

Variabili aleatorie discrete

Distribuzione binomiale: $X \sim B(n, p)$

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{se } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Distribuzione di Poisson: $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

$$p(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} & \text{se } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Distribuzione ipergeometrica:

$n = b + r$ oggetti, b di tipo 1, r di tipo 2

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\binom{b}{x} \binom{r}{n-x}}{\binom{b+r}{n}} & \text{se } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Distribuzione geometrica: $X \sim \text{Geom}(p)$

$$p(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{se } x = 1, \dots, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Distribuzione multinomiale: $X \sim B(n, q_1, q_2, \dots, q_n)$

$$p(x) = \begin{cases} \frac{n!}{\omega_1! \omega_2! \dots \omega_n!} q_1^{\omega_1} q_2^{\omega_2} \dots q_n^{\omega_n} & \text{se } \omega_k = 0, 1, \dots, n \text{ e } \sum_{k=1}^n \omega_k = n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Variabili aleatorie continue

Distribuzione uniforme in $[a, b]$: $X \sim U([a, b])$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{se } t \in [a, b] \\ 1 & \text{se } t > b \end{cases}$$

Legge normale standard: $X \sim N(0, 1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Legge normale: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Distribuzione esponenziale: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Disuguaglianze

Disuguaglianza di Markov:

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E[X]}{\alpha} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Disuguaglianza di Čebišëv:

$$P(|X - E[X]| \geq \eta) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\eta^2} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}$$

Intervalli di confidenza

Media (varianza nota):

$$I = \left[\bar{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Media (varianza non nota):

$$I = \left[\bar{X}_n - \frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n + \frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n}} t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Proporzione:

$$I = \left[\bar{X}_n - \frac{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}} \phi_{1-\frac{\alpha}{2}}, \bar{X}_n + \frac{\sqrt{\bar{X}_n(1-\bar{X}_n)}}{\sqrt{n}} \phi_{1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

Varianza:

$$I = \left[\frac{\bar{S}_n^2(n-1)}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{\bar{S}_n^2(n-1)}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right]$$

Correlazione e regressione lineare

Correlazione lineare:

$$\rho = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var}(x)\text{Var}(y)}} = \frac{\bar{\sigma}_{xy}}{\bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_y}$$

Coefficiente di determinazione:

$$R = \frac{\text{Cov}^2(x, y)}{\text{Var}(x)\text{Var}(y)} = \frac{\bar{\sigma}_{xy}^2}{\bar{\sigma}_x^2 \bar{\sigma}_y^2}$$

Retta dei minimi quadrati:

$$y = b_0 + b_1 x$$

$$b_0 = \bar{y} - \frac{\bar{\sigma}_{xy}}{\bar{\sigma}_x^2} \bar{x}, \quad b_1 = \frac{\bar{\sigma}_{xy}}{\bar{\sigma}_x^2}$$

Test d'ipotesi

Z-test- Z_n

Zona rigetto:

p-value:

$$C_R : \begin{cases} |Z_n| > \phi_{1-\frac{\alpha}{2}} & \text{bilatero} \\ Z_n < \phi_\alpha & \text{unilatero a sx} \\ Z_n > \phi_{1-\alpha} & \text{unilatero a dx} \end{cases} \quad \text{p-value} = \begin{cases} 2(1 - \Phi(|Z_n|)) & \text{bilatero} \\ \Phi(Z_n) & \text{unilatero a sx} \\ 1 - \Phi(Z_n) & \text{unilatero a dx} \end{cases}$$

- Media con varianza nota: $Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$
- Proporzione: $Z_n = \frac{\bar{X}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \sqrt{n}$
- Media di coppie di popolazioni X, Y con varianza nota: $Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu_X - (\bar{Y}_n - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{n}}}$

t-test- T_n

Zona rigetto:

p-value:

$$C_R : \begin{cases} |T_n| > t_{1-\frac{\alpha}{2}} & \text{bilatero} \\ T_n < t_\alpha & \text{unilatero a sx} \\ T_n > t_{1-\alpha} & \text{unilatero a dx} \end{cases} \quad \text{p-value} = \begin{cases} 2(1 - F_T(|T_n|)) & \text{bilatero} \\ F_T(T_n) & \text{unilatero a sx} \\ 1 - F_T(T_n) & \text{unilatero a dx} \end{cases}$$

- Media con varianza non nota: $T_n = \frac{\bar{X}_n - \mu_0}{\bar{S}_n} \sqrt{n}$
- Media di popolazioni accoppiate X, Y : $T_n = \frac{\bar{D}_n}{\bar{S}_n} \sqrt{n}$, con $D_i = X_i - Y_i$.

test del χ^2 - W_n

Zona rigetto:

$$C_R : \begin{cases} W_n > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) \text{ o } W_n < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1) & \text{bilatero} \\ W_n < \chi_\alpha^2(n-1) & \text{unilatero a sx} \\ W_n > \chi_{1-\alpha}^2(n-1) & \text{unilatero a dx} \end{cases}$$

- Varianza: $W_n = \frac{\bar{S}_n^2(n-1)}{\sigma_0^2}$
- Multinomiale m-dimensionale – test di Pearson: $W_n = n \sum_{k=1}^m \frac{(\bar{p}_k - p_k^0)^2}{p_k^0} \sim \chi^2(m-1)$.