Guida di Analitica

3ª CET

Anno Scolastico 2022-2023

Indice

1 Il piano cartesiano e la retta **5**
1.1 Intersezione tra due rette 5
1.2 Retta passante per due punti 6
1.3 Distanza punto retta 6
1.4 Distanza punto punto 6
1.5 Retta perpendicolare e retta parallela a retta data passanti per un punto dato 7
1.6 Fascio di rette improprio 8
1.7 Fascio di rette proprio 8
1.8 Bisettrici tra due rette 9

2 La circonferenza **11**
2.1 Intersezione tra due circonferenze 11
2.2 Retta tangente ad una circonferenza passante per un punto assegnato 12
2.3 Circonferenza con centro in P e raggio dato 14
2.4 Circonferenza per 3 punti 15
2.5 Fascio di circonferenze 16

3 La Parabola **17**
3.1 Parabola di vertice V passante per P 17
3.2 Parabola conoscendo fuoco e direttrice 17
3.3 Retta tangente ad una parabola per P 18
3.4 Parabola passante per 3 punti assegnati 19
3.5 Intersezione tra una retta ed una parabola 20
3.6 Intersezione tra due parabole 21
3.7 Parabola conoscendo vertice e direttrice 22
3.8 Parabola conoscendo vertice e fuoco 22

4 L'Ellisse **25**
4.1 Ellisse per due punti 25
4.2 Intersezione tra ellisse e retta 26

5 L'iperbole **27**
5.1 Iperbole passante per due punti 27

6 Il Triangolo **29**
6.1 Triangolo individuato da tre punti 29
6.2 L'area del triangolo 30
6.3 Baricentro 30
6.4 Ortocentro 30
6.5 Lunghezza mediana 32
6.6 Lunghezza altezza 33

Capitolo 1

Il piano cartesiano e la retta

1.1 Intersezione tra due rette

Consideriamo:

$$y = m_1 x + q_1$$

$$y = m_2 x + q_2$$

Le rette sono incidenti (si incontrano in un punto) se hanno coefficienti angolari diversi . In tal caso per trovare l'intersezione mettiamo a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = m_1 x + q_1 \\ y = m_1 2x + q_2 \end{cases}$$

Tale sistema deve essere risolto rispetto alle variabili x e y coordinate del punto. Si ha risolvendo per confronto:

$$m_1 x + q_1 = m_1 2x + q_2$$

$$x(m_1 - m_2) = q_2 - q_1$$

$$x = \frac{q_2 - q_1}{m_1 - m_2}$$

Sostituendo nella

$$y = m_1 \frac{q_2 - q_1}{m_1 - m_2} + q_1$$

Se $m_1 = m_2$ e $q_1 = q_2$ le rette sono coincidenti;
Se $m_1 = m_2$ e $q_1 \neq q_2$ le rette sono parallele;

1.2 Retta passante per due punti

Determinare la retta passante per due punti dati.

L'equazione della retta passante per due punti é:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Dove:

$$P_1 = (x_1, y_1) \wedge P_2 = (x_2, y_2)$$

Sviluppando si ha:

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$x(y_2 - y_1) - x_1 y_2 + \cancel{x_1 y_1} = y(x_2 - x_1) - y_1 x_2) + \cancel{y_1 x_1}$$

$$y = x\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Attenzione i due punti non devono essere allineati verticalmente. In tal caso l'equazione della retta sarà:

$$x = x_1$$

1.3 Distanza punto retta

Data una retta generica $y = mx + q$ e un punto generico (x_0, y_0) si ha: Equazione della retta in forma implicita:

$$mx_0 - y_0 + q = 0$$

Da cui:

$$d = \frac{|mx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Se $d = 0$ il punto appartiene alla retta.

1.4 Distanza punto punto

Dati due punti generici $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ si ha:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

1.5 Retta perpendicolare e retta parallela a retta data passanti per un punto dato

Data una generica retta ed un generico punto non appartenente ad essa, determinare la retta parallela e perpendicolare alla retta data passante per detto punto. Sia l'equazione della generica retta:

$$y = mx + q$$

Ed x_0, y_0 le coordinate del generico punto p_0, affinché il punto non appartenga alla retta quest'ultimo dev'essere:

$$y_0 \neq mx_0 + q$$

Cioè, sostituendo x_0, y_0 nell'equazione della retta non deve risultare un'identità. L'equazione del generico fascio proprio di rette per p_0è:

$$y - y_0 = m_p(x - x_0)$$

$$y = m_p x + y_0 - m_p x_0$$

Affinché la retta sia parallela alla retta data deve essere:

$$m_p = m \wedge q_p = y_0 - mx_0$$

Analogamente si ha:

$$y = m_{pp}x + y_0 - m_{pp}x_0$$

Affinché la retta sia perpendicolare alla retta data deve essere:

$$m_{pp} = -\frac{1}{m}$$

$$q_{pp} = y_0 + \frac{1}{m}x_0$$

Se $m = 0$ la retta perpendicolare sarà $x = x_0$

1.6 Fascio di rette improprio

Rappresentare il generico fascio di rette improprio con coefficiente angolare dato. Sia m il coefficiente angolare dato. L'equazione del fascio improprio è:

$$y = mx + q$$

Dove m è fisso e q varia. Al variare di q si ottengono rette parallele fra loro.

1.7 Fascio di rette proprio

Rappresentare il generico fascio di rette proprio il cui centro è nel punto $P_0(x_0, y_0)$ is ha:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

Dove m varia teoricamente tra $-\infty$ e $+\infty$

1.8 Bisettrici tra due rette

Siano $y = m_1x + q_1$ e $y = m_2x + q_2$ due rette generiche. Le due bisettrici sono il luogo di punti equidistanti dalla retta data. Quindi si ha:

$$\frac{|m_1x + q_1 - y|}{\sqrt{m_1^2+1}} = \frac{|m_2x + q_2 - y|}{\sqrt{m_2^2+1}}$$

Sviluppando si ha:

$$\frac{m_1x + q_1 - y}{\sqrt{m_1^2+1}} = \frac{m_2x + q_2 - y}{\sqrt{m_2^2+1}}$$

Ovvero, nel primo caso:

$$x \cdot \left(\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2+1}} - \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2+1}} \right) + \frac{q_1}{\sqrt{m_1^2+1}} - \frac{q_2}{\sqrt{m_2^2+1}} = y \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{m_1^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{m_2^2+1}} \right)$$

$$x \cdot \frac{m_1 \cdot \sqrt{m_2^2+1} - m_2 \cdot \sqrt{m_1^2+1}}{\sqrt{\left(m_1^2+1\right) \cdot \left(m_2^2+1\right)}} + \frac{q_1 \cdot \sqrt{m_2^2+1} - q_2 \cdot \sqrt{m_1^2+1}}{\sqrt{\left(m_1^2\right) \cdot \left(m_2^2+1\right)}} = y \cdot \frac{\sqrt{m_2^2+1} - \sqrt{m_1^2+1}}{\sqrt{\left(m_2^2+1\right) \cdot \left(m_2^2+1\right)}}$$

$$y = x \cdot \frac{m_1 \cdot \sqrt{m_2^2+1} - m_2 \cdot \sqrt{m_1^2+1}}{\sqrt{m_1^2+1} - \sqrt{m_2^2+1}} + \frac{q_1 \cdot \sqrt{m_2^2+1} - q_2 \cdot \sqrt{m_1^2+1}}{\sqrt{m_2^2+1} - \sqrt{m_1^2+1}}$$

E nel secondo caso:

$$x \cdot \left(\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2+1}} + \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2+1}} \right) + \frac{q_1}{\sqrt{m_1^2}} + \frac{q_2}{\sqrt{m_2^2}} = \frac{y}{\sqrt{m_2^2}} + \frac{y}{\sqrt{m_1^2}}$$

$$x \cdot \frac{m_1 \cdot \sqrt{m_1^2+1} + m_2 \cdot \sqrt{m_1^2+1}}{\sqrt{\left(m_1^2+1\right) + \left(m_2^2+1\right)}} + \frac{q_1 \cdot \sqrt{m_2^2+1} + q_2\sqrt{m_1^2+1}}{\sqrt{m_1^2+1} + \sqrt{m_2^2+1}} = y \cdot \left(\frac{\sqrt{m_1^2+1} + \sqrt{m_2^2+1}}{\sqrt{\left(m_1^2+1\right) + \left(m_2^2+1\right)}} \right)$$

$$y = x \cdot \frac{m_1 \cdot \sqrt{m_1^2+1} + m_2 \cdot \sqrt{m_1^2+1}}{\sqrt{m_1^2+1} + \sqrt{m_2^2+1}} + \frac{q_1 \cdot \sqrt{m_2^2+1} + q_2 \cdot \sqrt{m_1^2+1}}{\sqrt{m_1^2+1} + \sqrt{m_2^2+1}}$$

Capitolo 2

La circonferenza

2.1 Intersezione tra due circonferenze

Determinare i punti di intersezione di due circonferenze.
Date le equazioni di due circonferenze generiche:

$$x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Per ottenere le intersezioni occorre mettere tali equazioni a sistema. Si ottiene un sistema nelle incognite x e y:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_2x + b_1y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Eliminando i termini di secondo grado sottraendo la seconda equazione alla prima si ottiene:

$$\begin{cases} (a_1 - a_2) \cdot x + (b_1 - b_2) \cdot y + c_1 - c_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo x supponendo $a_1 - a_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} x = \frac{c_2 - c_1 + y \cdot (b_2 - b_1)}{a_1 - a_2} \\ \left[\frac{c_2 - c_1 + y \cdot (b_2 - b_1)}{a_1 - a_2}\right]^2 + y^2 + a_1 \cdot \frac{c_2 + c_1 + y \cdot (b_2 - b_1)}{a_1 - a_2} + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

Si ottiene così:

$$\begin{cases} x = \frac{c_2-c_1+y\cdot(b_2-b_1)}{a_1-a_2} \\ \frac{(c_2-c_1)^2+y^2\cdot(b_2-b_1)^2+2\cdot(c_2-c_1)\cdot y\cdot(b_2-b_1)}{(a_1-a_2)^2} + y^2 + a_1 \cdot \frac{c_2-c_1+y\cdot(b_2-b_1)}{a_1-a_2} + b_1y + c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{c_2-c_1+y\cdot(b_2-b_1)}{a_1-a_2} \\ y^2 \cdot \left[\frac{(b_2-b_1)^2}{(a_1-a_2)^2} + 1\right] + y \cdot \left[\frac{2\cdot(c_2-c_1)\cdot(b_2-b_1)}{(a_1-a_2)} + \frac{(b_2-b_1)}{(a_1-a_2)} \cdot a_1 + b_1\right] + \frac{(c_2-c_1)^2}{(a_1-a_2)^2} + a_1 \cdot \frac{(c_2-c_1)}{(a_1-a_2)} + c_1 = 0 \end{cases}$$

Dopo aver risolto la seconda equazione rispetto ad y si sostituiscono i valori trovati (se esistenti) nella prima equazione, determinando così i corrispondenti valori di x. Ricavando y si ottiene (avendo $b_1 - b_2 \neq 0$):

$$\begin{cases} y = \frac{c_2-c_1+(a_2-a_1)\cdot x}{b_1-b_2} \\ x^2 \cdot \left[\frac{(c_2-c_1)+(a_2-a_1)\cdot x}{b_1-b_2}\right]^2 + a_1x + b_1 \cdot \frac{(c_2-c_1)+(a_2-a_1)\cdot x}{b_1-b_2} + c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{c_2-c_1+(a_2-a_1)\cdot x}{b_1-b_2} \\ x^2 \cdot \frac{(c_2-c_1)^2+(a_2-a_1)^2\cdot x^2+2\cdot(c_2-c_1)\cdot(a_2-a_1)\cdot x}{(b_1-b_2)^2} + a_1x + b_1 \cdot \frac{(c_2-c_1)+(a_2-a_1)\cdot x}{b_1-b_2} + c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{c_2-c_1+(a_2-a_1)\cdot x}{b_1-b_2} \\ x^2 \cdot \left[1 + \frac{(a_2-a_1)^2}{(b_2-b_1)^2}\right] + x \cdot \left[\frac{2\cdot(c_2-c_1)\cdot(a_2-a_1)\cdot x}{(b_1-b_2)^2} + a_1 + \frac{(a_2-a_1)}{(b_1-b_2)} \cdot b_1\right] + \frac{(c_2-c_1)}{(b_1-b_2)} + b_1 \cdot \frac{(c_2-c_1)}{(b_1-b_2)} + c_1 = 0 \end{cases}$$

Dopo aver risolto la seconda equazione rispetto ad x si sostituiscono i valori trovati (se esistono) nella prima equazione, determinando così i corrispondenti valori di y.

2.2 Retta tangente ad una circonferenza passante per un punto assegnato

Data una generica circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ determinare la retta tangente passante per il punto:

$$P(x_0, y_0)$$

Il problema consiste nel trovare tra tutte le rette passanti per il punto P quella tangente alla circonferenza , questa situazione si verifica quando la

distanza tra il centro del cerchio e la retta considerata è uguale al raggio.
Innanzitutto ricaviamo il fascio di rette per P

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - y_0 = mx - mx_0$$

$$mx - y + y_0 - mx_0 = 0$$

Pongo la distanza tra r e P uguale al raggio:

$$d(r, p) = raggio$$

Da cui ottengo:

$$\frac{\left| m\left(-\frac{a}{2}\right) - \left(-\frac{b}{2}\right) + y_0 - mx_0 \right|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

Risolvo:

$$\left| -\frac{ma}{2} + \frac{b}{2} + y_0 - mx_0 \right|^2 = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \right) \cdot \left(m^2+1\right)$$

Per eseguire il quadrato, tratto il quadrinomio come se fosse un binomio dove A e B rappresentano rispettivamente:

$$A = \left(\frac{b}{2} - \frac{ma}{2} \right)$$

$$B = (y_0 - mx_0)$$

Si ha:

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$$

Quindi:

$$\left[\left(\frac{b}{2} - \frac{ma}{2} \right) + (y_0 - mx_0) \right]^2 = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \right) \cdot \left(m^2+1\right)$$

$$\left(\frac{b^2}{4} + \frac{m^2a^2}{4} - \frac{mab}{2} \right) + \left(y_0^2 + m^2x_0^2 + 2mx_0y_0\right) + 2\left(\frac{b}{2} - \frac{-ma}{2} \right) \cdot (y_0 - mx_0) = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \right) \cdot \left(m^2+1\right)$$

Sviluppando si ottiene:

$$\frac{b^2}{4}+\frac{m^2a^2}{4}-\frac{mab}{2}+y_0^2+m^2x_0^2-2mx_0y_0+by_0-mbx_0-may_0+m^2ax_0=\frac{a^2}{4}\frac{b^2}{4}-c+m^2\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c\right)$$

Si tratta di una equazione di secondo grado nell'incognita m; quindi ordino rispetto ad m ed ottengo:

$$m^2\left(\frac{c-b^2}{4}+x_0^2+ax_0\right)+m\left(-\frac{ab}{2}-2x_0y_0-bx_0-ay_0\right)+y_0^2+by_0+c-\frac{a^2}{4}=0$$

I due valori di m che si ottengono dalla soluzione di detta equazione costituiscono (se esistono) i coefficienti angolari delle rette tangenti alla circonferenza.
Inoltre si ha:

$$y=mx-mx_0+y_0$$

Da cui:

$$q=y_0-mx_0$$

2.3 Circonferenza con centro in P e raggio dato

Determinare la circonferenza di raggio r con centro in $P(x_0;y_0)$. L'equazione della circonferenza sarà:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

Sviluppando e ordinando:

$$x^2+x_0^2-2xx_0+y^2+y_0^2-2yy_0=r^2$$

$$x^2+y^2-2xx_0-2yy_0+x_0^2+y_0^2=r^2$$

Si ha che:

$$a=-2x_0$$

$$b=-2y_0$$

$$c=x_0^2+y_0^2-r^2$$

2.4 Circonferenza per 3 punti

Determinare la circonferenza passante per tre punti:
$P_1(x_1; y_1)$ $P_2(x_2; y_2)$ $P_3(x_3; y_3)$
L'equazione generica della circonferenza è:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Impostiamo il passaggio per i punti P_1, P_2 e P_3:

$$x_1^2 + y_1^2 + ax_1 + by_1 + c = 0$$

$$x_2^2 + y_2^2 + ax_2 + by_2 + c = 0$$

$$x_3^2 + y_3^2 + ax_3 + by_3 + c = 0$$

Si ottiene un sistema di tre equazioni nelle incognite a, b e c.
Ordiniamo il sistema:

$$ax_1 + by_1 + c = -x_1^2 - y_1^2$$

$$ax_2 + by_2 + c = -x_2^2 - y_2^2$$

$$ax_3 + by_3 + c = -x_3^2 - y_3^2$$

Matricialmente si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -x_1^2 & -y_1^2 \\ -x_2^2 & -y_2^2 \\ -x_3^2 & -y_3^2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Occorre verificare che i tre punti non siano allineati.
La condizione di allineamento è:

$$detA = 0$$

Cioè:

$$det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

2.5 Fascio di circonferenze

Rappresentare il fascio di circonferenze con centro nel punto $P_0(x_0; y_0)$.
L'equazione generica è:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Il centro della circonferenza deve essere nel punto assegnato P_0.
Le generiche coordinate della circonferenza sono:

$$C\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}\right)$$

Dobbiamo quindi imporre:

$$-\frac{a}{2} = x_0 \quad -\frac{b}{2} = y_0$$

Da cui si ricava:

$$a = -2x_0 \quad b = -2y_0$$

Il raggio r risulta:

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{\frac{4x_0^2}{4} + \frac{4y_0^2}{4} - c} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - c}$$

Deve essere:

$$x_0^2 + y_0^2 - c0 \geq 0$$

Quindi:

$$c \leq x_0^2 + y_0^2$$

Al variare di c, tenendo conto delle condizioni determinare, si ottengono circonferenze concentriche con centro nel punto assegnato P_0.

Capitolo 3

La Parabola

3.1 Parabola di vertice V passante per P

Determinare la parabola di vertice $V(x_1; y_1)$ e passante per il punto $P(x_1; y_1)$. L'equazione della parabola generica è:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Imponiamo ora il passaggio per P e per V.Imponiamo inoltre che V sia il vertice di tale parabola.

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \\ -\frac{b}{2a} = x_0 \\ y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c \end{cases}$$

Matricialmente si ha $A \cdot x = b$, dove:

$$A = \begin{Bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ 2x_0 & 1 & 0 \\ x_0^2 & x_0 & 1 \end{Bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

3.2 Parabola conoscendo fuoco e direttrice

Data l'equazione della direttrice $y = a$ e le coordinate del fuoco $F(x_f; y_f)$, determinare l'equazione della parabola.

Sia $P(x;y)$ un generico punto del piano, per trovare l'equazione della parabola bisogna imporre che sia equidistante dal fuoco e dalla direttrice.
Scriviamo l'equazione della direttrice in modo implicito: $y_a = 0$. Quindi otteniamo:

$$d(P,d) = \frac{|y_a|}{1} = |y_a|$$

$$d(P,d) = \sqrt{\left(x - x_f\right)^2 + \left(y - y_f\right)^2}$$

Ora imponiamo cje le due distanze siano uguali

$$|y - a| = \sqrt{\left(x - x_f\right)^2 + \left(y - y_f\right)^2}$$

Ora sviluppiamo i calcoli per ottenere l'equazione della parabola:

$$(y-a)^2 = \left(x - x_f\right)^2 + \left(y - y_f\right)^2$$

$$\cancel{y^2} - 2 \cdot a \cdot y + a^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot x_f + x_f^2 + \cancel{y^2} - 2 \cdot y \cdot y_f + y_f^2$$

$$2yy_f - 2ay = x^2 - 2xx_f + x_f^2 + y_f^2 - a^2$$

$$2y\left(y_f - a\right) = x^2 - 2xx_f + x_f^2 + y_f^2 - a^2$$

$$y = x^2 \cdot \frac{1}{2\left(y_f - a\right)} - x \cdot \frac{\cancel{2}x_f}{\cancel{2}\left(y_f - a\right)} + \frac{x_f^2 + y_f^2 - a^2}{2 \cdot \left(y_f - a\right)}$$

3.3 Retta tangente ad una parabola per P

Data una generica parabola determinare la retta tangente passante per un punto dato $P(x_0; y_0)$. L'equazione generica della parabola è:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Determiniamo ora il fascio di rette proprio passante per P:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

Per determinare la retta tangente occorre mettere a sistema l'equazione della parabola e quella del fascio, ed imporre la condizione di tangenza, ovvero Δ

pari a zero. $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + y_0 - mx_0 \end{cases}$
Risolvendo per confronto si ottiene:

$$ax^2 + bx + c = mx + y_0 - mx_0$$

Ordinando si ottiene l'equazione risolvente, di secondo grado:

$$ax^2 + x(b - m) + c + mx_0 - y_0 = 0$$

Imponiamo la condizione di tangenza $\Delta = 0$, poichè il punto di contatto tra le due curve dev'essere unico. Quindi otteniamo:

$$(b - m)^2 - 4a(c + mx_0 - y_0) = 0$$

$$b^2 + m^2 - 2bm - 4ac - 4amx_0 + 4ay_0 = 0$$

Ordinando l'equazione rispetto ad m:

$$m^2 + m(-2b - 4ax_0) + 4ay_0 - 4ac + b^2 = 0$$

Risolvendo tale equazione si determinano (se le tangenti esistono) i valori di m_1 ed m_2.
Si determina quindi:

$$q_1 = y_0 - m_1x_0$$

$$q_2 = y_0 - m_2x_0$$

3.4 Parabola passante per 3 punti assegnati

Determinare la parabola passante per tre punti:
$P_1(x_1; y_1)$ $P_2(x_2; y_2)$ $P_3(x_3; y_3)$
L'equazione generica della parabola è:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Impostiamo il passaggio per i punti P_1, P_2 e P_3:

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$$

$$y_2 = ax_2^2 + bx_2 + c$$

$$y_3 = ax_3^2 + bx_3 + c$$

Si ottiene un sistema di tre equazioni nelle incognite a, b e c.
Ordiniamo il sistema:

$$ax_1^2 + by_1 + c = y_1$$
$$ax_2^2 + by_2 + c = y_2$$
$$ax_3^2 + by_3 + c = y_3$$

Matricialmente si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^2 & x_3 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

Occorre verificare che i tre punti non siano allineati.
La condizione di allineamento è:

$$det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

3.5 Intersezione tra una retta ed una parabola

Data la parabola, di equazione generica:

$$y = ax^2 + bx + c$$

E la retta generica:

$$y = mx + q$$

Determinare i punti di intersezione tra le due curve.

Per determinare i punti di intersezione (se esistono) occorre mettere a sistema le equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases}$$

Risolviamo per confronto:

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ ax^2 + bx + c = mx + q \end{cases}$$

Risolvendo la seconda equazioni si ottiene:

$$ax^2 + x(b - m) + c - q = 0 \qquad [1]$$

Le soluzioni x_1 ed x_2 sostituite nella prima equazione forniscono le coordinate di y:

$$y_1 = mx_1 + q$$

$$y_2 = mx_2 + q$$

Le due curve si intersecano se l'equazione [1] ha soluzioni, ovvero se il suo discriminante è maggiore o uguale a zero:

$$(b - m)^2 - 4a(c - q) \geq 0$$

In particolare la retta e la parabola sono tangenti qualora i due punti di intersezione coincidono, ovvero il discriminante è nullo.

3.6 Intersezione tra due parabole

Siano $y = a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ e $y = a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ le generiche equazioni delle parabole.
Per determinare i punti di intersezione occorre mettere a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \\ y = a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo per confronto si ottiene:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

Riordiniamo rispetto alla variabile x:

$$x^2 \cdot (a_1 - a_2) + x \cdot (b_1 - b_2) + c_1 - c_2 = 0$$

Le soluzioni di detta equazione (se esistono, ovvero se il suo delta Δ è maggiore o uguale a 0) sostituiscono le coordinate x_1 e x_2 dei punti di intersezione P_1 e P_2. Per determinare y_1 e y_2 occorre sostituire x_1 o x_2 rispettivamente nella prima o nella seconda parabola.

$$y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$$

$$y_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$$

Se l'equazione di secondo grado non fornisce soluzioni, significa che le due parabole non hanno punti in comune.

3.7 Parabola conoscendo vertice e direttrice

Determinare l'equazione della parabola avente vertice $V(x_V; y_V)$ e direttrice di equazione $y = a$.
La parabola è il luogo geometrico dei punti di un piano equidistanti da un punto fisso F (detto fuoco) e da una retta data d (detta direttrice).
Il punto V (vertice) è il punto medio del segmento $\overline{FK}$, pertanto il fuoco F ed il vertice V hanno ascissa uguale, infatti:

$$x_F = x_V$$

Mentre le ordinate sono legate dalla seguente relazione:

$$y_F = \frac{y_F + y_K}{2} = \frac{y_F + a}{2}$$

Da cui ricaviamo:

$$2y_V = y_F + a \rightarrow y_F = 2y_V - a$$

Conosciamo ora l'equazione della direttrice e le coordinate del fuoco F; facendo quindi riferimento al problema precedente, possiamo determinare i coefficienti a, b, c

3.8 Parabola conoscendo vertice e fuoco

Determinare l'equazione della parabola con asse $\parallel$ all'asse delle ordinate di vertice $V(x_V; y_V)$ e il fuoco $F(x_f; y_f)$. Ricordando che il vertice è il punto medio del segmento FK possiamo determinare l'espressione della direttrice:

$$\frac{y_k + y_f}{2} = y_V$$

$$y_k + y_f = 2y_V$$

$$y_k = 2y_V - y_f = a$$

L'equazione della direttrice risulta quindi:

$$y = a$$

Conosciamo ora l'equazione della direttrice e le coordinate del fuoco F; facendo quindi riferimento al problema precedente possiamo determinare i coefficienti a, b, c:

$$a = \frac{1}{2\left(y_f - a\right)} \quad b = \frac{x_f}{\left(y_f - a\right)} c = \frac{x_f^2 + y_f^2 - a^2}{2\left(y_f - a\right)}$$

Capitolo 4

L'Ellisse

4.1 Ellisse per due punti

L'equazione generica di un'ellisse con centro nell'origine degli assi è la seguente:

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Imponendo l'appartenenza di P_1 e P_2 all'ellisse otteniamo:

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} = \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} = \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Si ottiene un sistema in due equazioni e due incognite (i parametri a e b). Risolvendo per confronto si avrà:

$$\begin{cases} b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2 \\ b^2x_2^2 + a^2y_2^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = b^2x_2^2 + a^2y_2^2 \\ b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 \cdot \left(x_1^2 - x_2^2\right) = a^2 \cdot \left(y_2^2 - Y_1^2\right) \\ b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = a^2 \cdot \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} \\ a^2 \cdot \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} \cdot x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = a^2 \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} \\ \left[y_1^2 + x_1^2 \cdot \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 - x_2^2}\right] \cdot \cancel{a^2} = \cancel{a^2}b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} \\ b^2 = y_1^2 + x_1^2 \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} \\ b^2 = \frac{y_1^2\left(x_1^2 - x_2^2\right) + x_1^2 y_2^2 - x_1^2 y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \frac{y_1^2\left(x_1^2 - x_2^2\right) + x_1^2\left(y_2^2 - y_1^2\right)}{x_1^2 - x_2^2} \cdot \frac{x_1^2 - x_2^2}{y_2^2 - y_1^2} \\ b^2 = \frac{\cancel{y_1^2 x_1^2} - y_1^2 x_2^2 + y_1^2 x_2^2 - \cancel{y_1^2 x_1^2}}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{x_1^2 y_2^2 - y_1^2 x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} \end{cases}$$

Ed il risultato finale è:

$$\begin{cases} a^2 = \frac{x_1^2 y_2^2 - y_1^2 x_2^2}{y_2^2 - y_1^2} \\ b^2 = \frac{x_1^2 y_2^2 - y_1^2 x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} \end{cases}$$

4.2 Intersezione tra ellisse e retta

Determinare l'intersezione tra l'ellisse e la retta.
Occorre mettere a sistema le due equazioni.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + q \end{cases}$$

Risolviamo il sistema per sostituzione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+q)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x^2 + a^2\left(m^2x^2 + q^2 + 2mqx\right) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2 + a^2m^2x^2 + a^2q^2 + 2a^2mqx = a^2b^2$$

$$x^2\left(b^2 + a^2m^2\right) 2a^2mqx + a^2q^2 - a^2b^2 = 0$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado si determinano (se esistenti) i valori x_1 e x_2 delle coordinate dei punti di intersezione. Per determinare le coordinate y basta sostituire x_1 e x_2 nell'equazione della retta:

$$y_1 = mx_1 + q$$

$$y_2 = mx_2 + q$$

Capitolo 5

L'iperbole

5.1 Iperbole passante per due punti

Determinare l'equazione dell'iperbole (fuochi sull'asse x) passante per i punti:

$$P_1(x_1, y_1) \quad e \quad P_2(x_2, y_2)$$

L'equazione generica dell'iperbole è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Imponiamo il passaggio dell'iperbole per i due punti ottenendo un sistema con due equazioni e due incognite:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Risolviamo adesso rispetto alle incognite $\frac{1}{a^2}$ e $\frac{1}{b^2}$. Risolviamo il sistema con il metodo di Cramer. In forma matriciale si ottiene:

$$A = \begin{bmatrix} x_0^2 & -y_0^2 \\ x_1^2 & -y_1^2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x = \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{b^2}}$$

Determino:

$$detA = -x_0^2 \cdot y_1^2 - \left(-x_1^2 \cdot y_0^2\right) = x_1^2 \cdot y_0^2 - x_0^2 \cdot y_1^2$$

$$det\Delta_{\frac{1}{a^2}} = \begin{bmatrix} 1 & -y_0^2 \\ 1 & -y_1^2 \end{bmatrix} = -y_1^2 - \left(-y_0^2\right) = y_0^2 - y_1^2$$

$$det\Delta_{\frac{1}{b^2}} = \begin{bmatrix} x_0^2 & 1 \\ x_1^2 & 1 \end{bmatrix} = x_0^2 - x_1^2$$

Si ottiene:

$$\frac{1}{a^2} = \frac{det\Delta_{\frac{1}{a^2}}}{detA} = \frac{y_0^2 - y_1^2}{x_1^2 \cdot y_0^2 - x_0^2 \cdot y_1^2}$$

$$[\frac{1}{b^2} = \frac{det\Delta_{\frac{1}{b^2}}}{detA} = \frac{x_0^2 - x_1^2}{x_1^2 \cdot y_0^2 - x_0^2 \cdot y_1^2}$$

Da cui:

$$a = \sqrt{\frac{x_1^2 \cdot y_0^2 - x_0^2 \cdot y_1^2}{y_0^2 - y_1^2}}$$

$$b = \sqrt{\frac{x_1^2 \cdot y_0^2 - x_0^2 \cdot y_1^2}{x_0^2 - x_1^2}}$$

Capitolo 6

Il Triangolo

6.1 Triangolo individuato da tre punti

Dati tre punti $P_1\,(x_1, y_2)$, $P_2\,(x_2, y_2)$, $P_3\,(x_1, y_2)$ determinare il perimetro del triangolo individuato dai tre punti

i tre punti non devono essere allineati, altrimenti non possono individuare un triangolo. i punti sono allineati se:

$$detA = det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$$

nel caso i punti individuino un triangolo calcoliamo:

$$P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$P_1P_3 = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}$$

$$P_2P_3 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

si ha:

$$2p = \overline{P_1P_2} + \overline{P_1P_3} + \overline{P_2P_3}$$

6.2 L'area del triangolo

Dati tre punti $P_1\,(x_1, y_2)$, $P_2\,(x_2, y_2)$, $P_3\,(x_1, y_2)$ determinare l'area del triangolo individuato dai tre punti

dopo aver individuato il perimetro il valore dell'ara può essere calcolato con la formula di Erone:

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

dove:
$a = P_1P_2$
$b = P_1P_3$
$c = P_2P_3$
e p è il semiperimetro

6.3 Baricentro

Dati tre punti $P_1\,(x_1, y_2)$, $P_2\,(x_2, y_2)$, $P_3\,(x_1, y_2)$ determinare il baricentro del triangolo individuato dai tre punti
il baricentro è il punto di intersezione delle mediane.

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

6.4 Ortocentro

Dati tre punti $P_1\,(x_1, y_2)$, $P_2\,(x_2, y_2)$, $P_3\,(x_1, y_2)$ determinare l'ortocentro del triangolo individuato dai tre punti

L'ortocentro è il punto di intersezione tra le tre altezze del triangolo. occorre quindi determinare almeno due altezze e determinarne l'intersezione.
L'altezza è la retta $\perp$ ad un lato passante per il vertice opposto

determiniamo P_2H

$$m_{P_1P_3} = \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$$

$$m \perp_{P_1P_3} = -\frac{1}{m_{P_1P_3}}$$

$$y - y_2 = m_{P_1P_3}(x - x_2)$$

$$y = m_{P_1P_3}x + y_2 - m_{P_1P_3}x_2$$

$$m_1 = m_{P_1P_3}$$

$$q_1 = y_2 - m_{P_1P_3}x_2$$

determiniamo P_3K

$$m_{P_1P_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m \perp_{P_1P_2} = -\frac{1}{m_{P_1P_2}}$$

$$y - y_3 = m_{P_1P_2}(x - x_3)$$

$$y = m_{P_1P_2}x + y_3 - m_{P_1P_2}x_3$$

$$m_2 = m_{P_1P_2}$$

$$q_2 = y_3 - m_{P_1P_2}x_3$$

Dobbiamo ora trovare l'intersezione delle due rette:

$$\begin{cases} y = m_1x + q_1 \\ y = m_2x + q_2 \end{cases}$$

risolviamo per confronto:

$$m_1x + q_1 = m_2x + q_2$$

$$y_0 = m_1x_0 + q_1$$

$$x_0 = \frac{q_2 - q_1}{m_1 - m_2}$$

6.5 Lunghezza mediana

Determinare la lunghezza della mediana relativa al lato $\overline{AB}$

$$M_{AB} = \left(\frac{x_A + x_b}{2}, \frac{y_a - y_B}{2}\right)$$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$d = \overline{CM} = \sqrt{(y_C - y_M)^2 + (x_C - x_M)^2}$$

6.6 Lunghezza altezza

Determinare la lunghezza dell'altezza relativa al lato $\overline{AB}$

Determinare la retta HC:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_0}{x_1}$$