1. Il piano cartesiano e la retta

Problema 1.1. Intersezione tra due rette

Consideriamo

$$y = m_1 x + q_1$$

$$y = m_2 x + q_2$$

Le rette sono incidenti (si incontrano in un punto) se hanno coefficienti angolari diversi . In tal caso per trovare l'intersezione mettiamo a sistema le due equazioni

$$\begin{cases} y = m_1 x + q_1 \\ y = m_2 x + q_2 \end{cases}$$

tale sistema deve essere risolto rispetto alle variabili x e y coordinate del punto. Si ha risolvendo per confronto

$$m_1 x + q_1 = m_2 x + q_2$$

$$x(m_1 - m_2) = q_2 - q_1$$

$$x = \frac{q_2 - q_1}{m_1 - m_2}$$

Sostituendo nella

$$y = m_1 \frac{q_2 - q_1}{m_1 - m_2} + q_1$$

Se $m_1 = m_2$ e $q_1 = q_2$ le rette sono coincidenti
Se $m_1 = m_2$ e $q_1 \neq q_2$ le rette sono parallele

Problema 1.2. Retta passante per due punti

Determinare la retta passante per due punti dati.
l'equazione della retta per due punti è

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

dove

$$P_1 = (x_1, y_1)$$

e

$$P_2 = (x_2, y_2)$$

Sviluppando si ha

$$(x - x_1)(y_2 - y_1) = (y - y_1)(x_2 - x_1)$$

$$x(y_2 - y_1) - x_1 y_2 + \cancel{x_1 y_1} = y(x_2 - x_1) - y_1 x_2 + \cancel{y_1 x_1}$$

$$y = x\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

Attenzione i due punti non devono essere allineati verticalmente. In tal caso l’equazione della retta sarà:

$$x = x_1$$

Problema 1.3. Distanza punto retta

Data una generica retta $y = mx + q$ e un generico punto (x_0, y_0) si ha

Equazione retta in forma implicita

$$mx_0 - y_0 + q = 0$$

da cui

$$d = \frac{|mx_0 - y_0 + q|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

se $d = 0$ il punto appartiene alla retta !!!!

Problema 1.4. Distanza punto punto

Dati due generici punti $p_1(x_1, y_1)$ e $p_2(x_2, y_2)$ si ha

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Problema 1.5. Retta perpendicolare e parallele a retta data passante per un punto assegnato

Data una generica retta ed un generico punto non appartenente ad essa, determinare la retta parallela e perpendicolare alla retta data passante per detto punto

Sia l’equazione della generica retta

$$y = mx + q$$

ed x_0, y_0 le coordinate del generico punto p_0

affinché il punto non appartenga alla retta deve essere

$$y_0 \neq mx_0 + q$$

cioè non deve risultare un'identità sostituendo x_0, y_0 nell'equazione della retta.
L'equazione del generico fascio proprio di rette per p_0 è

$$y - y_0 = m_p(x - x_0)$$

$$y = m_p x + y_0 - m_p x_0$$

affinché la retta sia parallela alla retta data deve essere :

$$m_p = m$$

e

$$q_p = y_0 - mx_0$$

analogamente si ha

$$y = m_{pp} x + y_0 - m_{pp} x_0$$

affinché la retta sia perpendicolare alla retta data deve essere

$$m_{pp} = -\frac{1}{m}$$

$$q_{pp} = y_0 + \frac{1}{m} x_0$$

se $m = 0$ la retta perpendicolare sarà $x = x_0$

Problema 1.6. Fascio di rette improprio

Rappresentare il generico fascio di rette improprio con pendenza assegnata. Sia m la pendenza assegnata (coefficiente angolare). L'equazione del fascio improprio è :

$$y = mx + q$$

dove m è fisso e q varia. Al variare di q si ottengono rette parallele fra loro.

Problema 1.7. Fascio di rette proprio

Rappresentare il generico fascio di rette proprio il cui centro stella è nel punto $p_0(x_0, y_0)$ si ha:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

dove m varia teoricamente tra $-\infty$ e $+\infty$.

Problema 1.8. Bisettrici tra due rette

Siano $y = m_1 x + q_1$ e $y = m_2 x + q_2$ due rette generiche. Le due bisettrici sono il luogo di punti equidistanti dalla retta data. Quindi si ha:

$$\frac{|m_1 x + q_1 - y|}{\sqrt{m_1^2 + 1}} = \frac{|m_2 x + q_2 - y|}{\sqrt{m_2^2 + 1}}$$

Sviluppando si ha:

$$\frac{m_1 x + q_1 - y}{\sqrt{m_1^2 + 1}} = \pm \frac{m_2 x + q_2 - y}{\sqrt{m_2^2 + 1}}$$

ovvero nel primo caso:

$$x \cdot \left(\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2 + 1}} - \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2 + 1}} \right) + \frac{q_1}{\sqrt{m_1^2 + 1}} - \frac{q_2}{\sqrt{m_2^2 + 1}} = y \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{m_1^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{m_2^2 + 1}} \right)$$

$$x \cdot \frac{m_1 \cdot \sqrt{m_2^2 + 1} - m_2 \cdot \sqrt{m_1^2 + 1}}{\sqrt{\left(m_1^2 + 1\right) \cdot \left(m_2^2 + 1\right)}} + \frac{q_1 \cdot \sqrt{m_2^2 + 1} - q_2 \cdot \sqrt{m_1^2 + 1}}{\sqrt{\left(m_1^2 + 1\right) \cdot \left(m_2^2 + 1\right)}} = y \cdot \frac{\sqrt{m_2^2 + 1} - \sqrt{m_1^2 + 1}}{\sqrt{\left(m_1^2 + 1\right) \cdot \left(m_2^2 + 1\right)}}$$

$$y = x \cdot \frac{m_1 \cdot \sqrt{m_2^2 + 1} - m_2 \cdot \sqrt{m_1^2 + 1}}{\sqrt{m_2^2 + 1} - \sqrt{m_1^2 + 1}} + \frac{q_1 \cdot \sqrt{m_2^2 + 1} - q_2 \cdot \sqrt{m_1^2 + 1}}{\sqrt{m_2^2 + 1} - \sqrt{m_1^2 + 1}}$$

nel secondo caso:

$$x \cdot \left(\frac{m_1}{\sqrt{m_1^2 + 1}} + \frac{m_2}{\sqrt{m_2^2 + 1}} \right) + \frac{q_1}{\sqrt{m_1^2 + 1}} + \frac{q_2}{\sqrt{m_2^2 + 1}} = \frac{y}{\sqrt{m_2^2 + 1}} + \frac{y}{\sqrt{m_1^2 + 1}}$$

$$x \cdot \frac{m_1 \cdot \sqrt{m_1^2 + 1} + m_2 \cdot \sqrt{m_1^2 + 1}}{\sqrt{\left(m_1^2 + 1\right) + \left(m_2^2 + 1\right)}} + \frac{q_1 \cdot \sqrt{m_2^2 + 1} + q_2 \sqrt{m_1^2 + 1}}{\sqrt{\left(m_1^2 + 1\right) + \left(m_2^2 + 1\right)}} = y \cdot \left(\frac{\sqrt{m_1^2 + 1} + \sqrt{m_2^2 + 1}}{\sqrt{\left(m_1^2 + 1\right) + \left(m_2^2 + 1\right)}} \right)$$

$$y = x \cdot \frac{m_1 \cdot \sqrt{m_1^2+1} + m_2 \cdot \sqrt{m_1^2+1}}{\sqrt{m_1^2+1}+\sqrt{m_2^2+1}} + \frac{q_1 \cdot \sqrt{m_2^2+1} + q_2 \sqrt{m_1^2+1}}{\sqrt{m_1^2+1}+\sqrt{m_2^2+1}}$$

Occorre controllare se $\sqrt{m_2^2+1} = \sqrt{m_1^2+1}$ nel qual caso una delle bisettrici risulti verticale. Devo trovare quindi la coordinata X del punto di intersezione. Risolvo il seguente sistema per confronto:

$$\begin{cases} y = m_1 x + q_1 \\ y = m_2 x + q_2 \end{cases} \qquad m_1 x + q_1 = m_2 x + q_2 \qquad x\left(m_1 - m_2\right) = q_1 - q_2 \qquad x = \frac{q_2 - q_1}{m_1 - m_2}$$

2. La circonferenza

Problema 2.1. Intersezione tra due circonferenze

Determinare i punti di intersezione di due circonferenze

Date le equazioni di due circonferenze generiche:

1ª circonferenza

$$x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

2ª circonferenza

$$x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

Per ottenere le intersezioni occorre mettere tali equazioni a sistema. Si ottiene un sistema nelle incognite x e y.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Eliminando i termini di secondo grado sottraendo la seconda equazione alla prima si ottiene:

$$\begin{cases} \left(a_1 - a_2\right) \cdot x + \left(b_1 - b_2\right) \cdot y + c_1 - c_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo x deve essere $a_1 - a_2 \neq 0$

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_2 - c_1 + y\cdot(b_2 - b_1)}{a_1 - a_2} \\ \left[\dfrac{c_2 - c_1 + y\cdot(b_2 - b_1)}{a_1 - a_2}\right]^2 + y^2 + a_1\cdot\dfrac{c_2 - c_1 + y\cdot(b_2 - b_1)}{a_1 - a_2} + b_1 y + c_1 = 0 \end{cases}$$

Si ottiene così:

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_2 - c_1 + y\cdot(b_2 - b_1)}{a_1 - a_2} \\ \dfrac{(c_2 - c_1)^2 + y^2\cdot(b_2 - b_1)^2 + 2\cdot(c_2 - c_1)\,y\cdot(b_2 - b_1)}{(a_1 - a_2)^2} + y^2 + a_1\cdot\dfrac{c_2 - c_1 + y\cdot(b_2 - b_1)}{a_1 - a_2} + b_1 y + c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_2 - c_1 + y\cdot(b_2 - b_1)}{a_1 - a_2} \\ y^2\cdot\left[\dfrac{(b_2 - b_1)^2}{(a_1 - a_2)^2} + 1\right] + y\cdot\left[\dfrac{2\cdot(c_2 - c_1)\cdot(b_2 - b_1)}{(a_1 - a_2)} + \dfrac{(b_2 - b_1)}{(a_1 - a_2)}\cdot a_1 + b_1\right] + \dfrac{(c_2 - c_1)^2}{(a_1 - a_2)^2} + a_1\cdot\dfrac{(c_2 - c_1)}{(a_1 - a_2)} + c_1 = 0 \end{cases}$$

dopo aver risolto la seconda equazione rispetto ad y si sostituiscono i valori trovati (se esistono) nella prima determinando così i corrispondenti valori di x

Ricavando y si ottiene (deve essere $b_1 - b_2 \neq 0$):

$$\begin{cases} y = \dfrac{c_2 - c_1 + (a_2 - a_1)\cdot x}{b_1 - b_2} \\ x^2\cdot\left[\dfrac{(c_2 - c_1) + (a_2 - a_1)\cdot x}{b_1 - b_2}\right]^2 + a_1 x + b_1\cdot\dfrac{(c_2 - c_1) + (a_2 - a_1)\cdot x}{b_1 - b_2} + c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{c_2 - c_1 + (a_2 - a_1) \cdot x}{b_1 - b_2} \\ x^2 + \dfrac{(c_2 - c_1)^2 + (a_2 - a_1)^2 \cdot x^2 + 2 \cdot (c_2 - c_1) \cdot (a_2 - a_1) \cdot x}{(b_1 - b_2)^2} + a_1 x + b_1 \cdot \dfrac{(c_2 - c_1) + (a_2 - a_1) \cdot x}{b_1 - b_2} + c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{c_2 - c_1 + (a_2 - a_1) \cdot x}{b_1 - b_2} \\ x^2 \cdot \left[1 + \dfrac{(a_2 - a_1)^2}{(b_1 - b_2)^2} \right] + x \cdot \left[\dfrac{2 \cdot (c_2 - c_1) \cdot (a_2 - a_1) \cdot x}{(b_1 - b_2)^2} + a_1 + \dfrac{(a_2 - a_1)}{(b_1 - b_2)} \cdot b_1 \right] + \dfrac{(c_2 - c_1)}{(b_1 - b_2)^2} + b_1 \cdot \dfrac{(c_2 - c_1)}{(b_1 - b_2)} + c_1 = 0 \end{cases}$$

dopo aver risolto la seconda equazione rispetto ad x si sostituiscono i valori trovati (se esistono) nella prima determinando così i corrispondenti valori di y

Problema 2.2. Retta tangente ad una circonferenza passante per un punto assegnato

Data una generica circonferenza $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ determinare la retta tangente per il punto

$$P(x_0, y_0)$$

Il problema consiste nel trovare tra tutte le rette passanti per il punto P quella tangente alla circonferenza , questa situazione si verifica quando la distanza tra il centro del cerchio e la retta considerata è uguale al raggio.

Innanzitutto ricaviamo il fascio di rette per P

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - y_0 = mx - mx_0 \qquad \text{fascio di rette}$$

$$mx - y + y_0 - mx_0 = 0$$

Pongo la distanza tra r e P uguale al raggio

d(r,p)=raggio

da cui ottengo

$$\frac{\left| m\left(-\frac{a}{2}\right) - \left(-\frac{b}{2}\right) + y_0 - mx_0 \right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}$$

risolvo

$$\left|-\frac{ma}{2}+\frac{b}{2}+y_0-mx_0\right|^2=\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c\right)\cdot\left(m^2+1\right)$$

per eseguire il quadrato tratto il quadrinomio come se fosse un binomio dove A e B rappresentano rispettivamente

$$A=\left(\frac{b}{2}-\frac{ma}{2}\right)$$
$$B=\left(y_0-mx_0\right)$$

si ha $\quad (A+B)^2=A^2+B^2+2AB$

$$\left[\left(\frac{b}{2}-\frac{ma}{2}\right)+\left(y_0-mx_0\right)\right]^2=\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c\right)\cdot\left(m^2+1\right)$$

$$\left(\frac{b^2}{4}+\frac{m^2a^2}{4}-\frac{mab}{2}\right)+\left(y_0{}^2+m^2x_0{}^2-2mx_0y_0\right)+2\left(\frac{b}{2}-\frac{-ma}{2}\right)\cdot\left(y_0-mx_0\right)=\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c\right)\cdot\left(m^2+1\right)$$

sviluppando si ottiene:

$$\frac{b^2}{4}+\frac{m^2a^2}{4}-\frac{mab}{2}+y_0{}^2+m^2x_0{}^2-2mx_0y_0+by_0-mbx_0-may_0+m^2ax_0=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c+m^2\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c\right)$$

Si tratta di una equazione di secondo grado nell’incognita m; ordino rispetto ad m ed ottengo

$$m^2\left(\frac{c-b^2}{4}+x_0{}^2+ax_0\right)+m\left(-\frac{ab}{2}-2x_0y_0-bx_0-ay_0\right)+y_0{}^2+by_0+c-\frac{a^2}{4}=0$$

I due valori di m che si ottengono dalla soluzione di detta equazione costituiscono (se esistono) i coefficienti angolari delle rette tangenti alla circonferenza.
Inoltre si ha

$$y=mx-mx_0+y_0$$

da cui

$$q=y_0-mx_0$$

Problema 2.3. Circonferenza con centro in P e raggio dato

Determinare la circonferenza di raggio r con centro in $P(x_0;y_0)$
L’equazione della circonferenza sarà

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

sviluppando e ordinando

$$x^2+x_0{}^2-2xx_0+y^2+y_0{}^2-2yy_0=r^2$$

$$x^2+y^2-2xx_0-2yy_0+x_0{}^2+y_0{}^2-r^2$$

Si ha che

$$a=-2x_0 \qquad b=-2y_0 \qquad c=x_0{}^2+y_0{}^2-r^2$$

Problema 2.4. Circonferenza per tre punti

Determinare la circonferenza passante per tre punti: $P_1(x_1;y_1)$ $P_2(x_2;y_2)$ $P_3(x_3;y_3)$

L'equazione generica della circonferenza e':

$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$

Impostiamo il passaggio per i punti $P_{1,}$ P_2 e P_2

$$x_1^2+y_1^2+ax_1+by_1+c=0$$
$$x_2^2+y_2^2+ax_2+by_2+c=0$$
$$x_3^2+y_3^2+ax_3+by_3+c=0$$

Si ottiene un sistema in tre equazione nelle incognite a,b,c. Ordiniamo il sistema

$$ax_1+by_1+c=-x_1^2-y_1^2$$
$$ax_2+by_2+c=-x_2^2-y_2^2$$
$$ax_3+by_3+c=-x_3^2-y_3^2$$

Matricialmente si ottiene:

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} -x_1^2-y_1^2 \\ -x_2^2-y_2^2 \\ -x_3^2-y_3^2 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Occorre verificare che i tre punti non siano allineati. La condizione di allineamento e' :

$$\det A=0 \qquad \text{cioè} \qquad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_2 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

Problema 2.5. Fascio di circonferenze

Rappresentare il fascio di circonferenze concentriche con centro nel punto $P_0\left(x_0, y_0\right)$

La generica equazione di una circonferenza è:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

Il centro della circonferenza deve essere nel punto assegnato P. Le generiche coordinate della circonferenza sono

$$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$$

Dobbiamo quindi imporre

$$-\frac{a}{2} = x_0 \qquad -\frac{b}{2} = y_0$$

da cui si ricava

$$a = -2 \cdot x_0 \qquad b = -2 \cdot y_0$$

Il raggio r risulta :

$$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c} = \sqrt{\frac{4 \cdot x_0^{\ 2}}{4} + \frac{4 \cdot y_0^{\ 2}}{4} - c} = \sqrt{x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} - c}$$

deve essere

$$x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} - c \geq 0$$

quindi:

$$c \leq x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2}$$

Al variare di c, tenendo conto delle condizioni determinate, si ottengono circonferenze concentriche con centro in P_0 punto assegnato

3. La parabola

Problema 3.1. Parabola di vertice V e passante per P

Determinare la parabola di vertice $V(x_1; y_1)$ e passante per il punto $P(x_1; y_1)$ L'equazione della generica parabola è

$$y = ax^2 + bx + c$$

Imponiamo ora il passaggio per P e per V . Immponiamo inoltre che V è il vertice di tale parabola

$$\begin{cases} y_1 = ax_1^{\ 2} + bx_1 + c \\ -\dfrac{b}{2a} = x_0 \\ y_0 = ax_0^{\ 2} + bx_0 + c \end{cases}$$

Ottengo un sistema nelle incognite a,b,c orinandolo si ottiene :

$$\begin{cases} ax_1^{\ 2} + bx_1 + c = y_1 \\ 2ax_0 + b \qquad = 0 \\ ax_0^{\ 2} + bx_0 + c = y_0 \end{cases}$$

Matricialmente si ha $A \cdot x = b$ dove

$$A = \begin{bmatrix} x_1^{\ 2} & x_1 & 1 \\ 2x_0 & 1 & 0 \\ x_0^{\ 2} & x_0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} y_1 \\ 0. \\ y_0 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Problema 3.2. Parabola conoscendo fuoco e direttrice

Data l'equazione della direttrice y=a e le coordinate del fuoco $F(x_f ; y_f)$ determinare l'equazione della parabola.

Sia $P(x; y)$ un generico punto del piano. Per trovare l'equazione della parabola bisogna imporre che sia equidistante dal fuoco e dalla direttrice.

Scriviamo l'equazione della direttrice in modo implicito: $y - a = 0$ Quindi otteniamo:

$$d(P,d) = \frac{|y-a|}{1} = |y-a|$$
$$d(P,F) = \sqrt{(x-x_f)^2 + (y-y_f)^2}$$

Ora imponiamo che le due distanze siano uguali:

$$|y-a| = \sqrt{(x-x_f)^2 + (y-y_f)^2}$$

Ora sviluppiamo i calcoli per ottenere l'equazione della parabola:

$$(y-a)^2 = (x-x_f)^2 + (y-y_f)^2$$
$$\cancel{y^2} - 2 \cdot a \cdot y + a^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot x_f + x_f^{\ 2} + \cancel{y^2} - 2 \cdot y \cdot y_f + y_f^{\ 2}$$

$$2\cdot y\cdot y_f-2\cdot a\cdot y=x^2-2\cdot x\cdot x_f+x_f{}^2+y_f{}^2-a^2$$
$$2\cdot y\cdot (y_f-a)=x^2-2\cdot x\cdot x_f+x_f{}^2+y_f{}^2-a^2$$
$$y=x^2\cdot\frac{1}{2\cdot(y_f-a)}-x\cdot\frac{\cancel{2}\cdot x_f}{\cancel{2}\cdot(y_f-a)}+\frac{x_f{}^2+y_f{}^2-a^2}{2\cdot(y_f-a)}$$

Quindi si ottiene che:

$$a=\frac{1}{2\cdot(y_f-a)}\qquad b=\frac{x_f}{(y_f-a)}\qquad c=\frac{x_f^2+y_f^2-a^2}{2\cdot(y_f-a)}$$

Con queste tre formule si ottiene l'equazione della parabola: $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$

Prima di fare tutti i calcoli bisogna controllare se il Fuoco appartiene alla direttrice. Questo si fa controllando che: $y_f-a\neq 0$.

Problema 3.3. Retta tangente ad una parabola per P

Data una generica parabola determinare la retta tangente passante per un punto dato $P(X_0;Y_0)$ L'equazione della generica parabola è:

$$y=ax^2+bx+c$$

Determiniamo ora il fascio di rette proprio passante per *P*.

$$y-y_0=m(x-x_0)$$
$$y=mx+y_0-mx_0$$

Per determinare la retta tangente occorre mettere a sistema l'equazione della parabola e quella del fascio ed imporre la condizione di tangenza, ovvero Δ pari a zero.

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=mx+y_0-mx_0 \end{cases}$$

si ottiene risolvendo per confronto

$$ax^2+bx+c=mx+y_0-mx_0$$

ordinando si ottiene l'equazione risolvente che è di secondo grado

$$ax^2+x(b-m)+c+mx_0-y_0=0$$

imponiamo la condizione di tangenza $\Delta=0$, poiché deve essere unico il punto di contatto tra le due curve; si ottiene

$$(b-m)^2-4a(c+mx_0-y_0)=0$$

$$b^2 + m^2 - 2bm - 4ac - 4amx_0 + 4ay_0 = 0$$

ordinando rispetto a *m*

$$m^2 + m(-2b - 4ax_0) + 4ay_0 - 4ac + b^2 = 0$$

Risolvendo tale equazione si determinano (se esistono le tangenti) i valori di m_1 e m_2.

Si determina quindi :

$$q_1 = y_0 - m_1 x_0$$

$$q_2 = y_0 - m_2 x_0$$

Problema 3.4. Parabola passante per tre punti assegnati

Determinare la parabola passante per tre punti dati

$$P_1(x_1 y_1) \qquad P_2(x_2 y_2) \qquad P_3(x_3 y_3)$$

La generica equazione della parabola è:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Imponiamo il passaggio per i punti P1, P2 e P3 della parabola sostituendo le coordinate di tali punti nella generica equazione della parabola

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1^{\ 2} + bx_1 + c \\ y_2 &= ax_2^{\ 2} + by_2 + c \\ y_3 &= ax_3^{\ 2} + by_3 + c \end{aligned}$$

Si ottiene un sistema in tre equazioni e tre incognite a,b,c.
Ordinando il sistema si ottiene:

$$\begin{aligned} ax_1^{\ 2} + bx_1 + c &= y_1 \\ ax_2^{\ 2} + bx_2 + c &= y_2 \\ ax_3^{\ 2} + bx_3 + c &= y_3 \end{aligned}$$

La forma matriciale del sistema risulta essere:

$$A=\begin{pmatrix} x_1^{\ 2} & x_1 & 1 \\ x_2^{\ 2} & x_2 & 1 \\ x_3^{\ 2} & x_3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$Ax=b$$

Occorre verificare che i tre punti non sono allineati.
La condizione di allineamento è:

$$\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}=0$$

Problema 3.5. Intersezione tra una retta e una parabola

Data la generica parabola di equazione:

$$y=ax^2+bx+c$$

e la generica retta:

$$y=mx+q$$

Determinare i punti di intersezione tra le due curve.

Per determinare i punti di intersezione (se esistono) occorre mettere a sistema le equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=mx+q \end{cases}$$

Risolviamo il problema per confronto:

$$\begin{cases} y=mx+q \\ ax^2+bx+c=mx+q \end{cases}$$

Risolvendo la seconda equazione si ottiene:

$$ax^2+x(b-m)+c-q=0 \qquad [1]$$

Le soluzioni x_1 e x_2 sostituite nella prima equazione forniscono le coordinate y:

$$y_1 = mx_1 + q$$
$$y_2 = mx_2 + q$$

le due curve si intersecano se la [1] ha soluzioni, ovvero se il suo discriminante è maggiore od uguale a zero:

$$(b-m)^2 - 4a(c-q) \geq 0$$

In particolare la retta e la parabola sono tangenti qualora i due punti di intersezione coincidono, ovvero il discriminante è nullo.

Problema 3.6. Intersezione tra due parabole

Siano $y = a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ e $y = a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ le generiche equazioni delle parabole. Per determinare i punti di intersezione occorre mettere a sistema le due equazioni:

$$\begin{cases} y = a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \\ y = a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo per confronto si ottiene:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = a_2x^2 + b_2x + c_2$$

Risolviamo rispetto alla variabile “x”:

$$x^2 \cdot (a_1 - a_2) + x \cdot (b_1 - b_2) + c_1 - c_2 = 0$$

Le soluzioni di detta equazione (se esistono, ovvero se il suo delta Δ è maggiore o uguale a 0) costituiscono le coordinate x_1 e x_2 di P_1 e P_2 punti di intersezione.
Per determinare y_1 e y_2 occorre sostituire in una delle due equazioni delle parabole.

$$y_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1 \quad \text{e} \quad y_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2.$$

Se l’equazione di secondo grado non fornisce soluzioni, significa che le due parabole non hanno punti in comune.

Problema 3.7. Parabola conoscendo fuoco e direttrice

Data l’equazione della direttrice y=a e le coordinate del fuoco $F(x_f; y_f)$ determinare l’equazione della parabola.

Sia $P(x; y)$ un generico punto del piano. Per trovare l’equazione della parabola bisogna imporre che P sia equidistante dal fuoco e dalla direttrice.

Scriviamo l’equazione della direttrice in forma implicita: $y - a = 0$ Quindi otteniamo:

$$d(P,d) = \frac{|y-a|}{1} = |y-a|$$

$$d(P,F) = \sqrt{(x-x_f)^2 + (y-y_f)^2}$$

Ora imponiamo che le due distanze siano uguali:

$$|y-a| = \sqrt{(x-x_f)^2 + (y-y_f)^2}$$

Ora sviluppiamo i calcoli per ottenere l'equazione della parabola:

$$(y-a)^2 = (x-x_f)^2 + (y-y_f)^2$$

$$\cancel{y^2} - 2\cdot a\cdot y + a^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot x_f + x_f{}^2 + \cancel{y^2} - 2\cdot y\cdot y_f + y_f{}^2$$

$$2\cdot y\cdot y_f - 2\cdot a\cdot y = x^2 - 2\cdot x\cdot x_f + x_f{}^2 + y_f{}^2 - a^2$$

$$2\cdot y\cdot (y_f - a) = x^2 - 2\cdot x\cdot x_f + x_f{}^2 + y_f{}^2 - a^2$$

$$y = x^2\cdot\frac{1}{2\cdot(y_f-a)} - x\cdot\frac{\cancel{2}\cdot x_f}{\cancel{2}\cdot(y_f-a)} + \frac{x_f{}^2 + y_f{}^2 - a^2}{2\cdot(y_f-a)}$$

Quindi si ottiene che:

$$a = \frac{1}{2\cdot(y_f-a)} \qquad b = \frac{x_f}{(y_f-a)} \qquad c = \frac{x_f^2 + y_f^2 - a^2}{2\cdot(y_f-a)}$$

Con queste tre formule si ottiene l'equazione della parabola: $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$

Prima di fare tutti i calcoli bisogna controllare se il Fuoco appartiene alla direttrice. Questo si fa controllando che:

$$y_f - a \neq 0.$$

Problema 3.8. Parabola conoscendo vertice e direttrice

Determinare l'equazione della parabola avente vertice $V(x_V; y_V)$ e direttrice d' equazione $y = a$

La parabola è il luogo geometrico dei punti di un piano equidistanti da un punto fisso F (detto fuoco) e da una retta data d (detta direttrice).
Il punto V (vertice) è il punto medio del segmento FK , pertanto il fuoco F ed il vertice V hanno
ascissa uguale infatti:

$$x_F = x_V$$

mentre, le ordinate sono legate dalla seguente relazione:

$$y_v = \frac{y_F + y_k}{2} = \frac{y_F + a}{2}$$

da cui ricaviamo:

$$2y_V = y_F + a \rightarrow y_F = 2y_V - a$$

Conosciamo ora l'equazione della direttrice e le coordinate del fuoco F ; facendo quindi riferimento al problema precedente possiamo determinare i coefficienti a, b, c.

$$a = \frac{1}{2 \cdot (y_f - a)} \qquad b = \frac{x_f}{(y_f - a)} \qquad c = \frac{x_f^2 + y_f^2 - a^2}{2 \cdot (y_f - a)}$$

Problema 3.9. Parabola conoscendo vertice e fuoco

Determinare l'equazione della parabola con asse // all'asse delle ordinate di vertice $V(x_V; y_V)$ e fuoco $F(x_f; y_f)$

Ricordando che il vertice è il punto medio del segmento FK possiamo determinare l'espressione della direttrice:

$$\frac{y_k + y_f}{2} = y_v$$

$$y_k + y_f = 2y_v$$

$$y_k = 2y_v - y_f = a$$

L'equazione della direttrice risulta quindi

$$y = a$$

Conosciamo ora l'equazione della direttrice e le coordinate del fuoco F ; facendo quindi riferimento al problema precedente possiamo determinare i coefficienti a, b, c.

$$a = \frac{1}{2 \cdot (y_f - a)} \qquad b = \frac{x_f}{(y_f - a)} \qquad c = \frac{x_f^2 + y_f^2 - a^2}{2 \cdot (y_f - a)}$$

4. L'ellisse

Problema 4.1. Ellisse per due punti

L'equazione generica di un'ellisse con centro nell'origine degli assi è la seguente:

$$\frac{x^2}{a_2} = \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Imponendo l'appartenenza di P_1 e P_2 all'ellisse otteniamo:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \dfrac{x_2^2}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Si ottiene un sistema in due equazioni e due incognite (i parametri a e b)

Risolvendo per confronto si avrà:

$$\begin{cases} b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2 \\ b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2 = a^2 b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = b^2 x_2^2 + a^2 y_2^2 \\ b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 \cdot \left(x_1^2 - x_2^2\right) = a^2 \cdot \left(y_2^2 - y_1^2\right) \\ b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 = a^2 \cdot \dfrac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} \\ a^2 \cdot \dfrac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} \cdot x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2 = a^2 \dfrac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} \\ \left[y_1^2 + x_1^2 \cdot \dfrac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} \right] \cdot \cancel{a}^2 = \cancel{a}^2 b^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = b^2 \dfrac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} \\ b^2 = y_1^2 + x_1^2 \dfrac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 = b^2 \dfrac{y_2^2 - y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} \\ b^2 = \dfrac{y_1^2\left(x_1^2 - x_2^2\right) + x_1^2 y_2^2 - x_1^2 y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{y_1^2\left(x_1^2 - x_2^2\right) + x_1^2\left(y_2^2 - y_1^2\right)}{x_1^2 - x_2^2} \cdot \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{y_2^2 - y_1^2} \\ b^2 = \dfrac{y_1^2 \cancel{x_1^2} - y_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 - \cancel{x_1^2} y_1^2}{x_1^2 - x_2^2} = \dfrac{x_1^2 y_2^2 - y_1^2 x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{\cancel{y_1^2}\left(\cancel{x_1^2}\right) - y_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 - \cancel{x_1^2}\cancel{y_1^2}}{y_2^2 - y_1^2} = \dfrac{x_1^2 y_2^2 - y_1^2 x_2^2}{y_2^2 - y_1^2} \\ b^2 = \dfrac{x_1^2 y_2^2 - y_1^2 x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 = \dfrac{x_1^2 y_2^2 - y_1^2 x_2^2}{y_2^2 - y_1^2} \\ b^2 = \dfrac{x_1^2 y_2^2 - y_1^2 x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} \end{cases}$$

Problema 4.2. Intersezione tra ellisse e retta

Determinare l'intersezione tra l'ellisse e la retta.
Occorre mettere a sistema le due equazioni.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = mx + q \end{cases}$$

risolviamo il sistema per sostituzione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+q)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2x^2 + a^2(m^2x^2 + q^2 + 2mqx) = a^2b^2$$

$$b^2x^2 + a^2m^2x^2 + a^2q^2 + 2a^2mqx = a^2b^2$$

$$x^2(b^2 + a^2m^2) + 2a^2mqx + a^2q^2 - a^2b^2 = 0$$

risolvendo l'equazione di secondo grado si determinano (se esistono) i valori x_1 e x_2 delle coordinate dei punti di intersezione. Per determinare le coordinate y basta sostituire nell'equazione della retta:

$$y_1 = mx_1 + q$$
$$y_2 = mx_2 + q$$

5. L'iperbole

Problema 5.1. Iperbole passante per due punti

Determinare l'equazione dell'iperbole (fuochi sull'asse x) passante per i punti

$$P_1(x_1, y_1) \qquad \text{e} \qquad P_0(x_0, y_0)$$

L'equazione generica dell'iperbole è

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Imponiamo il passaggio dell'iperbole per i due punti ottenendo un sistema con due equazioni e due incognite:

$$\begin{cases}\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1\\ \dfrac{x_1^2}{a^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1\end{cases}$$

Risolviamo adesso rispetto alle incognite $\frac{1}{a^2}$ e $\frac{1}{b^2}$

Risolviamo il sistema con il metodo di Cramer. In forma matriciale si ottiene

$$A=\begin{pmatrix}x_0^2 & -y_0^2\\ x_1^2 & -y_1^2\end{pmatrix}\qquad b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\qquad x=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{a^2}\\ \dfrac{1}{b^2}\end{pmatrix}$$

Determino

$$\det A=-x_0^2\cdot y_1^2-(-x_1^2\cdot y_0^2)=x_1^2\cdot y_0^2-x_0^2\cdot y_1^2$$

$$\det\Delta_{\frac{1}{a^2}}=\begin{pmatrix}1 & -y_0^2\\ 1 & -y_1^2\end{pmatrix}=-y_1^2-(-y_0^2)=y_0^2-y_1^2$$

$$\det\Delta_{\frac{1}{b^2}}=\begin{pmatrix}x_0^2 & 1\\ x_1^2 & 1\end{pmatrix}=x_0^2-x_1^2$$

Si ottiene:

$$\frac{1}{a^2}=\frac{\det\Delta_{\frac{1}{a^2}}}{\det A}=\frac{y_0^2-y_1^2}{x_1^2\cdot y_0^2-x_0^2\cdot y_1^2}$$

$$\frac{1}{b^2}=\frac{\det\Delta_{\frac{1}{b^2}}}{\det A}=\frac{x_0^2-x_1^2}{x_1^2\cdot y_0^2-x_0^2\cdot y_1^2}$$

da cui

$$a=\sqrt{\frac{x_1^2\cdot y_0^2-x_0^2\cdot y_1^2}{y_0^2-y_1^2}}$$

$$b=\sqrt{\frac{x_1^2\cdot y_0^2-x_0^2\cdot y_1^2}{x_0^2-x_1^2}}$$

L'iperbole esiste se

$$\frac{x_1^2\cdot y_0^2-x_0^2\cdot y_1^2}{y_0^2-y_1^2}>0 \qquad \text{e} \qquad \frac{x_1^2\cdot y_0^2-x_0^2\cdot y_1^2}{x_0^2-x_1^2}>0$$

Inoltre i punti, per l'unicità della soluzione non devono essere allineati lungo gli assi coordinati e, pertanto, deve anche essere:

$$y_0\neq y_1$$

$$x_0\neq x_1$$

Problema 5.2. Iperbole per P e di vertice assegnato

Determinare l'equazione di un'iperbole passante per un punto noto $P_0\left(x_0,y_0\right)$ e avente vertice nel punto $V\left(x_V,0\right)$

L'equazione generica dell'iperbole è:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Si ha: $a=x_v$

Si impone il passaggio per il punto $P(x_0;y_0)$ sostituendo nell'equazione della generica iperbole

$$\frac{{x_0}^2}{a^2}-\frac{{y_0}^2}{b^2}=1$$

quindi sostituendo $a=x_v$ si ottiene:

$$\frac{{x_0}^2}{{x_v}^2}-\frac{{y_0}^2}{b^2}=1 \qquad \text{da cui} \qquad \frac{{x_0}^2}{{x_v}^2}-1=\frac{{y_0}^2}{b^2}$$

e sviluppando i calcoli

$${y_0}^2=b^2\left(\frac{{x_0}^2-{x_v}^2}{{x_v}^2}\right) \qquad b^2={y_0}^2\left(\frac{{x_v}^2}{{x_0}^2-{x_v}^2}\right)$$

$$b = y_0 \sqrt{\frac{x_v^{\ 2}}{x_0^{\ 2} - x_v^{\ 2}}}$$

Occorre controllare che

$$x_0 > x_v$$

per l'esistenza dell'iperbole

Problema 5.3. Iperbole per un punto e di asintoto assegnato

Determinare l'equazione dell'iperbole passante per il punto generico $P = (x_0, y_0)$ e avente come asintoto la retta $y = mx$

Imponiamo quindi che il punto P appartenga all'iperbole e che l'asintoto sia $y = mx$. Si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \\ m = \frac{b}{a} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \\ b^2 = m^2 a^2 \end{cases}$$

poniamo ora:

$$u = a^2 \qquad v = b^2$$

quindi

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{u} - \frac{y_0^2}{v} = 1 \\ v = m^2 u \end{cases}$$

si ottiene:

$$\begin{cases} x_0^2 \cdot v - y_0^2 \cdot u = uv \\ v = m^2 u \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0^2 \cdot m^2 u - y_0^2 \cdot u = u \cdot m^2 u \\ v = m^2 u \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0^2 \cdot m^2 u - y_0^2 \cdot u = m^2 u^2 \\ v = m^2 u \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 u^2 - x_0^2 \cdot m^2 u + y_0^2 \cdot u = 0 \\ v = m^2 u \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2u^2 - u\cdot(x_0^2\cdot m^2 + y_0^2) = 0 \\ v = m^2u \end{cases}$$

Ora si risolve l'equazione di secondo grado:

$$u\cdot(m^2u - x_0^2\cdot m^2 + y_0^2) = 0 \qquad \text{da cui}$$

$$u = 0 \qquad\qquad u = \frac{x_0^2\cdot m^2 - y_0^2}{m^2}$$

e si sostituisce nella seconda equazione la soluzione non nulla

$$v = m^2u \qquad\qquad v = m^2\,\frac{x_0^2\cdot m^2 - y_0^2}{m^2} = x_0^2\cdot m^2 - y_0^2$$

Se u e v risultano maggiori di 0 la soluzione è accettabile quindi:

$$a = \sqrt{u} \qquad\qquad b = \sqrt{v}$$

Problema 5.4. Iperbole per P e di fuoco assegnato

Determinare l'equazione dell'iperbole passante per $P\left(X_0, Y_0\right)$, ed avente come fuoco $F\left(X_F, 0\right)$.

Si ha

$$c = X_F\,.$$

Imponiamo la condizione di appartenenza del punto P all'iperbole:

$$\begin{cases} \dfrac{{X_0}^2}{a^2} - \dfrac{{Y_0}^2}{b^2} = 1 \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases} \qquad \text{poniamo} \qquad \begin{matrix} u = a^2 \\ v = b^2 \end{matrix}$$

e otteniamo il sistema nelle incognite u e v

$$\begin{cases} u + v = c^2 \\ \dfrac{{X_0}^2}{u} - \dfrac{{Y_0}^2}{v} = 1 \end{cases}$$

Sviluppando i calcoli si ha:

$$\begin{cases} u + v = c^2 \\ vX_0 - uY_0 = uv \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = c^2 - v \\ vX_0^{\ 2} - (c^2 - v)Y_0^{\ 2} = (c^2 - v)v \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = c^2 - v \\ vX_0^{\ 2} - c^2Y_0^{\ 2} + vY_0^{\ 2} = c^2v - v^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = c^2 - v \\ v^2 + v(X_0^{\ 2} + Y_0^{\ 2} - c^2) - c^2Y_0^{\ 2} = 0 \end{cases}$$

dopo aver risolto l'equazione di secondo grado nell'incognita v, si determina il valore di u
La soluzione sarà accettabile se u e v risultano maggiori di 0, infatti si ha.

$$a = \sqrt{u}$$
$$b = \sqrt{v}$$

6. L funzione omografica

Problema 6.1. Grafico della funzione omografica

L'espressione analitica che rappresenta la funzione omografica è:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

In realtà si tratta di una iperbole traslata e ruotata rispetto all'iperbole in forma canonica

L'asintoto verticale è: $x = -\frac{d}{c}$

Infatti deve essere $cx + d \neq 0$ perché è il denominatore di una frazione

$$\lim_{x \to -d/c} \frac{ax+b}{cx+d} = \infty$$

Osserviamo che per tale valore di x la funzione assume valore infinito

Per determinare l'altro asintoto occorre svolgere il limite per $x \to \infty$; si ottiene:

$$\lim_{x \to 0} \frac{ax+b}{cx+d} = \lim_{x \to 0} \frac{x\left(a + \frac{b}{x}\right)}{x\left(c + \frac{d}{x}\right)} = \frac{a}{c}$$

poiché le quantità $\frac{b}{x}$ e $\frac{d}{x}$ tendono a zero quando $x \to \infty$, l'equazione dell'asintoto orizzontale sarà:

$$y = \frac{a}{c}$$

Il centro della conica è $C = \left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ facilmente determinabile intersecando gli asintoti.

Determiniamo ora il fascio di rette passante per il centro:

$$y - \frac{a}{c} = m\left(x + \frac{d}{c}\right)$$

Ponendo $m = 1$ e $m = -1$ nell'espressione precedente possiamo determinare gli assi di simmetria

Si ha :

$$y - \frac{a}{c} = x + \frac{d}{c} \qquad y = x + \frac{d}{c} + \frac{a}{c} \qquad y = x + \frac{a+d}{c}$$

$$y - \frac{a}{c} = -\left(x + \frac{d}{c}\right) \qquad y = -x - \frac{d}{c} + \frac{a}{c} \quad y = -x + \frac{a-d}{c}$$

Per determinare i vertici dell'iperbole ora è necessario intersecare gli assi di simmetria con l'iperbole. In un caso il sistema non presenterà soluzioni in quanto un asse di simmetria non interseca l'iperbole e nell'altro presenterà due soluzioni che costituiscono appunto i vertici della conica. Occorre intersecare entrambi gli assi di simmetria in quanto non è possibile sapere a priori quale dei due assi di simmetria interseca l'iperbole.
Consideriamo il primo asse di simmetria

$$\begin{cases} y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \\ y = x + \dfrac{a+d}{c} \end{cases}$$

risolvendo per confronto

$$\frac{ax+b}{cx+d} = x + \frac{a+d}{c}$$

e sviluppando i calcoli

$$ax + b = x(cx+d) + (cx+d)\frac{a+b}{c}$$

$$ax + b = cx^2 + dx + \frac{(a+d)}{c}cx + \frac{d}{c}(a+d)$$

$$cx^2 + x\left[d - a + a + d\right] + \frac{d}{c}\left(a + d\right) - b = 0$$

$$cx^2 + 2xd + \frac{d}{c}\left(a + d\right) - b = 0$$

Se ci sono soluzioni si sostituisce in $\quad y = x + \dfrac{a + d}{c}$

Consideriamo ora il secondo asse di simmetria

$$\begin{cases} y = \dfrac{ax + b}{cx + d} \\ y = -x + \dfrac{a - d}{c} \end{cases}$$

risolvendo per confronto

$$\frac{ax + b}{cx + d} = -x + \frac{a - d}{c}$$

$$ax + b = -x\left(cx + d\right) + \frac{a - d}{c}\left(cx + d\right)$$

$$ax + b = -cx^2 - dx + \left(a - d\right)x + \frac{\left(a - d\right)d}{c}$$

$$cx^2 + x\left(a + d - a + d\right) + \frac{\left(d - a\right)d}{c} + b = 0$$

$$cx^2 + 2xd + \frac{\left(d - a\right)d}{c} + b = 0$$

Se ci sono soluzioni si sostituisce in $\quad y = -x + \dfrac{a - d}{c}$

7. indice