30 ottobre 2025_AL

giovedì 30 ottobre 2025 13:59

$f: X \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

Eq. diff. $\quad y^{(n)} = f(\dots)$

$y: (a,b) \to \mathbb{R}$ der. n volte
$\forall x \in (a,b)$ $\quad (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in X$
$y^{(n)}(x) = f(\dots)$

es. $n = 1$ $\quad f(x,y) = f(x)$ $\quad y' = f(x)$ (ricerca delle prim.)

$(x_0, y_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in X$ $\quad$ PC $\begin{cases} y^{(n)} = f(\dots) \\ y(x_0) = y_0 \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0 \end{cases}$

EQ LINEARI DEL I ORDINE

$y' + a(x) y = f(x)$ $\quad a, f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ continue
a coeff.
f term. noto

$f(x,y) = f(x) - a(x) y$ $\quad f: (\alpha,\beta) \times]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$

$y' + a(x) y = f(x)$ $\quad (1)$ $\quad$ completa

$y' + a(x) y = 0$ $\quad (2)$ $\quad$ omogenea associata

SOL DI (2) $\quad y(x) = 0 \ \forall x$ è sol

Sia y sol sempre $\neq 0$ $\quad \dfrac{y'(x)}{y(x)} = -a(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$
$\log|y(x)| = -A(x) + k$

$|y(x)| = e^{-A(x)+k} = c\, e^{-A(x)}$ $\quad e^k = c > 0$

$y(x) = k e^{-A(x)}$ $\quad k \in \mathbb{R}$ $\quad$ INT GEN DI (2)

$y(x) = k(x) e^{-A(x)}$ $\quad k$ deriv in (α, β)

$k \in \int f(x) e^{A(x)} dx$

EQ LIN. DI ORD. n

$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = f(x)$

$a_1, \dots, a_n, f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ cont. $\quad a_1, \dots, a_n$ coeff
f term. noto

Se $f = 0$ l'eq omog. altrimenti completa

$f(x, y, \dots) = f(x) - a_1(x) y^{(n-1)} - \dots - a_n(x) y$
$f: (\alpha, \beta) \times (]-\infty, +\infty[)^n \to \mathbb{R}$

$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = f(x)$ $\quad (1)$

$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = 0$ $\quad (2)$ OMOG. ASSOC.

i) y, z sol di (1) $\Rightarrow$ $w = y - z$ sol di (2)

ii) y sol di (1) e z sol di (2) $\Rightarrow$ $w = y+z$ sol di (1)

es dim. i) $w^{(n)}(x) + a_1(x) w^{(n-1)}(x) + \dots + a_n(x) w(x) =$

$= y^{(n)}(x) - z^{(n)}(x) + a_1(x) y^{(n-1)}(x) - a_1(x) z^{(n-1)}(x) + \dots =$

$$= \underbrace{\left(y^{(n)}(x) + \dots + a_n(x) y(x)\right)}_{f(x)} - \underbrace{\left(z^{(n)}(x) + \dots + a_n(x) z(x)\right)}_{f(x)} = 0$$

iii) Principio di sovrapposizione :
se y è sol di $y^{(n)} + \dots + a_n(x) y = f(x)$

e z " $y^{(n)} + \dots + a_n(x) y = g(x)$

e $h, k \in \mathbb{R}$ allora $w = hy + kz$ è sol di
$y^{(n)} + \dots + a_n(x) = h f(x) + k g(x)$

iv) se $f(x) = u(x) + i v(x)$ allora $y = z + iw$
è sol di $y^{(n)} + \dots + a_n y = f(x)$ $\Leftrightarrow$ z è
sol di $y^{(n)} + \dots + a_n y = u(x)$ e w è sol di
$y^{(n)} + \dots + a_n y = v(x)$

da i) e ii) segue che l'int gen della (1) si

ottiene sommando all'int gen della (2) un int.

partic. della (1)

Struttura dell'ins. S delle sol di (2)

j) $y(x) = 0$ $\forall x \in (\alpha, \beta)$ è sol.

jj) se $y, z \in S$ e $h, k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $w = hy + kz \in S$

infatti $w^{(n)}(x) + \dots + a_n(x) w(x) =$

$$= h \underbrace{\left(y^{(n)}(x) + \dots + a_n(x) y(x)\right)}_{=0} + k \underbrace{\left(z^{(n)}(x) + \dots + a_n(x) z(x)\right)}_{=0} = 0$$

quindi S è uno spazio vettoriale

Premettiamo il

TEOR. Un PC legato ad un'eq. lineare ha una
e una sola sol

Siano $y_1, \dots, y_n$ n sol di (2), costruiamo

il determinante WRONSKIANO

$$W(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

Si fa vedere che $W'(x) = -a_1(x) W(x)$ $\forall x$

lo proviamo per $n=2$ $\quad y_1, y_2 \quad$ $y'' + a(x) y' + b(x) y = 0$

$$W = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

$$W' = \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - \cancel{y_2' y_1'} - y_2 y_1'' =$$

$$= y_1(-a y_2' - b y_2) - y_2(-a y_1' - b y_1) =$$

$$= -a y_1 y_2' - \cancel{b y_1 y_2} + a y_1' y_2 + \cancel{b y_1 y_2} =$$

$$= a(y_1' y_2 - y_1 y_2') = -a W$$

Dunque $W' = -a_1 W \Rightarrow W' + a_1 W = 0 \Rightarrow W$ è sol d'un' eq. lin. del I ord. $\Rightarrow W(x) = k e^{-A(x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ si ha $W(x) \neq 0 \ \forall x$ opp $W(x) = 0 \ \forall x$

DEF. $y_1 \dots y_n$ si dicono INDIPENDENTI se $W(x) \neq 0$
DIPENDENTI se $W(x) = 0$

TEOR. 1 $\exists$ n sol indip.

DIM. Scegliamo $x_0 \in (\alpha, \beta)$ e scriviamo n PC

$$(PC)_i \begin{cases} y^{(n)} + \dots = 0 \\ y_i(x_0) = 1 \\ y_j(x_0) = 0 \quad \text{se } j \neq i \end{cases}$$

ad es. se $n = 2$

$$\begin{cases} y'' + \dots = 0 \\ y(x_0) = 1 \\ y'(x_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + \dots = 0 \\ y(x_0) = 0 \\ y'(x_0) = 1 \end{cases}$$

Ciascuno di essi ha una e una sola sol., siano esse $y_1, y_2, \dots, y_n$

$$W(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{sono indip.}$$

TEOR 2 Se $y_1, \dots y_n$ sono n sol indip, ogni altra sol è del tipo $\sum_{i=1}^{n} k_i y_i \quad (k_i \in \mathbb{R})$

DIM. Comb. lin. di sol sono sol, lo sappiamo già.

Viceversa: Sia z un' altra sol., scegliamo $x_0 \in (\alpha, \beta)$

e cons. PC $\begin{cases} y^{(n)} + \dots = 0 \\ y(x_0) = z(x_0) \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = z^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$ l' unica sol. è z

cerco una sol di PC del tipo $y = \sum k_i y_i$ (cerco $k_1, \dots, k_n$)

$$y(x_0) = \sum k_i y_i(x_0) = z(x_0) \qquad \begin{cases} k_1 y_1(x_0) + \dots + k_n y_n(x_0) = z(x_0) \\ k_1 y_1'(x_0) + \dots + k_n y_n'(x_0) = z'(x_0) \\ \dots \\ k_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots = z^{(n-1)}(x_0) \end{cases}$$

è un sist. lineare di n eq. alg. in n inc. $k_1, \dots, k_n$

il det. dei coeff. è $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ è di Cramer $\Rightarrow$ ha una e una sola sol $(k_1, \dots, k_n)$. La funz $y(x) = \sum k_i y_i(x)$ è sol di PC, ma l' unica sol. era $z \Rightarrow y = z$

Si fa vedere che $y_1 \dots y_n$ indip $\Leftrightarrow$ linearm. indip.

Dai TEOR 1 e 2 segue che S ha dimens. n e n sol. indip. sono una base.

Metodo risolutivo per un'eq. e.n. omog. a coefficienti costanti

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 \qquad (1)$$

Cerchiamo una sol del tipo $y(x) = e^{\alpha x}$
$\alpha \in \mathbb{C}$ da determinare

$y(x) = e^{\alpha x}$
$y'(x) = \alpha e^{\alpha x}$
$\dots$
$y^{(n)} = \alpha^n e^{\alpha x}$ sost. nelle (1)

$$e^{\alpha x}\left(\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n\right) = 0 \Rightarrow y(x) = e^{\alpha x}$$

è sol di (1) se α è sol dell'eq algebrica

$$\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1}\alpha + a_n = 0 \qquad (2)$$

(EQUAZIONE CARATTERISTICA)

Per ogni sol. $\alpha \in \mathbb{R}$ di molt. p delle (2) nascono p sol della (1)

$$e^{\alpha x},\ x e^{\alpha x}, \dots,\ x^{p-1} e^{\alpha x}$$

Per ogni coppia di sol $\beta \pm i\gamma \in \mathbb{C}$ di molt. p delle (2) nascono $2p$ sol delle (1)

$e^{\beta x}\cos\gamma x \qquad e^{\beta x}\sin\gamma x$
$x e^{\beta x}\cos\gamma x \qquad x e^{\beta x}\sin\gamma x$
$\dots \qquad \dots$
$x^{p-1} e^{\beta x}\cos\gamma x \qquad x^{p-1} e^{\beta x}\sin\gamma x$

Abbiamo trovato n sol, si può dim. che sono indip. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ l'eq. è risolta

Lo proviamo per $n=2$ Eq. $y'' + a y' + b y = 0$
Eq. CARATT $\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \qquad \Delta = a^2 - 4b$

se $\Delta > 0$ due sol α_1, α_2 reali e distinte $\Rightarrow$
$\Rightarrow y_1(x) = e^{\alpha_1 x}, \quad y_2(x) = e^{\alpha_2 x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha_1 x} & e^{\alpha_2 x} \\ \alpha_1 e^{\alpha_1 x} & \alpha_2 e^{\alpha_2 x} \end{vmatrix} = e^{\alpha_1 x + \alpha_2 x}(\alpha_2 - \alpha_1) \neq 0$$

perché $\alpha_1 \neq \alpha_2$

se $\Delta = 0$ una sol doppia $\alpha \Rightarrow y_1(x) = e^{\alpha x}, \quad y_2(x) = x e^{\alpha x}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x} & x e^{\alpha x} \\ \alpha e^{\alpha x} & e^{\alpha x} + \alpha x e^{\alpha x} \end{vmatrix} = e^{2\alpha x}(1 + \alpha x - \alpha x) = e^{2\alpha x} \neq 0$$

se $\Delta < 0$ due sol imm con $\beta \pm i\gamma$
$y_1(x) = e^{\beta x}\cos\gamma x \qquad y_2(x) = e^{\beta x}\sin\gamma x$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\beta x}\cos\gamma x & e^{\beta x}\sin\gamma x \\ \beta e^{\beta x}\cos\gamma x - \gamma e^{\beta x}\sin\gamma x & \beta e^{\beta x}\sin\gamma x + \gamma e^{\beta x}\cos\gamma x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\beta x}\left(\cancel{\beta\cos\gamma x \sin\gamma x} + \gamma\cos^2\gamma x - \cancel{\beta\sin\gamma x\cos\gamma x} + \gamma\sin^2 x\right) =$$

$$= e^{2\beta x}\gamma \neq 0 \qquad (\gamma \neq 0 \text{ perché } \Delta < 0)$$

ESEMPI

1. $y'' - y' - 2y = 0$

eq. caratt. $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$ $\qquad \alpha = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow -1 \\ \searrow 2 \end{array}$

int. gen. $y(x) = k_1 e^{-x} + k_2 e^{2x}$

2. $y'' + 3y' = 0$

eq. caratt. $\alpha^2 + 3\alpha = 0$ $\qquad \alpha = 0,\ \alpha = -3$

int. gen. $y(x) = k_1 + k_2 e^{-3x}$

3. $y'' + y' - 12y = 0$

eq. caratt. $\alpha^2 + \alpha - 12 = 0$ $\qquad \alpha = -\frac{1 \pm 7}{2} \begin{array}{l} \nearrow -4 \\ \searrow 3 \end{array}$

int. gen. $y(x) = k_1 e^{-4x} + k_2 e^{3x}$

4. $y''' - y' = 0$

eq. caratt. $\alpha^3 - \alpha = 0$ $\qquad \alpha(\alpha^2 - 1) = 0$ $\qquad \alpha = 0 \quad \alpha = -1 \quad \alpha = 1$

int gen. $y(x) = k_1 + k_2 e^{-x} + k_3 e^{x}$

5. $y''' + 2y'' = 0$

eq. caratt. $\alpha^3 + 2\alpha^2 = 0$ $\qquad \alpha^2(\alpha + 2) = 0$ $\qquad \alpha = 0$ molt. 2

$\alpha = -2$

int. gen. $y(x) = k_1 + k_2 x + k_3 e^{-2x}$

6. $y'' - 6y' + 9y = 0$

eq. caratt. $\alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0$ $\qquad \alpha = 3$ $\quad$ molt. $p = 2$

int. gen $y(x) = k_1 e^{3x} + k_2 x e^{3x}$

7. $y'' + y' + y = 0$

eq. caratt. $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ $\qquad \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$

int gen $y(x) = k_1 e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + k_2 e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$

8. $y'' + 3y' + 4y = 0$

eq. caratt. $\alpha^2 + 3\alpha + 4 = 0$ $\qquad \alpha = \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{2} = -\frac{3}{2} \pm i \frac{\sqrt{7}}{2}$

int gen $y(x) = k_1 e^{-\frac{3}{2}x} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + k_2 e^{-\frac{3}{2}x} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x$

9. $y''' + y' = 0$

eq caratt $\alpha^3 + \alpha = 0$

$\alpha(\alpha^2 + 1) = 0$ $\qquad \alpha = 0 \quad \alpha = \pm i \quad (\beta = 0,\ \gamma = 1)$

int gen $y(x) = k_1 + k_2 \cos x + k_3 \sin x$

10. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

eq caratt $\alpha^3 - 6\alpha^2 + 12\alpha - 8 = 0$

$(\alpha - 2)^3 = 0$ $\qquad \alpha = 2 \quad p = 3$

int gen $y(x) = k_1 e^{2x} + k_2 x e^{2x} + k_3 x^2 e^{2x}$

---

1. $I = \int_e^{e^2} \frac{\log(\log x)}{x} dx$

$\int \frac{\log(\log x)}{x} dx = \int \frac{1}{x} \log(\log x)\, dx =$

$$\int_e \qquad x$$

$$I = \int \frac{\log(\log x)}{x}\,dx = \int \frac{1}{x} \log(\log x)\,dx =$$

$$f(t) = \log t$$
$$g(x) = \log x$$

$$= \left[\int \log t\,dt\right]_{t=\log x} = \left[t(\log t - 1) + k\right]_{t=\log x}$$

$$I = \Big[\log x\,(\log x - 1)\Big]_e^{e^2} = 2(2-1) - 1(1-1) = 2$$

2. Trovare F prim. in $]-\infty, +\infty[$ di

$$f(x) = 2x^2 - |x^2-1| + x \qquad \text{tale che } F(3) = 12$$

$x^2-1 \quad 1-x^2 \quad x^2-1$

$-1 \qquad 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & x \le -1 \\ 3x^2+x-1 & \\ x^2+x+1 & x \ge 1 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + k_1 & x \le -1 \\ x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + k_2 & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + k_3 & x \ge 1 \end{cases}$$

imponiamo la continuità per $x = -1$ $\quad -\frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} - 1 + k_1 = -\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{1} + k_2$

$$k_2 = k_1 - \frac{4}{3}$$

" " per $x = 1$ $\quad \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{1} + k_1 - \frac{4}{3} = \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} + 1 + k_3$

$$k_3 = k_1 - \frac{8}{3}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + k & x \le -1 \\ x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + k - \frac{4}{3} & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + k - \frac{8}{3} & x \ge 1 \end{cases}$$

sono tutte le prim. in $]-\infty, +\infty[$

$$F(3) = 12 \iff 9 + \frac{9}{2} + 3 + k - \frac{8}{3} = 12 \implies k = \frac{8}{3} - \frac{9}{2} = \frac{-11}{6}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{11}{6} & x \le -1 \\ x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{11}{6} - \frac{4}{3} & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{11}{6} - \frac{8}{3} & x \ge 1 \end{cases}$$

1. Trovare le prim. in $]-\infty, +\infty[$ di $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} & x < 0 \\ x e^{3x} - 2 & x \ge 0 \end{cases}$

2. " F prim. in " di $f(x) = e^{2x - |x-3|}$
tale che $F(1) = \frac{2}{3} e^6$