (2), considere $(d')^2$ e seja $a_i = |x_i - y_i|$ para $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$, ou seja,

$$(d'(x,y))^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_i \cdot a_j\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_i \cdot a_j\right)$$

$$= d^2(x,y) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_i \cdot a_j\right) \geq d^2(x,y), \qquad \text{(eq1)}$$

visto que d' e d são não-negativos, de (eq1), segue que $d(x,y) \leq d'(x,y)$.
Por fim, para a desigualdade (3), note que para todo $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$, $|x_k - y_k| \leq \max_{i\in\mathbb{N}_{\leq n}}|x_i - y_i|$, $(\star)$. Sendo assim, aplicando n vezes a expressão em $(\star)$ e em seguida, combinando cada uma delas numa só expressão, segue que,

$$d'(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| \leq n \cdot \max_{i\in\mathbb{N}_{\leq n}}|x_i - y_i| = d''(x,y),$$

como queríamos. □

---

* Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cidade, Paraná, Brasil. fabioyuan@gmail.com.

Daqui, vejamos outros exemplos de espaços métricos.
Exemplo 1: Seja X um conjunto arbitrário. Uma função real $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se *limitada* quando existe uma constante $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in X$. Note que a soma e o produto de funções limitadas são também limitadas. Denotando o conjunto das funções limitadas que vão de X a $\mathbb{R}$ como $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$, é possível definirmos uma métrica em $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ tal que, para $f, g \in \mathcal{B}(X; \mathbb{R})$,

$$d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|. \tag{m1}$$

Esta é a chamada *métrica da convergência uniforme*, ou *métrica do sup*.

Note que, para $X = \mathbb{N}_{\leq n}$ e $f, g : X \to \mathbb{R}$ limitadas, é possível construir as sequências $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_{\leq n}}$ e $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_{\leq n}}$, tais que para todo $k \in \mathbb{N}_{\leq n}$, temos que $x_k = f(k)$ e $y_k = g(k)$. Deste modo, se temos $x, y \in \mathbb{R}^n$ tais que a i-ésima coordenada de x equivale a x_i, e análogamente para y, tem-se que (m1) pode ser reduzida a métrica d'' de $\mathbb{R}^n$.
Exemplo 2: *(Espaços vetoriais normados)* Considere um espaço vetorial E sobre o corpo $\mathbb{R}$. Uma *norma* em E é uma função $| \ | : E \to \mathbb{R}$, que a cada vetor $x \in E$ é associado o número real $|x|$, denominado *norma de x*, de modo a serem cumpridas as seguintes condições para cada $u, v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$:

N1) Se $x \neq 0_E$, então $|x| \neq 0_{\mathbb{R}}$;
N2) $|\lambda \cdot x| = |\lambda||x|$;
N3) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Um *espaço vetorial normado* é um par $(E, | \ |)$ onde E é um espaço vetorial sobre o corpo dos reais e $| \ |$ é uma *norma* em E. Exemplos de espaços vetoriais normados são $(\mathbb{R}^n, | \ |)$, $(\mathbb{R}^n, | \ |')$ e $(\mathbb{R}^n, | \ |'')$, onde, para $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se tem

$$|x| = d(x, 0_{\mathbb{R}^n}), \quad |x|' = d'(x, 0_{\mathbb{R}^n}), \quad |x|'' = d''(x, 0_{\mathbb{R}^n})$$

Outro exemplo de espaço vetorial normado é $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$, onde $||f|| = \sup_{x \in X} |f(x)|$. Note que foi utilizado a notação $||f||$ para denotar a norma da função f, a fim de não confundir com a função $|f| : X \to \mathbb{R}$, tal que $|f|(x) = |f(x)|$, a qual chamamos de '*função módulo de* f'.

Todo espaço vetorial normado $(E, | \ |)$ torna-se um espaço métrico por meio da definição $d(x,y) = |x - y|$. Esta métrica diz-se *proveniente da norma* $| \ |$. Por exemplo, as métricas d, d' e d'' em $\mathbb{R}^n$ são provenientes das normas $| \ |$, $| \ |'$ e $| \ |''$, respectivamente. Também, a métrica do sup em $\mathcal{B}(X; \mathbb{R})$ é proveniente da norma que acabamos de introduzir neste espaço. Podemos então escrever $||f - g||$ em vez de $d(f,g)$.

Note que as propriedades de uma métrica que provém de uma norma resultam imediatamente das análogas para a norma. Por exemplo, a desigualdade triangular é obtida através de (N3).

Exemplo 3: *(Espaços vetoriais com produto interno)* Seja E um espaço vetorial real. Um *proudto interno* em E é uma função $\langle \ , \ \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, que associa a cada par ordenado de vetores $x, y \in E$ um número real $\langle x, y \rangle$ chamado o produto interno de x por y, de modo a serem cumpridas as condições abaixo, para $x, x', y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:

P1) $\langle x + x', y \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x',y \rangle$;
P2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$;
P3) $\langle x, y \rangle = \langle y,x \rangle$;
P4) $x \neq 0 \implies \langle x,x \rangle > 0$.

A partir do produto interno, define-se a norma de um vetor $x \in E$ pondo $|x| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$, ou seja, $|x|^2 = \langle x,x \rangle$. As propriedades $N1$ e $N2$ são imediatas. Quanto a $N3$, ela decorre da *Desigualdade de Cauchy-Schwarz,* $|\langle x,y \rangle| \leq |x| \cdot |y|$.

Para a demonstração da forma geral da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, isto é, a Desigualdade de Hölder, considere os seguintes lemas:

Lema 1: (Desigualdade de Young) Para qualquer a, b não-negativos, e sejam p e q expoentes conjugados, isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \text{onde, } p, q > 1,$$

temos que

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Dem: Considere a função $f(x) = x^p$. Note que, como $p > 1$, então $f''(x) = p(p-1)x^{p-2}$. Se x é não-negativo, então x^{p-2} também é não-negativo. Mais ainda,

$$p > 1 \implies (p-1) > 0 \implies p(p-1) > 0,$$

sendo assim, $f''(x) \geq 0$. Deste modo, temos que $f(x)$ é uma função convexa para todo x não-negativo. Das propriedades de funções convexas, temos que, para quaisquer $x, a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$,

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a).$$

Com isto, seja $a = 1$,

$$f(x) \geq f(1) + f'(1)(x-1) = 1^p + p(1)^{p-1}(x-1) = 1 + p(x-1),$$

ou seja,

$$x^p \geq 1 + p(x-1), \quad x \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad p > 1.$$

Visto que, por hipótese, a e b são não-negativos, então $x = ab^{1-q} \geq 0$, deste modo,

$$\begin{aligned}
\left(ab^{1-q}\right)^p &\geq 1 + p(ab^{1-q} - 1), \\
\frac{a^p b^{(1-q)p}}{p} \geq \frac{1}{p} + (ab^{1-q} - 1) &\implies \frac{a^p b^{-q}}{p} \geq \frac{1}{p} + (ab^{1-q} - 1), \\
\frac{a^p}{p} \geq b^q \left(\frac{1}{p} - 1\right) + ab &\implies \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.
\end{aligned}$$

Com isto, temos o que queríamos. □

Lema 2: Sejam p e q expoentes conjugados e considere duas sequências $(x_i)_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}}$ e $(y_i)_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}}$, tais que,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = 1,$$

então,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i \cdot y_i| \leq 1.$$

Dem: Ora, da Desigualdade de Young, como $|x_i| \geq 0$ e $|y_i| \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}_{\leq n}$, então,

$$|x_i| \cdot |y_i| \leq \frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q}, \qquad \forall i \in \mathbb{N}_{\leq n}$$

deste modo,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{|x_i|^p}{p} + \frac{|y_i|^q}{q} \right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

como queríamos. □

Teorema: (Desigualdade de Hölder) Sejam p e q expoentes conjugados e considere as sequências $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}}$ e $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}}$. Então,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q}$$

...

Dem: Se x ou y são nulos, temos o que queríamos. Considere x e y não-nulos e as sequências $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}}$ e $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}_{\leq n}}$ tais que $\alpha_i = \left| \frac{x_i}{\left(\sum_{w=1}^{\infty} |x_w|^p\right)^{1/p}} \right|$ e $\beta_i = \left| \frac{y_i}{\left(\sum_{w=1}^{\infty} |y_w|^q\right)^{1/q}} \right|$. Com isto, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^p = 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} \beta_i^q = 1.$$

Deste modo, do **Lema 2**,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \leq 1$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\left| \frac{x_i}{\left(\sum_{w=1}^{n} |x_w|^p\right)^{1/p}} \right| \left| \frac{y_i}{\left(\sum_{w=1}^{\infty} |y_w|^q\right)^{1/q}} \right| \right) \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \right)^{1/q}.$$

como queríamos. □

Note que, para demonstrar a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, basta utilizar a Desigualdade de Hölder com $p = q = 2$ e em seguida aplicar a desigualdade triangular.

Mais ainda, para o caso $n \to \infty$, a Desigualdade de Hölder e o **Lema 2** são satisfeitos quando as sequências x e y são elementos de ℓ^w, onde $w = \max\{p, q\}$.

Teorema: (Desigualdade de Minkowski) Seja $p > 1$ e considere as sequências x e y em l^p, então,

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{1/p}$$