

Análisis de la función $f(x) = \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x}$ utilizando sympy

Fabricio González Cerdas, Gonzalo Acuña Madrigal, Mauricio Rojas Machado, Jian Yong Zheng Wu

March 16, 2025

1 Introducción

Este informe presenta el análisis de la función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - 2x} \quad (1)$$

utilizando la librería `sympy` de Python. Se calcularán el dominio, intersecciones, asíntotas, derivadas, gráfica y los intervalos de crecimiento y concavidad.

2 Resultados

2.1 Dominio de la función

El dominio de la función es $\mathbb{R} - \{0, 2\}$.

2.2 Intersecciones con los ejes

La intersección en x es (1,0) y la intersección en y no existe.

2.3 Asíntotas

El límite cuando x tiende a infinito $= +\infty$, por lo que no posee asíntota horizontal en $+\infty$ y el límite cuando x tiende a menos infinito $= -\infty$, por lo que no posee asíntota horizontal en $-\infty$. Ahora bien, la asíntota oblicua en $+\infty$ es $y = x - 1$ y asíntota oblicua en $-\infty$ es $y = x - 1$. Por ultimo, las asíntotas verticales son en $x = 0$ y $x = 2$.

2.4 Derivadas

La primera y segunda derivada de la función son:

$$\begin{aligned} \bullet f'(x) &= \frac{(2-2x)(x^3-3x^2+3x-1)}{(x^2-2x)^2} + \frac{3x^2-6x+3}{x^2-2x} \\ \bullet f''(x) &= \frac{2 \left(3x-3 - \frac{\left(1-4\frac{(x-1)^2}{x(x-2)}\right)(x^3-3x^2+3x-1)}{x(x-2)} - \frac{6(x-1)(x^2-2x+1)}{x(x-2)} \right)}{x(x-2)} \end{aligned}$$

2.5 Gráfica de la función y sus derivadas

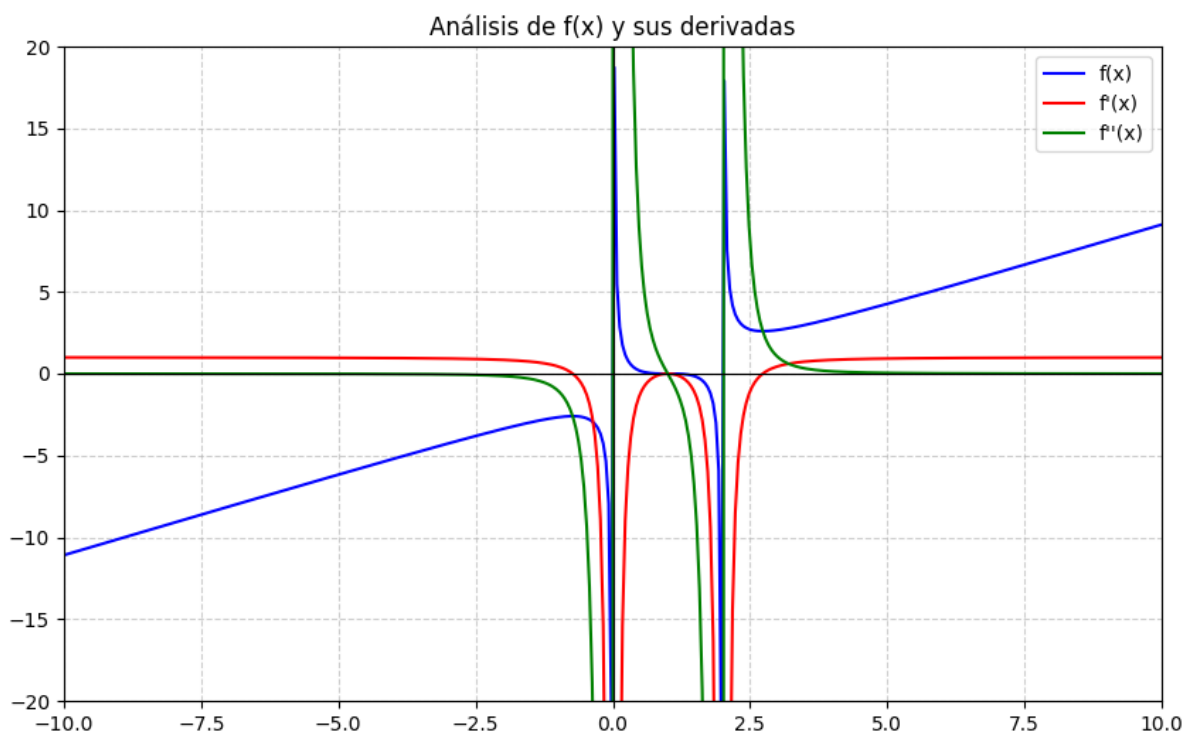


Figura 1. Gráfica de $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$

2.6 Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Los intervalos decrecientes son los siguientes:

$$(0 < x < 1) \cup (1 < x < 2) \cup (2 < x < 1 + \sqrt{3}) \cup (-\infty < x < 1 - \sqrt{3})$$

Los intervalos crecientes son los siguientes:

$$(x < \infty) \cap (1 + \sqrt{3} < x) \cup (-\infty < x) \cap (x < 1 - \sqrt{3})$$

2.7 Intervalos de concavidad

Los intervalos concava hacia abajo son los siguientes:

$$(-\infty < x < 0) \cup (1 < x < 2)$$

Los intervalos concava hacia arriba son los siguientes:

$$(0 < x < 1) \cup (2 < x < \infty)$$