Teoría: Fundamentos de probabilidad

Una probabilidad es (valga la redundancia) una medida de qué tan probable es que pase algo. Llamamos a este algo, un *evento*.
Un evento que no pasa nunca tiene probabilidad 0, si pasa siempre tiene probabilidad 1, y, si pasa a veces y otras veces no, tiene una probabilidad estrictamente entre 0 y 1.
La forma en la que definimos la probabilidad P de un **evento** E en un **universo** S de posibilidades es según la frecuencia con la que pasa. Es decir:

$$P(E) = \frac{|\{s \text{ tq } s \in S \wedge \text{ocurre } E \text{ en } s\}|}{|S|}$$

Por ejemplo, la probabilidad de que un dado de 6 caras salga impar es:

$$\frac{|\{s \text{ tq } s \in \{1,2,3,4,5,6\} \wedge \text{s es impar}\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}|} = \frac{|\{1,3,5\}|}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Teoría: Operaciones con probabilidades

Con esta forma de pensar la probabilidad como casos favorables sobre casos posibles, podemos definir **el complemento, la unión y la intersección de eventos**.

- El complemento de un evento $\overline{E}$ son los casos en los que no pasa. $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$
- La unión de dos eventos es cuando pasa uno o el otro. Los casos favorables son la unión de los casos favorables para cada evento. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
- La intersección de dos eventos es cuando pasa uno y el otro. Los casos favorables son la intersección de los casos favorables para cada evento. Vamos a definir esta proba más adelante.

Teoría: Probabilidad condicional e independencia

La probabilidad condicional de un evento A dado otro evento B es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Esta es *la probabilidad de que pasen A y B, dado que pasa B*.
Con esto se puede definir la probabilidad de la intersección de dos eventos como:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Los eventos se definen como *independientes* cuando

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Cuando pasa esto,

$$P(A|B) = P(A) \text{ y } P(B|A) = P(B)$$

Problema del álbum de figuritas

Tengo un álbum de ovejas con bufandas, de N figuritas en total, que está vacío.
Para llenarlo compro sobres cerrados, que tienen figuritas pero no sé cuáles son. Para simplificar vamos a suponer que cada sobre trae una única figurita. No puedo cambiar figuritas con nadie. No sé por qué.
¿Cuál es la **esperanza** de la cantidad de sobres que tengo que comprar hasta llenar el álbum?
Cotas: $n \leq 10^8$.

Teoría: Variables aleatorias y esperanza

Una **variable aleatoria (VA)** es un valor generado por un proceso aleatorio. Por ejemplo, si tiramos dos dados aleatoriamente, **la suma de sus valores** es una VA.
Para una VA X y un valor x podemos definir $P(X = x)$ como la probabilidad del *evento* en el que X vale x.

Se puede definir sobre la VA X, la **esperanza** $E(X)$ como el valor que tiene *en promedio*. La fórmula para calcularla es:

$$E(X) = \sum_x P(X = x) \cdot x$$

para x recorriendo todos los valores posibles de X.
Por ejemplo, al tirar un dado:

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{7}{2}$$

Teoría: Linealidad de la esperanza

Una propiedad muy útil de la esperanza es su **linealidad**. Es decir:

$$E(X_1 + X_2 + ... + X_k) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$$

Por ejemplo, si tiro dos dados, y defino X_1 como el valor del primer dado, y X_2 como el del segundo, podemos definir la esperanza de la suma usando la linealidad:

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

No hace falta que las VA sean independientes, ni ninguna otra condición. Esto vale SIEMPRE.

Teoría: Distribuciones conocidas

Una **distribución de probabilidad** es una forma de describir una VA. Nos permite saber, para cada x, cuánto vale $P(X = x)$. Las distribuciones se pueden dar con una tabla, que para cada valor muestre la proba, o con una fórmula que permite calcularla en cada valor de x, y además calcular su esperanza.

Además, para ciertos procesos aleatorios comunes, ya se conocen estas fórmulas. Si en algún problema descubren que el proceso que les muestran se describe con una distribución conocida, pueden aplicar las fórmulas para esta distribución.

Teoría: Fórmulas para distribuciones conocidas

- VA **uniforme**: la VA puede valer un entero tq $a \leq x \leq b$ y todos los números tienen la misma probabilidad.

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$

- VA de **Bernoulli**: vale 0 ó 1, con probabilidad p de valer 1.

$$P(X = 1) = p$$

$$P(X = 0) = 1 - p$$

$$E(X) = p$$

Teoría: Fórmulas para distribuciones conocidas

- VA **binomial**: es la suma de n Bernoullis.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

$$E(X) = np$$

- VA **geométrica**: en un proceso que evalúa Bernoullis de probabilidad p, representa la cantidad de intentos hasta el primer éxito.

$$P(X = x) = (1-p)^{x-1} \cdot p$$

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

Resolución: problema del álbum de figuritas

Idea: pensarlo como una dinámica. ¿Cuál es el costo de conseguir la siguiente figurita? ¿Qué tipo de proceso aleatorio es?

Comprar un sobre teniendo k figuritas en la mano es una Bernoulli de probabilidad de éxito $\frac{N-k}{N}$. La cantidad de intentos hasta el primer éxito es una geométrica. La esperanza de la geométrica es el inverso, es decir $\frac{N}{N-k}$.

La definición recursiva es:

$$\text{Sobres}(N) = 0$$

$$\text{Sobres}(k) = \frac{N}{N-k} + \text{Sobres}(k+1)$$

y la respuesta al problema es Sobres(0)

Problema de los portales

El brujo Álvaro le prestó una varita mágica a la maga Mafalda hace varios meses. Un día se cansó y decidió ir a reclamarla. Álvaro vive en el extremo inferior izquierdo, en el casillero $(1, 1)$ y Mafalda en el (M, N) (el extremo opuesto) de una grilla de $M \times N$. Cada día intenta llegar hasta la casa caminando **solamente hacia la derecha y arriba, de forma aleatoria (se mueve en una dirección con probabilidad $1/2$)**.
Mafalda, como no quiere devolver lo que pide prestado, puso K portales mágicos en K casilleros. Cuando Álvaro se para sobre uno de ellos, se teletransporta a su casa hasta el día siguiente.
¿Cuál es la esperanza de la cantidad de días que tienen que pasar hasta que Álvaro pueda llegar a la casa de Mafalda?
Cotas: $M, N \geq 1$, $M \times N \leq 10^8$, $K \leq \min(10^7, M \times N - 2)$. No hay un portal en la casa de ningune de les dos.

Resolución: Problema de los portales

Mafalda y Álvaro respectivamente

Resolución: Problema de los portales

Primera idea: supongamos que la probabilidad de llegar a la casa sin caer en un portal es p. ¿Podemos calcular la esperanza en ese caso?

¡Sí! Es una geométrica. Sólo que el experimento Bernoulli que tiramos es muy complejo. Pero la probabilidad de ganar cada día es la misma.
¿Cómo calculamos esa probabilidad? Penśandolo como una dinámica (?)

Resolución: Problema de los portales

$$\begin{pmatrix} \_ & \_ & M \\ \_ & \_ & P \\ A & \_ & \_ \end{pmatrix}$$

Resolución: Problema de los portales

$$\begin{pmatrix} \_ & \_ & 1 \\ \_ & \_ & 0 \\ \_ & \_ & \_ \end{pmatrix}$$

Resolución: Problema de los portales

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \_ & \_ & 0 \\ \_ & \_ & 0 \end{pmatrix}$$

Resolución: Problema de los portales

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3/4 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

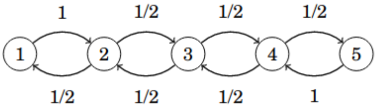
Problema de Mafalda y el jarrón

Mafalda es una gata a la que le gusta tirar cosas al piso.
Vive en una casa con habitaciones numeradas de 1 a N inclusive, y tiene su camita en la habitación 1. En la habitación N hay un jarrón de porcelana china. Si Mafalda llega a entrar a la habitación N, el jarrón no la cuenta.
Las habitaciones están unidas formando un grafo con P puertas (que se pueden recorrer en un sentido o en otro).
Un día, la gatita se levanta de su cama y decide caminar por la casa de la siguiente forma. Cada vez que llega a una habitación, decide por qué puerta ir de forma aleatoria y equiprobable (puede elegir volver por donde vino).
¿Cuál es la probabilidad de que, después de K pasos, la gata haya encontrado el jarrón de porcelana en algún momento?
Cotas: $N \leq 500$, $K \leq 1000000$, P no está acotado pero el grafo no tiene ejes múltiples ni autoejes.

Teoría: Cadenas de Markov

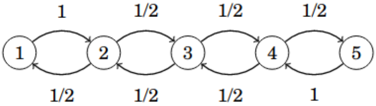
El problema anterior no se puede atacar con la estrategia de definirlo como una dinámica, porque el diagrama de estados posibles tiene ciclos.
Necesitamos algo más poderoso.

Vamos a modelar este problema como un **proceso de Markov**. Este es un proceso aleatorio con distintos estados y transiciones entre ellos, con cierta probabilidad. Por ejemplo, supongamos que tenemos este proceso que empieza siempre en el nodo 1.



Podemos describir el proceso usando un **vector de probabilidad**, un vector cuyos componentes son probabilidades que suman 1.

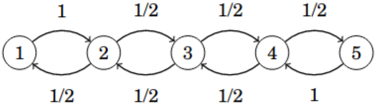
Teoría: Cadenas de Markov



Describimos el hecho de empezar en el nodo 1 siempre como el vector $[1, 0, 0, 0, 0]$.
Si nos movemos siguiendo las probabilidades de las transiciones, como el nodo 1 siempre va al 2, llegamos al vector $[0, 1, 0, 0, 0]$.
Desde el nodo 2 hay un 50 % de probabilidad de ir al nodo 1 o al 3, por lo tanto el vector que representa el siguiente estado es $[1/2, 0, 1/2, 0, 0]$.
Ahora para simular el siguiente paso hay que sumar el resultado que proviene del estado 1 más el que proviene del 3. Es decir, pensamos al vector anterior como

$$[1/2, 0, 0, 0, 0] + [0, 0, 1/2, 0, 0]$$

Teoría: Cadenas de Markov



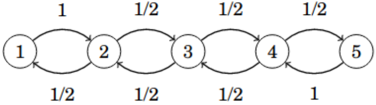
$[1/2, 0, 0, 0, 0] \rightarrow [0, 1/2, 0, 0, 0]$ (es lo mismo que en el paso 1)

$[0, 0, 1/2, 0, 0] \rightarrow [0, 1/4, 0, 1/4, 0]$

$[1/2, 0, 1/2, 0, 0] \rightarrow [0, 3/4, 0, 1/4, 0]$ porque es la suma.

Así se pueden simular todos los pasos que se quieran del proceso.

Teoría: Cadenas de Markov

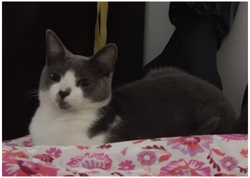


También se puede describir al proceso como una **matriz de transición** en la que multiplicar un vector de probabilidades dado por esta matriz hace avanzar la simulación un paso.
Por ejemplo para este proceso, la matriz es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

si multiplican $p_{i+1} = Mp_i$. Si no es la transpuesta.

Resolución: problema de Mafalda y el jarrón

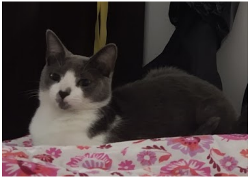


Este es un proceso de Markov. Su matriz de transición M es:

$$M[x][y] = \begin{cases} \frac{1}{\text{grado}(x)} & \text{si } (x, y) \text{ es una arista} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

El nodo N va sólo con probabilidad 1 a sí mismo, para que no se pueda salir luego de encontrarlo.
El vector inicial v_0 es el vector $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$.
El resultado al problema es tomar la componente número N del vector $v_0 M^K$, es decir $(v_0 M^K)[N]$.

Resolución: problema de Mafalda y el jarrón



Hablemos de complejidades. Hay dos posibilidades:

- La primera es multiplicar v_0 por M K veces. Cada operación es $O(N^2)$. En total queda $O(KN^2)$.
- La segunda es usar exponenciación logarítmica de matrices para obtener M^K. Esto queda en $O(log(K)N^3)$

De yapa: problema del auto de Carolina

Carolina estacionó el auto en algún lugar hoy a la mañana y no lo encuentra. Sabe que lo dejó sobre una avenida que tiene $2N$ cuadras de largo, y se fue a su trabajo en el medio de la avenida (es decir, entre las cuadras N y $N+1$).
Tiene una probabilidad P_i de encontrarlo al llegar a cada cuadra.
¿Cuál es la esperanza de la cantidad de cuadras que va a recorrer hasta encontrar el auto, si usa la estrategia óptima para buscarlo?
Cotas: $N \leq 5 * 10^3$ (o sea $2N \leq 10^4$), y $\sum_{i=1}^{2N} P_i = 1$.

Pista: pensarlo como una dinámica (?)

No se pierdan el libro del finlandés

Yo me basé en este libro: https://cses.fi/book/book.pdf
Si no lo conocen, tiene teoría resumida de muchos muchos temas relevantes para la programación competitiva y está muy interesante.