Un' equazione differenziale è il problema di determinare una funzione incognita $y(x)$ conoscendo delle relazioni fra $y(x)$ e le sue derivate

es $\quad y^{IV}(x) - (\operatorname{arctg} x)\, y''(x) + 3y'(x) - 4x^2 y(x) = \operatorname{sen} x$

Per dare un'espressione più generale di un' eq. diff. si usa una funzione di $n+1$ variabili ($n \in \mathbb{N}$)

$f : X \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \qquad f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$

DEF. equazione differenziale di ordine n in forma esplicita

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (*)$$

$(*)$ è il problema di determinare delle funzioni $y(x)$ $\;y : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabili almeno n volte e tali che $\forall x \in (a,b)$ si abbia $\quad (x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in X$

$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$

Data l' eq. diff $(*)$ e dato un punto di X $\;(x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}) \in X$ si chiama problema di Cauchy relativo all' eq. $(*)$ e ai valori iniziali $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ il problema

$$(PC)\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

di determinare una sol della $(*)$ tale che $y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$

es. $n = 1$ $\quad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} (**)$ $\quad$ esempio facile $\begin{cases} y' = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ cercare una primitiva di f che in x_0 valga y_0

in $(**)$ $\; f : X \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Se f è continua si può dim. (teorema di PEANO) che $\exists\, r > 0$: in $]x_0 - r, x_0 + r[$ il problema $(**)$ ha una e una sola sol.

EQ DIFF LINEARI DEL PRIMO ORDINE

$a, p : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ continue $\qquad y' + a(x)\, y = p(x) \qquad (1)$

(1) eq. diff lineare del primo ordine
$a(x)$ coefficiente $\qquad f(x,y) = p(x) - a(x)y \qquad X = (\alpha, \beta) \times]-\infty, +\infty[$
$p(x)$ termine noto
(c'è una dipendenza lineare da y e da y')

Se $p(x) = 0 \;\; \forall x \in (\alpha, \beta) \qquad y' + a(x)\, y = 0 \qquad (2)$

(2) omogenea $\qquad$ (1) completa

La (2) è detta omogenea associata alla (1)

Una sol della (1) è una funz $y : (c,d) \subseteq (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ deriv. e tale che $y'(x) + a(x)\, y(x) = p(x)$ $\forall x \in (c,d)$

Possiamo sempre riferirci a sol. definite nell' intero (α, β)

in generale una sol di un' eq. diff è detta integrale dell' eq., l'insieme delle sol. è detto integrale generale e una singola sol. è detta integrale particolare

Risultati sulle eq. (1) e (2)

① Se y e z sono sol. di (1) $\Rightarrow$ $y-z$ è sol di (2)

② se y è sol di (1) e z è sol di (2) $\Rightarrow$ $y+z$ è sol di (1)

③ Se y è sol di (2) e $k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ ky è sol di (2)

quindi per trovare l'integrale generale di (1) basta sommare all'int. gen. di (2) un int partic. di (1)

DIM. ① Sia $w = y - z$, devo dim. che $w' + a(x)w = 0$

$$w' + a(x)w = y' - z' + a(x)(y-z) = \underbrace{y' + a(x)y}_{f(x)} - \underbrace{(z' + a(x)z)}_{f(x)} = 0$$

(2) analogo (per eserc.)

(3) Sia $w = ky$ $\quad w' + a(x)w = ky' + a(x)ky = k\underbrace{(y' + a(x)y)}_{0} = 0$

Metodo per risolvere l'omogenea $y' + a(x)y = 0$ (2)

cons. $y(x) = 0 \ \forall x \in (\alpha, \beta) \Rightarrow y'(x) + a(x)y(x) = 0 + a(x)\cdot 0 = 0 \Rightarrow$ è sol.

cerchiamo ora sol. che non assumono mai il valore zero. Sia $y(x)$ una di tali sol., essendo continua sarà sempre >0 o sempre <0 (per il teor. di esistenza degli zeri)

$\forall x \in (\alpha,\beta)$ si ha $y'(x) = -a(x)y(x) \Rightarrow \dfrac{y'(x)}{y(x)} = -a(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)$

Sia A una prim. di a in $(\alpha,\beta) \Rightarrow -a(x) = -A'(x)$

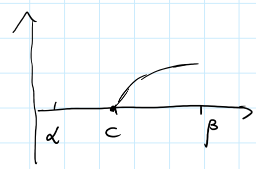
allora il primo membro dell'ultima eguaglianza è la derivata di $\log|y(x)|$ e il secondo membro è la derivata di $-A(x)$

$\Rightarrow$ $\log|y(x)|$ e $-A(x)$ hanno la stessa derivata $\Rightarrow$ differiscono per una costante

$$\log|y(x)| = -A(x) + k \Rightarrow |y(x)| = e^{-A(x)+k} = e^{-A(x)}\underbrace{e^{k}}_{c} = c\,e^{-A(x)} \quad (c>0)$$

Se scrivo $y(x) = k e^{-A(x)}$ $\quad k \in \mathbb{R}$ trovo:
se $k=0$ la sol. nulla
se $k>0$ le sol >0
se $k<0$ " <0

Non ci può essere una sol che abbia sia il valore zero che valori $\neq 0$
in $]c,\beta)$ è del tipo $k e^{-A(x)}$ che non può tendere a zero per $x \to c$
contro il fatto che y è deriv $\Rightarrow$ cont in (α,β)



INTEGRALE GENERALE DELLA (2) $\quad y(x) = k e^{-A(x)}$ $\quad k \in \mathbb{R}$ $\quad A$ prim di a $\quad$ (3)

Esempio: modello di Malthus per la crescita di una popolazione

numero di individui all'istante t $\quad N(t)$ $\quad N: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ derivabile
$N_0 = N(0)$

λ = tasso di natalità (num. di nuovi individui per unità di tempo)
μ = " mortalità (" individui che vengono meno, per unità di tempo)

$t \to t+h \qquad N(t+h) - N(t) = N(t)(\lambda - \mu)h$

$$\frac{N(t+h)-N(t)}{h} = N(t)(\lambda-\mu) \quad \Rightarrow N'(t) = N(t)(\lambda-\mu) \quad \Rightarrow N \text{ è sol dell'ep diff}$$

$N' + (\mu-\lambda)N = 0$ ep. diff lin. del primo ordine, omogenea

$a(t) = \mu-\lambda \Rightarrow A(t) = (\mu-\lambda)t$

$$N(t) = k\, e^{(\lambda-\mu)t}$$

N è di questo tipo, ma sappiamo anche che $N(0) = N_0$ (PC)

$$k\, e^{(\lambda-\mu)\cdot 0} = N_0 \quad \Rightarrow k = N_0 \quad \Rightarrow N(t) = N_0\, e^{(\lambda-\mu)t}$$

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = \begin{cases} N_0 & \lambda=\mu \quad (\text{crescita zero}) \\ 0 & \lambda<\mu \quad (\text{la pop. tende ad estinguersi}) \\ +\infty & \lambda>\mu \quad (\text{crescita esponenziale}) \end{cases}$$

Metodo per risolvere l'ep. completa $y' + a(x)y = f(x)$ (1)

sappiamo che dobbiamo trovare un int. partic. di (1) e sommarlo all'int gen. della (2)

Cerchiamo una sol che abbia la stessa forma della (3) ma con $k(x)$, funz derivabile, al posto di k

dobbiamo quindi cercare una funz deriv. $k: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ in modo che $\bar{y}(x) = k(x)\, e^{-A(x)}$ sia sol.

$\bar{y}'(x) = k'(x)\, e^{-A(x)} - a(x)k(x)\, e^{-A(x)}$ Sostit. nell'ep.

$$k'(x)\, e^{-A(x)} \cancel{- a(x)k(x)\, e^{-A(x)}} \cancel{+ a(x)k(x)\, e^{-A(x)}} = f(x) \Rightarrow k'(x) = e^{A(x)} f(x) \Rightarrow k \in \int e^{A(x)} f(x)\, dx$$

INT GEN DELLA (1) $y(x) = k\, e^{-A(x)} + k(x)\, e^{-A(x)}$ con $k \in \mathbb{R}$, $k(x) \in \int e^{A(x)} f(x)\, dx$ (4)

(metodo di variazione delle costanti, dovuto a Lagrange)

Es. $y' + (\cos x)y = \cos x$

$a(x) = \cos x$ $A(x) = \sin x$

$f(x) = \cos x$

$(\alpha,\beta) =]-\infty,+\infty[$

int gen dell'om. $y(x) = k\, e^{-\sin x}$

int partic della compl. $\bar{y}(x) = k(x)\, e^{-\sin x}$ $k \in \int e^{\sin x} \cos x\, dx = \left[\int e^t\, dt\right]_{t=\sin x} = e^{\sin x} + c$

int gen della compl. $y(x) = k\, e^{-\sin x} + e^{\sin x} e^{-\sin x} = k\, e^{-\sin x} + 1$ $k \in \mathbb{R}$

(PC) $\begin{cases} y' + (\cos x)y = \cos x \\ y(-\frac{\pi}{2}) = 3 \end{cases}$

$k\, e^{-\sin(-\frac{\pi}{2})} + 1 = 3 \Rightarrow k e + 1 = 3 \Rightarrow k = \frac{2}{e}$

$\boxed{\text{sol. } y(x) = \frac{2}{e} e^{-\sin x} + 1}$

Ep. lineari di ordine n

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

$a_1, \dots, a_n, f: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ continue

$a_1, \dots, a_n$ coefficienti

f termine noto

$f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = -a_1(x)\, y^{(n-1)} - \dots - a_n(x)\, y + f(x)$

quindi è in forma esplicita

(1) completa

$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)\, y = 0$ (2)

(2) omogenea associata alla (1)