Algorithmes par vagues

Master informatique SU 2017-2018
UE AR (4I403)

Plan

- **Définition Algorithme Total**
- **Exemples d'algorithmes**
  - Algorithme de l'anneau
  - Algorithme de l'arbre
  - Algorithme de l'Echo
  - Algorithme de la Phase

Algorithme Total

- **Algorithme par Vague**
  - Les algorithmes par vague sont utilisés pour diffuser une information sur le réseau, découvrir la topologie du réseau, rassembler des informations du réseau.
  - N nœuds
    - Un nœud ne peut communiquer qu'avec ses voisins

.

Tous les nœuds du réseau participent avant qu'une décision soit prise

Algorithme Total

- **Un algorithme à vagues doit satisfaire les trois propriétés:**
  - ***terminaison*** *:* toute exécution est finie
  - ***décision*** : une décision doit être prise à terme par au moins un processus.
  - ***dépendance*** : Une décision est précédée causalement par un événement de chaque processus.

Algorithme Total

- Types de nœuds :
  - **Initiateur** :
    - nœud qui spontanément décide de démarrer l'algorithme
  - **Non-initiateur** :
    - Ne commence à exécuter qu'après avoir reçu un message.
- e_p = premier événement qui a lieu en p lors d'un exécution de l'algorithme *:*
  - ***Nœud initiateur*** : e_p est un événement interne ou l'envoi de message
  - ***Nœud non-initiateur*** : e_p est l'événement réception de message.
- **Observation** :
  - Pour un même algorithme, pour des exécutions différentes, le nœud initiateur peut être différent.

Algorithme Total

- **Caractéristiques :**
  - **Symétrie**
    - ***Algorithme symétrique*** :
      - L'algorithme est le même dans tous les nœuds
    - ***Algorithme asymétrique***
      - L'algorithme du nœud *initiateur* n'est pas le même que celui d'un nœud non *initiateur*.
  - **Initialisation du calcul**
    - ***Algorithme centralisé***
      - Il existe un unique processus qui est *initiateur* du calcul
    - ***Algorithme décentralisé***
      - Pour tout sous-ensemble $\Pi_0 \subseteq \Pi$, $\exists$ un calcul de l'algorithme dont Π_0 est l'ensemble des initiateurs.

Algorithme Total

- Une décision est prise au plus une fois par un processus ***p***
  $\boldsymbol{d_p}$ = événement correspondant à la décision prise par p

Définition (Tel) : une exécution d'un algorithme est totale si au moins un processus *p* décide et pour tout *q* ϵ N et pour tout *p* qui prend une décision $e_q \rightarrow d_p$.
Un algorithme est **total** ssi toutes ses exécutions possibles sont totales

- Dans un algorithme total sur un réseau de *N* nœuds, il y a au moins *N-1* message échangés.

Algorithmes par Vague

- **Notation (Tel) :**
  - Evénements :
    - S_p : envoie message
    - R_p : réception message
    - D_p : décision
  - $E_p : \{condition\}$
    - L'événement E_p est exécuté si la *{condition}* est vraie.

1. L'algorithme de l'anneau

- Anneau unidirectionnel
- Algorithme asymétrique et centralisé
  - N noeuds
  - Les communications sont fiables, pas forcement FIFO, et tout message émis est reçu dans un temps fini mais arbitraire (modèle temporel asynchrone)
  - Un nœud ne connaît que l'identifiant de son successeur.
- Principe de l'algorithme :
  - Un seul initiateur à chaque exécution.
    - *Initiateur* envoie un jeton dans l'anneau.
  - Jeton doit être reçu par tous les nœuds.
  - L'*initiateur* décide lorsque le jeton lui est renvoyé.

1.L'algorithme de l'anneau

Variable :
booléen Rec_p = false;
/*contrôle de la réception du message*/

***p* initiateur :**

S_p : { Spontanément, une fois}
envoie <> au successeur

R_p : { Un message <> arrive}
réception de <>;
Rec_p = true;

D_p : {Rec_p }
Décision

***p* non_initiateur :**

R_p : { Un message <> arrive}
réception de <>;
Rec_p = true;

S_p : **{ Recp}**
envoie <> au successeur;
Rec_p = false;

<> : message vide.

1.L'algorithme de l'anneau

- Supposons :
  - $(j+1)\%N$ est le successeur de j
    - s_j : événement envoi de message du site j
    - r_j : événement réception de message du site j
    - e_j : premier événement de j
  - i initiateur
    - d_i : événement décision.
  - $e_i = s_i$ et $e_j = r_j$ pour tout j != i.
  - $r_j \text{->} s_j$ pour tout j != i
  - $s_j \text{->} r_{j+1}$ pour tout j
  - $r_i \text{->} d_i$. (seule initiateur décide)

$$\boldsymbol{e_i = s_i \text{->} r_{i+1} = e_{i+1} \text{->} s_{i+1} \text{->} r_{j+2} \ldots \text{->} r_j = e_j \text{->} s_j \ldots \text{->} r_i = d_i}$$

- Complexité en nombre de messages et temps : **N**

2. L'algorithme de l'arbre

- *N* nœuds
  - Un nœud ne connaît que l'identifiant de ses voisins
- Liens bidirectionnels
- Algorithme symétrique et (**pas centralisé ni décentralisé**)
- Principe de l'algorithme
  - Un nœud qui a reçu un message de tous ses voisins sauf un envoi un message à celui-ci.
  - En ne possédant qu'un voisin, les ***feuilles*** de l'arbre sont des nœuds ***initiateurs***
    - Toutes les feuilles, (possibilité de sauf une) doivent être des initiateurs.
  - Un nœud qui a reçu un message de tous ses voisins décide.

2. L'algorithme de l'arbre

Variables :

set $Vois_p$; /* ensemble de voisins de p */

boo $Rec_p[q]$ = false; $\forall q \in Vois_p$ /*contrôle réception message*/

boo $Sent_p$ = false; /*contrôle envoi d'un message*/

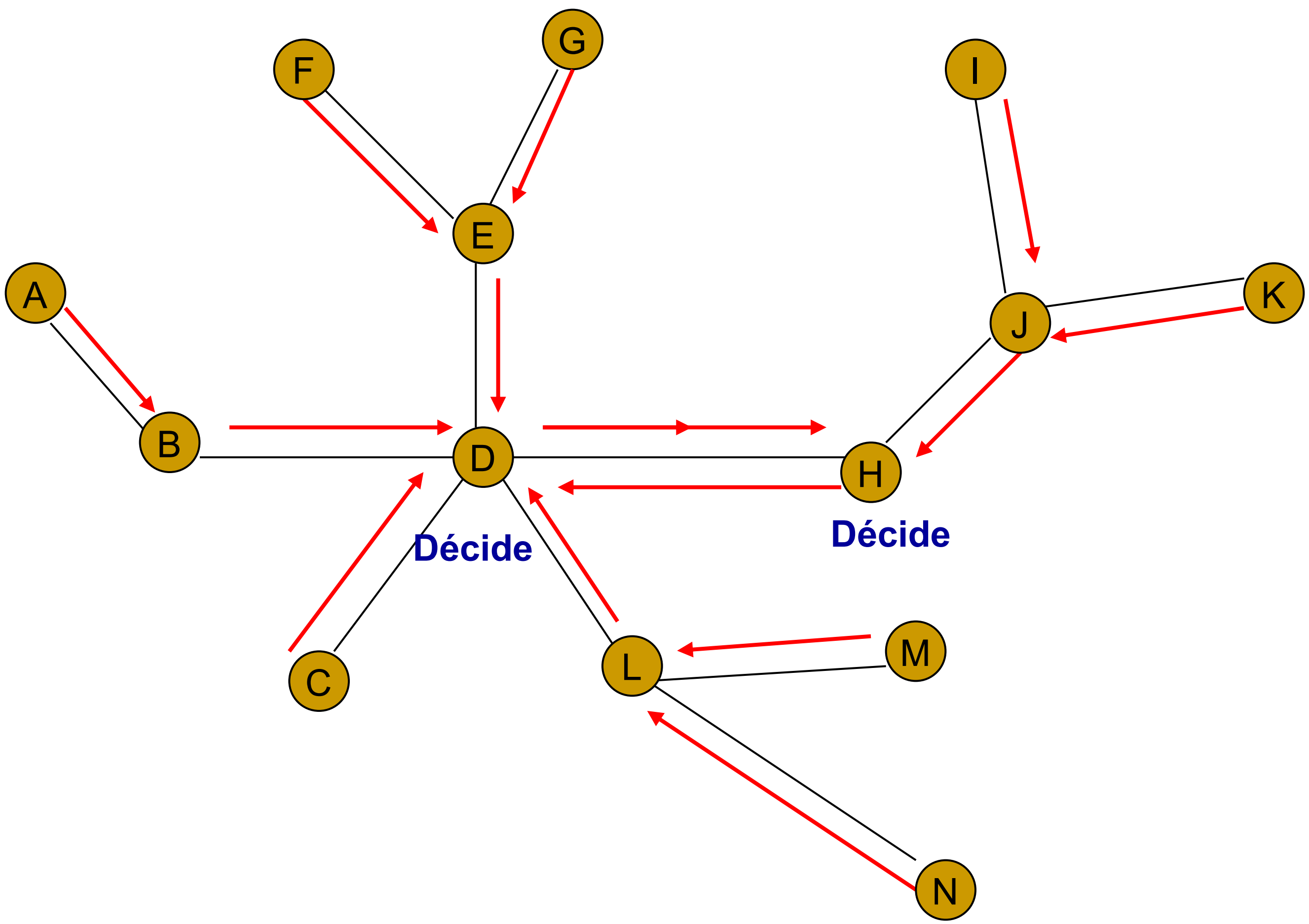
R_p : { Un message <> arrive de q}
    réception de <>;
    $Rec_p[q]$= true;

S_p : { $\exists\, q \in Vois_p : \forall r \in Vois_p,\ r \,!\!= q : Rec_p[r]$ **et** $\mathbf{!Sent_p}$}
    envoie <> à q
    $\mathbf{Sent_p = true}$;

D_p : {$\forall q \in Vois_p : Rec_p[q]$}
    Décision

<> : message vide.

2. L'algorithme de l'arbre



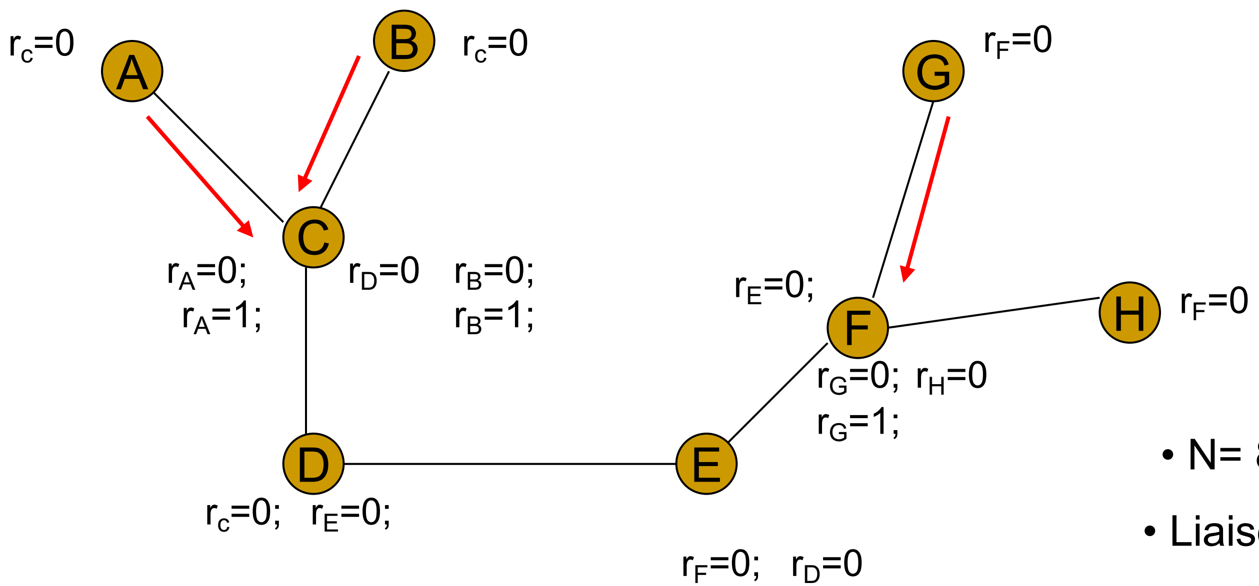
2. L'algorithme de l'arbre

***Théorème 1*: Tant qu'un état permettant la décision n'est pas atteint, il y a toujours une émission ou une réception possible.**

- **Preuve:**
  - A chaque liaison bidirectionnelle, on associe 2 bits *r* correspondant aux 2 sens d'émission, initialisés à 0. Le bit est mis à 1 quand le site à l'extrémité a reçu un message.
  - Soit :
    - ***K*** - le nombre de sites ayant émis
    - ***M*** - le nombre de messages en transit
    - ***F*** - le nombre total de bits *r* à 0.

2. L'algorithme de l'arbre

- La topologie est un arbre, il y a donc 2(N - 1) liaisons (orientées).
- Le nombre de messages reçus est (K - M) .
- On a donc à tout instant **F = 2(N - 1) - (K - M)**



M=0 ; K=0

M=3 ; K=3

M=0; K=3

- F= 14
- F= 11

- N= 8
- Liaisons orientées : 2*(N-1) = 14

Note : **Un site *i* peut émettre lorsqu'il n'a qu'un r_{ij} à 0**

2. L'algorithme de l'arbre

- A tout instant : $F = 2(N - 1) - (K - M)$:
  - $M > 0$: il y a une réception possible.
  - $M = 0$: (*preuve par contradiction*)
    - Puisqu'on suppose qu'on n'est pas dans un état où la décision n'a pas eu lieu, tous les sites ont (au moins) un bit r à 0. Donc $F >= N$.
    - Supposons qu'il n'y a pas d'émission possible, les $(N - K)$ sites n'ayant pas émis ont (au moins) un deuxième bit r à 0. Donc, $F >= N + (N - K) = 2N-K$. Mais comme $M = 0$, la formule générale de F donne $F = 2N - K - 2$. On arrive donc à une *contradiction*. Donc, il y a des émissions possibles.

Note : **Un site *i* peut émettre lorsqu'il n'a qu'un r_{ij} à 0**

2. L'algorithme de l'arbre

- **En prenant la contraposée du *Théorème 1*: s'il n'y a ni émission ni réception possible, alors on est dans un état permettant la décision.**
  - Conséquence : comme le nombre d'émissions (donc de réceptions) est borné par le nombre de sites N (chaque processus n'envoie au plus qu'un message), on parvient toujours à une décision dans un temps fini.

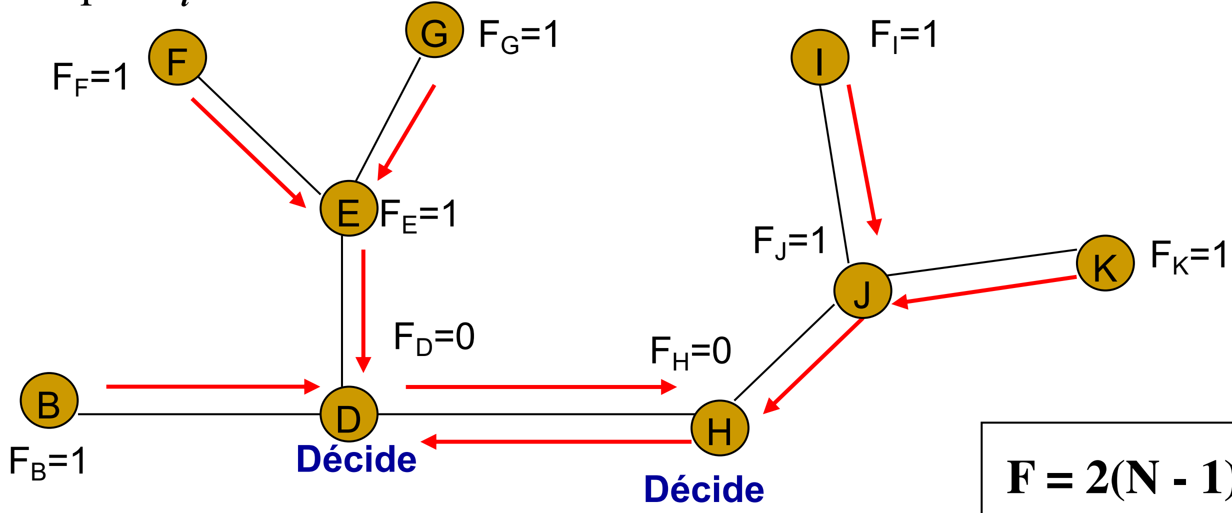
2. L'algorithme de l'arbre

- **Montrer que dans un état terminal (plus d'émission, de réception ou de décision possible), tous les sites ont émis une fois.**
  - **Preuve par contradiction**
    - Supposons qu'un site p_0 n'a pas encore émis.
      - Soit tous les voisins de p_0 ont émis. Comme ils n'ont pas reçu de message de p_0, c'est donc à lui qu'ils ont envoyé. Donc, p_0 a reçu un message de tous ses voisins et il peut décider (il peut aussi émettre). Le fait qu'il peut émettre ***contredit*** le fait que l'état est terminal.

      - Soit au moins un de ses voisins n'a pas émis : soit p_1 ce voisin. Si p_1 ne peut pas émettre, c'est qu'au moins un autre de ses voisins (p_2) ne lui a pas envoyé de message, donc n'a pas émis. Le site p_2 doit lui aussi avoir un deuxième voisin qui n'a rien envoyé. Comme le graphe est acyclique, il ne peut pas s'agir de p_0 mais forcément d'un autre site p_3. En itérant le raisonnement, on conclut qu'aucun site n'a émis. Or comme les feuilles peuvent émettre initialement, on aboutit à une ***contradiction***.

2.L'algorithme de l'arbre

- **Montrer qu'il y a exactement deux décideurs.**
  - Lorsque tous les sites ont émis, et que leurs messages sont arrivés, on a (K = N, M = 0) : $\boldsymbol{F = N - 2}$.
  - Soit $\boldsymbol{F_i}$ le nombre de bits à 0 pour le site $\boldsymbol{i}$. Comme $\boldsymbol{i}$ a émis, $\boldsymbol{F_i <= 1}$. $\boldsymbol{F}$ est la somme des $\boldsymbol{F_i}$. On a donc $\boldsymbol{(N - 2)}$ sites tels que $\boldsymbol{F_i = 1}$. Donc il n'y a que 2 sites tels que $\boldsymbol{F_i = 0}$. Ces deux sites sont les décideurs.



$$\boldsymbol{F = 2(N - 1) - (K - M)}$$

Note : **Un site *i* peut émettre lorsqu'il n'a qu'un r_{ij} à 0**

2. L'algorithme de l'arbre

- **Conclusions :**
  - Il y a exactement ***deux décideurs***
    - Les deux décideurs sont voisins
    - Le dernier nœud dont un décideur a reçu un message est aussi un décideur.
  - Dans un état terminal, tous les nœuds ont émis une fois
    - Il n'y a qu'un message qui circule dans un lien sauf celui entre les 2 décideurs où circule deux messages
    - ***Complexité en terme de messages*** :
      - Nb_{lien} d'un arbre = N-1 => Nb message = (N -1)+1 = N
    - ***Complexité en temps*** :
      - O(D) où D= diamètre de l'arbre.
  - Algorithme ***n'est pas décentralisé*** parce que si Π_0 contient d'autres nœuds que les feuilles alors Π_0 n'est pas un ensemble d'initiateurs.

3. Algorithme de l'Echo

- Proposé par Chang [1982]
- Topologie arbitraire
  - Graphe connexe bidirectionnel
- Algorithme centralisé – un seul initiateur
- Principe de l'algorithme
  - *initiateur* :
    - envoie un message à tous ses voisins
    - lorsqu'il a reçu un message de tous ses voisins, il décide
  - Un nœuds *non-initiateur* :
    - sauvegarde le lien par où le premier message a été reçu ("père")
    - émet à tous les voisins sauf le père
    - lorsqu'il a reçu un message de tous ses voisins, il envoie un message à son "père"

3. Algorithme de l'Echo

<> : message vide.

Variables :

set $Vois_p$; /* ensemble de voisins de *p**/

boo $Rec_p[q]$ = false; $\forall q \in Vois_p$ /*contrôle réception message*/

int $père_p$ = nil;

***p* initiateur :**

S_p : { spontanément une fois}

$\forall q \in Vois_p$, envoie <> à *q*

R_p : { Un message <> arrive de *q* }

réception de <>;

$Rec_p[q]$= true;

D_p : {$\forall q \in Vois_p : Rec_p[q]$}

Décision

***p* non_initiateur :**

R_p : { Un message <> arrive de *q* }

réception de <>;

$Rec_p[q]$= true;

if ($père_p$ = nil)

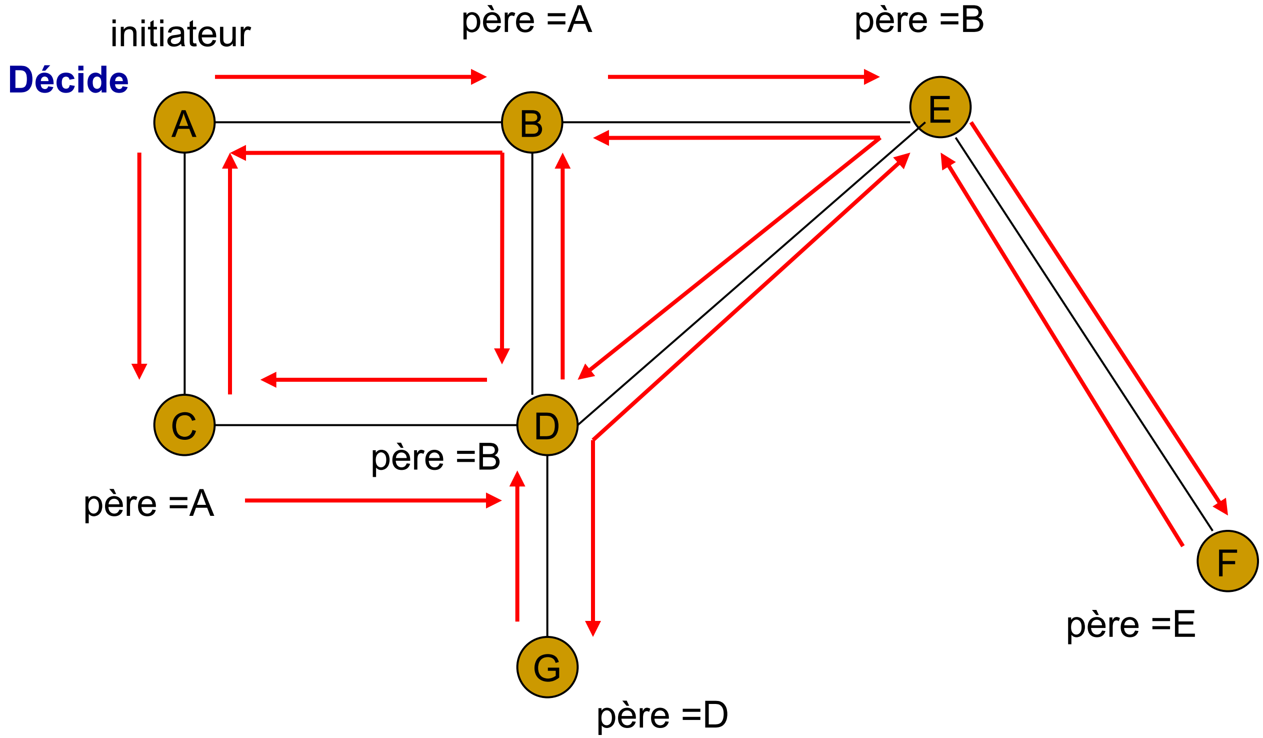
$père_p$ = q;

$\forall r \in Vois_p - \{q\}$, envoie <> à r

S_p : { $\forall q \in Vois_p$, : $Rec_p[q]$}

envoie <> à $père_p$

3. Algorithme de l'Echo



3. Algorithme de l'Echo

- **Conclusions :**
  - L'initiateur est le décideur
  - Complexité en terme de messages
    - 2* Nb_{lien} (N_{blien} = nombre de liens)
  - Complexité en terme de temps (en moyenne)
    - *O*(D) où D=diamètre du réseau en moyenne
    - O(N) dans le pire des cas
  - Possibilité de construire un arbre de recouvrement (voir TD)

4. Algorithme de la Phase

- Topologie arbitraire
  - Graphe orienté fortement connexe
- Algorithme décentralisé et symétrique
- Diamètre *D* du réseau est connu de tous les sites
- Principe de l'algorithme :
  - Chaque processus envoie *D* fois un message à tous ses voisins sortants.
  - Un processus n'a le droit d'émettre un message à tous ses voisins sortants pour la $(i+1)^{ème}$ fois qu'après avoir reçu le $i^{ème}$ message de tous ses voisins entrants.
  - Un processus décide lorsqu'il a reçu D messages de tous ses voisins entrants.

4. Algorithme de la Phase

Variables :

set In_p ; /* ensemble de voisins de *p entrant* */
set Out_p ; /* ensemble de voisins de p sortant */
int $RCount_p[q]$ = 0; $\forall$q є In_p /*contrôle réception message*/
int $SCount_p$=0 /*contrôle envoi message*/

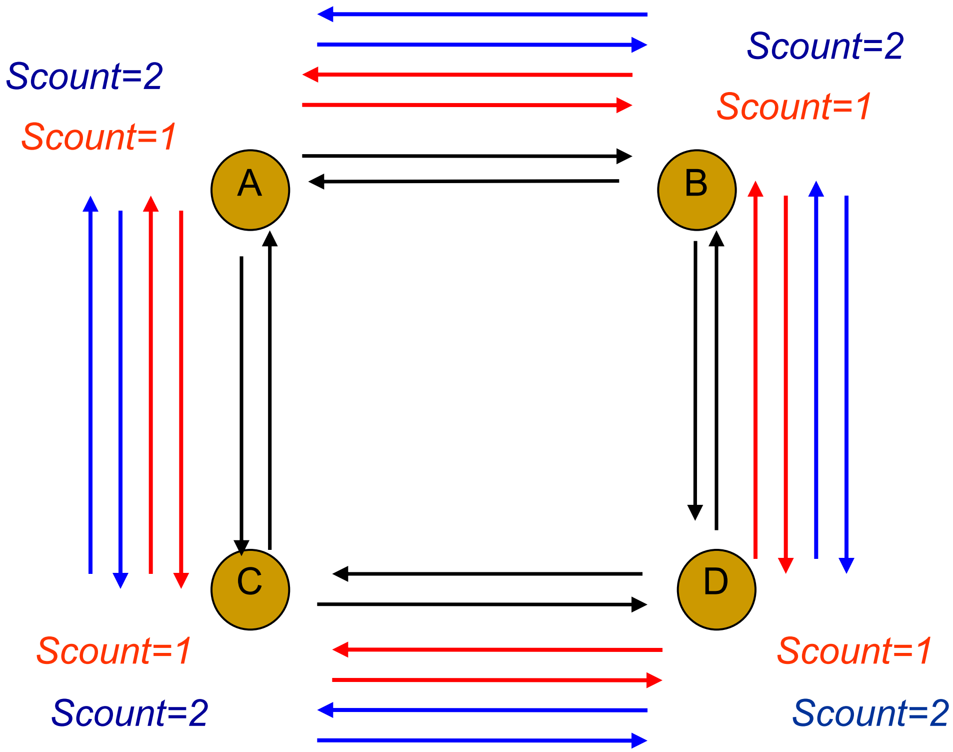
R_p : { Un message <> arrive de *q* }
réception de <>;
$RCount_p[q]$++;

S_p : { $\forall$ *q* є In_p : $RCont_p[q] \geq SCount_p$ et $SCount_p < D$}
forall r є Out_p envoi <> à r;
$SCount_p$++;

D_p : {$\forall$q є In_p : $RCount_p[q] \geq D$ }
Décision

Observation: La primitive S_p doit être exécutée initialement par (au moins) un processus, l'initiateur.

4. Algorithme de la Phase



Diamètre =2

4. Algorithme de la Phase

- **Plusieurs messages peuvent être envoyés sur un lien**
- **Tous les processus peuvent décider**
  - Plus d'émission ni de réception possible
- **Complexité :**
  - Messages = Nb_{lien}*D Nb_{lien} = nombre de lien
  - Temps= O(D) D= diamètre

Résumé Algorithmes par Vague

Algori-thme	Topo-logie	Centr./ Décen.	Déci-deur	Symé-trie	Nb. Mess.	Temps
Anneau	Anneau unidirec.	Centralisé	1 initiateur	Non	N	N
Arbre	Arbre bidirect.	Pas centr. Pas décen.	2	Oui	N	O(D)
Echo	arbitraire bidirect.	centralisé	1 initiateur	Non	$2*Nb_{lien}$	O(D)
Phase	arbitraire	décentralisé	Tous	Oui	$\mathbf{Nb_{lien}*D}$	**O(D)**

Bibliography

- Gerard Tel, ***Introduction to Distributed Algorithms***, Cambridge University Press, 1994, 2000 (2ème edition).
- Gerard Tel, **Total Algorithms**, *ALCOM: Algorithms Review, Newsletter of the ESPRIT II Basic Research Actions Program Project no. 3075*
- Ernest J.H. Chang, ***Echo Algorithms: Depth Parallel Operations on General Graphs***, IEEE Transactions on Software Engineering, Vol. 8, No. 4, July 1982
- Adrian Segall. **Distributed network protocols,** IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-29, 1983.