Apuntes de Laboratorio N^o 1:
Concepto de Medida y Errores Asociados

"Escasas disciplinas habrá de mayor interés que la etimología; ello se debe a las imprevisibles transformaciones del sentido primitivo de las palabras, a lo largo del tiempo. Dadas tales transformaciones, que pueden lindar con lo paradójico, de nada o de muy poco nos servirá para la aclaración de un concepto el origen de una palabra. Saber que cálculo, en latín, quiere decir piedrita y que los pitagóricos la usaron antes de la invención de los números, no nos permite dominar los arcanos del álgebra; saber que hipócrita era actor, y persona, máscara, no es un instrumento valioso para el estudio de la ética."

Jorge Luis Borges[1]. "Sobre los Clásicos", **"Otras Inquisiciones" (1952)**. Obras Completas (1974). Emecé Ed.

Introducción

Si bien la idea de "medida" es algo popularmente conocido, es necesario precisar un poco el significado utilizado en física -y en cualquier ciencia experimental- ya que la experimentación se encuentra en el corazón del método científico: las hipótesis son aceptadas, rechazadas o, incluso, modificadas por los resultados de las medidas realizadas en un experimento diseñado para tal fin.

Decimos o escuchamos "este papel mide cinco centímetros", o -en una clase o en internet- "la altura de macho adulto de la especie Homo Sapiens Sapiens es de 1,80m, mientras que la hembra mide 1,70m", pero ¿cómo fueron realizadas esas medidas? ¿un trozo de metal puede medir *exactamente* medio centímetro? ¿cuánto mide *aproximadamente* un macho humano adulto? Estas preguntas, como veremos, no son del todo inocentes, sino que tienen implícitos diferentes métodos de *estimación* en la medida.

En un contexto científico es importante que *cualquiera* sea el método de medida de una dada magnitud, podamos estimar las *indeterminaciones* o *errores* que tenemos en los resultados. Es válido aclarar que la palabra "error" (del latín *error -ōris*: error, equivocación, falta // extravío, rodeo, vuelta, recodo //incertidumbre, indecisión, ignorancia // trampa, equívoco)[2], no es utilizada con un significado único. Veremos que las medidas siempre poseen una *indeterminación* asociada, lo que acompañará los conceptos de *error o incertidumbre de escala* y *error azaroso*. Los *errores sistemáticos* son provocados por *equivocaciones* o malas prácticas de laboratorio.

En esta guía aprenderemos a realizar mediciones y cuantificar y clasificar errores. Haremos una no tan breve introducción a las ideas de *medida directa, errores sistemáticos, de escala, errores azarosos* y la manera de tratar los resultados de las mediciones teniendo en cuenta los tipos de indeterminaciones presentes. Introduciremos *medidas indirectas* y los errores asociados a una magnitud que se *calcula* a partir de medidas directas. Luego distinguiremos algunos conceptos relacionados a la *calidad* de una medida. Finalmente veremos criterios para expresar medidas, y para evaluar igualdad de cantidades. Como es previsible, las ideas de medida y error asociado acompañarán a todos los laboratorios, por lo que es necesario que los conceptos vertidos aquí sean aplicados a lo largo de todas las prácticas de laboratorio.

[1] Jorge Francisco Isidoro Luis Borges Acevedo (Buenos Aires, 24 de agosto de 1899 - Ginebra, 14 de junio de 1986) fue un escritor argentino, uno de los autores más destacados de la literatura del siglo XX. Publicó ensayos breves, cuentos y poemas. Su obra es fundamental en la literatura y el pensamiento universales.

[2] Diccionario Latino-Español, Español-Latino VOX. 18^{ava} Ed., **Bibliograf, 1984**.

1. Medidas Directas y Clasificación de Errores

Entendemos que una medida es **directa**, cuando el proceso de medida se realiza comparando la cantidad a medir con un **patrón**[3].

Pensar en las antiguas balanzas de brazos con platillos, como la de la Fig.(1), nos da una idea de *comparación* con un patrón. La masa (x en la Fig.(1)) a determinar se coloca en uno de los platos, en el otro se agregan pesas calibradas (patrones) haciendo que el indicador central de la balanza se acerque al centro todo lo posible con las pesas a disposición; una vez logrado esto, la masa desconocida será la suma de los patrones colocados necesarios para equilbrarla. Ahora, las pesas calibradas más pequeñas de las que se dispongan serán las que produzcan la mínima desviación en el indicador; si contamos con pesas de 5 gramos el indicador central se moverá, pero sólo podremos acercarlo al centro en "saltos" equivalentes a la pesa de $5g$. Aquí aparece nuestra primera aproximación al ***error o incertidumbre de escala***, aquellos errores que están determinados por los patrones con los cuales se compara en la medición.

Figura 1: Balanza de brazos y platillos.

También se encuentran balanzas analíticas digitales, como la que se muestra en la Fig. (2), que permiten medir de manera directa cantidades tan pequeñas como la centésima parte de un miligramo ($0{,}00001g = 0{,}00000001kg$, un kilogramo partido en diez millones de partes iguales...), estas balanzas son utilizadas habitualmente en diversos tipos de laboratorios. Poseen una *resolución* grande, por lo que cualquier corriente de aire modifica varias cifras decimales de la medida; las vibraciones de la mesa donde se colocan estas balanzas también producen cambios impredecibles en la lectura; el intercambio de humedad de la muestra con el ambiente de la balanza también produce saltos en la medida que no podemos calcular. Al medir la masa de una *misma muestra* dos veces, es improbable que este tipo de balanzas entregue el mismo valor: las menores vibraciones en la mesa, la menor corriente de aire, el menor intercambio de humedad de la muestra con el ambiente de la balanza genera "saltos impredecibles" en la medida (las variaciones en la lectura son mucho mayores que la *resolución* de la balanza). Este tipo de contigencias no pueden ser corregidas fácilmente, la medida a veces es mayor, otras menor, pero oscila en torno a un *valor central*. Hablamos entonces de ***errores azarosos***, variaciones en la medida que no son totalmente explicables, pero que son tratables con *métodos estadísticos*.

Figura 2: Balanza analítica.

Finalmente, hay *errores* (en el sentido literal) en los procedimientos, sean del instrumental o de parte del experimentador, a éstos se los denomina ***errores sistemáticos***. Este tipo de errores presentan una desviación de la medida que no es arbitraria o azarosa, sino que presenta regularidades. Algunos pueden corregirse *luego* de haber realizado las medidas. Otros obligan a repetir la experiencia. Los errores sistemáticos se clasifican según el tipo de equivocación que les da origen, como enumeramos a continuación:

[3]Las unidades de medida de las diferentes magnitudes no están libradas al azar, ni cada país puede elegirlas. Existe un espacio internacional, donde las unidades de medida están en constante deliberación: La Oficina Internacional de Pesos y Medidas, que es el coordinador mundial de la metrología. Su sede está ubicada en Sèvres, suburbio de París. Es la depositaria del kilogramo patrón internacional, única unidad materializada del Sistema Internacional de Unidades (SI) en uso. Fuente: **Física Vol. 1 - Resnik-Halladay-Krane.** 4^{ta}**Ed.** 12^{ava} **Reimp. Compañía Ed. Cont.**

- Errores instrumentales, por ej., utilización de un patrón mal calibrado (una pesa que no pesa lo que dice que pesa); no tarar la balanza (que la balanza indique, por ej., 10 gramos cuando no tiene muestra alguna). Ambos son errores que pueden corregirse una vez realizadas las medidas.
- Errores personales. Estos son, en general, difíciles de determinar y se deben a limitaciones de carácter perceptual/cognitivo del observador. Por ejemplo, un problema visual del observador no permite la lectura de un *calibre*.

Los errores por la indeterminación de escala y los errores azarosos serán explicados en detalle en las siguientes subsecciones pormenorizando las explicaciones y el tratamiento de datos. Luego veremos cómo tener en cuenta ambos errores en el proceso de medida, mediante la idea de *error absoluto*.

Error o incertidumbre de escala

Si bien la realización de una medida directa parece muy simple, deberemos prestar atención a algunos detalles, para lo cual tomamos como ejemplo la medida de la longitud de trozo de papel rectangular.

En la Fig. (3) se muestra, en una forma un poco atípica, un trozo de papel cuya longitud queremos determinar a partir de la comparación con la escala de la regla milimetrada. Para obtener la longitud del papel L_{papel}, bastará con conocer las posiciones de los extremos derecho L_{der} e izquierdo L_{izq}, para luego restar $L_{der} - L_{izq}$.

Sin embargo, ¿qué podemos *asegurar* de las posiciones de L_{izq} y L_{der}?

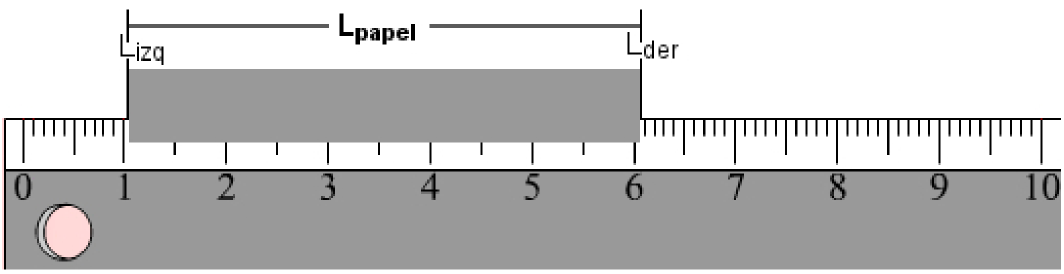

Figura 3: Ilustración esquemática de un papel gris sobre una regla milimetrada. Los extremos del papel no se han colocado de manera habitual, aunque es posible realizar los mismos razonamientos hechos aquí con *cualquier* posición del mismo sobre la escala.

Si observamos el extremo izquierdo del trozo de papel en la Fig. (3), solo podremos asegurar que está *situado* entre (o, tal vez, *en*) los diez y los once milímetros. Denominando L_{izq} a la ubicación en la regla milimetrada, decimos, matemáticamente:

$$10mm \leq L_{izq} \leq 11mm \qquad (1)$$

notamos inmediatamente que el extremo L_{izq}, como lo expresamos en la ec.(1) no *está* ni en los $10mm$ ni en los $11mm$. Nuestro conocimiento sobre la posición del extremo izquierdo del papel en la escala de la regla milimetrada tiene un límite. Lo que estamos expresando es una *indeterminación* que proviene de la *escala o patrón* con la cual estamos intentando determinar la posición L_{izq}. Es por esto que, en lugar de un valor único, definimos un intervalo.

La forma habitual de expresar matemáticamente la desigualdad en la ec.(1) es escribir el **valor central** entre los extremos, $\overline{L}_{izq} = (11 + 10)mm/2 = 10{,}5mm$, y su **error o indeterminación por**

escala (la distancia desde este valor central y cada extremo), $\Delta L_{izq} = 0{,}5mm$, utilizando el símbolo "±", como se muestra a continuación:

$$\overline{L}_{izq} \pm \Delta L_{izq} = (10{,}5 \pm 0{,}5)mm \tag{2}$$

la ec.(2) expresa el valor central ($\overline{L}_{izq}$) y la indeterminación (ΔL_{izq}) producto de contrastar la posición del extremo del papel con la escala de la regla. Es imprescindible que ΔL_{izq} sea tenida en cuenta en las experiencias que realicemos, pues nos informa sobre la *indeterminación insalvable* que poseemos en las medidas debido al instrumental que utilizamos[4]. Repetimos, una medida *sin ninguna indeterminación* es imposible (se asemeja a un oxímoron: "un círculo cuadrado" o "una inteligente torpeza").

De la misma manera, observamos que el extremo derecho L_{der} está entre $60mm$ y $61mm$, por lo que escribimos:

$$\overline{L}_{der} \pm \Delta L_{der} = (60{,}5 \pm 0{,}5)mm \tag{3}$$

Las consideraciones anteriores sobre el ***error o indeterminación de escala*** no son exlusivas de una regla milimetrada, sino que este ocurrirá en la comparación con ***cualquier patrón de medida***, sea de masa, fuerza, tiempo, etc. Esto nos lleva a una regla de aplicación general:

"**El *error o indeterminación de escala* asociado a *una* medida directa es *la mitad de la mínima escala* del instrumento con el que esta medida sea realizada.**"

Luego de conocer cómo se escriben los valores experimentales, podemos intentar obtener la longitud del papel, L_{papel}. Para esto deben **restarse los valores centrales** (L_{izq} y L_{der}) de las ecs. (2 y 3) y ***sumar*** sus errores ΔL_{izq} y ΔL_{der}:

$$\begin{aligned}\overline{L}_{papel} \pm \Delta L_{papel} &= (60{,}5 - 10{,}5)mm \pm (0{,}5 + 0{,}5)mm \Rightarrow \\ \overline{L}_{papel} \pm \Delta L_{papel} &= (50 \pm 1)mm \end{aligned} \tag{4}$$

En la ec.(4) el error instrumental es $1mm$ ¿qué pasó con la consideración de tomar la mitad de la mínima escala como el error o indeterminación de escala? Es que, en la ec. (4), la indeterminación es el doble de lo esperado...para pensar esto tendremos que esperar a la Sec. (2).

Errores azarosos

Cuando aparecen fluctuaciones azarosas en una medida, como ya anticipamos, es necesario un tratamiento estadístico. Aquí resumiremos algunos resultados importantes que nos permitirán tratar colecciones de datos provenientes de la *repetición* de una medida.

Como ejemplo pensaremos en la realización de un "experimento mental", que involucra *estimar* la masa de una muestra de Cloruro de Sodio (NaCl o sal de mesa) y el error asociado a la medida, utilizando una balanza analítica con cuyo error o indeterminación de escala está en $0{,}00001g$.

Para medir se coloca un papel encima del platillo (en una balanza similar a la de la Fig. (2)) y se pone en cero la lectura de la balanza. Luego se coloca la muestra (unos pocos cristales de NaCl) sobre el papel, y se toma la lectura. Se retira el papel, se espera que la balanza llegue a cero y se repite la medida

[4]El lector podrá argumentar que es posible diferenciar "a ojo"; en esta escala (mm) eso es verdad; no lo es utilizando escalas menores ($0{,}001mm$, por ejemplo): hay diferencias de longitud que sólo se perciben con los instrumentos. Como lo que se busca es tener un *método*, válido para cualquier patrón, no es posible utilizar como argumento algo que no pueda ser puesto en una rutina de laboratorio.

de la *misma* muestra: se comprueba que la segunda medida no entrega el mismo resultado...¿qué ocurrió? Estamos ante pequeñas variaciones -que no podemos controlar- de las condiciones en las cuales está realizado nuestro experimento. Será necesario, entonces, repetir la experiencia algunas veces y operar estadísticamente con los resultados que se obtengan.

La Tabla (1) muestra los resultados de $N = 8$ repeticiones de la misma medida. Como puede verse las medidas varían de manera azarosa, con lo cual no es posible "elegir" como resultado solo una de las ocho medidas realizadas. Debemos tener en cuenta *todas* las medidas, pero ¿cómo?

i	$\mathbf{M_i \pm \Delta M_i[g]}$
1	$M_1 \pm \Delta M_1 = (0{,}00215 \pm 0{,}00001)g$
2	$M_2 \pm \Delta M_2 = (0{,}00261 \pm 0{,}00001)g$
3	$M_3 \pm \Delta M_3 = (0{,}00289 \pm 0{,}00001)g$
4	$M_4 \pm \Delta M_4 = (0{,}00281 \pm 0{,}00001)g$
5	$M_5 \pm \Delta M_5 = (0{,}00202 \pm 0{,}00001)g$
6	$M_6 \pm \Delta M_6 = (0{,}00247 \pm 0{,}00001)g$
7	$M_7 \pm \Delta M_7 = (0{,}00217 \pm 0{,}00001)g$
8	$M_8 \pm \Delta M_8 = (0{,}00205 \pm 0{,}00001)g$

Tabla 1: Los resultados de ocho medidas ($M_i \pm \Delta M_i$) acompañados de su error de escala, en gramos. Las variaciones entre las medidas son mucho mayores que el error o indeterminación de escala.

Para esto se define el concepto estadístico de ***media*** (popularmente conocido como promedio), que es el cociente entre la suma de todos los resultados y la cantidad de resultados, en este caso $N = 8$. En el caso de los resultados M_i de la Tabla (1), la media $\overline{M}$ será:

$$\overline{M} = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 + M_6 + M_7 + M_8}{8} = \frac{\sum_{i=1}^{N=8} M_i}{8} \Rightarrow \tag{5}$$

$$\overline{M} = \frac{(215 + 261 + 289 + 281 + 0202 + 247 + 217 + 205) \times 10^{-5} g}{8}$$

$$\overline{M} = 0{,}00239625 g \tag{6}$$

la ec. (5)[5] nos entrega la media, $\overline{M}$, a partir de operar con la colección de resultados obtenidos en la repetición de la medida M_i. La media es una estimador estadístico de la tendencia central, por lo que la asociaremos al ***valor central*** de nuestra medida, en este caso, la masa de NaCl.

Si bien el error o indeterminación por escala de la balanza es de $0{,}00001g$, este **no puede ser tenido en cuenta como el único error presente en la medida**, ya que las mediciones individuales se *alejan de la media* $\overline{M}$ hasta $0{,}00037g$. Entonces ¿cómo tratar los errores azarosos?¿qué operación deberemos realizar?¿qué requisitos deberá cumplir tal operación?

En una colección de datos una manera de estimar el error en la determinación de la media viene de la estadística, y se denomina **error estándar de la media**. Se define como:

[5] El símbolo $\sum$ se utiliza como abreviatura de suma de una colección de términos. Por ej., la suma de una colección de datos $x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_N$ se escribe $\sum_{i=1}^{N} x_i$.

$$\Delta M_{esm} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(M_i - \overline{M})^2}{N^2}} = 0{,}0001224298g \tag{7}$$

la ec.(7)[6] define nuestro **error estadístico** y nos entrega, utilizando los valores de la Tabla (1), un valor aproximadamente diez veces mayor que la indeterminación por escala de nuestra balanza ($0{,}00001g$). Esto está asociado con los factores azarosos que influyen en nuestro proceso de medida.

Es importante notar que el ***error estándar de la media*** cumple algunos requisitos que son esperables como medida de **error estadístico** a partir de un conjunto de resultados:

- a medida que aumentamos el número N de medidas aumenta nuestro conocimiento de la media (disminuye su error). Como puede verse (¡si se mira en detalle!) la ec.(7), el error estándar de la media tiende a cero a medida que N, la cantidad de medidas, tiende a infinito (el denominador crece sin límites)[7]
- el error, dado por la ec.(7), *crece* si los valores M_i se encuentran más alejados de la media $\overline{M}$. Si consideramos las distancias a la media como los "saltos azarosos" que ocurren en un experimento, entonces el error disminuye si los "saltos" son menores, y viceversa.

Utilizando las ecs(6 y 7) podemos expresar, finalmente, nuestra medida de masa de NaCl y el error estándar de la media:

$$\overline{M} \pm \Delta M_{esm} = (0{,}00239625 \pm 0{,}0001224298)g \tag{8}$$

en la ec.(8), tenemos la **media como valor central** y el **error estándar de la media** que como indeterminación del valor central.

Vale decir que para el tratamiento estadístico, en general, es necesario contar con una gran cantidad de datos -entre otros requerimientos- para que los parámetros definidos sean confiables; se encuentra más allá del alcance de este apunte la definición rigurosa de las condiciones de aplicación de estimadores estadísticos, simplemente recomendamos que se utilicen siempre con la mayor cantidad de datos posibles.

¿Adición de errores? Error Absoluto

En las dos subsecciones precedentes describimos el proceso de calcular errores a partir de dos métodos distintos: en primer lugar notamos la existencia de un ***error o indeterminación por escala*** para cada medida particular (con un ejemplo de medida de la longitud de un papel), luego notamos que para ciertas medidas, muy precisas, existen ***errores o indeterminaciones azarosas***, lo que nos lleva a un procedimiento estadístico.

Ahora, es importante considerar que la expresión final de una magnitud involucra ***tanto errores por escala como errores azarosos***. Para pensar esto, pondremos en práctica una *reductio ad absurdum*[8] considerando verdadera la proposición "**toda medida tiene su indeterminación**".

[6]Este tipo de ecuaciones pueden ser calculadas de manera sencilla con Excel u otro software. Aconsejamos no utilizar calculadora, pues resulta en una operación muy tediosa.

[7]Hay condiciones importantes de convergencia del error estándar de la media que no serán tenidas en cuenta en este apunte.

[8]La expresión latina de *reducción al absurdo*, un procedimiento usual de demostración en matemáticas.

Imaginemos que tomamos una colección de medidas del papel utilizando una regla milimetrada, como vimos en la Fig. (3). La colección de medidas, como es esperable, nos indica un tratamiento estadístico. Sin embargo, notamos que **todas las medidas tomadas** tienen el mismo resultado $\overline{L} \pm \Delta L_{escala} = (50 \pm 1)mm$. Haciendo el tratamiento estadístico, obtendríamos una **media estadística** igual a cada medida particular, $\overline{L} = 50mm$, y un **error estándar de la media** idéntico a cero, $\Delta L_{esm} = 0mm$, ya que cada valor de nuestra colección de medidas será ***igual a la media***. Pero, ¿si el error estándar de la media es cero, nuestro error al medir es cero? Esto niega nuestra asunción inicial, en la cual supusimos que toda medida tiene su error o indeterminación. Por lo tanto deberemos utilizar alguna operación que nos permita obtener una medida del **error absoluto**, a partir del *error o indeterminación por escala*, que tenemos en *cada repetición de la medida* y del *error estándar de la media, que tenemos en el conjunto de medidas.*

Una regla de la estadística nos provee lo buscado. En una colección de medidas de la magnitud x, donde cada medida individual posee un error de escala Δx_{escala}, y el error estándar de la media del conjunto de medidas es Δx_{esm}, tendrá un **error absoluto** Δx definido como:

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{escala})^2 + (\Delta x_{esm})^2}} \tag{9}$$

La ec. (9) da cuenta, en una sola cantidad Δx, de los dos tratamientos de errores utilizados hasta aquí, dando una estimación de la indeterminación que posee una medida. Será la expresión habitual para expresar errores absolutos de cualquier medida.

A continuación calculamos el error absoluto de los dos ejemplos expuestos anteriormente.

Ejemplo 1: tenemos 10 medidas del papel de la Fig. (3), todas entregando el mismo resultado $L = 50mm$, con un error o indeterminación por escala $\Delta L_{escala} = 1mm$. Queremos calcular el error absoluto.

Sabemos que la media val $\overline{L} = 50mm$, ya que todas las medidas tienen el mismo valor central. Por otra parte, el error estándar de la media será $\Delta L_{esm} = 0$, porque todas las medidas son iguales a la media. El error de escala será $\Delta L_{escala} = 1mm$. Por lo tanto:

$$\Delta L = \sqrt{(\Delta L_{escala})^2 + (\Delta L_{esm})^2} = \sqrt{(\Delta L_{escala})^2} = \Delta L_{escala} = 1mm$$

como es de esperar, no hace falta realizar el tratamiento estadístico en el caso en que la colección de medidas es una colección de resultados idénticos. De hecho, de nada serviría repetir una medida de este tipo más de una vez. Así, nuestra medida se escribe con su error absoluto como se muestra a continuación:

$$\overline{L} \pm \Delta L = (50 \pm 1)mm$$

Ejemplo 2: queremos expresar el error absoluto de la medida de la masa de una muestra de NaCl vista anteriormente.

Como sabemos, la media de la colección de datos es $\overline{M} = 0{,}00239625g$, la indeterminación de escala de la balanza es $\Delta M_{escala} = 0{,}00001g$ y el error estándar de la media es de $\Delta M_{esm} = 0{,}0001224298g$. Entonces, utilizando la ec. (9), tenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta M &= \sqrt{(\Delta M_{escala})^2 + (\Delta M_{esm})^2} \Rightarrow \\
\Delta M &= \sqrt{(0{,}0001224298g)^2 + (0{,}00001g)^2} \Rightarrow \\
\Delta M &= \sqrt{(0{,}00000001498906 + 0{,}0000000001)g^2} \Rightarrow \\
\Delta M &= 0{,}0001228375g
\end{aligned}$$

como es posible ver en la ec. anterior[9], el valor obtenido es *muy parecido* al valor que tendríamos sin considerar el *error de escala*. Sin embargo, no siempre esto es así, debiéndose evaluar cada caso particular.

Nuestra medida de masa queda correctamente expresada como:

$$\boxed{M \pm \Delta M = (0{,}00239625 \pm 0{,}0001228375)g \simeq (0{,}0024 \pm 0{,}0001)g}$$

en la ec. anterior se utilizó una expresión aproximada que es de uso habitual en la comunicación de resultados. Este tipo de redondeos con cifras significativas se explicará más adelante, siendo utilizado a lo largo de todos los laboratiorios.

Con estas secciones concluímos la descripción del proceso de medida directa y estimación del error. Ya es posible escribir la medida de una magnitud y su error absoluto como un valor central $\overline{x}$ y su indeterminación Δx, sea cual fuere nuestro proceso de medida directa y estimación de cantidades.

2. Medidas Indirectas y Errores Asociados

Una ***medida indirecta*** es aquella que se obtiene ***por medio de la aplicación de una fórmula matemática a un conjunto de medidas directas***, por ejemplo, obtener el volumen de una esfera a partir de la medida del radio; o calcular una superficie de un rectángulo a partir de la medida de sus lados. No tendremos más información que unas medidas de longitud y una fórmula o función que *vincula* las medidas de longitud con el volumen o superficie.

El problema, sin embargo, no es *calcular* una cantidad a partir de medidas directas, sino que las mismas poseen un error absoluto asociado...¿cómo se determina, entonces, el error absoluto en la medida indirecta a partir de los errores en las medidas directas? Formalmente, queremos saber qué error tenemos en el cálculo de una función f, de cuyas variables conocemos los valores centrales $(\overline{x}, \overline{y}, ..., \overline{z})$ y los errores absolutos asociados al proceso de medida directa $(\Delta x, \Delta y, ..., \Delta z)$.

Plantearemos un ejemplo para entender cómo funciona la *propagación de errores* y luego generalizaremos a un caso abstracto, además de dar reglas útiles para el cálculo y dos ejemplos concretos.

Cálculo de la superficie de un rectángulo y errores asociados

Como ejemplo de medidas indirectas analizaremos el cálculo de la superficie de un rectángulo a partir de la medida de sus lados, para detenernos en el proceso de cómo estimar el error asociado a

[9] Se han mantenido las operaciones intermedias para resaltar las cantidades obtenidas después de elevar al cuadrado, que suelen ser pequeñas...

la determinación de su superficie por medio de la medida de los lados. Suponemos que tenemos un rectángulo, como el de la Fig. (4), de altura h y base b. Al medir cada una de estas longitudes con una regla milimetrada, se encontraron los resultados:

$$\overline{h} \pm \Delta h = (50 \pm 1)mm$$
$$\overline{b} \pm \Delta b = (20 \pm 1)mm$$

podemos calcular la superficie $\overline{S}$ de este rectángulo, simplemente multiplicando los valores centrales de la base y la altura:

$$\overline{S} = \overline{b} \times \overline{h} = 20mm \times 50mm = 1000mm^2$$

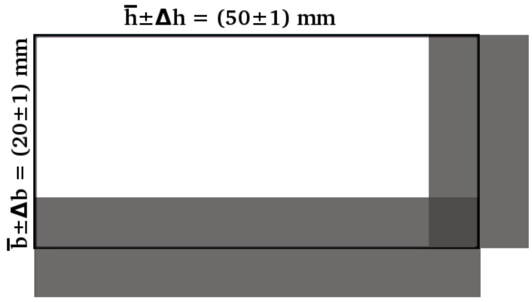

Figura 4: Ilustración esquemática del proceso de obtener la superficie del rectángulo. Las zonas grises representan los errores (en escala arbitraria).

Ahora que sabemos que la superficie $\overline{S}$ es de $1000mm^2$, ¿cuál es el error asociado a esta ***medida indirecta*** de la superficie $\overline{S}$? ¿sería lo mismo medir el rectángulo con una regla milimetrada que con una que tenga escala de centímetros? Es claro que, si cada uno de los lados del rectángulo tiene un error asociado, la medida con regla cuya escala está en milímetros no es lo mismo que una medida con una regla cuya escala está en centímetros. El error asociado a S merecerá un poco de atención.

Si nos preguntamos cuál es la superficie *engendrada* por el error Δb, la respuesta es muy simple: hay una superficie $\Delta S_{\Delta b}$ que está asociada al hecho de que la medida con su error es un intervalo ($\overline{b} \pm \Delta b = (20 \pm 1)mm$), lo que nos da la superficie de un pequeño rectángulo de base $\overline{h}$ y altura $\Delta b = 1mm$:

$$\Delta S_{\Delta b} = \overline{h} \times \Delta b = 50mm \times 1mm = 50mm^2$$

la superficie $\Delta S_{\Delta b}$ se puede observar en el esquema de la Fig.(4). Está obviamente asociada al tamaño de la longitud $\overline{h}$: mayores valores de $\overline{h}$, *engendran* una mayor superficie $\Delta S_{\Delta b}$. Debemos recordar que Δb está asociado a un símbolo $\pm$, a una indeterminación, por lo que necesariamente tendremos dos rectángulos grises, hacia abajo y hacia arriba del lado inferior del rectángulo de la Fig. (4), que representan el error en la medida de la superficie $\overline{S}$ asociado al error en la medida directa de $\overline{b}$ ($\Delta S_{\Delta b}$). Esto obviamente no tiene por qué ocurrir sólo en el lado inferior (la indeterminación no está *localizada* necesariamente en el extremo inferior de $\overline{b}$) pero, a fines ilustrativos, ubicamos los rectángulos asociados al error como si estuvieran distribuídos sólo en ese lado. De la misma forma, podemos calcular el error $\Delta S_{\Delta h}$, causado por la indeterminación en h ($\overline{h} \pm \Delta h = (50 \pm 1)mm$):

$$\Delta S_{\Delta h} = \overline{b} \times \Delta h = 20mm \times 1mm = 20mm^2$$

El error total en $\overline{S}$ será la suma de $\Delta S_{\Delta h}$ y $S_{\Delta b}$, y podremos expresar el error en la *medida indirecta* de la superficie S:

$$\Delta S = \Delta S_{\Delta h} + \Delta S_{\Delta b}$$
$$\Delta S = 20mm^2 + 50mm^2 = 70mm^2 \qquad (10)$$

Hay que notar, en la ec.(10), que el error en la superficie asociado $\Delta S_{\Delta b}$ es mayor que $\Delta S_{\Delta h}$; esto resulta en que *disminuir* los errores de las medidas de longitud, Δb y Δh, no hará disminuir de la misma manera el error en la superficie total S, sino que el efecto será más acentuado con Δb. La razón está en el cálculo de cada error de superficie, y se mantiene en general en medidas indirectas: hay algunas medidas directas que cobran mayor importancia en la propagación de errores hacia la medida indirecta. Por lo tanto, es importante discernir las medidas directas que deberán ser realizadas intentando minimizar el error.

Finalmente , la medida, correctamente expresada, será entonces:

$$\boxed{\overline{S} \pm \Delta S = (1000 \pm 70)mm^2}$$

En la próxima sección veremos cómo calcular este tipo de errores para una función cualquiera que sea calculada a partir de variables que han sido medidas directamente.

Generalización: Propagación de errores en medidas indirectas

Si una magnitud f es función de otras cantidades físicas, $f(x, y, z...)$, y se han determinado sus valores centrales y errores absolutos correspondientes (esto es, conocemos $\overline{x} \pm \Delta x, \overline{y} \pm \Delta y, ..., \overline{z} \pm \Delta z$) entonces el **error absoluto** que asociado Δf es:

$$\Delta f = \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \Delta y + ... + \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right| \Delta z \qquad (11)$$

en la ec.(11) el símbolo $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$ indica el valor absoluto de la derivada parcial de la función respecto de la variable x. En una simplificación extrema, derivar parcialmente (con más de una variable) conlleva el mismo procedimiento que derivar funciones de una variable, por ejemplo, al derivar respecto de x el resto de las variables (y, z o cualquier otro nombre) se suponen constantes.

Existen algunas reglas prácticas para evitar el cálculo de la ec.(11). Dos de ellas, de particular interés:

- Una función factorizable en potencias de x, y y z, $F(x, y, z) = k\frac{x^n y^n}{z^l}$, donde k, n, m y l son constantes. La expresión para el **error absoluto** resulta:

$$\boxed{\Delta F = \left\{ n\frac{\Delta x}{x} + m\frac{\Delta y}{y} + l\frac{\Delta z}{z} \right\} F}$$

- Una función de la forma $F = x + y$ ó $G = x - y$ tiene por **error absoluto** *la suma de los errores absolutos correspondientes a cada magnitud*:

$$\boxed{\Delta F = \Delta G = \Delta x + \Delta y}$$

así ΔF y ΔG poseen la *misma* expresión.

Este tipo de reglas pueden ser de gran utilidad para calcular indeterminaciones por medida indirecta de manera rápida y sencilla. Es importante aprender a identificar el tipo de función que admiten las reglas expuestas arriba para no cometer equivocaciones involuntarias. A continuación mostramos dos ejemplos de cálculo de errores o indeterminaciones por medida indirecta.

Ejemplo 1: Medida de Longitud con la regla milimetrada

En la discusión de medidas directas anotamos que medir implica un error o indeterminación por escala que es la *mitad de la mínima escala* del instrumento que se utilice en la medición. Sin embargo, el error que entregamos para la medida de longitud del papel de la Fig.(3) fue de $1mm$, el *doble* de la *mitad* de la mínima escala. En efecto, medir una longitud es una medida indirecta, ya que su valor es ls *resta* entre las posiciones de los extremos de un papel. Considerando el ejemplo de la Fig.(3), $\overline{L}_{izq} = (10{,}5 \pm 0{,}5)mm$ y $\overline{L}_{der} = (60{,}5 \pm 0{,}5)mm$, escribimos:

$$\overline{L}_{papel} = \overline{L}_{der} - \overline{L}_{izq} = 60{,}5mm - 10{,}5mm = 50mm$$

para el cálculo del error ΔL_{papel}, utilizamos el método de propagación de errores:

$$\begin{aligned}
\Delta L_{papel} &= \left|\frac{\partial L_{papel}}{\partial L_{izq}}\right| \Delta L_{izq} + \left|\frac{\partial L_{papel}}{\partial L_{der}}\right| \Delta L_{der} \\
\Delta L_{papel} &= \left|\frac{\partial (L_{der} - L_{izq})}{\partial L_{izq}}\right| \Delta L_{izq} + \left|\frac{\partial (L_{der} - L_{izq})}{\partial L_{der}}\right| \Delta L_{der} \\
\Delta L_{papel} &= \Delta L_{izq} + \Delta L_{der} \\
\Delta L_{papel} &= 0{,}5mm + 0{,}5mm = 1mm
\end{aligned} \tag{12}$$

la ec.(12) nos explica por qué el error, al medir una longitud en una regla milimetrada, es de $1mm$.

Ejemplo 2: Propagación de errores en la medida de superficie de la Fig.(4)

Queremos calcular el error ΔS asociado a la superficie $\overline{S}$ del rectángulo de la Fig. (4), cuyos lados son $\overline{b} \pm \Delta b = (20 \pm 1)mm$ y $\overline{h} \pm \Delta h = (50 \pm 1)mm$.

Entonces, sabemos que $S = bh$. La ec.(11) nos entrega:

$$\begin{aligned}
\Delta S &= \left|\frac{\partial S}{\partial b}\right| \Delta b + \left|\frac{\partial S}{\partial h}\right| \Delta h \\
\Delta S &= \left|\frac{\partial (bh)}{\partial b}\right| \Delta b + \left|\frac{\partial (bh)}{\partial h}\right| \Delta h \\
\Delta S &= |h|\, \Delta b + |b|\, \Delta h \\
\Delta S &= 50 \times 1mm^2 + 20 \times 1mm^2 = 70mm^2
\end{aligned} \tag{13}$$

Como puede verse, la ec.(13) entrega el mismo resultado que la ec.(10), utilizada anteriormente.

A las expresiones $\left|\frac{\partial S}{\partial b}\right|, \left|\frac{\partial S}{\partial h}\right|$ se les llama factores de propagación de errores y multiplican al error absoluto de cada variable. Por lo tanto, como ya se mencionó, disminuir el error absoluto en la medida directa de b no es lo mismo, a fines de el error absoluto ΔS, que hacerlo en h. El error en cada variable contribuye de manera diferente al error absoluto ΔS.

Ahora ya somos capaces de calcular errores por medidas directas e indirectas. Para poder hacer una valoración de los errores cometidos es necesaria alguna idea de la calidad de una medida. La siguiente sección define algunos conceptos relacionados a este tema.

3. Conceptos Relacionados al Proceso de Medida

Aquí definiremos brevemente algunos conceptos, que se utilizan habitualmente para la comunicación y comentario de resultados. Estos conceptos echan alguna luz, en su conjunto, sobre la *calidad* de los procesos de medida.

Error Relativo

Hemos visto que una medida de la magnitud x siempre consta de un *valor central* $\overline{x}$ y un intervalo de error $(x \pm \Delta x)$. Una buena manera de *comparar* medidas en cuanto a su error es utilizar lo que se conoce como error relativo.

Dada una medida de una magnitud $\overline{x} \pm \Delta x$, el **error relativo** es una cantidad adimensional dada por:

$$\epsilon = \frac{\Delta x}{\overline{x}} \tag{14}$$

Tengamos en cuenta que el **error relativo** ϵ *mide* al error Δx en *unidades* del valor central $\overline{x}$, lo que nos da una idea de la **calidad de la medida**. Multiplicando el número obtenido en la ec.(14) por 100 se obtiene el **error relativo porcentual**.

Ejemplo 1: pensemos que realizamos medidas de la masa de una pesa calibrada de un kilogramo con tres balanzas diferentes (denominadas b1, b2 y b3), cuyas mínimas divisiones de escala son, respectivamente, 0,1kg, 0,01kg y 0,001kg . Las operaciones de medida entregan:

$$\overline{m}_{b1} \pm \Delta m_{b1} = (1{,}0 \pm 0{,}1)kg \qquad \overline{m}_{b2} \pm \Delta m_{b2} = (1{,}00 \pm 0{,}01)kg \qquad \overline{m}_{b3} \pm \Delta m_{b3} = (1{,}000 \pm 0{,}001)kg$$

Los errores relativos pocentuales asociados a estas medidas, según la ec.(14), serán:

$$\epsilon_{b1} = \frac{0{,}1kg}{1kg} \times 100 \simeq 10\,\% \qquad \epsilon_{b2} = \frac{0{,}01kg}{1kg} \times 100 \simeq 1\,\% \qquad \epsilon_{b3} = \frac{0{,}001}{1kg} \times 100 \simeq 0{,}1\,\%$$

como puede verse en las ecs. de arriba, los errores relativos porcentuales van decreciendo a medida que utilizamos balanzas con mayor ***resolución***. La resolución de un instrumento es la mínima variación de una magnitud que el instrumento puede detectar.

Ejemplo 2 Imaginemos medidas de longitud de diferentes mensurandos e instrumentos:

$$\bar{l}_1 \pm \Delta l_1 = (7800 \pm 1)m \qquad \bar{l}_2 \pm \Delta l_2 = (354 \pm 1)cm \qquad \bar{l}_3 \pm \Delta l_3 = (29 \pm 1)mm$$

Lo cual nos da los errores relativos porcentuales:

$$\epsilon_{l_1} = \frac{1m}{7800m} \times 100 \simeq 0,013\,\% \qquad \epsilon_{l_2} = \frac{1cm}{354cm} \times 100 \simeq 0,282\,\% \qquad \epsilon_{l_3} = \frac{1mm}{29mm} \times 100 \simeq 3,45\,\%$$

como es posible ver, los errores relativos porcentuales conseguidos no son simplemente la consecuencia de la *resolución* del aparato de medida, sino que tienen en cuenta la relación existente entre la resolución y el valor de la magnitud medida.

En ambos ejemplos el error relativo es un estimador de la calidad de una medida. De nada nos sirve afirmar que "el error de una medida es de un metro", si no tenemos en cuenta la longitud medida, es decir, no es lo mismo medir una cantidad de $x = 10m$ con un error $\Delta x = 1m$ que el perímetro de la Tierra en el Ecuador, $P = 40091{,}001km$ con un error $\Delta P = 1m$. Claramente la segunda medida es mucho más *precisa*, teniendo menos error relativo.

Precisión, Exactitud

Pensando en los experimentos cuyos datos son tratados estadísticamente, decimos que la ***precisión*** de una medida está dada por la poca *dispersión* de sus valores, es decir, si las repeticiones de un proceso de medida poseen poca distancia entre sí. A fines prácticos, la inversa del error relativo es una *estimación* de la precisión, es decir, en una medida, a menor error relativo, mayor precisión.

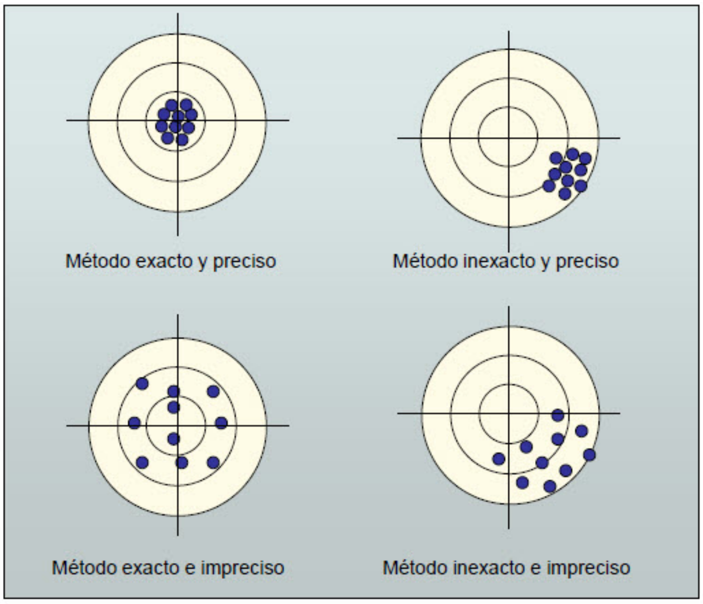

Figura 5: Ilustración gráfica de los conceptos de Exactitud y Precisión.

La ***exactitud*** de una medida está dada por la concordancia entre un ***valor aceptado*** de una magnitud y el ***valor obtenido experimentalmente***. Deberemos aclarar que el "valor aceptado" puede ser, por ejemplo, un patrón de calibrado. Imaginemos medir la masa de un *kilogramo patrón* en una balanza, si el valor que nos entrega es de $1kg$ -salvo error- decimos que la balanza tiene una buena exactitud.

Existen métodos que cuantifican medidas de exactitud y precisión, que no serán vistos en este curso. En la Fig.(5), se muestra un esquema que resume lo expuesto. Por último, los conceptos de exactitud y precisión no están vinculados, sino que son estimaciones de *calidad* de las medidas en cuanto a su valor central(exactitud) y a su error(precisión).

4. Reglas de escritura de magnitudes

La manera habitual de expresar magnitudes está dada en esta sección. Serán consideradas para escribir los resultados finales de **todas las medidas** que se realicen en los laboratorios. Hay dos reglas simples que deben seguirse. La primera de ellas es que el error debe expresarse con solo *una cifra significativa*, es decir, con sólo una cifra diferente de cero. La segunda, es que el el valor central debe aproximarse en la posición decimal de la cifra significativa del error correctamente expresado.

Ejemplo 1: dada una medida $\overline{x} \pm \Delta x = 124856m \pm 167m$, realizamos en orden los siguientes pasos:

1) Δx debe darse con una sola cifra significativa, aumentándola en una unidad si la segunda fuera mayor o igual que 5; $\Delta x = 1\underline{\mathbf{6}}7m \sim 200m$.

2) $\overline{x}$ debe tener sólo las cifras necesarias para que su última cifra significativa (cifra de acotamiento) sea del mismo orden decimal que el error absoluto (ya aproximado con la regla anterior), con las mismas reglas de aproximación; $\overline{x} = 124\underline{\mathbf{8}}56m \sim 124900m$.

Con estas reglas expresamos, entonces, $\boxed{\mathbf{\overline{x} \pm \Delta x = (124900 \pm 200)m}}$.

Valores Incorrectos	Valores Correctos
$3{,}418 \pm 0{,}123$	$3{,}4 \pm 0{,}1$
$6{,}3 \pm 0{,}09$	$6{,}30 \pm 0{,}09$
46288 ± 1551	46000 ± 2000
$428{,}351 \pm 0{,}27$	$428{,}4 \pm 0{,}3$
$0{,}01683 \pm 0{,}0058$	$0{,}017 \pm 0{,}006$

Tabla 2: Resultados incorrectamente expresados a la izquierda, junto con su corrección a la derecha.

En la Tabla (2) se pueden ver algunos ejemplos, que permitirán visualizar las reglas expuestas. Aconsejamos, a pesar de la aparente simplicidad de las reglas, reescribir la columna izquierda de la Tabla (2) utilizando el ejemplo, ya que las equivocaciones son habituales.

5. Igualdad de magnitudes

Para concluir este apunte, estudiaremos en que caso podemos considerar que dos magnitudes son "iguales dentro de los errores experimentales".

Considerando que el proceso de medición de dos magnitudes x e y, invariablemente, nos entrega un *intervalo* para cada magnitud $x \pm \Delta x$ e $y \pm \Delta y$, no es posible establecer la igualdad entre dos magnitudes x e y el sentido en el que estamos acostumbrados, $x = y$, sino que deberemos considerar, entonces, el intervalo para cada magnitud. Diremos que dos magnitudes $x \pm \Delta x$ e $y \pm \Delta y$ son ***iguales dentro de los errores experimentales*** si la distancia entre los valores centrales x e y es menor que la suma de los errores Δx y Δy, esto es, si los intervalos se "solapan".

$$|x - y| \leqslant \Delta x + \Delta y$$

La ecuación anterior puede verse representada gráficamente en el eje real, en la Fig. (6), en la cual se muestran dos magnitudes *iguales dentro de los errores experimentales*.

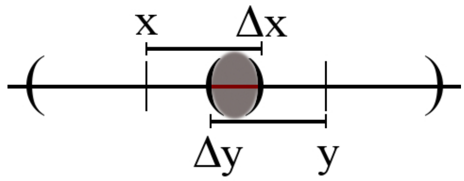

Figura 6: El eje real con dos intervalos de medida. La distancia entre los valores centrales, $|x - y|$, es comparada con la suma de los errores $\Delta x + \Delta y$. En este caso, la suma de los errores es mayor que la distancia entre los valores centrales por una cantidad igual al intervalo bajo el sombreado gris, por lo que las magnitudes x e y son *iguales dentro de los errores experimentales.*

Ejemplo

Se tienen dos medidas $t_1 \pm \Delta t_1 = (10 \pm 1)s$ y $t_2 \pm \Delta t_2 = (10{,}925 \pm 0{,}001)s$. Queremos saber si ambas medidas son inguales dentro de los errores de experimentación.

$$\begin{aligned} |t_1 - t_2| &\leq \Delta t_1 + \Delta t_2 \\ |10 - 10{,}925|s &\leq (1 + 0{,}001)s \\ 0{,}925s &\leq 1{,}001s \end{aligned}$$

Como la desigualdad se cumple, podemos afirmar que *ambas medidas son iguales dentro de los errores experimentales.*

Resumen

En esta guía presentamos aspectos relativos al proceso de medida y la cuantificación de las indeterminaciones indefectiblemente asociadas al mismo. Definimos errores sistemáticos (equivocaciones) y los diferenciamos de los errores de escala y azarosos (indeterminaciones). Luego vimos que el error absoluto tiene en cuenta todas las indeterminaciones presentes en una medida, lo definimos y dimos dos ejemplos exhaustivos de cómo calcularlo. Las medidas indirectas fueron explicitadas como cálculos que se *realizan* utilizando las medidas directas, informándose una manera de calcular las indeterminaciones asociadas a este tipo de cálculos. Concluídos los estimadores de indeterminaciones (error de escala, error estándar de la media, error absoluto, error por medida indirecta), definimos algunos conceptos relacionados con la *calidad* de una medida, a saber, error relativo, resolución, precisión y exactitud. Posteriormente dimos una forma de presentar resultados de mediciones mediante cifras significativas, que siempre deben utilizarse en la comunicación de resultados. Para terminar, vimos un criterio de igualdad de mediciones, teniendo en cuenta que una medición -a estas alturas tendría que ser obvio- no entrega un valor, sino un intervalo, sea cual fuere el procedimiento empleado.

Por otra parte, como ya se mencionó, el tema de los errores o indeterminaciones en las mediciones estará presente en todos los laboratorios. Los conceptos vertidos aquí, por lo tanto, deberán ser aplicados en cada medida realizada durante este curso.