

Proyecto numérico

Fabrizio Alejandro Sánchez García

May 2022

Partiendo de la ecuación de laplace en dos dimensiones:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\phi(x, y) = 0$$

La ecuación puede ser aproximada de forma discreta de la siguiente manera:

$$\frac{\phi(x_{i+1}, y_j) - 2\phi(x_i, y_j) + \phi(x_{i-1}, y_j))}{\Delta x^2} + \frac{\phi(x_i, y_{j+1}) - 2\phi(x_i, y_j) + \phi(x_i, y_{j-1}))}{\Delta y^2} = 0$$

Notemos que $\Delta x = \Delta y$, pues nuestro mallado será cuadrado y por ello entonces el cambio en x será el mismo que y.

Podemos calcular la solución $\phi(x, y)$ iterando

$$\phi(x, y) = \frac{\phi(x_{i+1}, y_j) + \phi(x_{i-1}, y_j) + \phi(x_i, y_{j+1}) + \phi(x_i, y_{j-1}))}{4}$$

La idea es que tenemos un puntito, en donde ese es el promedio de los cuatro puntos alrededor de él. Eso para todos los puntos establecidos en el mallado. Así podemos obtener el potencial en todos los puntos, considerando las condiciones de frontera ya establecidas. Vamos repitiendo de forma iterativa hasta poder obtener $\phi(x, y)$ de forma precisa.

Entonces para llevar a cabo este promedio entre los puntos, consideramos un mallado cuadrado como el de la Figura 1, acorde a nuestro cuadrado inicial con las condiciones de frontera ya impuestas, es decir los puntos de la frontera exterior con $\phi = 0V$ y $\phi = 100V$ para los de la frontera interior.

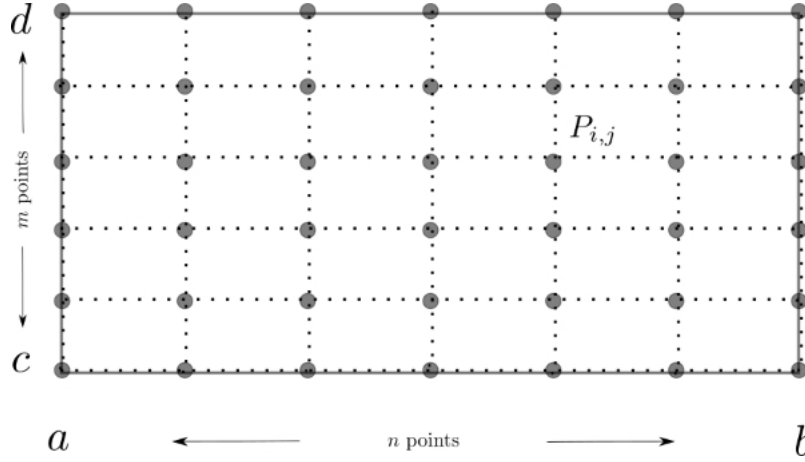


Figura 1. Mallado empleado para la resolución del potencial.

El mallado lo podemos establecer como dos arreglos bidimensionales, en donde x_1 nos dice en dónde estamos en x y y_2 en donde estamos en y . Por ejemplo, la figura 2 muestra el arreglo para las posiciones en x .

```
array([[ -1.          , -0.97979798, -0.95959596, ...,  0.95959596,
        0.97979798,  1.          ],
       [ -1.          , -0.97979798, -0.95959596, ...,  0.95959596,
        0.97979798,  1.          ],
       [ -1.          , -0.97979798, -0.95959596, ...,  0.95959596,
        0.97979798,  1.          ],
       ...,
       [ -1.          , -0.97979798, -0.95959596, ...,  0.95959596,
        0.97979798,  1.          ],
       [ -1.          , -0.97979798, -0.95959596, ...,  0.95959596,
        0.97979798,  1.          ],
       [ -1.          , -0.97979798, -0.95959596, ...,  0.95959596,
        0.97979798,  1.          ]])
```

Figura 2. Arreglo bidimensional de la posición en x .

Para llevar el proceso iterativo en los puntos del mallado, se utilizaron 10,000 iteraciones y poder obtener el potencial de forma más precisa. La Figura 3 muestra la gráfica obtenida para el potencial con las 10,000 iteraciones.

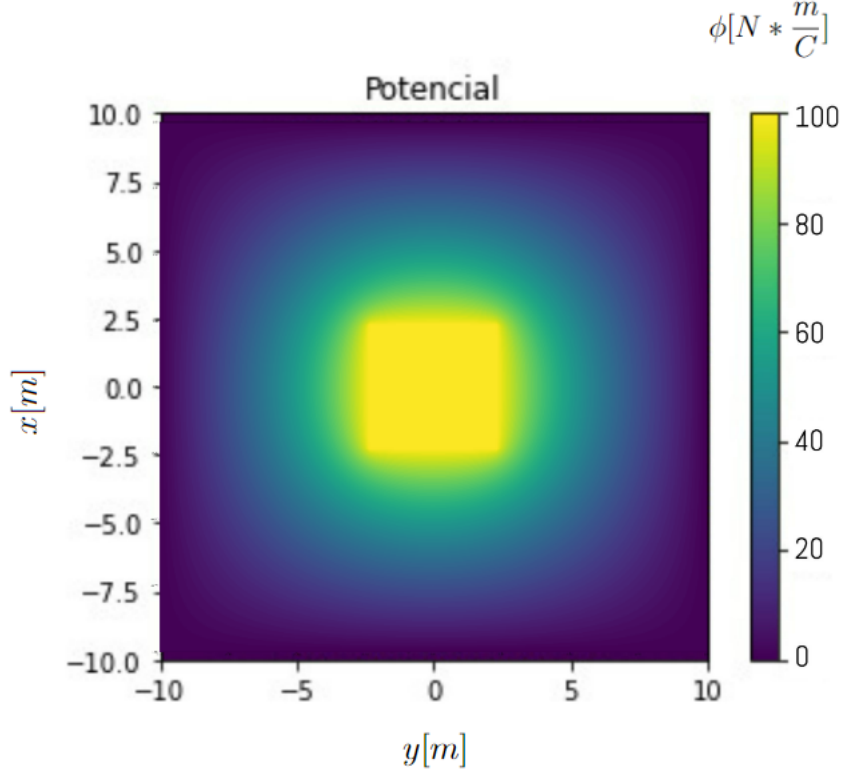


Figura 3. Gráfica de curvas de nivel para el potencial obtenido utilizando 10000 iteraciones.

Se puede observar que la gráfica es la esperada de acuerdo a lo establecido: El cuadrado amarillo está a un potencial de 100V, las fronteras exteriores (de color morado) a 0V y además, está concorde con el comportamiento físico: si nos desplazamos del interior hacia el exterior, se irá disminuyendo al valor del potencial eléctrico.

Finalmente, el campo eléctrico se calcula de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

Como el potencial se ha calculado numéricamente, también calculamos el gradiente de forma numérica a partir de los valores arrojados por nuestro programa. También podemos graficar los vectores que representan el campo eléctrico. La gráfica del campo eléctrico de muestra en la figura 4.

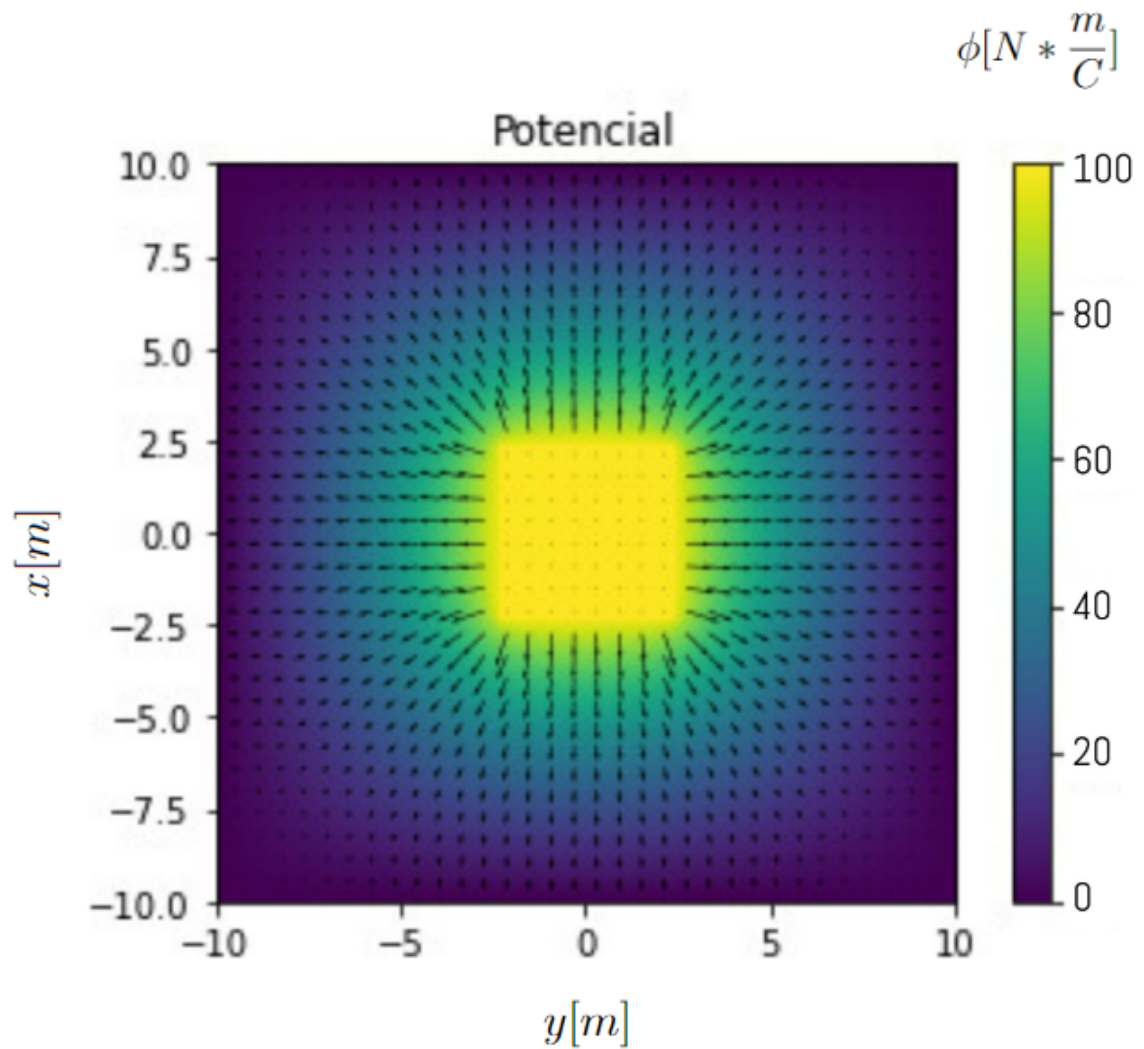


Figura 4. Gráfica del campo eléctrico.

Se puede observar que el comportamiento del campo eléctrico también es el esperado. La magnitud de éste, representado por la magnitud de las flechas, comienza a decrecer conforme nos alejamos del cuadrado central. **Nota: El programa se llevó a cabo en Python.**