

# O Potencial Efetivo Gaussiano e Equações Diferenciais

## Parciais Estocásticas

Fabrício de Souza Amaral

2 de Novembro de 2007

# Agradecimentos

- A meu pai Rogério Amaral e minha mãe Izilda Souza pelo incondicional zelo e lições de humildade ao longo destes 26 anos.
- Aos amigos André Gavini e Érico Goulart cujas discussões acerca do conhecimento geraram diversos papers não escritos. Ao amigo Rômulo Abreu pela ampliação de minha visão de mundo social. À namorada Priscila Martinho pelo absoluto apoio em minhas trajetórias curvas.
- Ao CBPF como um todo constituído de pesquisadores e funcionários por oferecer a estrutura necessária e suficiente para o desenvolvimento deste trabalho.
- Ao CNPq pelos quatro anos de bolsa.

# Resumo

Investigamos equações diferenciais parciais estocásticas sujeitas a correlações de ruído temporalmente brancas e translacionalmente invariantes através de um quadro não-perturbativo. O método coloca as equações estocásticas em uma forma de integrais funcionais, então é utilizada a aproximação variacional do potencial efetivo Gaussiano, que é uma ferramenta útil para a descrição de quebra espontânea de simetria. Aplicamos tal método à equação Kardar-Parisi-Zhang e encontramos que o sistema exhibe quebra espontânea de simetria em dimensões Euclidianas  $(1+1)$ ,  $(2+1)$  e  $(3+1)$ , proporcionando informações sobre a evolução das configurações do sistema devido à presença do ruído. A renormalização é feita através do método usual das diferenças entre as integrais  $I_N - I_m$ , que não necessita de uma explícita regularização.

# Abstract

We investigate arbitrary stochastic partial differential equations subject to translation invariant and temporally white noise correlations from a nonperturbative framework. The method that we expose first casts the stochastic equations into a functional integral form, then it makes use of the Gaussian effective potential approach, which is an useful tool for describing symmetry breaking. We apply this method to the Kardar Parizi Zhang equation and find that the system exhibits spontaneous symmetry breaking in  $(1+1)$ ,  $(2+1)$  and  $(3+1)$  Euclidean dimensions, providing insight into the evolution of the system configuration due to the presence of noise correlations. A simple and systematic approach to the renormalization, without explicit regularization, is employed.

# Lista de Figuras

1.1	Mapa que associa cada ponto do $\mathfrak{R}^n$ à um ponto na reta real. O mapa $f$ é 1-1 se sua inversa $f^{-1}$ também é um mapa, <i>into</i> se ele está definido em todos os pontos do $\mathfrak{R}^n$ , <i>onto</i> se, além disso, cobrir todos os pontos de $\mathfrak{R}$ e uma bijeção se for 1-1 e <i>onto</i> . . . . .	10
1.2	Projeção pictórica das componentes do vetor $f$ em uma determinada base de dimensão infinita representada por uma linha contínua em $\mathcal{A}$ . . . . .	11
1.3	Representação do vetor $f$ projetado na base de Fourier com apenas a componente $\tilde{f}(k_1)$ sendo não-nula. Para fins qualitativos, a parte imaginária foi descartada. . . . .	12
1.4	Representação pictórica da projeção do vetor $f$ na base de Fourier. Como se fosse uma corda sujeita a infindáveis modos de vibração, pode-se moldar a forma de qualquer função através do princípio de superposição. . . . .	13
1.5	Representação pictórica do mapeamento do espaço de funções $\mathcal{A}$ no plano complexo. . . . .	14
2.1	Ilustração esquemática de uma interface unidimensional $\phi(x, t)$ influenciada por uma força externa $F$ . A linha pontilhada mostra que a interface possui uma orientação bem definida. . . . .	33

- 2.2 O efeito do termo linear na morfologia da interface. Em (a), a interface possui uma flutuação (calombo). Em (b), é mostrado o termo linear  $\nu \nabla^2 \phi$ , que é negativo no máximo de  $\phi(x, t)$ . Em (c), após um tempo  $t + \epsilon$ , a linha contínua mostra que o termo linear faz com que a altura original seja reduzida e redistribuída pela interface, ou seja, material é tirado do ponto mais alto de  $\phi(x, t)$  e redistribuído igualmente pelos dois lados mantendo a massa total constante, como um mecanismo conservativo de relaxação. Os efeitos do ruído e do termo não-linear não foram levados em consideração. . . . . 35
- 2.3 O efeito do termo não-linear na morfologia da interface na equação KPZ. (a) Suponha que em um tempo  $t$  a interface possua um 'calombo'. (b) O termo  $\frac{\lambda}{2}(\nabla \phi)^2$ , que é sempre positivo, correspondente ao tempo  $t$ . (c) Em um tempo  $t + \epsilon$  podemos ver através da linha contínua que o termo não-linear aumenta a altura da interface, adicionando mais 'material' nas partes onde a inclinação local é maior, então a altura média da interface aumenta. Os efeitos do ruído e do termo linear não foram levados em consideração. . . . . 36
- 3.1 A linha contínua descreve a energia potencial efetiva relacionada às contribuições do momento angular e do potencial da força gravitacional. . . . . 42
- 3.2 O potencial Coulombiano. O efeito das flutuações quânticas é representado em termos de um potencial efetivo (curva pontilhada) . . . . . 43
- 3.3 Potenciais efetivos para alguns exemplos de poço duplo. Em (a) e (c) os parâmetros são tais que efeitos quânticos são relativamente pequenos. Em (b) e (d) os efeitos quânticos são consideráveis e alteram a física qualitativamente. 44

- 4.1 O potencial efetivo Gaussiano para a equação KPZ de dimensão Euclideana (2+1). A linha contínua do poço único mostra o vácuo simétrico quando  $\lambda < \lambda_c$ . O poço duplo indica uma transição de fase que faz com que a simetria associada ao vácuo do sistema seja espontaneamente quebrada e a linha pontilhada mostra o regime onde a correlação do ruído está ausente ( $\mathcal{A} = 0$ ). . . . . 75
- 4.2 O potencial efetivo Gaussiano para a equação KPZ de dimensão Euclideana (3+1). A linha contínua do poço único mostra o vácuo simétrico quando  $\lambda < \lambda_c$ . O poço duplo indica uma transição de fase que faz com que a simetria associada ao vácuo do sistema seja espontaneamente quebrada e a linha pontilhada mostra o regime onde a correlação do ruído está ausente ( $\mathcal{A} = 0$ ). . . . . 76

# Conteúdo

<b>0</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>O Cálculo Funcional</b>	<b>9</b>
1.1	Espaço de funções, Projeções e Funcionais . . . . .	9
1.2	A derivada funcional . . . . .	13
1.3	Integrais funcionais . . . . .	15
<b>2</b>	<b>As Equações Diferenciais Parciais Estocásticas</b>	<b>23</b>
2.1	Equações Diferenciais Estocásticas em Física . . . . .	24
2.2	O Ruído . . . . .	26
2.3	Crescimento de Superfícies e a Equação KPZ . . . . .	31
2.4	Sistemas do Tipo Reação e Difusão . . . . .	37
<b>3</b>	<b>O Potencial Efetivo Gaussiano</b>	<b>40</b>
3.1	Potenciais Efetivos . . . . .	41
3.2	O Potencial Efetivo Gaussiano em Mecânica Quântica . . . . .	46
3.3	O Potencial Efetivo Gaussiano em Teoria Quântica de Campos . . . . .	51
3.4	Renormalização . . . . .	54
<b>4</b>	<b>As EDPE's e o PEG</b>	<b>60</b>



4.1	O Funcional Gerador . . . . .	62
4.2	A Aproximação Variacional . . . . .	65
4.3	O Potencial Efetivo Gaussiano Associado à Equação KPZ . . . . .	68
4.3.1	Renormalização . . . . .	72
4.3.2	KPZ (2+1) . . . . .	73
4.3.3	KPZ (3+1) . . . . .	75
4.4	Discussão . . . . .	76

# Capítulo 0

## Introdução

De um certo ponto de vista, o assunto exposto no presente trabalho é uma *análise da validade* da introdução de aleatoriedade (refletida no sistema através das flutuações da grandeza aleatória em si) em equações diferenciais.

As equações diferenciais estocásticas refletem nada mais do que a nossa ignorância descritiva em uma grande variedade de fenômenos físicos. A inserção da aleatoriedade como ferramenta de análise abrange desde o mundo microscópico<sup>1</sup> até o meso e o macroscópico. Como tais escalas descrevem sistemas físicos através de teorias diferentes, podemos concluir o grau de generalidade das ferramentas aleatórias na ciência em geral, sobretudo no aspecto fenomenológico. A presença da casualidade faz com que a descrição perca seu caráter determinístico<sup>2</sup>. Na ausência de uma solução determinística, muitas vezes o cientista recorre a outros métodos de análise do problema, métodos estes que se compatibilizam com o caráter aleatório introduzido no sistema como consequência da questão relativa à ignorância, ou

---

<sup>1</sup>Note que não me refiro à aleatoriedade intrínseca de sistemas quânticos na interpretação de Copenhagen, e sim do uso da aleatoriedade como uma ferramenta

<sup>2</sup>De fato, desde os primórdios das discussões sobre a hipótese atômica tal questão já era abordada de uma forma qualitativa

seja, a estocasticidade passa não só a gerar uma aleatoriedade na dinâmica, mas também ser a *principal* ferramenta de análise do fenômeno. Então, a descrição de determinados sistemas quânticos não é quantitativamente diferente que em sistemas clássicos sujeitos a uma determinada casualidade. Essa questão é um dos focos deste trabalho, onde métodos de aproximação e análise usualmente utilizados para descrever fenômenos quânticos são utilizados para a obtenção de informação sobre dinâmicas estocásticas.

Em teoria quântica de campos (TQC), infelizmente para qualquer teoria mais complicada que uma teoria livre, as dinâmicas dos campos são muito complicadas para serem estudadas exatamente. Com o intuito do progresso na análise de tais teorias, métodos de aproximação precisam ser usados. As duas maiores ferramentas utilizadas são a teoria de perturbação e os potenciais efetivos. Teorias de perturbação é talvez a mais poderosa ferramenta na física atual; entretanto, seu caráter descritivo é limitado quando correções quânticas se tornam maiores. Outra aproximação é formular um potencial efetivo que inerentemente compensa os efeitos quânticos e estudar o sistema com uma visão clássica. De fato, há muitas formulações de potenciais efetivos para simplificar teorias quânticas de campos, todas com diferentes propriedades, vantagens e desvantagens. Uma opção atrativa e de particular interesse neste trabalho é o potencial efetivo Gaussiano.

O potencial efetivo Gaussiano além de ser uma elegante aproximação não-perturbativa, também é uma ferramenta útil para encontrar quebra de simetrias em teorias de campos escalares [1, 2], assim como em eletrodinâmica escalar [3] e o modelo de Higgs U(1) [4]. Essencialmente, o conceito de potencial efetivo Gaussiano é uma formulação do nosso conhecimento intuitivo das flutuações quânticas que podem ser generalizadas para a teoria quântica de campos. Comparado com outros potenciais efetivos, tal como o potencial efetivo a um laço, o potencial efetivo Gaussiano tem sido exaltado por Stevenson [1] como sendo (i) con-

ceitualmente superior, (ii) mais digno de confiança tanto em termos qualitativos quanto quantitativos, e (iii) igualmente fácil de calcular.

Nos últimos anos, uma tênue relação entre as equações diferenciais parciais estocásticas (EDPS's) e teoria quântica de campos emergiu, proporcionando um caminho para a investigação de fenômenos envolvendo a física clássica via técnicas provenientes da física quântica [5, 6, 7, 8, 9, 12, 13]. Em particular, foi desenvolvido um método perturbativo que associou o potencial efetivo a um laço à equações diferenciais parciais estocásticas arbitrárias [14]. Esse método forneceu informações acerca da quebra espontânea de simetria e estruturas de fase de alguns modelos estocásticos interessantes [15],[16].

A princípio, a análise de equações estocásticas baseada no conceito de quebra de simetria pode parecer pouco usual. Porém, se alguns exemplos forem abordados, chegaremos a uma conclusão bastante clara. Por exemplo, os modelos contínuos de crescimento de superfície tais como a equação de Edwards-Wilkinson [18], a equação Kardar-Parisi-Zhang (KPZ)[17], as respectivas interpretações das mesmas em outros cenários (como a equação de Burgers em dinâmica de fluidos), as equações estocásticas do tipo reação e difusão como em cinético-química, onde as mesmas descrevem a evolução espaço-temporal de espécies químicas se difundindo e reagindo confinadas a alguma região geométrica, a generalização de tal evolução para sistemas biológicos, tais como bando de zebras, manchas de leopardos, a estrutura radial de uma *Acetabularia* (veja Murray [19], Walgraef [20], Ball [21] para a discussão de outros exemplos específicos) e muitos outros.

Todos os exemplos citados estão sempre em evolução, ou seja, temos a presença de padrões espaciais de não-equilíbrio. Então, é natural que haja quebras de simetrias contínuas. A ferramenta mais apropriada para o estudo de padrões de simetria é a noção de potencial. Se alguma noção de potencial é disponível, então a análise de seus extremos leva a uma iden-

tificação dos vácuos estáveis e metaestáveis, além de suas devidas relações com o sistema físico em questão.

Introduzimos nesse trabalho uma nova aproximação para a investigação de equações diferenciais parciais estocásticas arbitrárias [10]. Essa aproximação consiste parcialmente em um cálculo não-perturbativo do potencial efetivo, o potencial efetivo Gaussiano. Fazemos uso da aproximação variacional desenvolvida em [11] e do programa de quantização estocástica [12],[9],[14] de modo que obtemos o potencial efetivo Gaussiano para EDPE's arbitrárias. O potencial efetivo Gaussiano, sendo não-perturbativo, não inclui somente a primeira ordem do potencial efetivo como a aproximação a um laço, mas também contém informação das contribuições provenientes de ordens superiores. A vantagem dessa aproximação é que quando as correlações se tornam mais relevantes, o PEG é mais confiável além de ser invariante sob o grupo de renormalização<sup>3</sup>[1, 2], diferentemente de cálculos perturbativos que não são independentes de prescrição. Então, do mesmo jeito da análise de flutuações quânticas, mostramos que, através da expressão do potencial efetivo e da investigação das propriedades de simetria, é possível aplicar as mesmas idéias, em um contexto não-perturbativo, para equações diferenciais parciais estocásticas.

Como um primeiro exemplo, aplicamos o método à equação Kardar-Parisi-Zhang sujeita a um campo estático. O campo estático é conveniente para obter um paralelo com a teoria de campo  $\lambda\phi^4$  assim como comparar os resultados perturbativos e não-perturbativos. Devido ao efeito das correlações do ruído, encontramos nas dimensões Euclidianas (1+1), (2+1) e (3+1), uma transição de fase de segunda ordem. O potencial efetivo Gaussiano vai de uma forma de poço único para um poço duplo a medida que o acúmulo de material aumenta,

---

<sup>3</sup>Isso significa que todas as maneiras de definir os parâmetros renormalizados são equivalentes, e a questão é encontrar os mais convenientes para o sistema físico em questão.

caracterizando uma quebra espontânea de simetria. Na interpretação de crescimento de superfícies, onde o campo é considerado como a altura da superfície, a quebra espontânea de simetria do vácuo corresponde a uma transição morfológica da superfície relacionada ao parâmetro de adição de material da equação KPZ, ou seja, após o parâmetro atingir um valor crítico, a morfologia da superfície passa a exibir uma outra forma. Após a transição, a superfície passa a ser mais rugosa e sua morfologia exibe uma fidelidade maior no que se espera de um fenômeno de crescimento encontrado na natureza e reproduzido no laboratório, além de induzir um avanço na descrição teórica de fenômenos de crescimento, já que devido à ausência de solução analítica da equação KPZ, essa informação passa a ser importante pois por outros métodos de análise, usualmente focados na classe de universalidade, não há como perceber essa transição de fase morfológica. Acreditamos que a presença da quebra espontânea de simetria no caso de  $(3+1)$  é devido ao fato da nossa aproximação ser não-perturbativa, em contraste com os cálculos a um laço [15]. É válido enfatizar que tal método pode ser aplicado à qualquer outra equação diferencial estocástica, sendo que os resultados acima se referem à equação KPZ em particular.

Este trabalho se divide em quatro capítulos estruturados para se obter uma visão clara e auto-consistente do assunto como um todo. No Capítulo 1, são expostos os conceitos básicos da ferramenta matemática necessária para a compreensão da manipulação algébrica empregada no mesmo. Procurei não apenas fazer uma revisão da literatura<sup>4</sup> mas expôr o cálculo funcional de uma forma mais concisa e elucidatória. O assunto abordado no Capítulo 2 é as equações diferenciais estocásticas, onde a exposição do mesmo não utiliza ferramentas do cálculo estocástico nem análises de classes de universalidade das equações. O foco é dire-

---

<sup>4</sup>No que se refere a livros de física em geral.

cionado na inserção das mesmas como equações fenomenológicas que descrevem fenômenos físicos, além de expôr os conceitos que servem como métodos de análise das mesmas. O Capítulo 3 é dedicado à discussão acerca dos potenciais efetivos, tendo como enfoque o potencial efetivo Gaussiano. Exemplos e exposições de sua validade são encontrados e confrontados com o potencial efetivo a um laço, assim como aspectos do processo de renormalização. O objetivo principal do trabalho, que é investigar as equações diferenciais parciais estocásticas em um quadro variacional através do uso do potencial efetivo Gaussiano, é exibido no Capítulo 4, sendo que os três anteriores servem como base para a compreensão do assunto como um todo.

# Bibliografia

- [1] P. M. Stevenson, Phys. Rev. D **30**, 1712 (1984).
- [2] P. M. Stevenson, Phys. Rev. D **33**, 2305 (1985).
- [3] P. M. Stevenson and I. Roditi, Phys. Rev. D **33**, 2305 (1986).
- [4] R. Ibañes-Meier, I. Stancu, P. M. Stevenson, Z. Phys. C **70**, 307 (1996).
- [5] P. C. Martin, E. D. Siggia e H. A. Rose, Phys. Rev. A **8**, 423 (1973).
- [6] C. De Dominicis and L. Peliti, Phys. Rev. B **18**, 353 (1978).
- [7] T. Sun e M. Plischke, Phys. Rev. E **49**, 5046 (1994).
- [8] E. Frey e U. C. Täuber, Phys. Rev. E **50**, 1024(1994).
- [9] M. Kardar e A. Zee, Nuclear Phys. B **464**, 449-462 (1996).
- [10] F. S. Amaral, I. Roditi *The Gaussian effective potential and stochastic partial differential equations*, Physica A **385**, 137 (2007).
- [11] R. Ibañes-Meier, L. Polley and U. Ritschel, Phys. Lett. B **279**, 106 (1992).
- [12] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, third edition, Clarendon Press, Oxford, (1996).



- [13] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, Princeton (2003).
- [14] D. Hochberg, C. Molina-París, J. Pérez-Mercader, M. Visser, Phys. Rev. E **60**, 6343 (1999).
- [15] D. Hochberg, C. Molina-París, J. Pérez-Mercader, M. Visser, Physica A **280**, 437 (2000).
- [16] D. Hochberg, C. Molina-París, J. Pérez-Mercader, M. Visser, J.Statist.Phys **99**, 903 (2000).
- [17] M. Kardar, G. Parisi, Y. C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **56**, 889-892 (1986).
- [18] A. -L. Barabási, H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge University Press, Great Britain, 1995)
- [19] J. D. Murray, *Mathematical Biology* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1989).
- [20] D. Walgraef, *Spatio-Temporal Pattern Formation* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997).
- [21] P. Ball, *The self-Made Tapestry: Pattern Formation in Nature* (Oxford University Press, Oxford, 1998).

# Capítulo 1

## O Cálculo Funcional

Ao longo das últimas décadas, a exposição do cálculo funcional através de integrais funcionais (ou integrais de trajetória) vem sendo amplamente utilizado na literatura, principalmente nas áreas englobadas pela teoria quântica de campos. O que pretendo expôr neste capítulo é um tratamento um pouco mais sistemático e auto consistente do cálculo funcional<sup>1</sup>, não limitando apenas à exposição do formalismo de integrais de trajetória que, apesar da literatura tratá-lo de uma forma bastante intuitiva devido à idéia de Feynman em associar probabilidades a cada possível trajetória de uma partícula, em geral deixa a desejar no que se refere aos elementos que estão sendo manipulados, tais como os espaços vetoriais, as respectivas projeções dos vetores em uma determinada base e a própria noção de um funcional.

### 1.1 Espaço de funções, Projeções e Funcionais

Seja  $f$  uma função que mapeia o espaço de vetores  $\mathfrak{R}^n$  na reta real, ou seja, associa cada vetor do  $\mathfrak{R}^n$  a um número. Veja a Figura 1.1.

---

<sup>1</sup>No que se refere à aplicação na física em geral.

Figura 1.1: Mapa que associa cada ponto do  $\mathfrak{R}^n$  à um ponto na reta real. O mapa  $f$  é 1-1 se sua inversa  $f^{-1}$  também é um mapa, *into* se ele está definido em todos os pontos do  $\mathfrak{R}^n$ , *onto* se, além disso, cobrir todos os pontos de  $\mathfrak{R}$  e uma bijeção se for 1-1 e *onto*.

Então, como o conjunto das  $n$ -componentes  $\{x_i\}$  de um vetor pode ser representado como um ponto no  $\mathfrak{R}^n$ , a função  $f$  também pode ser representada como um ponto no espaço de funções  $\mathcal{A}$ . A este espaço, podemos associar um conjunto de funções que, desde que sejam linearmente independentes, formam uma base para  $\mathcal{A}$  e constituem um conjunto completo onde pode-se projetar a função  $f$ . Diferentemente do  $\mathfrak{R}^n$ , esta base é contínua, portanto podendo ser representada como uma linha em  $\mathcal{A}$  caracterizando o espaço de funções como sendo um espaço vetorial de dimensão infinita. Veja a Figura 1.2.

Como exemplos de base para  $\mathcal{A}$ , podemos citar a base coordenada que é composta por um conjunto de deltas de Dirac  $\{\delta(x - x')\}$  e também a tão conhecida base de Fourier  $\{e^{ikx}\}$ , mas a princípio qualquer outro conjunto de funções que sejam completas  $\{h(x, x')\}$  formam uma base para o espaço de funções. Será suposto que as bases utilizadas ao longo desse trabalho, além de completas, são ortogonais e normalizadas, já que para qualquer conjunto de funções linearmente independentes podemos utilizar o procedimento de ortogonalização

Figura 1.2: Projeção pictórica das componentes do vetor  $f$  em uma determinada base de dimensão infinita representada por uma linha contínua em  $\mathcal{A}$ .

de Gram-Schmidt. Então,

$$\int dx h^*(x, x_1) h(x, x_2) = \delta(x_1 - x_2). \quad (1.1)$$

As expressões abaixo mostram a expansão de  $f$  em torno das bases exemplificadas acima:

$$f(x) = \int dx' f(x') h(x, x'), \quad (1.2)$$

$$f(x) = \int dx' f(x') \delta(x - x'), \quad (1.3)$$

$$f(x) = \int dk \tilde{f}(k) e^{ikx}, \quad (1.4)$$

onde  $f(x')$  representa as componentes contínuas<sup>2</sup> e funções de um ponto  $f(x'_1), f(x'_2), f(x'_3), \dots, f(x'_n)$  da projeção de  $f$  em uma determinada base de  $\mathcal{A}$ .

Utilizando a propriedade da delta de Dirac na equação (1.3) podemos ver que na base coordenada,  $f(x) = f(x')$ , ou seja, as componentes da projeção de  $f$  na base coordenada podem ser representadas como simplesmente  $\{f(x_i)\}$  ou  $f(x_1), f(x_2), f(x_3), \dots, f(x_n)$ .

A partir da projeção da função  $f$  na base de Fourier, fica interessante observar como podemos construir funções a partir de outras que sejam oscilatórias. Para exemplificar, imagine

---

<sup>2</sup>Como de costume, as componentes da base de Fourier serão sempre representadas com um til.

a função  $f$  projetada em apenas um ponto da linha de base da Figura 1.2. Considerando apenas a parte real, temos

$$f(x) = \operatorname{Re} [\tilde{f}(k_1) e^{ik_1x}] = \tilde{f}(k_1) \cos(k_1x). \quad (1.5)$$

A função de um ponto  $\tilde{f}(k_1)$  pode ser considerada como sendo a amplitude de oscilação da onda da equação (1.5), sendo que todas as outras componetes  $\tilde{f}(k)$ , com  $k \neq k_1$  são nulas. Veja a Figura 1.3.

Figura 1.3: Representação do vetor  $f$  projetado na base de Fourier com apenas a componente  $\tilde{f}(k_1)$  sendo não-nula. Para fins qualitativos, a parte imaginária foi descartada.

Então, utilizando o princípio da superposição, se tivermos um número arbitrário  $n$  de componentes não nulas na linha de base, podemos escrever

$$f(x) = \operatorname{Re} [\tilde{f}(k_1) e^{ik_1x} + \tilde{f}(k_2) e^{ik_2x} + \tilde{f}(k_3) e^{ik_3x} + \dots + \tilde{f}(k_n) e^{ik_nx}] , \quad (1.6)$$

ou seja, podemos moldar a forma de qualquer função, como se fosse uma corda sujeita a  $n$  modos de vibração. Veja a Figura 1.4.

Um funcional é um mapeamento de pontos do espaço de funções em números. Então, um funcional associa um número a cada função definida no  $\Re^n$ . Por exemplo, seja  $F$  um

Figura 1.4: Representação pictórica da projeção do vetor  $f$  na base de Fourier. Como se fosse uma corda sujeita a infindáveis modos de vibração, pode-se moldar a forma de qualquer função através do princípio de superposição.

funcional em  $\mathcal{A}$ .  $F$  mapeia pontos de  $\mathcal{A}$  em números reais ou complexos. Mostraremos a natureza funcional de  $F$  utilizando colchetes,  $F = F[f]$ . Veja Figura 1.5. Os colchetes também possuem um significado de abreviação da expressão

$$F[f] = F[f(x'_1), f(x'_2), f(x'_3), \dots, f(x'_n)], \quad (1.7)$$

sendo as funções de um ponto  $f(x'_i)$  variáveis do respectivo funcional. A variação de um funcional será abordada na Seção 1.2.

Um funcional pode ser escrito em uma forma genérica  $F[f] = \int dx F(f(x))$  e um simples exemplo de um funcional é  $F[f] = \int dx f(x)$ . Um outro exemplo é o produto interno de  $\mathcal{A}$ , que leva a função  $f$  e sua complexa conjugada  $f^*$  na reta real:  $F[f, f^*] = \int dx f(x) f^*(x) \geq 0$ .

## 1.2 A derivada funcional

Apesar da noção de derivada poder ser estendida para funcionais de uma maneira aparentemente natural através da noção de funções com  $n$ -variáveis, temos que observar

Figura 1.5: Representação pictórica do mapeamento do espaço de funções  $\mathcal{A}$  no plano complexo.

com cautela algumas sutilezas que surgem quando fazemos operações com funcionais. Como uma função é definida em um espaço de dimensão infinita, a noção de variação de um funcional está ligada à variação de apenas uma das infinitas componentes que essa função pode ter, ou seja, funções de um ponto  $f(x'_i)$ . A definição da derivada de uma função de  $n$ -variáveis pode ser escrita como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\{x + \epsilon \delta(x - x_j)\}) - f(\{x\})}{\epsilon}, \quad (1.8)$$

onde  $f(\{x\}) \equiv f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ .

A generalização funcional é definida usualmente como sendo a variação do funcional em relação às funções de um ponto  $f(x_j)$  relacionadas à **função mapeada  $f$  projetada na base coordenada, ou seja, a base formada pelo conjunto de deltas de Dirac**. Então,

$$\frac{\delta F[f]}{\delta f(x_j)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f + \epsilon \delta(x - x_j)] - F[f]}{\epsilon}. \quad (1.9)$$

Utilizando a definição acima podemos facilmente ver que

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(x_1)} = \delta(x - x_1). \quad (1.10)$$

Como veremos na Seção 1.4, do ponto de vista prático a Eq.(1.10) é a relação mais utilizada em cálculos de teoria de campos envolvendo funcionais. A derivada funcional satisfaz todas as propriedades da derivada como linearidade

$$\frac{\delta}{\delta f(x_1)}(F_1[f] + F_2[f]) = \frac{\delta F_1[f]}{\delta f(x_1)} + \frac{\delta F_2[f]}{\delta f(x_1)}, \quad (1.11)$$

associatividade

$$\frac{\delta}{\delta f(x_1)}(F_1[f] F_2[f]) = \frac{\delta F_1[f]}{\delta f(x_1)} F_2[f] + \frac{\delta F_2[f]}{\delta f(x_1)} F_1[f], \quad (1.12)$$

e também a regra da cadeia da diferenciação. Além do mais, dado um funcional  $F[f]$ , podemos fazer uma expansão de Taylor na forma

$$\begin{aligned} F[f] &= F[f]|_{f(x)=0} + \int dx f(x) \left( \frac{\delta F[f]}{\delta f(x)} \right) |_{f(x)=0} + \\ &+ \frac{1}{2!} \int dx dx' f(x) f(x') \left( \frac{\delta^2 F[f]}{\delta f(x) \delta f(x')} \right) |_{f(x)=0} + \dots, \end{aligned} \quad (1.13)$$

que é a generalização funcional da expansão de Taylor para funções de n-variáveis.

### 1.3 Integrais funcionais

Richard Feynman, através de sua nova formulação da mecânica quântica não-relativística publicada em seu clássico artigo de 1948 [1], foi quem primeiro estabeleceu uma conexão entre integrais funcionais e a física. Aparentemente, Feynman foi inspirado por algumas notas de Dirac sobre a similaridade entre o operador de evolução da equação de Schrödinger e a exponencial do funcional de ação clássica. De fato, a noção de integrais funcionais era familiar aos matemáticos muito antes de Feynman. Foi Volterra quem usou tal idéia em seu trabalho sobre cálculo funcional, o considerando análogo a cálculos envolvendo funções de um número finito  $n$  de variáveis e subsequentemente tendendo  $n$  para o infinito, que é um procedimento similar ao de Feynman em sua prescrição de "corte do tempo". Artigos



de Daniell [2] por volta de 1918 lidam com algumas tentativas de integrar um funcional sobre um espaço de funções. Essas tentativas não foram bem sucedidas até 1952 quando Norbert Wiener introduziu uma definição teórica de medida apropriada de uma integral de um funcional sobre o espaço de funções [3]. Apesar da justificativa matemática rigorosa ainda está para ser mostrada, esse foi realmente um ponto de partida que fez com que integrações em espaço de funções fossem melhor definidas, além de ser o começo do uso de ferramentas da teoria de probabilidades em análise de uma maneira sistemática. O formalismo de integrais funcionais se aplica a qualquer sistema que possua um número de configurações muito grande, tais como a trajetória de uma partícula, as configurações de um ruído ou as flutuações quânticas do campo escalar, sendo que questões relacionadas à causalidade restringem a possibilidade de algumas configurações.

Um exemplo de integração sobre o espaço de funções é

$$\int (\mathcal{D}f) F[f]. \quad (1.14)$$

A medida funcional  $\mathcal{D}f$  indica que a integração é sobre todas as possíveis projeções de uma função  $f$  em uma base de  $\mathcal{A}$ . Podemos escrever a medida funcional como um produtório infinito. No caso da base coordenadas<sup>3</sup>, temos

$$\int \mathcal{D}f \equiv \int \prod_x df(x) = \int df(x_1) \int df(x_2) \int df(x_3) \dots \int df(x_n). \quad (1.15)$$

O limite de integração do lado direito da equação significa que está sendo levado em consideração todas as configurações que  $f$  pode ter no ponto  $x_i$  no espaço  $\mathcal{A}$ . Devido ao fato da integração ser feita sobre um espaço de dimensão infinita, há apenas dois tipos de integrais funcionais que possuem solução analítica: as que envolvem  $\delta$ -funcionais e as Gaussianas.

---

<sup>3</sup>Um exemplo de integração funcional na base de Fourier será dado posteriormente nessa seção.

As  $\delta$ -funcionais são integrais do tipo

$$\int (\mathcal{D}f) F[f] \delta[f - g], \quad (1.16)$$

onde a generalização funcional da delta de Dirac fica

$$\delta[f - g] = \prod_x \delta(f(x) - g(x)). \quad (1.17)$$

As propriedades da delta de Dirac também são generalizadas, tal que

$$\int (\mathcal{D}f) \delta[f - g] = 1, \quad (1.18)$$

que é um produto infinito de integrais independentes.

Então, utilizando as equações acima podemos ver que  $F[f]$  sendo um funcional arbitrário,

$$\begin{aligned} \int (\mathcal{D}f) F[f] \delta[f - g] &= \prod_x \left( \int df(x) \delta(f(x) - g(x)) \right) \int dx' F(f(x')) \\ &= \int dx F(g(x)) = F[g]. \end{aligned} \quad (1.19)$$

O segundo tipo de funcional que pode ser integrado analiticamente é o funcional Gaussiano. Considere

$$\int \mathcal{D}f e^{-F[f]}, \quad \text{onde} \quad F[f] = \int dx \alpha f^2(x). \quad (1.20)$$

Como no caso da  $\delta$ -funcional, pode-se resolver essa integral analiticamente porque ela se fatoriza em um produto infinito de integrais Gaussianas independentes. Para fazer isso, é necessário lembrar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \quad (1.21)$$

Então

$$\begin{aligned}
 \int (\mathcal{D}f) \exp\left(-\int dx \alpha f^2(x)\right) &\longrightarrow \int \prod_x df(x) \exp\left[-\sum_x \alpha f^2(x)\right] \\
 &= \int \prod_x df(x) \prod_x \exp[-\alpha f^2(x)] \quad (1.22) \\
 &= \int \prod_x df(x) \exp[-\alpha f^2(x)] \\
 &= \prod_x \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},
 \end{aligned}$$

que é divergente, porém o número infinito no numerador é frequentemente absorvido ou cancelado por uma normalização quando aplicamos tal resultado a um sistema físico. Um resultado mais importante é

$$\int (\mathcal{D}f) \exp\left(-\int dx g(x) f^2(x)\right) = \prod_x \sqrt{\frac{\pi}{g(x)}}. \quad (1.23)$$

Se  $f(x)$  for pensada como sendo um vetor de dimensão infinita, a equação (1.23) é melhor compreendida através de uma representação matricial, onde

$$f^T(x) \doteq (f(x_1) \ f(x_2) \ f(x_3) \ \cdots), \quad f(x) \doteq \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Então o conjunto  $g(x)$  representa autovalores de uma matriz, ou seja, os elementos de uma matriz diagonal

$$g(x, y) = g(x) \delta(x - y), \quad (1.25)$$

onde

$$g(x) \doteq \begin{pmatrix} g(x_1) & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & g(x_2) & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & g(x_3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

O produto de autovalores é o determinante da matriz, assim

$$\prod_x \sqrt{\frac{\pi}{g(x)}} \longrightarrow (\sqrt{\pi})^\infty \prod_x \frac{1}{\sqrt{g(x)}} = \frac{(\sqrt{\pi})^\infty}{\sqrt{\det g}}, \quad (1.27)$$

então

$$\int (\mathcal{D}f) \exp\left(-\int dx g(x) f^2(x)\right) = \frac{(\sqrt{\pi})^\infty}{\sqrt{\det g}}. \quad (1.28)$$

Se o operador  $g(x, y)$  não for diagonal, o resultado da integral funcional acima ainda é o mesmo. Isto pode ser verificado de maneiras distintas. Por exemplo, suponha que a função  $g(x, y)$  seja translacionalmente invariante, ou seja,  $g(x - y)$ . Projetando as componentes de  $f(x)$  e  $g(x - y)$  na base de Fourier, temos

$$\begin{aligned} \int dx dy f(x) g(x - y) f(y) &= \int dk dk_1 dk_2 dx dy \tilde{f}(k_1) \tilde{g}(k) \tilde{f}(k_2) e^{-ikx} e^{iky} e^{ik_1x} e^{-ik_2y} \\ &= \int dk dk_1 dk_2 \tilde{f}(k_1) \tilde{g}(k) \tilde{f}(k_2) \delta(k - k_1) \delta(k - k_2) \\ &= \int dk \tilde{f}(k) \tilde{g}(k) \tilde{f}(k) \\ &= \int dk \tilde{g}(k) \tilde{f}^2(k). \end{aligned} \quad (1.29)$$

A relação de ortogonalidade (1.1) faz com que no caso da base de Fourier tenhamos

$$\delta(x - x') = \int dk e^{-i(x-x')}. \quad (1.30)$$

Então, pode-se dizer que a transformação da base coordenada para a base de Fourier é uma transformação linear, ou seja, o Jacobiano funcional associado a ela é unitário. Então a medida funcional permanece como se ”‘preservasse a área’”, ou seja,  $\mathcal{D}f \longrightarrow \mathcal{D}\tilde{f}$ . Assim, recuperamos a mesma expressão da integral funcional Gaussiana (1.23).

Uma outra forma de mostrar isso é fazendo a transformação de similaridade no caso de dimensão finita

$$\hat{g} = B g B^{-1}, \quad (1.31)$$

que diagonaliza a matriz  $g$  que preserva o determinante e leva a integral na forma da equação (1.28). Como a base que diagonaliza  $g$  é linearmente relacionada com  $f(x)$  através de uma transformação de similaridade, então o Jacobiano da mudança de variáveis é unitário.

Finalmente, considere

$$\int (\mathcal{D}f) e^{F[f,J]}, \quad (1.32)$$

onde

$$F[f, J] = \int dx dy f(x) g(x-y) f(y) + \int dx J(x) f(x) \quad (1.33)$$

é o funcional Gaussiano com a adição de um termo de fonte. Para resolver essa integral, precisamos completar os quadrados. Para o caso unidimensional, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{(-\alpha x^2 + b x)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha(x - \frac{b}{2})^2} e^{\frac{1}{4}(b \frac{1}{\alpha} b)} = e^{\frac{1}{4}(b \frac{1}{\alpha} b)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} \\ &= e^{\frac{1}{4}(b \frac{1}{\alpha} b)} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Então,

$$\int \mathcal{D}f e^{-F[f,J]} = \exp \left( \frac{1}{4} \int dx dy J(x) g^{-1}(x-y) J(y) \right) \frac{(\sqrt{\pi})^\infty}{\sqrt{\det g}}. \quad (1.35)$$

O termo de fonte da Gaussiana nos permite facilmente calcular a integral funcional de qualquer momento da Gaussiana através da expressão

$$\begin{aligned} \int \mathcal{D}f f(x_1) \dots f(x_n) \exp \left( - \int dx dy f(x) g(x, y) f(y) \right) \\ = \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} \int \mathcal{D}f e^{-F[f, J]} |_{J=0}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Utilizando a equação(1.35), temos

$$\int \mathcal{D}f f(x_1) \exp \left( - \int dx dy f(x) g(x, y) f(y) \right) = 0 \quad (1.37)$$

e

$$\int \mathcal{D}f f(x_1) f(x_2) \exp \left( - \int dx dy f(x) g(x, y) f(y) \right) = \frac{1}{4} g^{-1}(x_1 - x_2) \frac{(\sqrt{\pi})^\infty}{\sqrt{\det g}}. \quad (1.38)$$

De fato, como no caso n-dimensional, qualquer momento ímpar se anula. Em física, a expressão (1.38) possui um papel importante no que se refere às correlações de funções em diferentes pontos do espaço-tempo.

# Bibliografia

- [1] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. **20**, 367 (1948).
- [2] P. J. Daniell, Ann. Math. **19**, 279 (1918).
- [3] N. Wiener, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), **7**, 253 (1952); N. Wiener, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA), **7**, 294 (1952).

## Capítulo 2

# As Equações Diferenciais Parciais Estocásticas

A compreensão do assunto abordado nesse capítulo é importante para o entendimento do trabalho como um todo, principalmente a seção que se refere ao ruído, já que as flutuações do mesmo são a fonte de análise física que será feita no Capítulo 4.

A descrição quantitativa de processos estocásticos, dinâmicas estocásticas e suas respectivas ferramentas matemáticas está fora do objetivo desse capítulo. O enfoque aqui desejado é a descrição qualitativa das equações diferenciais parciais estocásticas (EDPE's) e o papel do ruído nas mesmas. A Seção 2.1 se dedica a uma exposição geral do que seria uma equação diferencial estocástica e seu caráter de descrição fenomenológica que abrange os mais variados ramos da ciência, tais como sistemas biológicos, químicos, fenômenos de crescimento, movimento Browniano e outros. A particularidade que diferencia as equações diferenciais estocásticas das demais é tratada na Seção 2.2, onde o termo que induz a aleatoriedade na descrição, o ruído, é analisado de uma forma quantitativa no que se refere ao enfoque de interesse deste trabalho. Exemplos de equações diferenciais estocásticas são abordados



nas seções 2.3 (onde são tratados sistemas relacionados a fenômenos de crescimento) e 2.4 (sistemas do tipo reação e difusão).

Apesar do enfoque na literatura na análise de tais equações ser através de expoentes críticos, tal questão está fora do objetivo desse trabalho, o mesmo se propondo a analisá-las através das possíveis quebras de simetria que as dinâmicas estocásticas podem apresentar.

## 2.1 Equações Diferenciais Estocásticas em Física

Na natureza, há muitos fenômenos que dependem do tempo de uma forma extremamente complicada, longe de qualquer possibilidade de cálculo e frequentemente de observação, mas que possuem algumas características médias que podem ser observadas e obedecem leis simples, ou seja, o conhecimento empírico tem nos ”‘ensinado’” que apesar de nossa ignorância em relação a maior parte das variáveis microscópicas, ainda é possível detectar regularidades no comportamento macroscópico e formulá-las como se fossem leis gerais. Tal procedimento faz com que o valor preciso das variáveis microscópicas não seja importante, o que faz com que possamos obter informações com a média das mesmas. Esta é uma propriedade do sistema, e não do observador. Por exemplo, a teoria do movimento Browniano nos diz que a velocidade média obedece a uma lei macroscópica, enquanto sua função de autocorrelação determina a constante de difusão.

Levando em conta o conhecimento adquirido pelo homem do mundo microscópico, as equações diferenciais macroscópicas podem ser pensadas como sendo equações clássicas, ou seja, responsáveis pela descrição de um mundo não-quântico onde as flutuações inerentes de qualquer sistema microscópico são desconsideradas. Assim, a questão é: podemos introduzir o efeito das flutuações quânticas em equações diferenciais clássicas? Esse é um bom motivo para introduzir as equações diferenciais estocásticas, mas a distinção entre flutuações de

origem clássica e quânticas é vaga, já que a natureza é fundamentalmente quântica. Mas deve ficar claro que não é necessário apelar para o princípio de incerteza para explicar porque processos estocásticos entram na física. De fato, métodos estocásticos também são aplicados até mesmo ao movimento de cometas. De um certo modo, a descrição que traduz a ignorância como a aleatoriedade, é característico em sistemas com um número muito grande de graus de liberdade ou até mesmo um número infinito de trajetórias. Para entendermos melhor o que as equações diferenciais estocásticas representam na descrição do mundo natural, primeiramente vamos analisar o papel das equações diferenciais na física.

- Equações diferenciais lineares: Utilizadas em sistemas físicos onde o conhecimento de uma função de uma variável é necessário para a descrição do sistema, tal como a posição  $\mathbf{r}(t)$  de uma partícula. A linearidade faz com que a solução seja analítica em dinâmicas onde o número de graus de liberdade é pequeno. Porém um sistema de três corpos, que pode ser tratado como o acoplamento de três equações diferenciais lineares, já não possui uma solução analítica. O caráter determinístico da solução é extremamente útil na descrição de sistemas macroscópicos (clássicos).
- Equações diferenciais parciais lineares: Utilizadas na descrição de dinâmicas onde o conhecimento de uma função de mais de uma variável é necessário para a descrição do sistema (sob uma perspectiva teórica), tal qual a função de onda em mecânica quântica e o campo escalar em teoria quântica dos campos. Muito utilizadas na descrição de sistema microscópicos onde o número de graus de liberdade é pequeno. A possibilidade de se encontrar soluções analíticas mesmo em sistemas que são descritos por um acoplamento entre equações diferenciais parciais é considerável.
- Equações diferenciais não-lineares: Em geral, a presença de não-linearidades em equações diferenciais (sejam elas parciais ou totais) faz com que o conhecimento analítico de suas

soluções seja extremamente difícil. De fato, na maioria dos casos não existe uma solução. Assim, em dinâmicas como estas, a obtenção de informação física é feita, usualmente, utilizando algum tipo de aproximação e também ramifica a análise do sistema físico em questão, passando a descrevê-lo a partir de outros conceitos e propriedades. Um exemplo seriam as teorias sujeitas a interação entre campos em teoria quântica de campos e até mesmo a descrição de um pêndulo simples.

As equações diferenciais estocásticas diferem das demais no que se refere, principalmente, ao número de graus de liberdade considerados no sistema. Em geral, elas possuem a seguinte estrutura

$$D\phi(x) = F(\phi(x)) + \eta(x) , \quad (2.1)$$

onde  $D$  é um operador diferencial linear qualquer, envolvendo derivadas espaciais e temporais arbitrárias que não dependem explicitamente do campo  $\phi$ . A função  $F(\phi)$  é um termo geralmente não-linear no campo  $\phi$ . A função  $\eta(x)$ , chamada de ruído, introduz a aleatoriedade de um determinado processo, sendo que as flutuações derivadas do ruído não podem ser encontradas exatamente, pois seria o equivalente a resolver as equações microscópicas. Suas propriedades estocásticas, entretanto, novamente obedecem a leis simples. Uma equação diferencial estocástica sem o ruído volta a ser uma equação macroscópica sem caráter descritivo em sistemas onde flutuações são inerentes. Falaremos mais do ruído na próxima seção.

## 2.2 O Ruído

Uma das características dos processos estocásticos que deve ser analisada com a devida cautela é o efeito da aleatoriedade no fenômeno em questão. Para começar, a origem

da aleatoriedade depende do processo estudado. Em problemas de dinâmica de fluidos, tal origem vem da natureza desordenada do meio que a interface se propaga. Em supercondutores, onde as forças do congelamento desordenado, junto com as flutuações térmicas, determinam a dinâmica das linhas de fluxo. Em processos de deposição há a natureza não-uniforme do fluxo de deposição onde átomos (partículas) alcançam a superfície em posições aleatórias, com intervalos de tempo aleatórios entre eles. Há também a natureza aleatória da difusão de átomos sobre a superfície, desde que átomos usualmente seguem trajetórias Brownianas enquanto procuram a borda de uma "ilha" ou outro lugar onde possam ficar estáveis. Esses exemplos nos mostram que precisamos lidar sistematicamente com diferentes fontes de aleatoriedade.

Uma distinção precisa ser feita entre dois tipos de ruído, o externo e o interno. Ruído externo denota flutuações criadas em um sistema outrora determinístico pela aplicação de uma força aleatória cujas propriedades estocásticas são supostamente conhecidas. Muitos problemas em engenharia são desse tipo, ou seja, forças aleatórias atuando sobre uma ponte ou a transmissão de um sinal aleatório através de um dispositivo não-linear. Tais casos são descritos por equações diferenciais estocásticas.

O ruído interno caracteriza o fato do sistema consistir ele mesmo de partículas discretas. Ele é inerente nos muitos mecanismos que o estado do sistema se envolve e então o mesmo não pode se desvincular das equações de movimento. Exemplos em reações químicas, emissão e absorção de radiação e crescimento de populações são todos desse tipo.

Porém, o fato do ruído ser interno ou externo não é propriedade da equação diferencial estocástica, já que diferentes interpretações podem mudar o papel da aleatoriedade na análise do sistema. Essa é uma característica do observador e não do sistema. Por exemplo, uma partícula Browniana envolta de um determinado fluido, é um sistema físico fechado com

ruído interno. Langevin, entretanto, tratou a partícula como um sistema mecânico sujeito a uma força exercida pelo fluido. Ele subdividiu essa força em uma parte determinística, que pode ser somada à equação mecânica do movimento, e uma parte aleatória, tratada como um ruído externo. Outro exemplo é a equação estocástica Kardar-Parisi-Zhang (KPZ)[1], que apesar de inicialmente elaborada para descrever fenômenos de crescimento, pode ser mapeada na equação de Burgers (um paradigma nos estudos de turbulência)[2], que descreve vórtices livres em dinâmica dos fluidos. Na interpretação de crescimento de superfícies o ruído é tratado como sendo interno e na interpretação de dinâmica de fluidos o ruído é tratado como sendo uma força externa aleatória. Nesse trabalho, o enfoque será em sistemas cuja fonte de ruído é interna.

Um aspecto essencial na discussão sobre o ruído é: Como as propriedades estocásticas do ruído  $\eta(x)$  são efetivamente levadas em consideração? Obviamente, uma realização particular do processo espaço-temporal  $\eta(x)$  não proporciona muita informação. Então, precisamos considerar a probabilidade  $P[\eta]$  de se observar uma sequência de realizações do ruído  $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \dots$  e suas devidas configurações no espaço-tempo. Uma integração funcional, que se realiza sobre o espaço de funções, é extremamente apropriada já que ela leva em consideração todas as configurações espaço-temporais que a função  $\eta(x)$  pode ter. Por exemplo, a função de correlação de dois pontos do ruído é dada pela integração funcional

$$\langle \eta(x)\eta(y) \rangle = \int (\mathcal{D}\eta) \eta(x) \eta(y) P[\eta] = \mathcal{A} G(x, y). \quad (2.2)$$

A definição de médias em sistemas estocásticos é mais sutil que em sistemas que não descrevem um comportamento aleatório devido ao fato de que precisamos considerar a presença do ruído e sua respectiva distribuição de probabilidade. Consideremos que *dada uma configuração particular do ruído  $\eta$  a equação diferencial (2.1) é suposta ter uma solução única  $\phi_s(x|\eta)$* . Então, para qualquer funcional  $Q[\phi]$ , podemos definir a média estocástica

(sobre o ruído) como

$$\langle Q[\phi] \rangle \equiv \int (\mathcal{D}\eta) \mathcal{P}[\eta] Q[\phi_s(x|\eta)] , \quad (2.3)$$

onde  $\mathcal{P}[\eta]$  é a densidade funcional de probabilidade do ruído (que é considerado arbitrário) e normalizada à 1. É conveniente fazer uma manipulação algébrica em (2.3) para retirar a dependência explícita da solução única  $\phi_s$ , devido ao fato que, em geral, as EDPE's não possuem soluções que possam ser escritas em uma expressão analítica fechada. Portanto, utilizaremos a seguinte identidade,

$$\phi_s(x|\eta) = \int (\mathcal{D}\phi) \phi \delta[\phi - \phi_s(x|\eta)] . \quad (2.4)$$

Usando a propriedade<sup>1</sup>

$$\delta[G(\phi)] = \frac{\delta[\phi - \phi_s(x|\eta)]}{|\det(\frac{\delta G(\phi)}{\delta \phi})|} , \quad (2.5)$$

onde  $G(\phi_s) \equiv D\phi_s - F(\phi_s) - \eta = 0$  e o determinante Jacobiano funcional, que é definido por

$$\mathcal{J} \equiv \det \left( D - \frac{\delta F}{\delta \phi} \right) , \quad (2.6)$$

podemos agora inserir (2.5) em (2.4) para obter

$$\phi_s(x|\eta) = \int (\mathcal{D}\phi) \phi \delta[D\phi - F(\phi) - \eta] |\mathcal{J}| . \quad (2.7)$$

É fácil ver que também temos a identidade

$$Q[\phi_s(x|\eta)] = \int (\mathcal{D}\phi) Q[\phi] \delta[D\phi - F(\phi) - \eta] |\mathcal{J}| , \quad (2.8)$$

que, inserida em (2.3) fornece a seguinte expressão para a média estocástica sobre o ruído

$$\begin{aligned} \langle Q[\phi] \rangle &= \int (\mathcal{D}\eta) \int (\mathcal{D}\phi) \mathcal{P}[\eta] Q[\phi] \delta[D\phi - F(\phi) - \eta] |\mathcal{J}| \\ &= \int (\mathcal{D}\phi) \mathcal{P}[D\phi - F(\phi)] Q[\phi] |\mathcal{J}| . \end{aligned} \quad (2.9)$$

---

<sup>1</sup>Note que essa é a generalização funcional da propriedade da função delta de Dirac  $\delta(f(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{|\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}}$

onde  $f(x)$  possui apenas uma raiz em  $x = x_0$ .

Apesar do Capítulo 4 abordar o ruído através de uma distribuição Gaussiana (ruído branco), esse não é o único tipo de ruído possível em sistemas físicos. Se a magnitude do ruído em um determinado ponto do espaço-tempo não for independente da magnitude do mesmo em um ponto diferente, há presença de correlações espaço-temporais no ruído. Em muitas situações experimentais, sabemos pouco sobre a natureza de qualquer ruído que possa estar presente, então considerá-lo como sendo Gaussiano talvez seja uma suposição simples e não realística na descrição de determinados fenômenos. Uma possibilidade é que o comprimento de correlação do ruído seja finito, isto é, eventos em diferentes pontos do espaço-tempo interagem um com o outro somente se eles estão dentro de uma separação espacial finita  $\varsigma$  ou uma separação temporal  $\tau$ . Neste caso precisamos redimensionar nosso sistema com um parâmetro finito ( $\varsigma$  ou  $\tau$ ), tal que depois do redimensionamento as realizações do ruído serão completamente não correlacionadas.

Agora, consideremos a possibilidade que o ruído possua correlações de longo alcance, isto é, eventos que são arbitrariamente distantes podem ainda assim se influenciarem. Esses eventos, mesmo após o redimensionamento do ruído mostram correlações de longo alcance. A força de sua influência decai como uma lei de potência da distância entre os dois eventos, e no caso da correlação do ruído de curto alcance, o decaimento é exponencial. Ruídos com correlações de longo alcance são notavelmente presentes na natureza, embora sua origem não seja entendida. Se o ruído possui correlações espaciais de longo alcance, a função  $G(x, y)$  nas coordenadas espaciais da equação (2.2) precisa ser substituída por um termo que decai com a distância

$$\langle \eta(x)\eta(y) \rangle \propto |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2\psi-d} \delta(t - t'), \quad (2.10)$$

onde  $\psi$  é um expoente que caracteriza o decaimento das correlações espaciais. Se, por outro lado, o ruído possui correlações temporais de longo alcance, então

$$\langle \eta(x)\eta(y) \rangle \propto \delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{y})|t - t'|^{2\phi-1}, \quad (2.11)$$

onde  $\phi$  caracteriza o decaimento das correlações temporais. Em geral, para um processo correlacionado no espaço-tempo temos

$$\langle \eta(x)\eta(y) \rangle \propto |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2\psi-d}|t - t'|^{2\phi-1}. \quad (2.12)$$

Para cálculos analíticos é útil considerar a transformada de Fourier da equação (2.12)

$$\langle \eta(k)\eta(k') \rangle \propto 2D|\mathbf{k}|^{-2\psi}\omega^{-2\phi}\delta^d(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\delta(\omega + \omega'). \quad (2.13)$$

Dessa forma, a conexão entre o decaimento das correlações espaço-temporais e os expoentes  $\psi$  e  $\phi$  é mais aparente. Como podemos ver, a correlação na frequência decai como  $1/\omega^{2\phi}$ . Se  $\phi = 0$ , o ruído é não correlacionado e branco, enquanto  $\phi = 1$  para o movimento Browniano.

## 2.3 Crescimento de Superfícies e a Equação KPZ

A maior parte de nossa vida se situa na superfície de algo. Sentar em uma rocha significa contato com sua superfície. Para uma célula biológica a superfície da membrana atua não só como uma barreira seletiva, mas muitos processos importantes ocorrem na própria superfície. Nos acostumamos com as formas das superfícies que encontramos, então pode ser surpreendente que suas morfologias sejam completamente diferentes dependendo da escala de observação. Por exemplo, um astronauta no espaço vê a Terra como uma bola suave. Entretanto, a Terra parece ser bem rugosa quando escalamos uma montanha já que encontramos uma hierarquia sem fim de subidas e descidas ao longo do caminho. Então, superfícies podem ser suaves tal como os Himalaias visto do espaço, mas a mesma superfície



pode ser rugosa, tal como as mesmas montanhas vistas da Terra. Em geral, a morfologia depende do comprimento de escala de observação. Estudando as relações de escala nos instiga a definir classes de universalidades. Esse conceito é um produto da mecânica estatística moderna, e se relaciona com o fato que existam poucos fatores essenciais que determinam os expoentes que caracterizam o comportamento de escala. Então, sistemas diferentes que à primeira vista possam parecer não ter nenhuma conexão, comportam-se de uma maneira notavelmente similar. As equações diferenciais estocásticas podem ser usadas para descrever a superfície em escalas com comprimento longo, que significa que nós desprezamos os detalhes da escala de comprimento curto e focamos somente nas propriedades assintóticas do conjunto de grãos. Então, equações contínuas desconsideram a natureza discreta dos processos de crescimento, descrevendo apenas os mecanismos essenciais que determinam o comportamento microscópico do mesmo.

Então, uma das tarefas iniciais na investigação de um problema de superfície[3] é tentar construir uma equação diferencial contínua do crescimento. Nosso principal guia para esta descrição fenomenológica é: A equação de movimento deve ser a mais simples possível compatível com as simetrias do problema. Nessa seção ilustraremos a aplicação dos princípios de simetria na obtenção de uma equação que descreve a interface de equilíbrio, onde por equilíbrio queremos dizer que a interface não é direcionada por um campo externo. Então uma interface em equilíbrio separa dois domínios que estão em "equilíbrio" no sentido que um domínio não está crescendo à custas de outro. Tais interfaces são também observadas em sistemas magnéticos (no contorno entre dois domínios com magnetização diferentes) ou em fluidos heterogêneos. Considere uma interface caracterizada por sua altura  $\phi(\mathbf{x}, t)$ . Nosso objetivo é derivar uma equação de crescimento para interfaces correlacionadas. Nós esperamos

que a equação de crescimento tenha a forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x}, t) = G(\phi, \mathbf{x}, t) + \eta(\mathbf{x}, t), \quad (2.14)$$

onde  $G(\phi, \mathbf{x}, t)$  é uma função geral que depende da altura da interface, posição e tempo.  $\eta(\mathbf{x}, t)$  é o termo de ruído. Estamos interessados em um comportamento da interface como na Figura 2.1.

Como um primeiro passo vamos listar as simetrias básicas do problema:

Figura 2.1: Ilustração esquemática de uma interface unidimensional  $\phi(x, t)$  influenciada por uma força externa  $F$ . A linha pontilhada mostra que a interface possui uma orientação bem definida.

(i) Invariância por translação temporal. A equação de crescimento não deve depender de onde definimos a origem do tempo, tal que ela precisa ser invariante sob a transformação  $t \rightarrow t + \epsilon$ . Essa simetria retira a dependência explícita no tempo de  $G$ .

(ii) Invariância translacional ao longo da direção de crescimento. O crescimento deve ser independente de onde definimos  $\phi = 0$ , tal que a equação deve ser invariante sob a translação  $\phi \rightarrow \phi + \epsilon$ . Essa simetria exclui a dependência explícita de  $\phi$  em  $G$  de modo que a equação pode ser construída a partir das combinações de  $\nabla\phi, \nabla^2\phi, \dots, \nabla^n\phi$ .

(iii) Invariância translacional na direção perpendicular à direção do crescimento. A equação não deve depender do valor de  $\mathbf{x}$ , tendo a simetria  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \epsilon$ . Isto exclui a

dependência explícita de  $\mathbf{x}$  em  $G$ .

(iv) Simetria de rotação e inversão sob a direção de crescimento. Essa simetria exclui as derivadas de ordem ímpar nas coordenadas, excluindo vetores tais como  $\nabla\phi, \nabla(\nabla^2\phi)$ , *etc.*

Para encontrar a forma final da equação de crescimento, consideramos todos os termos que podem ser formados das combinações de potências de  $\nabla^n\phi$ . Um a um, eliminamos todos que violam ao menos uma das simetrias listadas acima. Então, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x}, t) &= (\nabla^2\phi) + (\nabla^4\phi) + \dots + (\nabla^{2n}\phi) + (\nabla\phi)^2 + \dots + (\nabla\phi)^{2i} \\ &+ (\nabla^2\phi)(\nabla\phi)^2 + (\nabla^{2k}\phi)(\nabla\phi)^{2j} + \eta(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde  $n, i, k, j$  podem ser qualquer valor inteiro positivo. Como estamos interessados em comprimento de escalas grandes, podemos focar no comportamento de tempo longo ( $t \rightarrow \infty$ ), e distância longa ( $x \rightarrow \infty$ ) das funções que caracterizam a superfície. Essa suposição é chamada de limite hidrodinâmico, onde derivadas de ordem superior são menos importantes comparadas às de ordem inferior, como pode ser confirmado usando argumentos de escala [3]. No limite hidrodinâmico o termo  $\nabla^4\phi$  tende a zero mais rapidamente do que  $\nabla^2\phi$ . Assim,  $\nabla^4\phi$  é irrelevante comparado à  $\nabla^2\phi$  e então negligenciaremos tal termo. Um argumento similar pode ser usado para mostrar que  $(\nabla^2\phi)(\nabla\phi)^2$  é o termo mais relevante dos possíveis  $(\nabla^{2k}\phi)(\nabla\phi)^{2j}$  de (2.15), mas é irrelevante comparado ao termo  $\nabla^2\phi$ . O termo de ruído  $\eta(\mathbf{x}, t)$  em (2.15) incorpora o caráter estocástico das flutuações do processo. Então, a mais simples equação que descreve as flutuações de uma interface em equilíbrio tem a forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\mathbf{x}, t) = \nu \nabla^2\phi(\mathbf{x}, t) + \frac{\lambda}{2}(\nabla\phi)^2 + \eta(\mathbf{x}, t), \quad (2.16)$$

que é uma extensão natural do modelo linear de Edwards-Wilkinson [4]. O campo  $\phi(\mathbf{x}, t)$  é interpretado como sendo a altura da superfície (tipicamente definida sobre um plano).

Uma interpretação geométrica simples mas intuitiva do efeito de suavização do termo

$\nu \nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t)$  é ilustrada na Fig.2.2.

A propriedade mais importante deste termo é o fato dele suavizar a interface re-

Figura 2.2: O efeito do termo linear na morfologia da interface. Em (a), a interface possui uma flutuação (calombo). Em (b), é mostrado o termo linear  $\nu \nabla^2 \phi$ , que é negativo no máximo de  $\phi(x, t)$ . Em (c), após um tempo  $t + \epsilon$ , a linha contínua mostra que o termo linear faz com que a altura original seja reduzida e redistribuída pela interface, ou seja, material é tirado do ponto mais alto de  $\phi(x, t)$  e redistribuído igualmente pelos dois lados mantendo a massa total constante, como um mecanismo conservativo de relaxação. Os efeitos do ruído e do termo não-linear não foram levados em consideração.

distribuindo as irregularidades enquanto a altura média é mantida constante. Então, o parâmetro de tensão da superfície  $\nu$  atua como um mecanismo conservativo de relaxação.

A interpretação geométrica qualitativa do termo não-linear  $\frac{\lambda}{2}(\nabla \phi)^2$  ilustrada pela Figura 2.3 também é instrutiva. Em um tempo  $t + \epsilon$  a altura da interface é

$$\phi(x, t + \epsilon) \approx \phi(x, t) + \frac{\lambda}{2}(\nabla \phi)^2 \epsilon, \quad (2.17)$$

onde desprezamos o termo linear e o ruído. Desde que o termo  $(\nabla\phi)^2$  é positivo, ele gera um aumento na altura adicionando material à interface (ou tirando material, se  $\lambda < 0$ ). Essa situação pode ser confrontada ao efeito do termo linear, que reorganiza a altura da interface tal que a massa total permaneça inalterada. Então, o material adicionado pelo termo não-linear gera o deslocamento da interface. O resultado da combinação desses dois fatores e a presença do termo de ruído é uma boa descrição de fenômenos de crescimento de superfície.

Uma simetria importante da equação KPZ que é relevante para nossa análise é a

Figura 2.3: O efeito do termo não-linear na morfologia da interface na equação KPZ. (a) Suponha que em um tempo  $t$  a interface possua um 'calombo'. (b) O termo  $\frac{\lambda}{2}(\nabla\phi)^2$ , que é sempre positivo, correspondente ao tempo  $t$ . (c) Em um tempo  $t + \epsilon$  podemos ver através da linha contínua que o termo não-linear aumenta a altura da interface, adicionando mais 'material' nas partes onde a inclinação local é maior, então a altura média da interface aumenta. Os efeitos do ruído e do termo linear não foram levados em consideração.

invariância sob a transformação

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} - \lambda \vec{\phi}_0 t,$$

$$t \rightarrow t, \quad (2.18)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi(\mathbf{x}, t) + \vec{\phi}_0 \cdot \mathbf{x}.$$

Aqui,  $\phi_0$  é um campo constante e essa simetria consiste em escolher um sistema de coordenadas diferente que é inclinado de um ângulo  $\theta$  em relação à vertical

$$\tan \theta = \left| \vec{\phi}_0 \right|, \quad (2.19)$$

e por essa razão esta transformação é frequentemente chamada de invariância de inclinação, mas essa transformação permanecerá uma simetria somente se a função de dois pontos da correlação do ruído for invariante por translação e temporalmente branco.

## 2.4 Sistemas do Tipo Reação e Difusão

Desde galáxias até seres microscópicos, exemplos onde uma particular distribuição espacial de massa é preferida em relação a outras de ilimitadas formas são encontrados. Em muitos casos, esses padrões possuem uma boa descrição através de equações diferenciais parciais não-lineares estocásticas do tipo reação e difusão

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \phi = P(\phi) - \gamma \phi + \eta, \quad (2.20)$$

onde a interpretação dos parâmetros  $\nu$  e  $\gamma$  depende do sistema físico em particular e  $\eta$  é o ruído associado ao sistema.

Esse é o caso, por exemplo, em cinético-química, onde tais equações resumem a evolução espaço-temporal de substâncias químicas se difundindo e reagindo confinadas a alguma região geométrica. A descrição de tal evolução pode ser generalizada para sistemas biológicos, tais como bando de zebras, manchas de leopardos, a estrutura radial de uma *Acetabularia* (veja Murray [5], Walgraef [6], Ball [7] para a discussão de outros exemplos específicos).

Como os sistemas de fenômenos de crescimento e do tipo reação e difusão estão sempre em evolução, ou seja, temos a presença de padrões espaciais de não-equilíbrio, é natural que haja quebras de simetrias contínuas. A ferramenta mais apropriada para o estudo de padrões de simetria é a noção de potencial. Se alguma noção de potencial é disponível, então a análise de seus extremos leva a uma identificação dos vácuos estáveis e metaestáveis, além de suas devidas relações com o sistema físico em questão.

Como ressaltado na introdução, o Capítulo 4 introduz a análise de tais questões através de uma aproximação não-perturbativa descrita no próximo capítulo. Além de ser uma descrição que utiliza a noção de potencial, o método é capaz de descrever sistemas fora do equilíbrio e a análise das flutuações do ruído fornece informações de distúrbios e inesperadas perturbações externas ao sistema, como se fossem desvios ecológicos (na aplicação à biologia), sem a necessidade do conhecimento microscópico do mesmo.

# Bibliografia

- [1] M. Kardar, G. Parisi, Y. C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 889-892 (1986).
- [2] J. M. Burgers, *The Nonlinear Diffusion Equation* (Riedel, Boston, 1974).
- [3] A.-L.Barabási, H.E.Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge University Press, Great Britain, 1995).
- [4] S. F. Edwards e D. R. Wilkinson, *The Surface Statistics of a Granular Agreggate Proc. R. Soc. London A* **381**, 17-31 (1982)
- [5] J. D. Murray, *Mathematical Biology* (Springer-Verlag, Berlim, Heidelberg, 1989).
- [6] D. Walgraef, *Spatio-Temporal Pattern Formation* (Springer-Verlag, Berlim, Heidelberg, 1997).
- [7] P. Ball, *The self-Made Tapestry: Pattern Formation in Nature* (Oxford University Press, Oxford, 1998).



# Capítulo 3

## O Potencial Efetivo Gaussiano

Em teoria quântica de campos (TQC), infelizmente para qualquer teoria que não seja livre, as dinâmicas dos campos são muito complicadas para serem estudadas exatamente. Com o intuito do progresso na análise de tais teorias, métodos de aproximação precisam ser usados. As duas maiores ferramentas utilizadas são a teoria de perturbação e os potenciais efetivos. Teorias de perturbação é talvez a mais poderosa ferramenta na física atual; entretanto, sua utilidade é limitada quando correções quânticas se tornam maiores. Outra aproximação é formular um potencial efetivo que inerentemente leva em conta os efeitos quânticos e estudar o sistema com uma visão clássica. De fato, há muitas formulações de potenciais efetivos para simplificar teorias quânticas de campos, todas com diferentes propriedades, vantagens e desvantagens. Uma opção atrativa e de particular interesse neste trabalho é o potencial efetivo Gaussiano (PEG).

O potencial efetivo Gaussiano, além de ser uma elegante aproximação não-perturbativa, é uma ferramenta útil para descrever quebras de simetria em teorias de campo escalares [1, 2], assim como em eletrodinâmica escalar [3] e o modelo de Higgs  $U(1)$  [4]. Essencialmente, o conceito de potencial efetivo Gaussiano é uma formulação do nosso conhecimento intuitivo

das flutuações quânticas que podem ser generalizadas para a TQC. Comparado com outros potenciais efetivos, tal como o potencial efetivo a um laço, o potencial efetivo Gaussiano tem sido exaltado por Stevenson [1] como sendo (i) conceitualmente superior, (ii) mais digno de confiança tanto em termos qualitativos quanto quantitativos, e (iii) igualmente fácil de calcular.

A Seção 3.1 se dedica à exposição do conceito de potencial efetivo em um contexto geral, fornecendo exemplos qualitativos nas áreas mais conhecidas de sua aplicação. Na Seção 3.2, será descrita a formulação do potencial efetivo Gaussiano para a mecânica quântica, com aplicação ao oscilador anarmônico. A Seção 3.3 é dedicada à formulação do potencial efetivo Gaussiano em teoria quântica de campos, onde aplicamos o método à teoria  $\lambda\phi^4$ . A última seção é dedicada à renormalização do PEG através da diferença de integrais divergentes. Tal método, desenvolvido em [2], pode ser aplicado em várias teorias de campo (por exemplo, em [3, 4, 5, 6]), inclusive na teoria  $\lambda\phi^4$  e na equação KPZ, que será abordada no próximo capítulo.

### 3.1 Potenciais Efetivos

Antes de discutir o conceito de um potencial efetivo em teoria de campos, vamos primeiro considerar o uso do potencial efetivo em um problema clássico: O movimento influenciado por uma força central. A dinâmica de duas partículas de massa  $m_1$  e  $m_2$  atraídas por uma função de potencial  $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$  pode ser reduzida à um problema equivalente de um-corpo de uma partícula com massa reduzida  $\mu \equiv m_1 m_2 / m_1 + m_2$  em um potencial efetivo

$$V_{eff}(r) \equiv V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}. \quad (3.1)$$

$V_{eff}$  é um potencial fictício que combina a função potencial real  $V(r)$  com um termo de energia associado a um movimento angular devido a uma força central [7]. A idéia é que a partícula "sinta" o potencial efetivo, ou seja, as complicações que surgem do movimento angular das partículas são inerentemente levadas em consideração pelo potencial efetivo. A Figura 3.1 mostra como as contribuições do movimento angular para o potencial efetivo mudam a natureza da lei do inverso do quadrado da força.

A conservação do momento angular resulta em uma barreira efetiva restringindo o movi-

Figura 3.1: A linha contínua descreve a energia potencial efetiva relacionada às contribuições do momento angular e do potencial da força gravitacional.

mento das duas partículas. Esse exemplo é uma forte motivação para o uso de um potencial efetivo. A noção de potencial efetivo pode ser estendida à mecânica quântica. Devido às flutuações inerentes em todos os sistemas quânticos, mesmo os potenciais mais simples podem fornecer resultados anti-intuitivos. O caso mais conhecido de flutuações quânticas que

produzem consequências físicas dramaticamente diferentes em relação à uma contraparte clássica é o átomo de hidrogênio, ou seja, um problema de dois corpos quântico. Em adição à repulsão do elétron proveniente da barreira centrípeta encontrada no caso clássico (3.1), existe uma "repulsão efetiva" do núcleo mesmo no estado de momento angular zero. Essa "repulsão" é devida ao princípio de incerteza. Veja a Figura 3.2. Apesar dos resultados

Figura 3.2: O potencial Coulombiano. O efeito das flutuações quânticas é representado em termos de um potencial efetivo (curva pontilhada)

inicialmente surpreendentes que encontramos em sistemas quânticos, podemos parcialmente resumir nossa intuição quântica com a seguinte frase: *Uma partícula quântica não gosta de viver em um poço de potencial estreito.* É essa "claustrofobia quântica" que previne o elétron de se espiralar na direção do núcleo e nosso universo de se desintegrar. Então, o objetivo é encontrar um potencial efetivo ao qual a intuição clássica possa ser aplicada. Nas Seções 3.2 e 3.3, apresentaremos formalmente o potencial efetivo Gaussiano; entretanto, uma descrição mais conceitual das propriedades que esperamos de um bom potencial efetivo pode primeiramente ser útil. A Figura 3.3 mostra quatro potenciais relacionados com a mesma física de uma maneira qualitativa. No primeiro caso (Figura 3.3a), os efeitos quânticos são

Figura 3.3: Potenciais efetivos para alguns exemplos de poço duplo. Em (a) e (c) os parâmetros são tais que efeitos quânticos são relativamente pequenos. Em (b) e (d) os efeitos quânticos são consideráveis e alteram a física qualitativamente.

pequenos. Devido ao fato dos efeitos quânticos serem pequenos, as correções em relação ao potencial exato são mínimas e a forma de poço-duplo do potencial efetivo demonstra uma barreira bastante realista. Nela, as características mais importantes do potencial efetivo são que ele é ligeiramente maior nos poços devido à energia de ponto-zero  $\frac{1}{2}\hbar\omega_{eff}$  e menor na região de barreira porque a partícula quântica é apta a se espalhar para fora dos poços. A medida que os efeitos quânticos se tornam maiores (Figura 3.3b), a barreira se torna não mais que uma pequena ondulação em um potencial essencialmente poço-único. Agora consideremos o exemplo mais ilustrativo de um potencial assimétrico com efeitos quânticos moderados (Figura 3.3c). Novamente o potencial efetivo é maior nos poços e menor na região da barreira. Note que no poço mais fino o potencial efetivo diverge do potencial exato mais que em um poço mais largo. Isto é devido ao fato que  $\omega_{eff}^2 \equiv \frac{1}{m}d^2V(x)/dx^2$  é maior no poço mais fino. De fato, como a Figura 3.3d ilustra, para um poço suficientemente fino a partícula quântica prefere ficar no poço mais largo mesmo que ele esteja em uma energia clássica maior. Este exemplo claramente demonstra a utilidade de um potencial efetivo bem

comportado. Apesar dos exemplos acima terem sido deliberadamente vagos, eles contêm as devidas propriedades de como um potencial efetivo deveria se parecer, ou seja, eles serviram apenas como uma representação pictórica do nosso entendimento intuitivo. Vamos agora considerar como definir um objeto que se inclui nessas idéias.

Existem muitos potenciais efetivos que formam propostos: "o potencial efetivo" [8], o potencial efetivo a um laço [9], o potencial efetivo Gaussiano [1] e outros que, apesar da utilização de equações variacionais, pertencem a um quadro perturbativo [10, 11, 12]. Todos eles possuem suas próprias vantagens e desvantagens. Por exemplo, "o potencial efetivo" definido por

$$V_{eff}(\phi_0) = \min_{\psi} \langle \psi | H | \psi \rangle , \quad (3.2)$$

com  $\psi$  sujeito a

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad e \quad \langle \psi | \phi | \psi \rangle = \phi_0 , \quad (3.3)$$

possui uma importante propriedade que relaciona seu mínimo global ao exato estado de energia fundamental do sistema. Entretanto, ele também possui uma propriedade indesejável que é a convexidade (isto é  $d^2V_{eff}/d\phi_0^2 \geq 0$ ) [13, 14], o excluindo de possuir uma forma de poço-duplo. Somente isso já exclui "o potencial efetivo" de possuir a formulação que temos em mente na Figura 3.3. Uma aproximação conhecida como potencial efetivo a um laço se tornou uma ferramenta popular para teóricos de campos. Ele é uma construção semiclássica baseada em adicionar correções quânticas em ordem de  $\hbar$  ao potencial clássico, negligenciando os termos de ordem  $\hbar^2$  ou superiores [9]. Isto é, se o  $V_{eff}$  possui formalmente a expansão em série (em torno do limite hipotético  $\hbar \rightarrow 0$ )

$$V_{eff}(x_0) \approx V(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n V_n(x_0) , \quad (3.4)$$

então

$$V_{1L}(x_0) \equiv V(x_0) + \hbar V_1(x_0). \quad (3.5)$$

O maior problema da aproximação a um laço é que, como ela contém apenas a contribuição de primeira ordem em  $\hbar$ , geralmente ela se torna ineficiente quando os efeitos quânticos se tornam maiores (precisamente na região de interesse). Exemplos desta ineficiência em sistemas de mecânica quântica podem ser encontrados em [1].

O potencial efetivo Gaussiano, que será apresentado formalmente nas próximas seções produz melhores resultados nos aspectos qualitativo e quantitativo.<sup>1</sup>

## 3.2 O Potencial Efetivo Gaussiano em Mecânica Quântica

As idéias básicas acerca do potencial efetivo Gaussiano possuem uma estrutura simples baseada no teorema de Rayleigh-Ritz. O objetivo é estimar o estado fundamental de energia  $E_0$  considerando um *trial ket*  $|\tilde{0}\rangle$ , que tenta imitar o estado fundamental verdadeiro  $|0\rangle$ . Seja  $H$  a Hamiltoniana do sistema; então

Se definirmos  $\langle H \rangle$  tal que

$$\langle H \rangle \equiv \frac{\langle \tilde{0} | H | \tilde{0} \rangle}{\langle \tilde{0} | \tilde{0} \rangle}, \quad (3.6)$$

o teorema de Rayleigh-Ritz afirma que

$$\langle H \rangle \geq E_0. \quad (3.7)$$

Essa é a essência da aproximação de tal método, ou seja, quanto mais o *trial ket* fundamental se aproximar do estado verdadeiro, a média da hamiltoniana se aproxima da energia exata do

---

<sup>1</sup>comparações entre vários potenciais efetivos foram feitos no caso da mecânica quântica onde resultados exatos e intuitivamente compreendidos são frequentes [1].

estado fundamental. Para melhor ilustrar outras consequências do teorema, vamos prová-lo (veja também [15]).

Mesmo que não saibamos o autoestado de energia da Hamiltoniana  $H$ , podemos expandir  $|\tilde{0}\rangle$  como

$$|\tilde{0}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} |k\rangle \langle k|\tilde{0}\rangle, \quad (3.8)$$

onde  $|k\rangle$  é um autoestado exato de energia do operador  $H$ :

$$H |k\rangle = E_k |k\rangle. \quad (3.9)$$

Fazendo  $E_k = E_k - E_0 + E_0$  para calcular  $\langle H \rangle$  em (3.6), temos

$$\begin{aligned} \langle H \rangle &= \frac{\sum_{k=0}^{\infty} |\langle k|\tilde{0}\rangle|^2 E_k}{\sum_{k=0}^{\infty} |\langle k|\tilde{0}\rangle|^2} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} |\langle k|\tilde{0}\rangle|^2 (E_k - E_0)}{\sum_{k=0}^{\infty} |\langle k|\tilde{0}\rangle|^2} + E_0 \\ &\geq E_0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Note que se  $|\tilde{0}\rangle$  coincidir com  $|0\rangle$ , isto é, se todos os coeficientes  $\langle k|\tilde{0}\rangle$  se anularem para  $k \neq 0$ , o teorema será uma igualdade. Uma consequência interessante da equação (3.10) é: se escolhermos um *trial ket* que é relativamente próximo ao autoestado exato, então

$$\langle k|\tilde{0}\rangle \approx \mathcal{O}(\epsilon) \quad \text{para } k \neq 0 \quad (3.11)$$

$$\langle k|\tilde{0}\rangle \approx 1 \quad \text{para } k = 0.$$

Então, a equação (3.10) fica:

$$\langle H \rangle \approx \frac{\epsilon^2 \sum_{k=0}^n (E_k - E_0)}{1 + n\epsilon^2} + E_0 \geq E_0, \quad (3.12)$$

onde  $n$  é o número de estados excitados. Assim, vemos que

$$\langle H \rangle - E_0 \approx \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (3.13)$$



Então, um *trial ket* relativamente diferente do autoestado fundamental, ainda assim pode fornecer uma boa estimativa da energia fundamental do sistema, apesar que o método não é capaz de dizer nada sobre a exata discrepância entre  $\langle H \rangle$  e  $E_0$ . Tudo que sabemos é que  $\langle H \rangle$  é maior ou igual a  $E_0$ . Para encontrarmos *trial ket*'s que permitam uma boa descrição do sistema, frequentemente temos que recorrer à nossa intuição física, por exemplo, o comportamento assintótico da função de onda a distâncias longas. A característica variacional do método é incluída através da minimização de  $\langle H \rangle$  com relação aos parâmetros variacionais  $\Omega_1, \Omega_2, \dots$  que são incluídos nos *trial ket*'s. Então, fazendo

$$\frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \Omega_1} = 0, \quad \frac{\partial \langle H \rangle}{\partial \Omega_2} = 0, \dots, \quad (3.14)$$

determinamos os valores ótimos dos parâmetros  $(\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2, \dots)$  e os substituímos na expressão de  $\langle H \rangle$ . Se a função de onda do *trial ket* já possui a forma do autoestado exato, obtemos a energia exata do estado fundamental do sistema.

O potencial efetivo Gaussiano consiste em definir o *trial ket* do estado fundamental como sendo uma Gaussiana centrada em  $x_0$  da forma

$$|0\rangle = \left(\frac{\Omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{\Omega}{\hbar}(x-x_0)^2\right), \quad \text{com } \Omega > 0. \quad (3.15)$$

Note que essa é a função de onda do estado fundamental do oscilador harmônico, onde o parâmetro variacional  $\Omega$  é a largura da Gaussiana.

O centro  $x_0$  também é interpretado como sendo a posição clássica da partícula. Para isso, utilizamos o teorema de Ehrenfest que afirma que os valores esperados quânticos seguem a segunda lei de Newton, ou seja

$$m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \left\langle \frac{-\partial V}{\partial x} \right\rangle. \quad (3.16)$$

Então, se fizermos um deslocamento da posição da partícula  $x \rightarrow x + x_0$ , temos

$$\langle x \rangle = x_0 + \int_{-\infty}^{\infty} dx \, x \left(\frac{\Omega}{\hbar\pi}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{\Omega}{\hbar}(x-x_0)^2\right) = x_0. \quad (3.17)$$

A definição do potencial efetivo Gaussiano é

$$\bar{V}_G(x_0) \equiv \min_{\Omega} V_G(x_0, \Omega) \equiv \min_{\Omega} \langle 0 | H | 0 \rangle . \quad (3.18)$$

Como consequência da minimização, obtemos a chamada equação  $\bar{\Omega}$ , onde a barra indica que o parâmetro foi otimizado. A equação  $\bar{\Omega}$  mostra a dependência explícita do parâmetro otimizado com a posição clássica da partícula  $\bar{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}(x_0)$  e vice-versa  $x_0 \rightarrow x_0(\bar{\Omega})$ . Isto significa que através da minimização do valor esperado de energia,  $\bar{\Omega}$  ajusta a largura da função de onda (3.15) (*trial ket*) para cada possível valor de  $x_0$ . Através do teorema de Rayleigh-Ritz (3.7), temos que o valor numérico do ponto mínimo de  $\bar{V}_G$  é maior ou igual a  $E_0$ .

Apesar da descrição de estados excitados através do PEG estar fora do foco desse trabalho, exemplos e discussão do mesmo podem ser encontrados em [1].

A melhor vantagem prática do PEG é que ele é *calculável*. Como um exemplo para ilustrar o procedimento, consideremos a Hamiltoniana do oscilador anarmônico

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}m^2x^2 + \lambda x^4 . \quad (3.19)$$

Os elementos de matriz são facilmente calculados através da equação

$$\left( \frac{\Omega}{\hbar\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx H \exp \left( -\frac{\Omega}{\hbar}(x - x_0)^2 \right), \text{ com } p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}, \quad (3.20)$$

ou através da álgebra dos operadores  $a$  e  $a^\dagger$ :

$$[a_\Omega, a_\Omega^\dagger] = 1 \quad a_\Omega |0\rangle_\Omega = 0, \quad (3.21)$$

com

$$x = x_0 + \hbar(2\hbar\Omega)^{-1/2}(a_\Omega + a_\Omega^\dagger), \quad (3.22)$$

$$p = -\frac{1}{2}i(2\hbar\Omega)^{1/2}(a_\Omega - a_\Omega^\dagger). \quad (3.23)$$

O índice  $\Omega$  indica que  $a_\Omega$  e  $a_\Omega^\dagger$  dependem da frequência do oscilador cujo estado fundamental  $|0\rangle_\Omega$  é o *trial ket* Gaussiano.

Após os cálculos das médias de  $p^2$ ,  $x^2$  e  $x^4$  temos:

$$V_G(x_0, \Omega) = \frac{1}{4}\hbar\Omega + \frac{1}{2}m^2[x_0^2 + \hbar(2\Omega)^{-1}] + \lambda[x_0^4 + 6x_0^2\hbar(2\Omega)^{-1} + 3\hbar^2(2\Omega)^{-2}]. \quad (3.24)$$

Utilizando a equação (3.18), temos

$$\bar{V}_G(x_0) = \left(\frac{1}{2}m^2x_0^2 + \lambda x_0^4\right) + \frac{1}{2}\hbar\bar{\Omega} - \frac{3}{4}\hbar^2\frac{\lambda}{\bar{\Omega}^2}, \quad (3.25)$$

onde  $\bar{\Omega}$  é representado pela equação de otimização

$$\bar{\Omega}^3 - (m^2 + 12\lambda x_0^2)\bar{\Omega} - 6\hbar\lambda = 0. \quad (3.26)$$

Através dos resultados acima para o oscilador anarmônico, podemos fazer uma conexão entre o potencial efetivo Gaussiano e o potencial a um laço. Mantivemos todos os fatores  $\hbar$  para facilitar isso. O PEG, de fato, contém o resultado a um laço; o que precisamos fazer é apenas retirar o termo  $\hbar^2$  na equação (3.25) e, como consequência, o fator  $\hbar$  em (3.26). Assim, a condição de otimização se reduz a

$$\bar{\Omega}^2 = m^2 + 12\lambda x_0^2 = V''(x_0), \quad (3.27)$$

onde  $V''$  é a segunda derivada do potencial na expressão da Hamiltoniana. Então, usando (3.25), novamente excluindo o termo em  $\hbar^2$ , temos

$$V_{1L}(x_0) = V(x_0) + \frac{1}{2}\hbar[V''(x_0)]^{1/2}. \quad (3.28)$$

De fato, esta é a expressão do potencial a um laço que, em linguagem de teoria quântica de campos, corresponde à soma dos diagramas à maneira de Coleman-Weinberg [9] em dimensão (0+1). Ela fornece o termo de correção a um laço na forma

$$V_1(x_0) = \frac{1}{2}\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{12\lambda x_0^2}{k^2 + m^2} \right) = \frac{1}{2}\hbar [(m^2 + 12\lambda x_0^2)^{1/2} - m]. \quad (3.29)$$

(o termo extra  $-\frac{1}{2}\hbar m$  é devido ao fato que o cálculo de Coleman-Weinberg envolve implicitamente a redefinição do zero de energia tal que  $V_{1L}(x_0 = 0) = 0$ ). Então, como mostrado acima, o potencial efetivo Gaussiano possui a informação de ordens superiores de  $\hbar$  sem a necessidade de se fazer outros cálculos (que se tornam mais complicados e exaustivos a cada ordem).

Note que, enquanto o PEG é sempre bem-definido e real, o potencial efetivo a um laço se torna mal-definido e complexo quando  $V''(x_0)$  é negativo. É importante ressaltar que essa é uma patologia do potencial a um laço, e não da física.

Como uma consideração final, vamos falar qualitativamente do átomo de hidrogênio ( $V(r) = -1/r$  com  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ). Através da análise do PEG, temos um resultado similar ao ilustrado pela linha pontilhada da Figura 3.2. A energia do estado fundamental é estimada em  $-4/(3\pi\hbar^2) = -0,424\hbar^{-2}$ , comparada ao resultado exato de  $-0,5\hbar^{-2}$ . Tal resultado está em contraste com a aproximação a um laço, que é sempre complexa e cuja parte real (que é simplesmente o potencial clássico) não fornece estados ligados.

Outros exemplos da comparação do potencial efetivo Gaussiano e do potencial efetivo a um laço, assim como a descrição de estados excitados através do PEG, são encontrados em [1].

### 3.3 O Potencial Efetivo Gaussiano em Teoria Quântica de Campos

A generalização do potencial efetivo Gaussiano para a teoria quântica de campos é uma conjectura, já que as idéias básicas envolvidas na formulação do PEG são baseadas em nosso entendimento intuitivo da mecânica quântica. A literatura dispõe de vários formalismos

para o cálculo do PEG e entre eles, podemos destacar os três mais utilizados [4]: O formalismo canônico, que é a generalização direta da formulação descrita na seção anterior[1]; o formalismo baseado na expansão- $\delta$  [11], que não iremos abordar neste trabalho; e o formalismo de integrais funcionais [16], que é baseado na inequação de Feynman-Jensen [17]. Todos eles chegam à mesma expressão do potencial efetivo Gaussiano; sendo que, dependendo do sistema, cada um possui suas vantagens e desvantagens no que se refere aos cálculos. No próximo capítulo, será descrito o formalismo de integrais funcionais para o PEG, e nesta seção descreveremos apenas o formalismo canônico e sua aplicação à teoria de campo  $\lambda\phi^4$ .

A generalização canônica é direta, sendo o PEG definido como

$$\overline{V}_G(\phi_0) \equiv \min_{\Omega} V_G(\phi_0, \Omega) \equiv \min_{\Omega} \langle 0|H|0\rangle_{\Omega}, \quad (3.30)$$

onde  $|0\rangle_{\Omega}$  é um funcional de onda Gaussiana normalizada e centrada em  $\phi = \phi_0$  com

$${}_{\Omega}\langle 0|0\rangle_{\Omega} = 1, \quad {}_{\Omega}\langle 0|\phi|0\rangle_{\Omega} = \phi_0. \quad (3.31)$$

Assim como na seção anterior, o parâmetro variacional  $\Omega$  é positivo definido e podemos escrever o campo  $\phi$  como  $\phi_0 + \hat{\phi}$ , onde  $\phi_0$  é um campo clássico constante e  $\hat{\phi}$  um campo livre de massa  $\Omega$ . Na álgebra dos operadores de criação e aniquilação, temos

$$\phi = \phi_0 + \int (dk)_{\Omega} [a_{\Omega}(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} + a_{\Omega}^{\dagger}(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}], \quad (3.32)$$

e também

$$\partial_{\mu}\phi = \int (dk)_{\Omega} (-ik_{\mu}) [a_{\Omega}(\mathbf{k})e^{-ik \cdot x} - a_{\Omega}^{\dagger}(\mathbf{k})e^{ik \cdot x}], \quad (3.33)$$

onde a componente de energia do quadri-vetor  $k_{\mu}$  é

$$k^0 = \omega_k(\Omega) \equiv (\mathbf{k}^2 + \Omega^2)^{1/2}. \quad (3.34)$$

A medida de integração em dimensão espacial  $d$  é

$$(dk)_{\Omega} \equiv \frac{d^d k}{(2\pi)^d 2\omega_k(\Omega)}. \quad (3.35)$$

Os operadores de criação e aniquilação seguem a relação usual de comutação

$$[a_\Omega(\mathbf{k}), a_\Omega^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta_{kk'} \equiv 2\omega_k(2\pi)^d \delta^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.36)$$

Como um exemplo da aplicação do método canônico em teoria quântica de campos, vamos abordar a teoria  $\lambda\phi^4$ . Tal nome se refere ao termo adicional na energia potencial do campo, uma interação. A densidade de Lagrangeana associada com a teoria é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m_B^2\phi^2 - \lambda_B\phi^4, \quad (3.37)$$

que leva à densidade de Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m_B^2\phi^2 + \lambda_B\phi^4. \quad (3.38)$$

A Lagrangeana leva a duas situações físicas distintas. A primeira,  $m_B^2 > 0$ , corresponde ao oscilador anarmônico. A segunda,  $m_B^2 < 0$ , resulta em um potencial de poço-duplo. Este potencial de poço-duplo pode levar a um estado de vácuo que não respeita a simetria da Lagrangeana. Tal simetria é dita espontaneamente quebrada quando um determinado parâmetro do sistema assume um valor crítico e, além desse valor a configuração simétrica se torna instável fazendo com que o estado fundamental se torne degenerado.

A motivação para o estudo da teoria  $\lambda\phi^4$  é relacionado ao mecanismo de Higgs e à origem das massas de partículas elementares. A questão é, se existe um campo escalar (o campo de Higgs) que se acopla aos campos associados com outras partículas elementares e esse campo possui um valor esperado não-nulo, então tal acoplamento pode produzir um termo de "massa efetiva".

O cálculo de  $V_G(\phi_0, \Omega)$  para a Hamiltoniana (3.38) é simples e direto. Termo a termo, temos

$$\Omega\langle 0|\frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 + (\nabla\phi)^2]|0\rangle_\Omega = \int (dk)_\Omega [\omega_k^2(\Omega) - \frac{1}{2}\Omega^2],$$

$$\begin{aligned}
\Omega \langle 0 | \frac{1}{2} m_B^2 \phi^2 | 0 \rangle_\Omega &= \frac{1}{2} m_B^2 \left[ \phi_0^2 + \int (dk)_\Omega \right], \\
\Omega \langle 0 | \lambda_B \phi^4 | 0 \rangle_\Omega &= \lambda_B \left[ \phi_0^4 + 6 \phi_0^2 \int (dk)_\Omega + 3 \int (dk)_\Omega \int (dk')_\Omega \right].
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Introduzindo a notação

$$I_N(\Omega) \equiv \int (dk)_\Omega [\omega_k^2(\Omega)]^N, \tag{3.40}$$

tal que

$$dI_N/d\Omega = (2N - 1) \Omega I_{N-1}, \tag{3.41}$$

podemos escrever o resultado como

$$V_G(\phi_0, \Omega) = I_1 + \frac{1}{2} (m_B^2 - \Omega^2) I_0 + \frac{1}{2} m_B^2 \phi_0^2 + \lambda_B \phi_0^4 + 6 \lambda_B I_0 \phi_0^2 + 3 \lambda_B I_0^2. \tag{3.42}$$

A equação  $\bar{\Omega}$ , obtida através da minimização  $dV_G/d\Omega|_{\Omega=\bar{\Omega}} = 0$  fica

$$\bar{\Omega}^2 = m_B^2 + 12 \lambda_B [I_0(\bar{\Omega}) + \phi_0^2]. \tag{3.43}$$

Entretanto, há duas questões a serem analisadas: primeiro, a equação  $\bar{\Omega}$  pode ter mais de uma solução, e precisamos tomar cuidado para selecionar a correta. Em particular, a solução precisa ser um mínimo, não um máximo de  $\bar{V}_G$ . Segundo, o mínimo global de  $\bar{V}_G(\phi_0)$  pode não ser uma solução da equação  $\bar{\Omega}$ , mas pode ocorrer em um dos pontos finais do domínio  $0 < \bar{\Omega} < \infty$ . Então, exceto nesses casos especiais, podemos inserir a equação  $\bar{\Omega}$  na equação (3.42) para obtermos o potencial efetivo Gaussiano

$$\bar{V}_G(\phi_0) = I_1(\bar{\Omega}) - 3 \lambda_B I_0^2(\bar{\Omega}) + \frac{1}{2} m_B^2 \phi_0^2 + \lambda_B \phi_0^4. \tag{3.44}$$

### 3.4 Renormalização

Dependendo da dimensão considerada, as integrais  $I_N$  utilizadas na expressão acima do potencial efetivo Gaussiano são divergentes. O objetivo desta seção é explicar como reescrever o PEG como uma função finita de  $\phi_0$ . A idéia da renormalizabilidade é: reparametrizando

$\bar{V}_G(\phi_0)$  em termos dos parâmetros finitos  $m_R$  e  $\lambda_R$  (isto é, usando uma mudança de variáveis eliminando  $m_B$  e  $\lambda_B$  em favor de  $m_R$  e  $\lambda_R$ ), conseguimos um resultado finito. Dependendo de como é feita a reparametrização, os parâmetros renormalizados podem levar à diferentes formas do PEG, porém, com resultados *equivalentes*. Em outras palavras, o PEG é invariante sob o grupo de renormalização. Isso significa que todas as maneiras de definir os parâmetros renormalizados são equivalentes, e a questão é encontrar os mais convenientes para o sistema físico em questão. Isto não acontece para os potenciais efetivos perturbativos como o potencial efetivo a um laço, pois dependendo se o termo for de ordem a "um laço" ou "dois laços", etc., precisamos definir como são renormalizadas a constante de acoplamento e a massa.

Fazer a mudança de variáveis de  $m_B$  e  $\lambda_B$  para  $m_R$  e  $\lambda_R$  é uma tarefa delicada, já que ela envolve a manipulação das integrais divergentes  $I_N$ . Neste estágio, é usual introduzir um método de regularização. Porém, podemos dispensar uma regularização explícita devido ao fato que, em geral, nossos cálculos terão somente diferenças  $I_N(\Omega) - I_N(m)$  que mostraremos, formalmente, que

$$\begin{aligned}
I_N(\Omega) - I_N(m) &= \frac{1}{2(2\pi)^d} \int d^d k [(\mathbf{k}^2 + \Omega^2)^{N-1/2} - (\mathbf{k}^2 + m^2)^{N-1/2}] \\
&= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2(\mathbf{k}^2 + m^2)^{1/2}} (\mathbf{k}^2 + m^2)^N \left[ \left( 1 - \frac{(m^2 - \Omega^2)}{(\mathbf{k}^2 + m^2)} \right)^{N-1/2} - 1 \right] \\
&= \int (dk)_m \sum_{r=1}^{\infty} \begin{bmatrix} -N - \frac{1}{2} + r \\ r \end{bmatrix} \frac{(m^2 - \Omega^2)^r}{(\mathbf{k}^2 + m^2)^{r-N}} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \begin{bmatrix} -N - \frac{1}{2} + r \\ r \end{bmatrix} (m^2 - \Omega^2)^r I_{N-r}(m).
\end{aligned} \tag{3.45}$$



Essa equação expressa a diferença de duas integrais  $I_N$  como uma soma de integrais menos divergentes. De fato, de  $r = N + k$ , onde

$$k \equiv \begin{cases} (d+1)/2 & d = \textit{impar} \\ d/2 & d = \textit{par} \end{cases}, \quad (3.46)$$

os termos envolvem integrais convergentes as quais podem ser escritas como

$$I_N(\Omega) = \frac{1}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma[-(2N+d-1)/2]}{\Gamma[-(2N-1)/2]} \Omega^{2N+d-1} \quad \textit{para } 2N+d-1 < 0, \quad (3.47)$$

para obter a seguinte equação:

$$\begin{aligned} I_N(\Omega) - I_N(m) &= \sum_{r=1}^{N+k-1} \begin{bmatrix} -N - \frac{1}{2} + r \\ r \end{bmatrix} (m^2 - \Omega^2)^r I_{N-r}(m) \\ &+ \frac{\Gamma(N + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} m^{2N+d-1} \frac{(-1)^k}{(4\pi)^k} L_{N+k}^{(d)}(x), \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde as funções  $L_i^{(d)}$  são definidas como

$$L_{i+1}^{(d)}(x) = \int_1^x dx' L_i^{(d)}(x') \quad (3.49)$$

com

$$L_0^{(d)}(x) \equiv \begin{cases} 1/x & d = \textit{impar} \\ 1/(2\sqrt{x}) & d = \textit{par} \end{cases}, \quad (3.50)$$

e  $x \equiv \Omega^2/m^2$ . Os casos especiais da equação mestra (3.48), que usualmente precisamos, estão na Tabela **I**; e as primeiras funções  $L_i$  estão listadas na Tabela **II**. Note que o resultado formal para  $dI_N/d\Omega$ , utilizados anteriormente em (3.41), podem ser considerados como um caso especial de (3.47).

Tabela 3.1: Equações úteis para as diferenças das integrais  $I_N: x \equiv \Omega^2/m^2$ . (de 3.48)

Tabela 3.2: As primeiras funções  $L_i(x)$  de (3.48)-(3.50). Também é mostrado as expansões em  $y \equiv (x - 1)$  ou  $z \equiv \sqrt{x} - 1$ .

# Bibliografia

- [1] P. M. Stevenson, Phys. Rev. D **30**, 1712 (1984).
- [2] P. M. Stevenson, Phys. Rev. D **33**, 2305 (1985).
- [3] P. M. Stevenson e I. Roditi, Phys. Rev. D **33**, 2305 (1986).
- [4] R.Ibañez-Meier, I. Stancu, P. M. Stevenson, Z. Phys. C **70**, 307 (1996).
- [5] F. S. Amaral, I. Roditi *The Gaussian effective potencial and stochastic partial differential equations*, Physica A **385**, 137 (2007).
- [6] P. M. Stevenson, B. Allès e R. Tarrach, Phys. Rev. D **35**, 2407 (1987).
- [7] Vernon D. Barger e Martin G. Olsson, Classical Mechanics: a moden perspective, McGraw-Hill, (1995).
- [8] J. Goldstone, A. Salam e S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962); G. Jona-Lasinio, Nuovo Cimento **34**, 1790 (1964).
- [9] S. Coleman e E. Weinberg, Phys. Rev. D **7**, 1888 (1973); S. Weinberg, *ibid.* **7**, 2887 (1973); R. Jackiw, *ibid.* **9**, 1686 (1974).
- [10] A. Okopinska, Phys. Rev. D **35**, 1835 (1987); P. Cea Phys. Lett. B **236**, 191 (1990); M. Thoma, Z. Phys. C **43** 343 (1989).

- [11] I. Stancu, P. M. Stevenson, *Phys. Rev. D* **42**, 2710 (1990); I. Stancu, *ibid*, **43**, 1283 (1991).
- [12] S. K. You, C. K. Kim, K. Nahm e H. S. Noh (2000) *Phys. Rev. C* **62** 045503.
- [13] T. L. Curtright e C. B. Thorn, *J. Math. Phys.* **25**, 541 (1984).
- [14] K. Symanzik, *Commun. Math. Phys.* **16**, 48 (1970); T. D. Lee e G. C. Wick, *Phys. Rev. D* **9**, 2291 (1974).
- [15] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, (1994).
- [16] R. Ibañez-Meier, L. Polley e U. Ritschel, *Phys. Lett.B* **279**, 106 (1992).
- [17] R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **97**, 660 (1955); *Statistical Mechanics* (Benjamim, New York, 1972)

## Capítulo 4

# As Equações Diferenciais Parciais

# Estocásticas e o Potencial Efetivo

## Gaussiano

Como ressaltado no Capítulo 2, entre algumas das mais fundamentais ferramentas de modelamento de sistemas, onde o ruído é um ingrediente essencial, nós encontramos as equações diferenciais parciais estocásticas (EDPE's). Elas podem ser aplicadas a uma variedade de situações, tais como turbulência, formação de padrões, crescimento de superfícies ou difusão direcionada [1, 2]. Nos últimos anos, uma tênue relação entre as EDPE's e teoria quântica de campos emergiu, proporcionando um caminho para a investigação de fenômenos envolvendo a física clássica via técnicas provenientes da física quântica [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]. Em particular, foi desenvolvido um método perturbativo que associou o potencial efetivo a um laço às equações diferenciais parciais estocásticas arbitrárias [10]. Esse método forneceu informações acerca da quebra espontânea de simetria e estruturas de fase de alguns modelos estocásticos interessantes [11],[12].

O objetivo deste capítulo é investigar as equações diferenciais parciais estocásticas em um quadro variacional através do uso do potencial efetivo Gaussiano (PEG)[13], que, como descrito no Capítulo 3, é uma simples aproximação não-perturbativa e uma ferramenta útil para encontrar a quebra de simetrias em teorias de campos escalares [14], assim como em eletrodinâmica escalar [15] e o modelo de Higgs  $U(1)$  [16]. Nós também usamos o programa de quantização estocástica descrito em [7, 8, 10] para obter uma "ação clássica" relacionada a uma EDPE. Então, seguindo a aproximação variacional desenvolvida em [17], podemos calcular o PEG para equações diferenciais parciais estocásticas arbitrárias sujeitas a correlações de ruído que dependem do sistema em questão.

Na Seção 4.3, aplicamos o método descrito nas Seções 4.1 e 4.2 a uma teoria de campo estocástica com considerável interesse físico, a equação Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) [18]. Como ressaltado na Seção 2.3, essa equação descreve um modelo dinâmico, contínuo e não-linear para o crescimento de superfícies.

Este capítulo é organizado como se segue: Na Seção 4.1 descreveremos o procedimento para obter o funcional gerador  $Z[J]$  e nele identificar a correspondente "ação clássica" na forma que será útil para nossos cálculos. Na Seção 4.2, desenvolveremos um procedimento geral baseado na aproximação variacional afim que possamos definir o potencial efetivo Gaussiano e aplicá-lo à equação Kardar-Parisi-Zhang (Seção 4.3), onde discutiremos a quebra de simetria assim como o procedimento de renormalização em uma tênue analogia com a teoria de campo escalar  $\lambda\phi^4$  [14]. Na Seção 4.4, comentaremos os resultados obtidos e faremos algumas considerações finais.

## 4.1 O Funcional Gerador

Com o intuito de obter o potencial efetivo associado à uma equação diferencial parcial estocástica, é necessário primeiro definir o que seria a "ação" correspondente. Nesta seção, mostraremos as definições utilizadas para implementar o formalismo de integrais funcionais e chegar à expressão da "ação" (ver também [8, 9, 10]). Nas expressões abaixo, usaremos as seguintes notações condensadas:  $f(\mathbf{x}, t) \mapsto f(x)$ ,  $d^d x dt \mapsto dx$ . Considere a classe geral de equações diferenciais parciais estocásticas

$$D\phi(x) = F(\phi(x)) + \eta(x) , \quad (4.1)$$

onde  $D$  é um operador diferencial linear qualquer, envolvendo derivadas espaciais e temporais arbitrárias que não dependem explicitamente do campo  $\phi$ . A função  $F(\phi)$  é um termo geralmente não-linear no campo  $\phi$ . A função  $\eta(x)$  denota a fonte de ruído. A natureza (branco, lei de potência ou  $1/f$ -noise) e a distribuição de probabilidade do ruído ainda não precisa ser especificada. A definição de médias em sistemas estocásticos é mais sutil que em sistemas que não descrevem um comportamento aleatório devido ao fato de que precisamos considerar a presença do ruído e sua respectiva distribuição de probabilidade. Consideremos que *dada uma configuração particular do ruído  $\eta$ , a equação diferencial (4.1) é suposta possuir uma solução única  $\phi_s(x|\eta)$* . Então, para qualquer funcional  $Q[\phi]$ , podemos definir a média estocástica (sobre o ruído) como

$$\langle Q[\phi] \rangle \equiv \int (\mathcal{D}\eta) \mathcal{P}[\eta] Q[\phi_s(x|\eta)] , \quad (4.2)$$

onde  $\mathcal{P}[\eta]$  é a densidade funcional de probabilidade do ruído, que é considerado arbitrário e normalizado a 1. É conveniente fazer uma manipulação algébrica em (4.2) para retirar a dependência explícita da solução única  $\phi_s$ , devido ao fato que, em geral, as EDPS's não possuem soluções que possam ser escritas em uma expressão analítica fechada. Portanto,

utilizaremos a seguinte identidade,

$$\phi_s(x|\eta) = \int (\mathcal{D}\phi) \phi \delta[\phi - \phi_s(x|\eta)] . \quad (4.3)$$

Usando a propriedade<sup>1</sup>

$$\delta[G(\phi)] = \frac{\delta[\phi - \phi_s(x|\eta)]}{|det(\frac{\delta G(\phi)}{\delta \phi})|} , \quad (4.4)$$

onde  $G(\phi_s) \equiv D\phi_s - F(\phi_s) - \eta = 0$  e o determinante Jacobiano funcional, que é definido por

$$\mathcal{J} \equiv det \left( D - \frac{\delta F}{\delta \phi} \right) , \quad (4.5)$$

podemos inserir (4.4) em (4.3) para obter

$$\phi_s(x|\eta) = \int (\mathcal{D}\phi) \phi \delta[D\phi - F(\phi) - \eta] |\mathcal{J}| . \quad (4.6)$$

É fácil ver que também temos a identidade

$$Q[\phi_s(x|\eta)] = \int (\mathcal{D}\phi) Q[\phi] \delta[D\phi - F(\phi) - \eta] |\mathcal{J}| , \quad (4.7)$$

que, inserida em (4.2), fornece a seguinte expressão para a média estocástica sobre o ruído:

$$\begin{aligned} \langle Q[\phi] \rangle &= \int (\mathcal{D}\eta) \int (\mathcal{D}\phi) \mathcal{P}[\eta] Q[\phi] \delta[D\phi - F(\phi) - \eta] |\mathcal{J}| \\ &= \int (\mathcal{D}\phi) \mathcal{P}[D\phi - F(\phi)] Q[\phi] |\mathcal{J}| . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Com isso, eliminamos a necessidade do conhecimento da forma analítica de  $\phi_s(x|\eta)$  e agora, a conexão com a teoria quântica de campos pode ser feita através da analogia da expressão (4.8) com o funcional gerador  $Z[J]$  quando  $Q[\phi]$  tem a forma

$$Q[\phi] = \exp \left( \int dx J(x) \phi(x) \right) . \quad (4.9)$$

---

<sup>1</sup>Note que essa é a generalização funcional da propriedade da função delta de Dirac  $\delta(f(x)) = \frac{\delta(x-x_0)}{|\frac{df(x)}{dx}|_{x=x_0}}$ ,

onde  $f(x)$  possui apenas uma raiz em  $x = x_0$ .



Então,

$$\begin{aligned} Z[J] &\equiv \left\langle \exp \left( \int dx J \phi \right) \right\rangle \\ &= \int (\mathcal{D}\phi) \mathcal{P}[D\phi - F(\phi)] \exp \left( \int dx J \phi \right) |\mathcal{J}|. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Esse resultado chave nos permite calcular o potencial efetivo de uma maneira direta. Nesse estágio, faremos algumas suposições sobre o ruído. Vamos supor que a distribuição de probabilidade do ruído seja Gaussiana com média nula, tal que o único cumulante não-nulo seja o de segunda ordem. Se o ruído tem um média não-nula, podemos sempre redefinir o termo  $F[\phi]$  tal que o ruído tenha média nula, sem perda de generalidade. Ruídos Gaussianos arbitrários são suficientes, já que eles nos permitam escrever a distribuição de probabilidade como

$$\mathcal{P}[\eta] = \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \int dx dy \frac{\eta(x) \eta(y)}{\langle \eta(x) \eta(y) \rangle} \right], \quad (4.11)$$

onde

$$\begin{aligned} \langle \eta(x) \eta(y) \rangle &= \frac{1}{N} \int (\mathcal{D}\eta) \eta(x) \eta(y) \exp \left( -\frac{1}{\mathcal{A}} \int \int dx' dy' \eta G_\eta^{-1} \eta \right) \\ &= \mathcal{A} G_\eta(x, y) \end{aligned} \quad (4.12)$$

é a função de correlação de dois pontos do ruído. A amplitude de correlação  $\mathcal{A}$  nos dirá se estamos no regime de ausência de correlações ( $\mathcal{A} = 0$ ) ou não ( $\mathcal{A} \neq 0$ ). Como estamos interessados na influência das correlações do ruído no estado de "vácuo" das equações diferenciais parciais estocásticas em um quadro não-perturbativo<sup>2</sup>, é conveniente fazer  $\mathcal{A} = 1$ . Então, o funcional gerador fica

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int (\mathcal{D}\phi) \exp \left( \int dx J \phi \right) |\mathcal{J}| \times \\ &\quad \times \exp \left[ -\frac{1}{2\mathcal{A}} \int \int dx dy (D\phi - F(\phi)) G_\eta^{-1} (D\phi - F(\phi)) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

---

<sup>2</sup>Na aproximação perturbativa,  $\mathcal{A}$  é o parâmetro de contagem, análogo a  $\hbar$  em teoria quântica de campos.

Essa expressão contém toda a física de (4.1). O ruído  $\eta$  foi completamente eliminado e sobrevive somente através da aparição explícita de sua função de dois pontos. Desde que o funcional gerador é agora fornecido como uma integral funcional sobre o campo físico  $\phi$ , toda a maquinaria padrão da teoria quântica de campos e sua conexão com a mecânica estatística, pode ser trazida a tona. Então, salvo o determinante do Jacobiano<sup>3</sup>, a física das EDPE's pode ser extraída da integral funcional baseada na "ação clássica"

$$S[\phi, J] = \frac{1}{2} \int \int dx dy (D\phi - F(\phi)) G_{\eta}^{-1} (D\phi - F(\phi)) + \int dx J \phi. \quad (4.14)$$

## 4.2 A Aproximação Variacional

Uma vez obtida a expressão para a ação através da definição do análogo do funcional gerador em um contexto de equações diferenciais parciais estocásticas, podemos agora utilizar técnicas de teoria quântica de campos afim de analisar a física de uma EDPE em particular através de um método não-perturbativo, o potencial efetivo Gaussiano (que fornece um quadro de como as correlações do ruído modificam o potencial clássico). Como discutido em [14] num contexto de mecânica quântica e teoria quântica de campos, o potencial efetivo Gaussiano é capaz de fornecer uma boa descrição do estado fundamental do sistema tanto em termos qualitativos quanto quantitativos (mesmo quando as flutuações quânticas se tornam maiores), além de ser invariante sob o grupo de renormalização, o que significa que todas as maneiras de definir os parâmetros renormalizados são equivalentes, e a questão é encontrar os mais convenientes para o sistema físico em questão<sup>4</sup>.

---

<sup>3</sup>Na aplicação do método à equação KPZ, o determinante do Jacobiano é independente do campo, mas isso não é válido para todas as classes de EDPE's. A dependência do Jacobiano funcional com o campo está fora do foco deste trabalho; alguns comentários são encontrados em [10].

<sup>4</sup>Isso não acontece para os potenciais efetivos perturbativos como o potencial efetivo a um laço, pois dependendo se o termo for de ordem a "um laço" ou "dois laços", etc., precisamos definir como são renor-

Primeiro, faremos a seguinte translação no campo<sup>5</sup>:

$$\phi(x) \rightarrow \hat{\phi}(x) + f(\phi_0). \quad (4.15)$$

Essa translação é feita para explorar as simetrias das EDPE's através da introdução do campo constante  $\phi_0$  que, em um contexto de teoria quântica de campos, pode ser identificado como sendo o campo clássico. A função  $f(\phi_0)$  e a interpretação do  $\phi_0$  irá depender da equação diferencial parcial estocástica em particular. De fato, o potencial efetivo Gaussiano será uma função dos possíveis valores de  $\phi_0$ .

Depois dessa transformação no campo, é conveniente separar a ação  $S$  em duas partes:

A parte Gaussiana  $S_G$  definida como

$$S_G[\hat{\phi}] = \frac{1}{2} \int dx \hat{\phi} G^{-1} \hat{\phi}, \quad (4.16)$$

que corresponde aos termos quadráticos que irão gerar o análogo do propagador em teoria quântica de campos, e a parte de interação  $S_I$ , que fornecerá o análogo das funções de vértices. Então, a ação completa se torna

$$S[\hat{\phi}, J, \phi_0] = S_G[\hat{\phi}] + S_I[\hat{\phi}, J, \phi_0]. \quad (4.17)$$

A aproximação variacional é proveniente da generalização funcional da inequação de Jensen [20]:  $\langle \exp f \rangle \geq \exp \langle f \rangle$ , isto é,

$$\frac{Z[J]}{N} = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\hat{\phi} e^{-S_I} e^{-S_G} \geq e^{\frac{1}{N} \int \mathcal{D}\hat{\phi} (-S_I) e^{-S_G}}. \quad (4.18)$$

Como  $S_G$  é quadrática nos campos, o fator de normalização é

$$N = \int \mathcal{D}\hat{\phi} \exp(-S_G) = (\det G^{-1})^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.19)$$

---

malizadas a constante de acoplamento e a massa.

<sup>5</sup>Note que a medida funcional não varia, i.e,  $\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}\hat{\phi}$ .

O funcional gerador das funções de Green conexas é dado por  $W[J] = -\ln Z[J]$ . Então,

$$W[J] \leq -\ln N - \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\hat{\phi} (S_G - S) \exp(-S_G). \quad (4.20)$$

O termo  $-\ln N$  pode ser escrito de uma forma mais conveniente na base de Fourier

$$-\ln N = \frac{1}{2} \ln \det \tilde{G}^{-1} = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \tilde{G}^{-1} = \frac{\mathcal{V}}{2} \int dk \ln \tilde{G}^{-1}, \quad (4.21)$$

onde  $\mathcal{V}$  é o volume do espaço-tempo ( $\int dx$ ). Entretanto, um objeto mais útil é a ação efetiva, que é definida como a transformada funcional de Legendre de  $W[J]$

$$\Gamma[\phi_0] = \int dx J\phi_0 - W[J]. \quad (4.22)$$

Então, a inequação (4.20) se torna

$$\Gamma[\phi_0] \leq \ln N - \langle S_I \rangle_G \quad (4.23)$$

onde o símbolo  $G$  fora dos colchetes indica que a média funcional é Gaussiana. O lado direito da equação (4.23) pode ser calculado analiticamente. Através da maximização da ação efetiva em relação à função do propagador  $\tilde{G}$ , obtemos o propagador ótimo para o sistema desejado. Definindo a ação efetiva Gaussiana como

$$\bar{\Gamma}^{GEA}[\phi_0] \equiv \min_{\tilde{G}} \Gamma^{GEA}[\phi_0] = \min_{\tilde{G}} \left[ -\frac{\mathcal{V}}{2} \int dk \ln \tilde{G}^{-1} + \langle S_G - S \rangle_G /_{J=0} \right], \quad (4.24)$$

e utilizando a relação

$$V_G(\phi_0) = -\frac{\Gamma^{GEA}[\phi_0]}{\mathcal{V}}, \quad (4.25)$$

podemos definir o potencial efetivo Gaussiano como

$$\bar{V}_G(\phi_0) \equiv \min_{\tilde{G}} [\mathcal{V} V_G(\phi_0)] = \min_{\tilde{G}} \left[ \frac{1}{2} \int dk \ln \tilde{G}^{-1} + \frac{1}{\mathcal{V}} \langle S_I \rangle_G /_{J=0} \right], \quad (4.26)$$

onde a barra acima de  $V_G$  significa que  $\tilde{G}$  foi substituído pelo seu valor ótimo  $\tilde{\tilde{G}}$ .

## 4.3 O Potencial Efetivo Gaussiano Associado à Equação

### KPZ

Agora estamos prontos para obter o potencial efetivo Gaussiano para uma equação diferencial parcial estocástica em particular. A equação Kardar-Parisi-Zhang[18]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) \phi(x) = F_0 + \frac{\lambda}{2} (\nabla \phi)^2 + \eta(x), \quad (4.27)$$

é uma extensão natural do modelo de Edwards-Wilkinson[21] construída levando em consideração princípios de simetria relevantes à descrição de fenômenos de crescimento. O campo  $\phi(x)$  é interpretado como sendo a altura da superfície (tipicamente definida sobre um plano). O termo não-linear é responsável pela adição de "material" nas regiões onde a inclinação local é maior, aumentando a altura média da superfície. Essa situação pode ser confrontada ao efeito do termo linear, que reorganiza a altura da superfície fazendo com que a massa total permaneça intacta. O resultado da combinação desses dois fatores é uma boa descrição de fenômenos de crescimento de superfície. A inclusão do termo  $F_0$  é necessária, como veremos em breve, para completar o programa de renormalização. Esse termo constante pode ser visto como uma consequência da transformação  $\phi \rightarrow \phi + F_0 t$ , que representa apenas uma mudança na velocidade média do crescimento da superfície em relação ao sistema de referência do laboratório. Uma simetria importante da equação KPZ que é relevante para nossa análise é a invariância sob a transformação

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &\rightarrow \mathbf{x} - \lambda \vec{\phi}_0 t, \\ t &\rightarrow t, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) \rightarrow \phi(\mathbf{x}, t) + \vec{\phi}_0 \cdot \mathbf{x}.$$

Aqui,  $\phi_0$  é um campo constante e essa simetria consiste em escolher um sistema de coorde-

nadas que é inclinado a um ângulo  $\theta$  com respeito à vertical

$$\tan \theta = \left| \vec{\phi}_0 \right|, \quad (4.29)$$

e por essa razão esta transformação é frequentemente chamada de invariância de inclinação; mas essa transformação permanecerá uma simetria somente se a função de dois pontos da correlação do ruído for invariante sob translação e temporalmente branco. Uma escolha conveniente é <sup>6</sup>:

$$\langle \eta(x) \eta(y) \rangle = G_\eta(x, y) \equiv \delta(x - y). \quad (4.30)$$

Usando o ruído branco na ação (4.14), temos

$$S[\phi] = \frac{1}{2} \int dx (D\phi - F(\phi))^2 = \frac{1}{2} \int dx \left[ \dot{\phi} - \nu \nabla^2 \phi - F_0 - \frac{\lambda}{2} (\nabla \phi)^2 \right]^2. \quad (4.31)$$

Para investigar a quebra de simetria através do potencial efetivo Gaussiano, precisamos fazer um deslocamento no campo tal que  $\langle \phi \rangle_{vacuo} \neq 0$ . Nesse caso, uma escolha conveniente é  $\phi(x) \rightarrow \hat{\phi}(\mathbf{x}) + \vec{\phi}_0 \cdot \mathbf{x}$ , com  $\vec{\phi}_0$  sendo um vetor de dimensão  $n$  tal que  $\vec{\phi}_0 \equiv (\phi_0, \dots, \phi_0)$ . Então,

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= 0, \\ \nabla^2 \phi(x) &= \nabla^2 \hat{\phi}(\mathbf{x}), \\ \nabla \phi(x) &= \nabla \hat{\phi}(\mathbf{x}) + \vec{\phi}_0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Fixando o parâmetro de tensão superficial  $\nu$  a 1 na equação (4.27), a ação se torna

$$\begin{aligned} S[\hat{\phi}, J, \phi_0] &= \frac{T}{2} \int d^d x \left[ \nabla^2 \hat{\phi} \nabla^2 \hat{\phi} + F_0 \lambda (\nabla \hat{\phi})^2 + F_0 \lambda \phi_0^2 \right] \\ &+ \left[ \frac{\lambda^2}{4} (\nabla \hat{\phi})^4 + \frac{\lambda^2}{4} \phi_0^4 + \frac{3}{2} \lambda^2 \phi_0^2 (\nabla \hat{\phi})^2 + \text{termos ímpares} \right] + \int d^d x \hat{\phi} J, \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde  $T = \int dt$  e os termos ímpares foram retirados devido ao fato que eles se anulam

---

<sup>6</sup>Lembre-se que colocamos  $\mathcal{A} = 1$

quando fazemos as integrações ímpares do momento e do campo. O termo com  $F_0^2$  sozinho não é fisicamente relevante, pois é uma constante que pode ser subtraída. Primeiramente, precisamos saber a expressão do propagador ótimo para definir  $S_I$ . Na base de Fourier, a função real  $\hat{\phi}(\mathbf{x})$  é

$$\hat{\phi}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (4.34)$$

Então<sup>7</sup>, na base de Fourier  $S_G$  se torna

$$S_G[\tilde{\phi}] = \frac{T}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) \tilde{G}^{-1}(\mathbf{k}) \tilde{\phi}^*(\mathbf{k}). \quad (4.35)$$

Usando (4.24),

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Gamma^{GEA}[\phi_0]}{\delta \tilde{G}(k')} &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \mathbf{k}^4 \delta^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ &+ \frac{3}{4} \lambda^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \mathbf{k}^2 \tilde{G}(\mathbf{k}) \left( \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \mathbf{k}^2 \delta^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \right) \\ &+ \frac{3}{4} \lambda^2 \phi_0^2 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \mathbf{k}^2 \delta^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}') - \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{G}^{-1}(\mathbf{k}) \delta^d(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Então,

$$\tilde{G}^{-1}(\mathbf{k}) = \mathbf{k}^4 + \mathbf{k}^2 \bar{\Omega}^2, \quad (4.37)$$

onde o valor de  $\bar{\Omega}$  precisa satisfazer a relação da equação  $\bar{\Omega}$ ,

$$\bar{\Omega}^2 = F_0 \lambda + \frac{3}{2} \lambda^2 \left[ \left( \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + \bar{\Omega}^2)} \right) + \phi_0^2 \right]. \quad (4.38)$$

Com a definição do propagador ótimo, estamos prontos para calcular a parte de interação da ação

$$S_I[\hat{\phi}, \phi_0] = S[\hat{\phi}, \phi_0] - S_G[\hat{\phi}, \phi_0]$$

---

<sup>7</sup>Note que  $\int d^d x e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}} = \delta^d(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$  e  $\hat{\phi}^2 = \hat{\phi} \hat{\phi}^*$

$$\begin{aligned}
&= T \int d^d x \left[ F_0 \frac{\lambda}{2} (\nabla \hat{\phi})^2 + F_0 \frac{\lambda}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda^2}{8} (\nabla \hat{\phi})^4 + \frac{\lambda^2}{8} \phi_0^4 \right] \\
&+ \left[ \frac{3}{4} \lambda^2 \phi_0^2 (\nabla \hat{\phi})^2 - \frac{1}{2} (\nabla \hat{\phi})^2 \bar{\Omega}^2 + \text{odd terms} \right].
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Agora que temos a expressão para  $S_I$ , estamos aptos a calcular o potencial efetivo Gaussiano através da equação (4.26). Para calcular  $\langle S_I \rangle$ , faremos duas integrações funcionais Gaussianas na base de Fourier:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N} \int \mathcal{D}\hat{\phi} \ (\nabla \hat{\phi})^2 \exp(-S_G) &= \frac{(-i)(i)}{N} \int \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}} \\
&\times \int \left( \prod_{\mathbf{k}} d\tilde{\phi}(\mathbf{k}) \right) \tilde{\phi}(\mathbf{k}_1) \tilde{\phi}^*(\mathbf{k}_2) \exp(-S_G) \\
&= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \mathbf{k}^2 \tilde{G}(\mathbf{k}),
\end{aligned} \tag{4.40}$$

(note que temos apenas uma combinação que faz dessa integral par em relação aos campos:  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ .)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N} \int \mathcal{D}\hat{\phi} \ (\nabla \hat{\phi})^4 \exp(-S_G) \\
&= \frac{(-i)^2 (i)^2}{N} \int \frac{d^d k_1}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_2}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_3}{(2\pi)^d} \frac{d^d k_4}{(2\pi)^d} \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4 e^{-i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{x}} \\
&\times \int \left( \prod_{\mathbf{k}} d\tilde{\phi}(\mathbf{k}) \right) \tilde{\phi}(\mathbf{k}_1) \tilde{\phi}^*(\mathbf{k}_2) \tilde{\phi}(\mathbf{k}_3) \tilde{\phi}^*(\mathbf{k}_4) \exp(-S_G) \\
&= 3 \left( \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \mathbf{k}^2 \tilde{G}(\mathbf{k}) \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

O fator 3 emerge porque há três combinações de  $k$ 's resultando em uma integral par em relação aos campos. Então, definindo<sup>8</sup>

$$I_1(\bar{\Omega}) \equiv \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[ \ln(\mathbf{k}^2 + \bar{\Omega}^2) - \ln(\mathbf{k}^2) \right] = \frac{1}{2} \int \frac{d^{d-1} k}{(2\pi)^{d-1}} (\mathbf{k}^2 + \bar{\Omega}^2)^{1/2}, \tag{4.42}$$

$$I_0(\bar{\Omega}) \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + \bar{\Omega}^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{d^{d-1} k}{(2\pi)^{d-1}} \frac{1}{(\mathbf{k}^2 + \bar{\Omega}^2)^{1/2}}, \tag{4.43}$$

temos o potencial efetivo Gaussiano na dimensão  $(d+1)$

$$\bar{V}_G(\phi_0) = I_1(\bar{\Omega}) + C + \frac{\lambda^2}{8} \phi_0^4 + \frac{3}{8} \lambda^2 I_0^2(\bar{\Omega})$$

---

<sup>8</sup>O lado direito da equação será útil quando completarmos o programa de renormalização.



$$+\frac{3}{4}\lambda^2\phi_0^2 I_0(\bar{\Omega}) + F_0 \frac{\lambda}{2} I_0(\bar{\Omega}) + F_0 \frac{\lambda}{2} \phi_0^2 - \frac{1}{2}\bar{\Omega}^2 I_0(\bar{\Omega}), \quad (4.44)$$

onde  $C$  é uma constante infinita proveniente da integral  $\int dk \ln k^2$ .

Entretanto, há duas questões a serem analisadas: primeiro, (4.38) pode ter mais de uma solução, e precisamos tomar cuidado para selecionar a correta. Em particular, a solução precisa ser um mínimo, não um máximo de  $\bar{V}_G$ . Segundo, o mínimo global de  $\bar{V}_G(\phi_0)$  pode não ser uma solução de (4.38), mas pode ocorrer em um dos pontos finais no domínio  $0 < \bar{\Omega} < \infty$ . Outra observação importante é que através das equações (4.44) e (4.38), temos uma tênue analogia entre o potencial efetivo Gaussiano para o problema KPZ e o PEG da teoria  $\lambda\phi^4$ . De fato, interpretando  $F_0\lambda$  como sendo um termo de massa nua e reescalando o parâmetro  $\lambda$ , temos uma expressão idêntica obtida em [14], a menos do termo constante  $C$  e o fato que iremos calcular as integrais  $I_1$  e  $I_0$  sobre o espaço Euclidiano. Como no problema KPZ o campo  $\phi(x)$  é interpretado como sendo a altura da superfície, tipicamente definida sobre um plano, restringiremos nossos resultados às dimensões Euclidianas (2+1) e (3+1).

### 4.3.1 Renormalização

Para fazer o programa de renormalização, definiremos  $\Delta_0^2 \equiv F_0\lambda$  e renormalizaremos o parâmetro nu  $\Delta_0$  como

$$\Delta_0^2 = \Delta_R^2 - \frac{3}{2}\lambda^2 I_0(\bar{\Omega}_0), \quad (4.45)$$

onde  $\bar{\Omega}_0$  é a solução da equação  $\bar{\Omega}$  quando  $\phi_0 = 0$ . Então, a equação  $\bar{\Omega}$  associada a  $V_G$  se torna

$$\bar{\Omega}^2 = \Delta_R^2 + \frac{3}{2}\lambda^2 [(I_0(\bar{\Omega}) - I_0(\bar{\Omega}_0)) + \phi_0^2], \quad (4.46)$$

com

$$\bar{\Omega}_0^2 = \Delta_R^2. \quad (4.47)$$

Seguiremos o mesmo programa de renormalização de [14] que descarta uma regularização explícita, porque os cálculos irão envolver somente diferenças  $I_N(\bar{\Omega}) - I_N(\Delta_R)$ . Substituindo (4.45) e (4.46) em (4.44), temos

$$\bar{V}_G(\phi_0) = I_1(\bar{\Omega}) + C + \frac{\lambda^2}{8} \phi_0^4 - \frac{3}{8} \lambda^2 I_0^2(\bar{\Omega}). \quad (4.48)$$

Definindo uma constante divergente independente de  $\phi_0$

$$D \equiv \bar{V}_G(\phi_0 = 0) = I_1(\bar{\Omega}_0) + C - \frac{3}{8} \lambda^2 [I_0(\bar{\Omega}_0)]^2, \quad (4.49)$$

vemos que  $D$  representa a densidade de energia do vácuo quando  $\phi_0 = 0$ . A presença de  $D$  não possui consequências físicas, pois somente diferenças de energia, e não energias absolutas, são mensuráveis. Então, podemos seguir a prática usual de redefinir o zero da escala de energia tal que,  $\bar{V}_G(\phi_0 = 0) = 0$  e subtraindo  $D$  de  $\bar{V}_G(\phi)$ .

### 4.3.2 KPZ (2+1)

Na dimensão Euclideana (2+1), as integrais  $I_1$  e  $I_0$  são divergentes e agora veremos explicitamente como a equação (4.45) leva a um resultado manifestamente finito. Por meio da fórmula  $I_N(\bar{\Omega}) - I_N(\Delta_R)$  da tabela **II** de [14] e configurando o parâmetro renormalizado tal que  $\Delta_R = 1$ , temos

$$I_1(\bar{\Omega}) - I_1(1) = \frac{1}{2}(\bar{\Omega}^2 - 1)I_0(1) - \frac{L_2(\bar{\Omega}^2)}{8\pi}, \quad (4.50)$$

$$I_0(\bar{\Omega}) - I_0(1) = -\frac{L_1(\bar{\Omega}^2)}{4\pi}, \quad (4.51)$$

onde

$$L_1(\bar{\Omega}^2) = \ln \bar{\Omega}^2, \quad (4.52)$$

$$L_2(\bar{\Omega}^2) = \bar{\Omega}^2 \ln \bar{\Omega}^2 - (\bar{\Omega}^2 - 1). \quad (4.53)$$

Substituindo (4.45) em (4.44) e usando a identidade  $(I_0 - I_0(1))^2 = I_0^2 - 2I_0I_0(1) + I_0^2(1)$ , temos

$$\begin{aligned} \bar{V}_G(\phi_0) = D + [I_1 - I_1(1)] + \frac{1}{2}(1 - \bar{\Omega}^2)I_0 + \frac{\lambda^2}{8}\phi_0^4 + \frac{1}{2}\phi_0^2 + \\ + \frac{3}{4}\lambda^2[I_0 - I_0(1)]\phi_0^2 + \frac{3}{8}\lambda^2[I_0 - I_0(1)]^2. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Inserindo (4.50) e (4.51) em (4.54), nos fornece o potencial efetivo Gaussiano renormalizado

$$\bar{V}_G(\phi_0) = D + \frac{\phi_0^2}{2} + \frac{\lambda^2}{8}\phi_0^4 - \frac{L_2(\bar{\Omega}^2)}{8\pi} - \frac{L_1(\bar{\Omega}^2)}{4\pi} \left[ \frac{1}{2}(1 - \bar{\Omega}^2) + \frac{3}{4}\lambda^2\phi_0^2 - \frac{3}{8}\lambda^2 \frac{L_1(\bar{\Omega}^2)}{4\pi} \right]. \quad (4.55)$$

Usando (4.46) e (4.53) para simplificar (4.55) via a eliminação dos logaritmos explícitos, ficamos com

$$\bar{\mathcal{V}}_G(\phi_0) \equiv \bar{V}_G(\phi_0) - D = -\frac{\lambda^2}{4}\phi_0^4 + \frac{(\bar{\Omega}^2 - 1)}{3\lambda^2} \left[ 1 + \frac{3\lambda^2}{8\pi} + \frac{1}{2}(\bar{\Omega}^2 - 1) \right]. \quad (4.56)$$

No regime onde as correlações do ruído estão presentes ( $\mathcal{A} \neq 0$ ), sua influência na evolução do sistema faz com que o parâmetro  $\lambda$ , responsável pela adição de material sobre a superfície, alcance um valor crítico, fazendo com que ocorra uma transição de fase associada à simetria do vácuo do sistema, isto é, a simetria é espontaneamente quebrada, e agora o vácuo possui dois mínimos degenerados. É conveniente introduzir o parâmetro crítico  $\lambda_c$ , que é o valor onde a transição do poço simples para um comportamento de poço duplo acontece. Para  $\lambda < \lambda_c$ , o mínimo global do potencial efetivo Gaussiano é em  $\phi_0 = 0$ , enquanto para  $\lambda > \lambda_c$  o mínimo global é simétrico e ocorre em  $\phi_0 = \pm c$  com  $c \neq 0$  (Veja a Figura 4.1). Para  $\lambda = \lambda_c$ , o potencial efetivo Gaussiano possui exatamente três mínimos degenerados. Encontramos

$$\lambda_c \cong 4.51903. \quad (4.57)$$

Figura 4.1: O potencial efetivo Gaussiano para a equação KPZ de dimensão Euclideana (2+1). A linha contínua do poço único mostra o vácuo simétrico quando  $\lambda < \lambda_c$ . O poço duplo indica uma transição de fase que faz com que a simetria associada ao vácuo do sistema seja espontaneamente quebrada e a linha pontilhada mostra o regime onde a correlação do ruído está ausente ( $\mathcal{A} = 0$ ).

### 4.3.3 KPZ (3+1)

Devido ao fato da álgebra de integrais divergentes na dimensão Euclideana (3+1) ser tão similar à (2+1), podemos simplesmente tomar o resultado em (4.55), exceto que agora

$$L_1(\bar{\Omega}^2) = (\bar{\Omega} - 1), \quad (4.58)$$

$$L_2(\bar{\Omega}^2) = \frac{1}{3}(\bar{\Omega} - 1)^2 (2\bar{\Omega} + 1). \quad (4.59)$$

A equação  $\bar{\Omega}$  (4.46) agora se torna

$$\frac{1}{2}(\bar{\Omega}^2 - 1) = \frac{3}{4}\lambda^2[\phi_0^2 - \frac{(\bar{\Omega} - 1)}{4\pi}]. \quad (4.60)$$

Se usarmos (4.60) para simplificar (4.55), podemos expressar o potencial efetivo Gaussiano renormalizado na forma conveniente

$$\bar{\mathcal{V}}_G(\phi_0) = \frac{1}{2}\phi_0^2 + \frac{\lambda^2}{8}\phi_0^4 - \frac{(\bar{\Omega} - 1)^2}{24\pi} \left[ 1 + \frac{9\lambda^2}{16\pi} + 2\bar{\Omega} \right]. \quad (4.61)$$

Computando (4.61) com  $\bar{\Omega}$  dada por (4.60), obtemos o resultado mostrados na Figura 4.2. Novamente, vemos uma transição de um poço-único para um comportamento de poço-duplo, com o  $\lambda$  crítico sendo

$$\lambda_c \cong 4.96258, \quad (4.62)$$

que indica uma transição de segunda ordem, assim como no caso da teoria  $\lambda\phi^4$ .

Figura 4.2: O potencial efetivo Gaussiano para a equação KPZ de dimensão Euclideana (3+1). A linha contínua do poço único mostra o vácuo simétrico quando  $\lambda < \lambda_c$ . O poço duplo indica uma transição de fase que faz com que a simetria associada ao vácuo do sistema seja espontaneamente quebrada e a linha pontilhada mostra o regime onde a correlação do ruído está ausente ( $\mathcal{A} = 0$ ).

## 4.4 Discussão

Introduzimos neste trabalho uma nova aproximação para a investigação de equações diferenciais parciais estocásticas arbitrárias sujeitas a correlações de ruído branco. Essa aproximação consiste em um cálculo não-perturbativo do potencial efetivo, o potencial efetivo Gaussiano. Fazemos uso da aproximação variacional desenvolvida em [17] e o programa

de quantização estocástica [7],[8],[10] tal que obtemos o potencial efetivo Gaussiano para EDPE's arbitrárias. O potencial efetivo Gaussiano, sendo não-perturbativo, não inclui somente a primeira ordem do potencial efetivo como a aproximação a um laço, mas também contém informação das contribuições provenientes de ordens superiores. A vantagem desta aproximação é que quando as correlações se tornam mais relevantes, o PEG é mais confiável além de ser invariante sob o grupo de renormalização. Isso significa que todas as maneiras de definir os parâmetros renormalizados são equivalentes, e a questão é encontrar os mais convenientes para o sistema físico em questão. Então, do mesmo jeito que fazemos a análise de flutuações quânticas, mostramos que, através do potencial efetivo Gaussiano e da consequente investigação das propriedades de simetria, é possível aplicar as mesmas idéias gerais para as equações diferenciais parciais estocásticas.

Como um primeiro exemplo, aplicamos o método à equação Kardar-Parisi-Zhang sujeita a um campo estático. O campo estático é conveniente para obter um paralelo com a teoria de campo  $\lambda\phi^4$  assim como comparar os resultados perturbativos e não-perturbativos; tal escolha também fornece integrais  $I_N(\Omega)$  menos divergentes. Como em [11](através da aproximação a um laço), não estamos focando em uma região infravermelha, uma questão que foi considerada em [5, 6]. Devido ao efeito da correlação do ruído, encontramos uma transição de fase de segunda ordem nas dimensões Euclideanas (1+1), (2+1) e (3+1). O potencial efetivo Gaussiano vai de uma forma de poço-único para uma de poço-duplo a medida que  $\lambda$  aumenta, caracterizando uma quebra espontânea de simetria. Na interpretação de crescimento de superfícies, onde o campo é considerado como a altura da superfície, a quebra espontânea de simetria do vácuo corresponde a uma transição morfológica da su-

perfície relacionada ao parâmetro de adição de material<sup>9</sup> da equação KPZ, ou seja, após o parâmetro atingir um valor crítico ( $\lambda = \lambda_c$ ), a morfologia da superfície passa a ser diferente. Após a transição ( $\lambda > \lambda_c$ ), a superfície passa a ser mais rugosa e sua morfologia exibe uma fidelidade maior no que se espera de um fenômeno de crescimento encontrado na natureza e reproduzido no laboratório, além de induzir um avanço na descrição teórica de fenômenos de crescimento, já que devido à ausência de solução analítica da equação KPZ, essa informação passa a ser importante pois por outros métodos de análise, usualmente focados na classe de universalidade, não há como perceber essa transição de fase morfológica. Acreditamos que a presença da quebra espontânea de simetria no caso (3+1) é devido ao fato da nossa aproximação ser não-perturbativa, em contraste com os resultados a um laço [11].

A possibilidade de aplicação do potencial efetivo Gaussiano a outras equações diferenciais parciais estocásticas é muito atrativa e pode fornecer ferramentas para a análise de simetrias e estruturas de fases. Esperamos que o presente trabalho proporcione algum estímulo para pesquisas posteriores nessa direção.

---

<sup>9</sup>Tal afirmação é válida para o caso onde o parâmetro de tensão  $\nu$  é considerado constante. No caso em que  $\nu$  varia e  $\lambda$  é considerado constante, o sistema também exibe tal transição morfológica.

# Bibliografia

- [1] U. Frisch, *Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [2] A. Etheridge, *Stochastic Partial Differential Equations*, London Mathematical Society Lecture Notes Series **216**, Cambridge University Press, Cambridge (1995).
- [3] P. C. Martin, E. D. Siggia e H. A. Rose, Phys. Rev. A **8**, 423 (1973).
- [4] C. De Dominicis e L. Peliti, Phys. Rev. B **18**, 353 (1978).
- [5] T. Sun e M. Plischke, Phys. Rev. E **49**, 5046 (1994).
- [6] E. Frey e U. C. Täuber, Phys. Rev. E **50**, 1024 (1994).
- [7] M. Kardar e A. Zee, Nuclear Phys. B **464**, 449-462 (1996).
- [8] J. Zinn-Justin, *Quantum field theory and critical phenomena*, third edition, Clarendon Press, Oxford, (1996).
- [9] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, Princeton (2003).
- [10] D. Hochberg, C. Molina-París, J. Pérez-Mercader, M. Visser, Phys. Rev. E **60**, 6343 (1999).
- [11] D. Hochberg, C. Molina-París, J. Pérez-Mercader, M. Visser, Physica A **280**, 437 (2000).



- [12] D. Hochberg, C. Molina-París, J. Pérez-Mercader, M. Visser, J. Statist. Phys **99**, 903 (2000).
- [13] F. S. Amaral, I. Roditi *The Gaussian effective potencial and stochastic partial differential equations*, Physica A **385**, 137 (2007).
- [14] P. M. Stevenson, Phys. Rev. D **30**, 1712 (1984); P. M. Stevenson, Phys. Rev. D **33**, 2305 (1985).
- [15] P. M. Stevenson e I. Roditi, Phys. Rev. D **3**, 2305 (1986).
- [16] R. Ibañes-Meier, I. Stancu, P. M. Stevenson, Z. Phys. C **70**, 307 (1996).
- [17] R. Ibañes-Meier, L. Polley e U. Ritschel, Phys. Lett. B **279**, 106 (1992).
- [18] M. Kardar, G. Parisi, Y. C. Zhang, Phys. Rev. Lett. **56**, 889-892 (1986).
- [19] A. -L. Barabási, H. E. Stanley, *Fractal Concepts in Surface Growth* (Cambridge University Press, Great Britain, 1995).
- [20] R. P. Feynman, Phys. Rev. **97**, 660 (1955); *Statistical Mechanics* (Benjamim, New York, 1972).
- [21] S. F. Edwards e D. R. Wilkinson, *The Surface Statistics of a Granular Agreggate Proc. R. Soc. London A* **381**, 17-31 (1982)