Problemi di Meccanica e Termodinamica

Corso di Fisica, CdL Informatica L-31

Prof. Marco Ruggieri

Premessa

Nei calcoli numerici in ogni esercizio, non riporteremo tutte le unità di misura per semplificare la notazione: a meno che non sia specificato diversamente, i valori numerici delle grandezze fisiche nei passaggi intermedi saranno sempre intesi misurati nelle unità del Sistema Internazionale.

Libri di riferimento

Gli studenti possono prendere come riferimento i testi [1, 2, 3, 4, 5].

Capitolo 1

Cinematica del punto materiale

1.1

Un punto materiale si muove su una traiettoria rettilinea, con accelerazione costante $A = 1.56 \text{ m/s}^2$. Assumendo che il punto materiale parta da fermo, calcolare la velocità del punto dopo $t = 12$ s, lo spazio percorso dopo lo stesso tempo, e la velocità media nell'intervallo di tempo $(0, t)$.

Soluzione. Il moto del punto materiale è ovviamente un moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione A. Velocità e spazio percorso sono quindi dati da

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + At, && (1.1)\\ s(t) &= s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}At^2, && (1.2) \end{aligned}$$

dove s_0 e v_0 denotano rispettivamente la posizione e la velocità iniziale del punto materiale. La velocità iniziale della particella è $v_0 = 0$ poiché parte da ferma; inoltre, denotando lo spostamento con $\Delta s = s(t) - s_0$, possiamo riscrivere le (1.1) e (1.2) come

$$\begin{aligned} v(t) &= At, && (1.3)\\ \Delta s(t) &= \frac{1}{2}At^2. && (1.4) \end{aligned}$$

La velocità al tempo $t = 12$ s è

$$v = 1.56 \times 12 = 18.72 \text{ m/s}. \tag{1.5}$$

Lo spazio percorso dopo 12 secondi è

$$\Delta s = \frac{1}{2}1.56 \times 12^2 = 112.32 \text{ m}. \tag{1.6}$$

Infine, la velocità media nell'intervallo di tempo considerato è data da

$$v_{\text{media}} = \frac{\Delta s}{t} = \frac{112.32 \text{ m}}{12 \text{ s}} = 9.36 \text{ m/s}. \tag{1.7}$$

Si noti che numericamente v_{media} è uguale a $\bar{v} = (v(t) - v_0)/2$: questa è una coincidenza, dovuta al fatto che $v_0 = 0$ e che l'accelerazione è costante, ma in genere $\bar{v}$ e v_{media} sono due quantità diverse, come si può facilmente verificare.

1.2

Un corpo, assimilabile ad un punto materiale, è lanciato verso l'alto lungo la verticale, con velocità iniziale $V_0 = 1$ m/s. Usando un approccio interamente basato sulla cinematica, calcolare la massima quota raggiunta dal corpo, assumendo che la quota iniziale sia $h = 0$. Determinare inoltre la traiettoria del corpo.

Soluzione. Assumendo di osservare il moto in un sistema di riferimento inerziale, il moto del corpo è un moto rettilineo uniforme, diretto interamente lungo la verticale. Usando un sistema di riferimento cartesiamo xyz, e assumendo che la verticale coincida con l'asse z, l'unica accelerazione del corpo è quella di gravità che è diretta lungo l'asse z e ha verso opposto rispetto allo stesso asse, per cui possiamo scrivere

$$\vec{a} = (0, -g, 0), \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2. \tag{1.8}$$

La legge oraria del moto lungo l'asse z si può quindi scrivere come

$$z(t) = V_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \tag{1.9}$$

dove abbiamo usato il fatto che la quota iniziale è $z_0 = h = 0$. Inoltre, essendo $\vec{V_0}$ orientata lungo l'asse z e non essendoci accelerazioni lungo gli assi x e y, le leggi orarie lungo questi assi sono $x =$ costante e $y =$ costante, per cui possiamo focalizzare la nostra attenzione solo sulla (1.9).

Nel punto di massima quota, che assumiamo sia raggiunta al tempo $t = \bar{t}$, la componente z della velocità, v_z, è nulla, per cui possiamo calcolare la quota massima partendo dalla (1.9) risolvendo l'equazione $v_z(\bar{t}) = 0$ per $\bar{t}$ e poi sostituire $\bar{t}$ nella (1.9): questa procedura equivale a cercare il massimo della funzione (1.9) in t.

Dalla (1.9) abbiamo per $v_z = dz/dt$

$$v_z = V_0 - gt. \tag{1.10}$$

Ponendo $v_z = 0$ troviamo

$$\bar{t} = \frac{V_0}{g} = \frac{1}{9.81} = 0.1 \text{ s.} \tag{1.11}$$

Sostituendo $\bar{t}$ nella (1.9) abbiamo

$$z_{\max} = z(\bar{t}) = \frac{V_0^2}{2g} = \frac{1}{2 \times 9.81} = 0.05 \text{ m.} \tag{1.12}$$

Il corpo raggiunge quindi l'altezza massima di 5 cm.

La traiettoria del corpo è semplicemente il segmento $(0, z_{\max})$ lungo l'asse z, mentre x e y sono costanti.

1.3

Un tiratore, posto nell'origine di un sistema di riferimento inerziale, punta il suo fucile in direzione di una mela appesa ad un albero; la mela inizialmente si trova ad un'altezza H dal suolo. La distanza tra il tiratore e l'albero sia d. Fatalmente, nell'istante in cui il tiratore spara, la mela cade dall'albero. Trascurando tutti gli attriti, il proiettile lanciato dal tiratore colpirà la mela?

Soluzione. Scegliamo un sistema di riferimento inerziale, con assi cartesiani xyz e asse z verticale. Il moto della mela è un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo l'asse z, con accelerazione

$$\vec{a}_{\text{mela}} = (0, 0, -g); \tag{1.13}$$

la condizione iniziale è $z_{0,\text{mela}} = H$ e $\vec{v}_{0,\text{mela}} = 0$. Assumiamo inoltre che il moto del proiettile avvenga nel piano yz, e che la velocità iniziale del proiettile sia

$$\vec{v}_0 = (0, v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha), \tag{1.14}$$

dove α denota l'angolo che $\vec{v}_0$ forma con l'asse y; questo è determinato univocamente dalla condizione che inizialmente il tiratore punta il fucile nella direzione della mela. Inoltre, possiamo assumere per comodità che il proiettile inizialmente si trovi nell'origine del sistema di coordinate, per cui la sua condizione iniziale è completata da $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Il moto del proiettile è naturalmente un moto parabolico, con accelerazione $\vec{a}_{\text{proiettile}} = \vec{a}_{\text{mela}}$.

Il problema chiede se il proiettile colpirà la mela. Affinché questo accada, è necessario che mela e proiettile si trovino allo stesso istante nella stessa posizione. Per cui, dobbiamo prima determinare le leggi orarie di mela e proiettile, e poi stabilire se esiste un tempo, $\bar{t}_{\text{hit}}$, tale che le posizioni di proiettile e mela coincidono.

La legge oraria della mela può scriversi semplicemente come

$$\begin{aligned} y_{\text{mela}}(t) &= d, & (1.15)\\ z_{\text{mela}}(t) &= H - \frac{1}{2}gt^2. & (1.16) \end{aligned}$$

Analogamente, la legge oraria del proiettile è

$$\begin{aligned} y_{\text{proiettile}}(t) &= (v_0 \cos\alpha)t, & (1.17)\\ z_{\text{proiettile}}(t) &= (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2. & (1.18) \end{aligned}$$

Per $t = t_{\text{hit}}$ dovrà essere $z_{\text{proiettile}}(t_{\text{hit}}) = z_{\text{mela}}(t_{\text{hit}})$ e $y_{\text{proiettile}}(t_{\text{hit}}) = d$. Possiamo calcolare t_{hit} dalla (1.17), ponendo $y_{\text{proiettile}}(\bar{t}) = d$, ovvero

$$t_{\text{hit}} = \frac{d}{v_0 \cos\alpha}. \tag{1.19}$$

t_{hit} corrisponde al tempo necessario al proiettile a percorrere la distanza d. Ci resta da verificare se $z_{\text{proiettile}}(t_{\text{hit}}) = z_{\text{mela}}(t_{\text{hit}})$ con t_{hit} dato dalla (1.19). Dalle leggi orarie di mela e proiettile abbiamo

$$(v_0 \sin\alpha)t_{\text{hit}} - \frac{1}{2}gt_{\text{hit}}^2 = H - \frac{1}{2}gt_{\text{hit}}^2, \tag{1.20}$$

e osserviamo che affinché questa condizione sia verificata è sufficiente che sia

$$H = (v_0 \sin\alpha)t_{\text{hit}} = d \tan\alpha. \tag{1.21}$$

La (1.21) è sempre soddisfatta, in quanto data la geometria del problema, si ha sempre che $H/d = \tan\alpha$. Per cui concludiamo che il proiettile colpirà la mela, indipendentemente dal valore della velocità iniziale del proiettile, dalla distanza d e dall'altezza H.

Notiamo che la soluzione presentata sopra è ideale, nel senso che si assume implicitamente che $z_{\rm mela}$ possa diminuire indefinitamente. In realtà, il moto della mela si arresterà nel momento in cui la mela arriva al suolo, ovvero al tempo t_0 tale che $z_{\rm mela}(t_0) = 0$,

$$t_0 = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \tag{1.22}$$

Per cui, in una situazione reale, il proiettile può intercettare la mela solo se $t_{\rm hit} \le t_0$: in caso contrario, la mela toccherà il suolo prima che il proiettile percorra la distanza d tra il punto di partenza e l'albero. La condizione $t_{\rm hit} \le t_0$ dà

$$v_0 \ge \frac{d}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2H}} \equiv v_{\rm lim}. \tag{1.23}$$

Per cui, se la velocità iniziale del proiettile è inferiore a $v_{\rm lim}$, questo non è sufficientemente veloce per percorrere la distanza d prima che la mela tocchi il suolo.

1.4

Un punto materiale è vincolato a muoversi di moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio $R = 1$ cm. Sapendo che il punto percorre un angolo $\Delta\phi = 30$ gradi in un tempo $t = 0.2$ s, calcolare la velocità angolare del punto, il periodo del moto, l'accelerazione centripeta e quella tangenziale.

Soluzione. Il moto del punto materiale è un moto circolare uniforme, per cui la sua velocità angolare, ω, è costante (il punto percorre archi uguali in tempi uguali), e può essere calcolata come

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{t}. \tag{1.24}$$

Per calcolare numericamente ω trasformiamo prima $\Delta\phi$ in radianti, ovvero

$$\Delta\phi = 30 \times \frac{\pi}{180}\ \text{rad} = \frac{\pi}{6}\ \text{rad}. \tag{1.25}$$

Usando la (1.25) nella (1.24) abbiamo

$$\omega = \frac{\pi}{6t} = 2.62\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}. \tag{1.26}$$

Il periodo del moto è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2.4\ \text{s}. \tag{1.27}$$

Per calcolare l'accelerazione centripeta convertiamo prima il raggio in metri: $R = 1$ cm $= 0.01$m. Abbiamo quindi

$$a_c = \omega^2 R = 2.62^2 \times 0.01 = 0.07\ \text{m/s}^2. \tag{1.28}$$

Infine, l'accelerazione tangenziale, $a_t = dv/dt = R d\omega/dt$, è zero poiché il modulo della velocità angolare è costante durante il moto.

1.5

Un punto materiale, inizialmente posto ad una quota $y = h_0$, è lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0 che ha modulo $v_0 = 5$ m/s e che forma un angolo $\theta = 45$ gradi con l'asse x. Il punto si muove per effetto della sola forza di gravità (trascurare l'attrito), e finisce il suo moto nel punto $(x = x_c, y = 0)$. Determinare la legge oraria $[x = x(t), y = y(t)]$, la gittata x_c, e il tempo necessario affinché il punto materiale arrivi in $x = x_c$. Sia $h_0 = 1$ m.

Soluzione. La traccia del problema suggerisce che il sistema di riferimento sia un sistema di assi cartesiani ortogonali xy, con y come asse verticale. Il moto del punto materiale è un moto rettilineo uniforme lungo l'asse x mentre un moto uniformemente accelerato lungo l'asse y, con accelerazione $a_y = -g$. La legge oraria è quindi

$$x(t) = (v_0 \cos\theta)t, \tag{1.29}$$

$$y(t) = h_0 + (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2. \tag{1.30}$$

Nello scrivere la (1.29) abbiamo assunto, per comodità, che $x(0) = 0$.

Per calcolare la gittata, x_c, osserviamo che $y = 0$ per $x = x_c$. Usiamo quindi prima la (1.30) per calcolare il tempo, $\bar{t}$, necessario affinché $y = 0$, e poi usiamo il valore di $\bar{t}$ nella (1.29) per calcolare x_c.

La (1.30) per $y = 0$ dà

$$h_0 + (v_0 \sin\theta)\bar{t} - \frac{1}{2}g\bar{t}^2 = 0, \tag{1.31}$$

che conviene riscrivere come

$$\frac{1}{2}\bar{t}^2 - \frac{v_0 \sin\theta}{g}\bar{t} - \frac{h_0}{g} = 0. \tag{1.32}$$

La soluzione di questa equazione restituisce il tempo $\bar{t}$ necessario affinché il punto materiale raggiunga la posizione $y = 0$. Abbiamo due soluzioni per l'equazione di secondo grado (1.32), ovvero

$$\bar{t} = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + \frac{2h_0}{g}}. \tag{1.33}$$

Tra le due, solo quella con il segno + ha significato fisico in quanto è l'unica positiva, per cui il tempo cercato è

$$\bar{t} = \frac{v_0 \sin\theta}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \sin^2\theta}{g^2} + \frac{2h_0}{g}}. \tag{1.34}$$

Sostituendo i valori numerici abbiamo

$$\bar{t} = 0.94 \text{ s}. \tag{1.35}$$

La gittata si ottiene dalla (1.29) per $t = \bar{t}$:

$$x_c = x(\bar{t}) = (v_0 \cos\theta)\bar{t} = 3.32 \text{ m}. \tag{1.36}$$

1.6

Un punto materiale, inizialmente posto ad una quota $y = h_0$, è lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0 che ha modulo $v_0 = 5$ m/s e che forma un angolo $\theta = 45$ gradi con l'asse x. Il punto si muove per effetto della sola forza di gravità (trascurare l'attrito), e finisce il suo moto nel punto $(x = xc, y = 0)$. Determinare la quota massima raggiunta dal punto materiale.

Soluzione. Il moto in questo problema è lo stesso analizzato nel problema 1.5, per cui le leggi orarie sono ancora date dalle (1.29)-(1.30); in particolare, la quota è data dalla (1.30). Nel punto di quota massima la componente lungo y della velocità,

$$v_y = \frac{dy}{dt} = v_0 \sin\theta - gt, \tag{1.37}$$

è nulla. Dalla (1.37) deduciamo il tempo, $t_{\max}$, al quale $v_y = 0$; usando poi $t_{\max}$ nella (1.30) otteniamo la quota massima, $y_{\max}$.

Dalla (1.37) abbiamo, imponendo $v_y = 0$ per $t = t_{\max}$,

$$t_{\max} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}. \tag{1.38}$$

Sostituendo questo nella (1.30) abbiamo

$$y_{\max} = h_0 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}. \tag{1.39}$$

I dati del problema permettono infine di calcolare i valori numerici di $t_{\max}$ e $y_{\max}$:

$$t_{\max} = 0.36 \text{ s}, \quad y_{\max} = 1.64 \text{ m}. \tag{1.40}$$

I risultati (1.38) e (1.39) permettono di interpretare il tempo, $\bar{t}$, nella (1.34) necessario al corpo per raggiungere il suolo. Infatti, possiamo riscrivere la (1.34)come

$$\bar{t} = t_{\max} + \sqrt{\frac{2y_{\max}}{g}}. \tag{1.41}$$

Il primo addendo del secondo membro della (1.41) è il tempo necessario a raggiungere la quota massima partendo dalla posizione iniziale, mentre il secondo addendo rappresenta il tempo necessario ad arrivare al suolo partendo dalla quota massima. Per cui, possiamo interpretare in maniera naturale $\bar{t}$ come il tempo necessario a raggiungere la quota massima più quello necessario per raggiungere il suolo partendo dalla quota massima.

1.7

Due sistemi di riferimento, con origini O e O', si muovono di moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro (si veda la figura 1.1). Sia $\vec{V}$ la velocità del riferimento O' rispetto ad O'. I vettori $\vec{r}$ ed $\vec{r'}$ denotino le posizioni di un punto materiale, P, nei due sistemi di riferimento. Determinare la relazione tra le velocità e le accelerazioni di P nei due sistemi di riferimento.

Soluzione. Dalla Fig. 1.1 è evidente che il vettore posizione $\vec{r}$ è uguale alla somma vettoriale

$$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r'}, \tag{1.42}$$

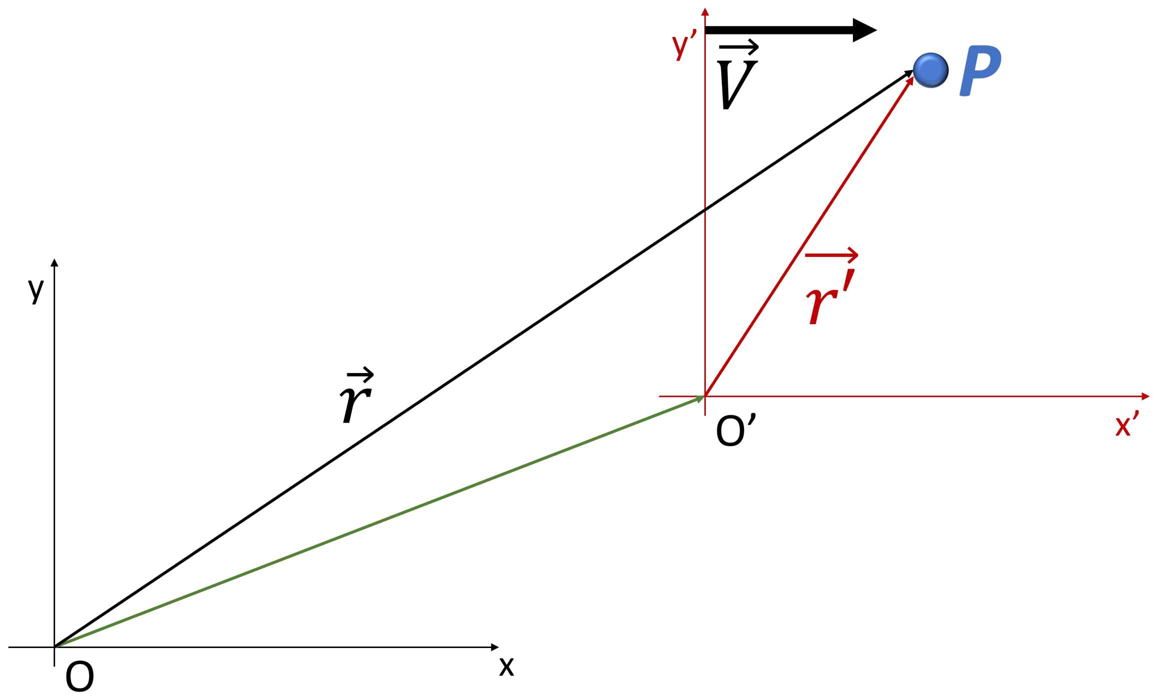

Figura 1.1: Sistemi di riferimento per il problema 1.7.

dove $\vec{OO'}$ rappresenta il vettore posizione dell'origine O' nel sistema di riferimento O [1]. Per definizione, le velocità di P in O e O' sono rispettivamente

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt}, \tag{1.43}$$

mentre la velocità di O' misurata nel sistema O è

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OO'}}{dt}. \tag{1.44}$$

Dalla (1.42) abbiamo quindi, derivando ambo i membri rispetto al tempo [2],

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}'. \tag{1.45}$$

Questa è la relazione cercata tra le velocità di P nei due sistemi di riferimento.

Per ottenere la relazione tra le accelerazioni nei due sistemi di riferimento, deriviamo la (1.45) rispetto al tempo, ricordando che il moto relativo dei sistemi è puramente traslatorio. Abbiamo

$$\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'. \tag{1.46}$$

[1] In Fisica è pratica comune usare lo stesso simbolo per indicare sia l'origine del sistema di riferimento che il nome del sistema di riferimento stesso.

[2] Nello scrivere la (1.45) stiamo assumendo che il moto di O' rispetto ad O sia puramente traslatorio, che è l'unico caso che consideriamo. Nel caso in cui il moto fosse anche rotatorio, la derivata rispetto al tempo deve tener conto della rotazione degli assi coordinati. In questo caso avremmo

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r},$$

dove $\vec{\omega}$ indica il vettore velocità angolare degli assi di O'.

Nella (1.46), $\vec{A} = d\vec{V}/dt$. Poiché per ipotesi il sistema O' si muove di moto rettilineo uniforme, $\vec{A} = 0$ e abbiamo

$$\vec{a} = \vec{a}'. \tag{1.47}$$

Il risultato (1.47) implica che le accelerazioni misurate nei due sistemi di riferimento sono le stesse.

Il significato cinematico (1.47) ha una conseguenza fondamentale nella dinamica. Infatti, la seconda legge della dinamica, $\vec{F} = m\vec{a}$, dove $\vec{F}$ denota il risultante delle forze agente sul punto materiale, mette in relazione l'accelerazione di un punto materiale e le forze ad esso applicate. Poiché le accelerazioni del punto materiale sono le stesse se due sistemi di riferimento si muovono l'uno rispetto all'altro di moto rettilineo uniforme, anche le forze misurate nei due riferimenti sono le stesse. Come conseguenza, le leggi del moto nei due riferimenti sono le stesse, quindi non è possibile distinguere i due sistemi.

1.8

Un treno viaggia con velocità costante $V = 120$ km/h da sinistra verso destra rispetto ad un osservatore fermo al passaggio a livello. Sui tetti dei vagoni del treno, l'agente segreto Pino insegue il banchiere Gianfranco affiliato all'organizzazione internazionale EIO [3]. L'agente Pino e Gianfranco corrono entrambi con velocità $v' = 20$ km/h nella direzione di moto del treno. Calcolare la velocità dell'agente Pino e di Gianfranco misurata dall'osservatore fermo al passaggio al livello.

Soluzione. Poiché il moto del treno rispetto all'osservatore fisso è rettilineo e uniforme, possiamo risolvere questo problema utilizzando direttamente i risultati del Problema 1.7, in particolare l'Eq. (1.45). Poiché $\vec{V}$ e $\vec{v}'$ sono paralleli, possiamo proiettare facilmente l'Eq. (1.45) lungo la direzione di moto del treno, ottenendo

$$v = V + v'. \tag{1.48}$$

Usando i dati del problema abbiamo

$$v = 140 \text{ km/h} = 38.89 \text{ m/s}. \tag{1.49}$$

1.9

Ripetere il Problema 1.8 nel caso in cui l'agente Pino e Gianfranco corrano in direzione opposta rispetto alla velocità del treno.

Soluzione. In questo caso, nel proiettare l'Eq. (1.45) lungo la direzione di moto del treno, dobbiamo tener conto del fatto che l'agente Pino e Gianfranco si spostano in direzione opposta rispetto a quella del moto del treno, per cui

$$v = V - v'. \tag{1.50}$$

Usando i dati del problema abbiamo

$$v = 100 \text{ km/h} = 27.78 \text{ m/s}. \tag{1.51}$$

[3] EIO è acronimo di Eminent International Order.

Capitolo 2

Dinamica del punto materiale

2.1

Un punto materiale di massa m si muove su una traiettoria rettilinea con velocità $V = V_0 + At$; siano $m = 1$ kg, $V_0 = 3$ km/h e $A = 9.81$ m/s^2. Calcolare il modulo della forza applicata, F, al punto materiale. Determinare inoltre come cambierebbe la risposta se fosse $V_0 = 120$ Km/h.

Soluzione. La seconda legge della dinamica permette di scrivere, per il modulo della forza applicata al corpo,

$$F = mA. \tag{2.1}$$

Il corpo si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato, con accelerazione A, per cui la forza è semplicemente data da

$$F = 1 \times 9.81 = 9.81 \text{ N}. \tag{2.2}$$

Notiamo che il valore di V_0 non ha alcuna influenza sul risultato (2.2), in quanto ciò che conta per calcolare la forza è l'accelerazione del punto materiale, A, ovvero la variazione di V per unità di tempo, mentre V_0 è solo una costante additiva che non cambia il valore dell'accelerazione. Per cui, anche se fosse $V_0 = 120$ km/h la F sarebbe ancora data dalla (2.2).

2.2

Un punto materiale di massa $m = 0.2$ kg ed inizialmente situato ad una quota $h_0 = 1.5$ m è lanciato verso l'alto, lungo la verticale, con velocità iniziale $v_0 = 1.3$ m/s. Trascurando l'attrito con l'aria, e utilizzando la conservazione dell'energia meccanica, calcolare la quota massima alla quale il punto arriva, ed il modulo della velocità con cui il punto tocca il suolo ($z = 0$). Calcolare inoltre come cambierebbe la risposta se fosse $m = 1$ kg.

Soluzione. Trascurando l'attrito con l'aria, il moto del corpo avviene sotto l'effetto di una forza conservativa, la forza peso, per cui la sua energia meccanica si conserva. L'energia iniziale è

$$E_{\text{in}} = mgh_0 + \frac{mv_0^2}{2}. \tag{2.3}$$

Quando invece il corpo raggiunge la quota massima, h_{max}, la sua velocità è nulla e la sua energia meccanica vale

$$E_{\text{quota max}} = mgh_{\text{max}}. \tag{2.4}$$

Notiamo che nelle (2.3) e (2.4) abbiamo misurato la quota h rispetto al suolo, per cui quando il corpo raggiunge il suolo la sua energia potenziale è nulla e l'energia meccanica totale vale

$$E_{\text{fin}} = \frac{mv_{\text{fin}}^2}{2}. \tag{2.5}$$

La quota massima a cui arriva il corpo si può ottenere ponendo $E_{\text{in}} = E_{\text{quota max}}$,

$$mgh_0 + \frac{mv_0^2}{2} = mgh_{\text{max}}, \tag{2.6}$$

da cui

$$h_{\text{max}} = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}. \tag{2.7}$$

Notiamo che h_{max} non dipende dalla massa del corpo. Questo è in accordo con quanto sappiamo sulla forza peso, poiché l'accelerazione del corpo, ovvero quella di gravità, $\vec{g}$, non dipende dalla massa del corpo, e quindi la legge oraria del corpo è anche indipendente dalla massa. Sostituendo i valori numerici nella (4.48) troviamo

$$h_{\text{max}} = 1.59 \text{ m}. \tag{2.8}$$

La velocità con cui il corpo tocca il suolo si può calcolare ponendo $E_{\text{in}} = E_{\text{fin}}$, poiché l'energia meccanica è conservata durante tutto il moto. Abbiamo quindi

$$\frac{mv_{\text{fin}}^2}{2} = mgh_0 + \frac{mv_0^2}{2}, \tag{2.9}$$

da cui

$$v_{\text{fin}}^2 = v_0^2 + 2gh_0, \tag{2.10}$$

e quindi

$$v_{\text{fin}} = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}. \tag{2.11}$$

Sostituendo i valori numerici abbiamo

$$v_{\text{fin}} = 5.58 \text{ m/s}. \tag{2.12}$$

2.3

Una biglia metallica di massa $m = 12.5$ grammi è lanciata contro una lastra di acciaio con una velocità $v_0 = 25$ m/s, a un angolo $\theta = 30$ gradi rispetto alla normale alla lastra. La biglia rimbalza specularmente sulla lastra, conservando il modulo della velocità. Calcolare la forza media che la lastra esercita sulla biglia, sapendo che il processo di urto dura $\Delta t = 0.005$ s.

Soluzione. Per la soluzione di questo problema possiamo usare il teorema dell'impulso e della quantità di moto,

$$\vec{I} = \vec{q}^{\,\text{fin}} - \vec{q}^{\,\text{in}}, \tag{2.13}$$

dove

$$\vec{I} = \int_0^{\Delta t} \vec{f} dt \tag{2.14}$$

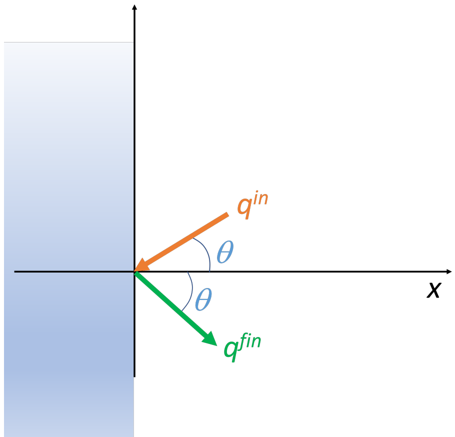

Figura 2.1: Processo di urto per il problema 2.3.

rappresenta l'impulso della forza $\vec{f}$ che la parete esercita sulla biglia nell'intervallo di tempo Δt. La forza media cercata si può scrivere come

$$\langle \vec{f} \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \vec{f} dt = \frac{1}{\Delta t} \vec{I}. \tag{2.15}$$

Usando la (2.13) nella (2.15) abbiamo quindi

$$\langle \vec{f} \rangle = \frac{\vec{q}^{\text{fin}} - \vec{q}^{\text{in}}}{\Delta t}. \tag{2.16}$$

Per risolvere il problema è dunque sufficiente calcolare la variazione della quantità di moto.

Per farlo, utilizziamo la figura 2.1. La quantità di moto iniziale ha componenti lungo x e y, date da

$$q_x^{\text{in}} = m v_{0x} = -m v_0 \cos\theta, \tag{2.17}$$
$$q_y^{\text{in}} = m v_{0y} = -m v_0 \sin\theta. \tag{2.18}$$

Poiché per ipotesi l'urto con la parete è elastico, il modulo della velocità della biglia dopo l'urto è uguale a quello prima dell'urto, per cui le componenti della quantità di moto dopo l'urto sono

$$q_x^{\text{fin}} = m v_{0x} = m v_0 \cos\theta, \tag{2.19}$$
$$q_y^{\text{fin}} = m v_{0y} = -m v_0 \sin\theta. \tag{2.20}$$

Abbiamo quindi

$$\Delta q_x = q_x^{\text{fin}} - q_x^{\text{in}} = 2 m v_0 \cos\theta, \tag{2.21}$$
$$\Delta q_y = q_y^{\text{fin}} - q_y^{\text{in}} = 0. \tag{2.22}$$

Scomponendo la (2.16) nelle sue componenti x e y possiamo quindi scrivere, grazie alle (2.21) e (2.22),

$$\langle f_x \rangle = \frac{2 m v_0 \cos\theta}{\Delta t}, \tag{2.23}$$
$$\langle f_y \rangle = 0. \tag{2.24}$$

Notiamo quindi che, essendo $\langle f_y \rangle$, la forza media che la parete esercita sulla biglia è diretta *perpendicolarmente* alla parete stessa. Sostituendo i valori numerici abbiamo

$$\langle f_x \rangle = 54.13 \text{ N}. \tag{2.25}$$

Concludiamo il problema con una osservazione. Durante l'urto elastico, la parete esercita una forza sulla biglia il cui valore medio è perpendicolare alla parete stessa. Per il terzo principio della dinamica, la biglia esercita una forza media sulla parete, uguale in modulo ad $\langle f_x \rangle$ ma opposta in verso. Notiamo che manca la componente della forza media parallela alla superficie. Il tipo di urto analizzato in questo problema è analogo a quello che le molecole di un gas perfetto sperimentano con le pareti del recipiente che li contiene. In particolare, poiché la forza che le molecole esercitano sulle pareti è perpendicolare alle pareti stesse, il risultato dell'urto di tante molecole con le pareti è quello di una pressione[1]. Infatti, nella teoria cinetica dei gas, la pressione si interpreta a livello microscopico come la forza media, per unità di superficie, che le molecole di un gas esercita sulle pareti come effetto degli urti elastici del tipo di quelli analizzati in questo problema.

2.4

In un sistema di riferimento inerziale, una biglia metallica, di massa $m_1 = 15$ g, si muove lungo l'asse x con velocità $v_1 = 30$ m/s. La biglia urta elasticamente una seconda biglia metallica, di massa $m_1 = m_2$, inizialmente in quiete. Usando l'informazione che l'urto tra le due biglie è elastico, e che il moto delle biglie è unidimensionale, determinare le velocità V_1 e V_2 delle biglie dopo la collisione.

Soluzione. In un processo di urto si conserva la quantità di moto totale del sistema; inoltre, in un urto elastico, l'energia cinetica totale del sistema è anche conservata. Poiché il moto è unidimensionale, la conservazione della quantità di moto si scrive

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2. \tag{2.26}$$

La seconda biglia è inizialmente in quiete, quindi$v_2 = 0$; inoltre, $m_1 = m_2$, per cui la (2.26) si semplifica come

$$m_1 v_1 = m_1 (V_1 + V_2), \tag{2.27}$$

ovvero

$$v_1 = V_1 + V_2. \tag{2.28}$$

La (2.28) non è sufficiente a determinare V_1 e V_2, in quanto è un'equazione in due incognite. Per completare la soluzione, usiamo l'informazione che la collisione è elastica, per cui possiamo scrivere

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2. \tag{2.29}$$

Nel caso specifico del problema in esame, la (2.29) diventa

$$v_1^2 = V_1^2 + V_2^2. \tag{2.30}$$

[1] Gli sforzi di taglio sono assenti nell'ipotesi di urto elastico, poiché questi implicherebbero componenti della forza media parallele alle superfici.

Sostituendo la (2.28) nella (2.30) abbiamo

$$(V_1 + V_2)^2 = V_1^2 + V_2^2, \tag{2.31}$$

ovvero

$$2V_1V_2 = 0. \tag{2.32}$$

Le uniche due soluzioni possibili della (2.32) sono $V_1 = 0$ e $V_2 = 0$. Nel caso in cui scegliamo $V_2 = 0$, in pratica non vi è alcuna collisione, in quanto la seconda biglia era ferma inizialmente e rimane ferma anche dopo il passaggio della prima biglia: è come se le due biglie fossero trasparenti l'una all'altra e non vi è alcuna interazione.

Il caso più interessante in questo contesto è invece rappresentato dalla soluzione $V_1 = 0$: la prima biglia, per effetto della collisione elastica, si ferma. In questo caso, dalla (2.28) otteniamo

$$V_2 = v_1, \tag{2.33}$$

che indica che la seconda biglia, per effetto della collisione, si muove con la stessa velocità della biglia incidente subito dopo la collisione. Per cui la soluzione del problema è

$$V_1 = 0, \quad V_2 = 30 \text{ m/s}. \tag{2.34}$$

2.5

In un sistema di riferimento inerziale, due biglie metalliche, di massa $m_1 = m_2 = 15$ g, si muovono lungo l'asse x con velocità $v_1 = 30$ m/s e $v_2 = -30$ m/s. Al tempo $t = 0$ le due biglie collidono elasticamente tra di loro. Determinare le velocità V_1 e V_2 delle biglie dopo la collisione.

Soluzione. Come nel problema (2.4), trattandosi di un processo di urto elastico, possiamo implementare sia la conservazione della quantità di moto totale che quella dell'energia cinetica totale, Eqs. (2.27) e (2.29). Essendo $m_1 = m_2$, queste si semplificano come

$$v_1 + v_2 = V_1 + V_2, \tag{2.35}$$
$$v_1^2 + v_2^2 = V_1^2 + V_2^2. \tag{2.36}$$

Quadrando ambo i membri della (2.35), e tenendo conto della (2.36), arriviamo alla condizione

$$v_1v_2 = V_1V_2, \tag{2.37}$$

che possiamo usare per esprimere, ad esempio, V_2 in funzione di V_1, ovvero

$$V_2 = \frac{v_1}{V_1}v_2. \tag{2.38}$$

Usando la (2.38) nella (2.35), e moltiplicando ambo i membri per V_1, abbiamo quindi

$$(v_1 + v_2)V_1 = V_1^2 + v_1v_2. \tag{2.39}$$

Questa è un'equazione di secondo grado in V_1, che ha due soluzioni possibili, ovvero $V_1 = v_1$ (come nel problema 2.3 questa non è interessante in quanto rappresenta la prima biglia che continua il suo moto rettilineo uniforme, quindi senza che avvenga la collisione) e

$$V_1 = v_2. \tag{2.40}$$

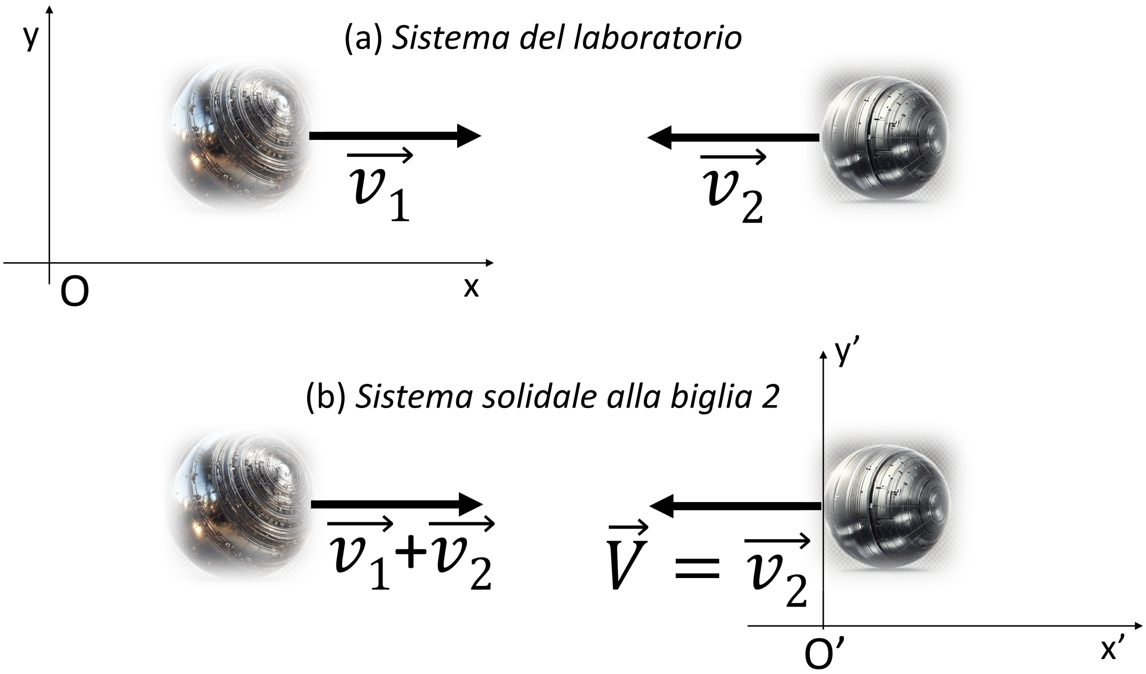

Figura 2.2: Sistemi di riferimento per il problema 2.6. (a) Sistema del laboratorio, in cui le biglie si muovono con velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. (b) Sistema solidale alla biglia di massa m_2, che si muove con velocità $\vec{V} = \vec{v}_2$ rispetto al sistema del laboratorio: in questo riferimento la velocità della biglia 2 è $\vec{v}_2' = 0$.

Usando poi la (2.40) nella (2.38) abbiamo

$$V_2 = v_1. \tag{2.41}$$

Le (2.40) e (2.41) rappresentano la soluzione formale al problema di collisione considerato: le due biglie, per effetto della collisione elastica, si scambiano le velocità.

Nel caso del problema in esame, poiché $v_1 = -v_2$ (le biglie si muovono in direzione opposta lungo l'asse x prima dell'urto, con velocità uguali in modulo), abbiamo dalle (2.40) e (2.41)

$$V_1 = -v_1 = -30 \text{ m/s}, \quad V_2 = v_1 = 30 \text{ m/s}. \tag{2.42}$$

Ovvero, le biglie rimbalzano l'una sull'altra e dopo l'urto procedono in verso opposto rispetto a quelle del moto pre-collisione.

2.6

Il Problema 2.5 può essere anche risolto utilizzando la cinematica dei moti relativi, si veda il Problema 1.7. In particolare, la relazione tra le velocità misurate nei due sistemi di riferimento, in moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro, è

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}', \tag{2.43}$$

dove $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ sono le velocità di un punto materiale nei due sistemi di riferimento, e $\vec{V}$ rappresenta la velocità del secondo riferimento rispetto al primo (che nel problema 1.7

abbiamo supposto essere rettilineo e uniforme). Nel derivare la (2.43) abbiamo assunto che il moto relativo dei due sistemi sia traslatorio (nel caso di moto rotatorio la relazione tra le velocità è più complicata).

Consideriamo un primo sistema di riferimento in cui le due biglie si muovono, prima della collisione, con velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ rispettivamente, si veda la Figura 2.2. Questo lo chiamiamo sistema O. Introduciamo un secondo sistema, O', solidale alla biglia 2 prima che questa collida, che si muove dunque con velocità $\vec{V} = \vec{v}_2$ rispetto ad O. Usando la (2.43), la relazione tra le velocità delle biglie nei due sistemi di riferimento prima della collisione si scrive

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_1', \qquad (2.44)$$
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_2'. \qquad (2.45)$$

Da queste, ricaviamo le velocità in O', ovvero

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \qquad (2.46)$$
$$\vec{v}_2' = 0. \qquad (2.47)$$

In particolare, la (2.47) correttamente riproduce il fatto che O' è solidale alla biglia 2, per cui questa è ferma in O'.

Notiamo che in O' siamo nella stessa condizione studiata nel Problema 2.4, nel quale una biglia in movimento urta elasticamente con una biglia ferma. Per cui, possiamo usare direttamente i risultati trovati in quel problema, ovvero

$$V_1' = 0, \quad V_2' = v_1' = v_1 - v_2. \qquad (2.48)$$

Usando poi le (2.44) e (2.45), scritte per le velocità delle biglie dopo la collisione, ovvero,

$$\vec{V}_1 = \vec{v}_2 + \vec{V}_1', \qquad (2.49)$$
$$\vec{V}_2 = \vec{v}_2 + \vec{V}_2', \qquad (2.50)$$

abbiamo

$$V_1 = v_2, \quad V_2 = v_1. \qquad (2.51)$$

Ritroviamo quindi la soluzione trovata nel Problema 2.5, ovvero, le due biglie rimbalzano l'una sull'altra e si scambiano le velocità per effetto della collisione elastica. Ricordiamo che nella (2.51) compaiono le componenti dei vettori velocità delle due biglie, non i moduli. Quindi, nella convenzione adottata nella Figura 2.2, $v_2 < 0$ e $v_1 > 0$, per cui dopo la collisione, la biglia 1 si muove in verso opposto a quello dell'asse x.

2.7

In un sistema di riferimento inerziale, una biglia metallica, di massa m_1, si muove lungo l'asse x con velocità v_1. La biglia urta elasticamente una seconda biglia metallica, di massa m_2, inizialmente ferma. Usando l'informazione che l'urto tra le due biglie è elastico, e che il moto delle biglie è unidimensionale, determinare le velocità V_1 e V_2 delle biglie dopo la collisione in funzione di v_1 e delle masse delle due biglie. Studiare inoltre i casi limite $m_1 \gg m_2$ e $m_1 \ll m_2$.

Soluzione. Il problema in questione è simile al problema 2.4, con la differenza che ora esaminiamo il caso in cui le masse delle due biglie sono diverse. Questo complica leggermente i calcoli, ma l'idea di base per risolvere il problema, ovvero applicare la conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto totali, è identica a quella analizzata nel problema 2.4.

Essendo la seconda biglia inizialmente ferma, ed il moto unidimensionale, la conservazione di impulso ed energia cinetica totali si scrivono

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 V_1 + m_2 V_2, & (2.52)\\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2, & (2.53) \end{aligned}$$

dove v_1, V_1 e V_2 denotano le proiezioni dei vettori velocità lungo la direzione del moto.

Le incognite nelle (2.52) e (2.53) sono V_1 e V_2. Dalla (2.52) ricaviamo

$$v_1 = V_1 + \frac{m_2}{m_1} V_2, \tag{2.54}$$

e usando questo risultato nella (2.53) abbiamo

$$\frac{1}{2} m_1 \left(V_1 + \frac{m_2}{m_1} V_2 \right)^2 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2. \tag{2.55}$$

Sviluppando il quadrato e semplificando, deduciamo che

$$\frac{m_2}{2m_1} V_2^2 + V_1 V_2 = \frac{1}{2} V_2^2, \tag{2.56}$$

da cui

$$V_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m_2}{m_1} \right) V_2. \tag{2.57}$$

Usando la (2.57) nella (2.54), segue immediatamente

$$V_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1. \tag{2.58}$$

Infine, usando la (2.58) nella (2.57), porta a

$$V_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1. \tag{2.59}$$

Le (2.58) e (2.59) costituiscono la soluzione del problema, nel caso in cui m_1 ed m_2 sono arbitrarie. Notiamo che nel caso $m_1 = m_2$, la soluzione trovata coincide con quella del problema (2.4).

Analizziamo ora i casi limite in cui una delle masse delle biglie è molto più grande dell'altra. Per cominciare, assumiamo $m_1 \gg m_2$. In prima approssimazione, possiamo trascurare m_2 rispetto ad m_1 nelle (2.58) e (2.59). Questo implica

$$V_1 \approx v_1, \quad V_2 \approx 2v_1. \tag{2.60}$$

Ovvero, la prima biglia procede quasi indisturbata, mentre la seconda biglia riceve un impulso che la accelera fino a una velocità pari al doppio di quella della biglia incidente.

Nel caso in cui $m_1 \ll m_2$, che corrisponde ad un limite $m_2/m_1 \to \infty$ tenendo costante m_1, possiamo trascurare m_1 rispetto ad m_2 nelle (2.58) e (2.59). Ne consegue che

$$V_1 \approx -v_1, \quad V_2 \approx 0. \tag{2.61}$$

L'equazione (2.61) implica che, in prima approssimazione, la prima biglia rimbalza sulla seconda, invertendo il proprio moto e allontanandosi con una velocità di modulo uguale a quella incidente, ma in direzione opposta, mentre la seconda biglia rimane ferma.

Il fatto che l'equazione (2.61) implichi che la seconda biglia rimanga ferma dopo l'urto, mentre la prima inverta il proprio moto, sembra essere in contraddizione con la conservazione della quantità di moto totale del sistema, condizione che abbiamo applicato per ottenere la stessa equazione (2.61). Infatti, poiché la seconda biglia è inizialmente ferma, la quantità di moto totale prima dell'urto coincide con quella della prima biglia ed è quindi diretta lungo $\vec{v}_1$. Di conseguenza, la quantità di moto totale dopo l'urto dovrebbe mantenere la stessa direzione lungo $\vec{v}_1$, mentre l'equazione (2.61) suggerisce invece un'inversione di direzione. Inoltre, il fatto che $V_2 \to 0$ sembrerebbe implicare che la quantità di moto della seconda biglia tenda a zero nello stesso limite.

Questa apparente contraddizione si risolve analizzando con maggiore attenzione il limite $m_1 \ll m_2$ e dimostrando che, anche nel caso limite $m_2/m_1 \to \infty$, la seconda biglia ha comunque una quantità di moto non nulla. In particolare, dalle equazioni (2.58) e (2.59) si ricava che le quantità di moto delle due biglie dopo l'urto sono date da

$$m_1 V_1 = \frac{m_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_1, \quad m_2 V_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1. \tag{2.62}$$

Nel limite in cui m_2 è molto maggiore di m_1, possiamo approssimare

$$m_1 V_1 \approx -m_1 v_1, \quad m_2 V_2 \approx 2m_1 v_1. \tag{2.63}$$

La prima delle equazioni (2.63) è coerente con la (2.61), confermando che la prima biglia inverte il proprio moto. La seconda equazione, invece, chiarisce la contraddizione apparente per il caso $m_2/m_1 \to \infty$, mostrando che la seconda biglia, nonostante $V_2 \to 0$, possiede comunque una quantità di moto diversa da zero dopo la collisione [2]. In effetti, la quantità di moto della seconda biglia bilancia quella della prima, conducendo al risultato

$$m_1 V_1 + m_2 V_2 \approx m_1 v_1, \tag{2.64}$$

che è pienamente in accordo con la conservazione della quantità di moto totale.

Per concludere, notiamo che il problema risolto può essere generalizzato facilmente al caso in cui anche la seconda biglia è in movimento. Infatti, è sufficiente adottare la strategia vista nel problema 2.6, in cui abbiamo utilizzato la cinematica dei moti relativi per scegliere un sistema di riferimento inerziale solidale con la seconda biglia, per ricondursi al caso analizzato in questo problema. Lo studio di questo caso è lasciato allo studente come esercizio.

2.8

In un sistema di riferimento inerziale, una biglia metallica, di massa m_1, si muove lungo l'asse x con velocità v_1. La biglia urta anelasticamente una seconda biglia metallica, di massa m_2, inizialmente ferma. Dopo l'urto, le due biglie rimangono attaccate e si muovono come un solo corpo. Determinare la velocità delle due biglie dopo la collisione, V, in funzione di v_1 e delle masse delle due biglie.

[2] Matematicamente, si può dire che m_2 e $1/V_2$ sono infiniti dello stesso ordine per $m_2 \to \infty$.

Soluzione. Nel caso di questo urto anelastico, l'energia cinetica totale non si conserva, poiché una parte dell'energia cinetica iniziale viene convertita in energia potenziale elastica, responsabile della deformazione delle due biglie e della loro fusione in un unico corpo.

La quantità di moto totale è però conservata, perché nel breve intervallo di tempo in cui avviene l'urto, le forze esterne sono trascurabili rispetto alle forze che la prima biglia esercita sulla seconda e viceversa. La quantità di moto della biglia prima dell'urto è

$$m_1 v_1, \tag{2.65}$$

mentre quella del sistema delle due biglie dopo l'urto è data da

$$(m_1 + m_2)V. \tag{2.66}$$

La conservazione della quantità di moto implica dunque

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)V. \tag{2.67}$$

Da questa relazione troviamo facilmente la velocità del sistema dopo la collisione, ovvero

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1. \tag{2.68}$$

Lo studio di questa espressione, nei due limiti $m_1 = m_2$ e $m_2 \gg m_1$ è lasciato allo studente come esercizio.

2.9

Un pendolo semplice è costituito da una massa puntiforme $m = 15$ g appesa ad un filo, supposto inestensibile, di lunghezza $L = 15.2$ cm. Calcolare il periodo, T, delle oscillazioni, supponendo che l'angolo massimo delle oscillazioni sia piccolo. Assumendo che l'angolo iniziale sia $\theta_M = 10$ gradi e che la velocità iniziale sia nulla, calcolare il modulo della velocità della massa quando il pendolo raggiunge la posizione verticale.

Soluzione. Nell'ipotesi di piccole oscillazioni il periodo del pendolo è indipendente dall'angolo massimo, θ_M, e dipende solo dalla lunghezza del filo e dall'accelerazione di gravità,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \tag{2.69}$$

Sostituendo i valori numerici, notando che $L = 0.152$ m, abbiamo

$$T = 0.78 \text{ s}. \tag{2.70}$$

Per il calcolo della velocità della massa quando il pendolo è in posizione verticale, possiamo adottare una descrizione puramente cinematica essendo noti l'angolo iniziale e sapendo che la velocità iniziale è nulla. Infatti, possiamo scrivere la legge oraria per le piccole oscillazioni come

$$\theta(t) = \theta_M \cos \omega t = \theta_M \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right). \tag{2.71}$$

La velocità angolare della massa, $\Omega = d\theta/dt$, è

$$\Omega(t) = -\frac{2\pi\theta_M}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \tag{2.72}$$

cui corrisponde la velocità scalare

$$v(t) = \Omega(t)L = -\frac{2\pi\theta_M L}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right). \tag{2.73}$$

Il pendolo raggiunge la posizione verticale al tempo $t = T/4$: la velocità a questo istante vale

$$v(t) = -\frac{2\pi\theta_M L}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4}\right) = -\frac{2\pi\theta_M L}{T}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2\pi\theta_M L}{T}. \tag{2.74}$$

Il modulo di v è quindi

$$|v| = \frac{2\pi\theta_M L}{T} = 0.21 \text{ m/s}. \tag{2.75}$$

2.10

Un pendolo semplice è costituito da una massa puntiforme $m = 5$ g appesa ad un filo, supposto inestensibile, di lunghezza $\ell = 28$ cm. Assumendo che inizialmente l'angolo tra il filo e la verticale sia $\theta_M = 45$ gradi e che la velocità iniziale della massa sia nulla, calcolare il lavoro della forza peso per spostare la massa dalla posizione iniziale alle posizioni $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 30$ gradi.

Soluzione. Il lavoro di una forza conservativa per spostare il proprio punto di applicazione dalla posizione A a B è

$$L_{AB} = -\Delta U = U(A) - U(B), \tag{2.76}$$

dove $U(x)$ denota l'energia potenziale del campo di forze nella posizione x. Nel caso del problema in esame, dobbiamo considerare l'energia potenziale della particella puntiforme di massa m nel campo della forza peso,

$$U = mgh, \tag{2.77}$$

dove h è la quota a cui si trova la particella, misurata rispetto ad una quota arbitraria[3]. Per comodità prendiamo come quota di riferimento l'altezza a cui si trova la massa quando il pendolo è in posizione verticale.

L'energia potenziale iniziale è quindi

$$U_{\text{in}} = mgh = mg\ell(1 - \cos\theta_M). \tag{2.78}$$

Nella posizione finale, caratterizzata dall'angolo θ, l'energia potenziale è

$$U_{\text{fin}} = mgh = mg\ell(1 - \cos\theta). \tag{2.79}$$

Il lavoro che la forza peso compie per spostare la massa da θ_M a θ è quindi, in accordo con la (2.76),

$$L = mg\ell(1 - \cos\theta_M) - mg\ell(1 - \cos\theta) = mg\ell(\cos\theta - \cos\theta_M). \tag{2.80}$$

[3]Cambiare la quota di riferimento corrisponde ad aggiungere una costante all'energia potenziale, che è irrilevante.

Utilizzando i dati forniti dal problema abbiamo, per il lavoro necessario a spostare la massa dalla posizione iniziale all'angolo θ_1,

$$L = mg\ell(1 - \cos\theta_M) = 4.0 \times 10^{-3} \text{ J.} \tag{2.81}$$

Analogamente, per spostare la massa dalla posizione iniziale all'angolo θ_2,

$$L = mg\ell(\cos\theta_2 - \cos\theta_M) = 2.2 \times 10^{-3} \text{ J.} \tag{2.82}$$

2.11

Un pendolo semplice è costituito da una massa puntiforme $m = 15$ g appesa ad un filo, supposto inestensibile, di lunghezza $\ell = 12$ cm. Assumendo che inizialmente l'angolo tra il filo e la verticale sia $\theta_M = 60$ gradi e che la velocità iniziale della massa sia nulla, calcolare la velocità della massa alle posizioni $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = 30$ gradi. Utilizzare esclusivamente la legge di conservazione dell'energia meccanica.

Soluzione. Utilizzando i risultati già menzionati nel problema 2.10, possiamo scrivere l'energia meccanica del corpo di massa m come

$$E = \frac{mv^2}{2} + mg\ell(1 - \cos\theta), \tag{2.83}$$

dove θ denota l'angolo che il pendolo forma con la verticale; il primo addendo nel secondo membro della 2.83 corrisponde all'energia cinetica della particella, mentre il secondo addendo è l'energia potenziale nel campo della forza peso.

Il problema dà l'angolo iniziale, θ_M, nonché specifica che la velocità iniziale della massa è nulla. Quindi l'energia meccanica iniziale è puramente potenziale,

$$E_{\text{in}} = mg\ell(1 - \cos\theta_M), \tag{2.84}$$

Quando l'angolo tra il pendolo e la verticale è uguale a θ l'energia meccanica è data dalla (2.83). La conservazione dell'energia meccanica quindi si esprime come

$$mg\ell(1 - \cos\theta_M) = \frac{mv^2}{2} + mg\ell(1 - \cos\theta), \tag{2.85}$$

da cui ricaviamo il modulo della velocità in funzione dell'angolo θ,

$$v = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_M)}. \tag{2.86}$$

Per $\theta = 0$, utilizzando i dati del problema, troviamo

$$v = 1.08 \text{ m/s.} \tag{2.87}$$

Invece, per $\theta = 30$ gradi,

$$v = 0.93 \text{ m/s.} \tag{2.88}$$

2.12

Una forza $\vec{F}$ compie un lavoro su un'auto di massa $M = 1500$ kg, per accelerarla dalla velocità iniziale $v_0 = 0$ a quella finale $v_f = 100$ km/h. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza.

Soluzione. Il problema chiede il calcolo del lavoro compiuto da $\vec{F}$, dando informazioni sulla variazione della velocità dell'auto. Per calcolarlo possiamo allora utilizzare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica,

$$L_{AB} = K_B - K_A, \tag{2.89}$$

dove K_A e K_B denotano l'energia cinetica negli stati iniziale e finale rispettivamente.

Nel caso in esame, la velocità iniziale dell'auto è zero, per cui abbiamo

$$L_{AB} = \frac{Mv_f^2}{2}. \tag{2.90}$$

Convertiamo dapprima v_f da km/h a m/s:

$$v_f = 100\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 100\ \frac{1000\text{m}}{3600\text{s}} = 27.78\ \frac{\text{m}}{\text{s}}. \tag{2.91}$$

Sostituendo i dati forniti dal problema nella (2.90) abbiamo quindi

$$L_{AB} = 5.8 \times 10^5\ \text{J}. \tag{2.92}$$

2.13

Un meteorite di massa $m = 2560$ kg viaggia verso la Terra con velocità $v_0 = 5432$ m/s. La distanza minima a cui si avvicina alla Terra è $d_1 = 54900$ km con velocità v_1. Calcolare, alla distanza minima, l'energia cinetica e l'energia potenziale gravitazionale del meteorite, e il valore numerico di v_1. Valori numerici: $G = 6.66 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2, massa della Terra $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg.

Soluzione. La forza di attrazione gravitazionale è conservativa, per cui l'energia meccanica del meteorite,

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GM_Tm}{r}, \tag{2.93}$$

si conserva durante il moto. Nella (2.93), il primo e secondo addendo nel lato destro dell'equazione rappresentano l'energia cinetica e potenziale rispettivamente, dove v è la velocità del meteorite quando questo si trova a distanza r dalla Terra.

A grande distanza l'energia potenziale può essere in generale trascurata rispetto a quella cinetica, per cui l'energia iniziale del meteorite può essere scritta come

$$E_{\text{in}} = \frac{mv_0^2}{2}. \tag{2.94}$$

Quando invece il meteorite è alla distanza minima dalla Terra, la sua energia meccanica è

$$E_{\text{fin}} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{GM_Tm}{d_1}. \tag{2.95}$$

Poiché l'energia si conserva possiamo scrivere

$$E_{\text{in}} = E_{\text{fin}}, \tag{2.96}$$

ovvero

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{GM_T m}{d_1}. \tag{2.97}$$

Notiamo che poiché l'energia si conserva, quando il meteorite si avvicina alla Terra la sua energia cinetica aumenta per bilanciare la diminuzione di energia potenziale: il meteorite accelera avvicinandosi.

L'energia potenziale alla distanza d_1 è

$$U_1 = -\frac{GM_T m}{d_1} = -1.86 \times 10^{10} \text{ J}. \tag{2.98}$$

Per calcolare quella cinetica usiamo le (2.97) e (2.98), che danno

$$K_1 = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - U_1. \tag{2.99}$$

Sostituendo i dati numerici del problema e il risultato (2.98) abbiamo

$$K_1 = 5.64 \times 10^{10} \text{ J}. \tag{2.100}$$

Infine, dalle (2.99) e (2.100) abbiamo

$$v_1 = \sqrt{\frac{2K_1}{m}} = 6638.07 \text{ m/s}. \tag{2.101}$$

Come anticipato, $v_1 > v_0$ per effetto della forza di attrazione gravitazionale che accelera il meteorite quando questo si avvicina alla Terra.

2.14

Il periodo di rivoluzione dell'orbita lunare intorno alla Terra è approssimativamente $T =$ 27 giorni. Approssimando il moto lunare con un moto circolare uniforme, stimare il raggio dell'orbita. Valori numerici: $G = 6.66 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2, massa della Terra $M_T = 6 \times 10^{24}$ kg.

Soluzione. Approssimando il moto della Luna come un moto circolare uniforme intorno alla Terra, con raggio dell'orbita pari a R, l'accelerazione della Luna è puramente centripeta, per cui possiamo scrivere l'equazione del moto come

$$m\omega^2 R = \frac{GM_T m}{R^2}. \tag{2.102}$$

ω è la velocità angolare della Luna, che è legata al periodo di rotazione dalla relazione

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{2.103}$$

Abbiamo quindi, dalle (2.102) e (2.103),

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R = \frac{GM_T}{R^2}, \tag{2.104}$$

ovvero

$$R^3 = \frac{GM_T}{4\pi^2}T^2. \tag{2.105}$$

Notiamo che la (2.105) implica R^3 è proporzionale a T^2, in accordo con la terza legge di Keplero. Il raggio dell'orbita si ottiene dalla (2.105),

$$R = T^{2/3}\left(\frac{GM_T}{4\pi^2}\right)^{1/3}. \tag{2.106}$$

Per calcolare il valore numerico di R dobbiamo prima convertire il periodo in secondi:

$$T = 27 \text{ giorni} = 27 \times 24 \text{ ore} = 27 \times 24 \times 3600 \text{ s}, \tag{2.107}$$

ovvero

$$T = 2.33 \times 10^6 \text{ s}. \tag{2.108}$$

Sostituendo i dati del problema troviamo

$$R = 3.8 \times 10^8 \text{ m} = 3.8 \times 10^5 \text{ km}. \tag{2.109}$$

Il valore (2.109) è in buon accordo con la stima della distanza media Terra-Luna, che è di circa 3.84×10^5 km.

2.15

Una stella di neutroni ha una massa $M = 1.6\ M_S$, dove M_S denota la massa del Sole, e raggio $R = 12$ km. Calcolare la velocità di fuga di questa stella. Valori numerici: $G = 6.66 \times 10^{-11}$ N m^2/kg^2, massa del Sole $M_S = 2 \times 10^{30}$ kg.

Soluzione. La velocità di fuga è la velocità che deve avere una particella situata sulla superficie di un corpo celeste, affinché essa possa allontanarsi indefinitamente dal corpo celeste, e arrivare a separazione infinita da questo con velocità nulla. Naturalmente, quando definiamo la velocità di fuga assumiamo implicitamente che la particella si muova dalla superficie del corpo celeste verso l'alto per distaccarsi dal corpo, ovvero, che $\vec{v}$ abbia solo la componente radiale.

Possiamo studiare come la velocità di fuga sia legata all'energia meccanica della particella nel campo gravitazionale del corpo celeste. Infatti, l'energia di una particella di massa m nel campo gravitazionale del corpo celeste di massa M è, supponendo il corpo di forma sferica[4],

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}, \tag{2.110}$$

dove r misura la distanza tra il centro del corpo celeste e la particella. Quando la distanza è molto grande ($r \to \infty$) l'energia della particella si può approssimare come

$$E_\infty = \frac{mv_\infty^2}{2}, \tag{2.111}$$

[4]In genere, questa è una buona approssimazione per i corpi celesti in equilibrio idrostatico e non rapidamente rotanti.

dove con v_∞ denotiamo la velocità della particella quando questa è a distanza infinita. D'altra parte, quando la particella è localizzata sulla superficie del corpo celeste, la sua energia meccanica vale

$$E_{\text{superficie}} = \frac{mv_{\text{superficie}}^2}{2} - \frac{GMm}{R}, \tag{2.112}$$

dove R è il raggio del corpo. Fino a quando la particella si muove nel campo gravitazionale del corpo celeste, la sua energia meccanica si conserva: di conseguenza, l'energia che ha quando è sulla superficie è uguale a quella che ha quando è a distanza molto grande dal corpo celeste, ovvero, dalle (2.111) e (2.112),

$$\frac{mv_{\text{superficie}}^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mv_\infty^2}{2}, \tag{2.113}$$

da cui ricaviamo una relazione tra la velocità in superficie e quella a separazione infinita, vale a dire

$$\frac{mv_{\text{superficie}}^2}{2} = \frac{mv_\infty^2}{2} + \frac{GMm}{R}, \tag{2.114}$$

Il significato fisico della (2.114) è che se la particella in superficie ha velocità $v_{\text{superficie}}$, allora arriverà a distanza infinita dal corpo celeste con velocità v_∞. Questo significa che la particella consumerà parte della sua energia cinetica iniziale per vincere l'attrazione gravitazionale e aumentare la sua energia potenziale, e quando arriva a distanza infinita, dove l'energia potenziale è zero, avrà una energia cinetica residua pari a $mv_\infty^2/2$.

La (2.114) può essere usata per calcolare la velocità di fuga: infatti, $v_\infty = 0$ nella (2.114) corrisponde alla $v_{\text{superficie}}$ affinché la particella si allontani indefinitamente dal corpo celeste e arrivi a separazione infinita con velocità nulla. Abbiamo quindi

$$\frac{mv_{\text{superficie}}^2}{2} = \frac{GMm}{R}, \tag{2.115}$$

cioè

$$v_{\text{superficie}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{2.116}$$

La (2.116) vale per qualunque corpo celeste di forma sferica. Nel caso in esame, usando i dati del problema, abbiamo

$$v_{\text{superficie}} = 1.88 \times 10^8 \text{ m/s}. \tag{2.117}$$

Notiamo come la velocità di fuga per questo corpo celeste sia estremamente alta, a riprova del fatto che il campo gravitazionale in superficie sia molto più elevato di quello a cui siamo abituati nella vita quotidiana. Per avere una stima più quantitativa, possiamo confrontare il valore dell'accelerazione di gravità terrestre con quello che si avrebbe sulla superficie della stella di neutroni considerata in questo problema. Infatti, in entrambi i casi il modulo dell'accelerazione di gravità è

$$g = \frac{GM}{R^2}, \tag{2.118}$$

dove R denota il raggio del corpo celeste ed M la sua massa. Per la Terra abbiamo $M = 5.97 \times 10^{24}$ kg ed $R = 6371$ km, da cui senza sorprese otteniamo

$$g_{\text{Terra}} = 9.8 \text{ m/s}^2. \tag{2.119}$$

Per la stella di neutroni abbiamo invece[5]

$$g_{\rm NS} = 1.48 \times 10^{12}\ \text{m/s}^2. \tag{2.120}$$

Come si vede, $g_{\rm NS}/g_{\rm Terra} = O(10^{11})$. L'enorme valore dell'accelerazione di gravità sulla superficie della stella di neutroni è dovuto alla grande massa del corpo celeste concentrata in una sfera di raggio di una decina di chilometri.

Concludiamo questa discussione osservando dalla (2.114) che se la particella ha, sulla superficie del corpo celeste, velocità uguale alla sua velocità di fuga, allora la sua energia meccanica totale è nulla; d'altra parte, se la sua velocità è più piccola della velocità di fuga, la particella non ha energia sufficiente per allontanarsi a grande distanza dal corpo celeste, e la sua energia meccanica totale è negativa. In questo caso, diciamo che la particella è gravitazionalmente legata al corpo celeste, o anche, che la particella e il corpo celeste formano uno stato legato. Infine, se la velocità della particella in superficie è più alta della velocità di fuga, la particella può allontanarsi indefinitamente dal corpo celeste e la sua energia totale è positiva.

2.16

Un satellite in orbita radente intorno alla Luna ha un periodo $T = 110$ minuti. Utilizzare questa informazione, più l'approssimazione di moto circolare uniforme del satellite, per stimare la densità media della Luna.

Soluzione. Per orbita radente del satellite si intende un'orbita molto vicina alla superficie lunare, in modo che la distanza tra il satellite e il centro della Luna sia, con buona approssimazione, uguale al raggio della Luna stessa. Per un satellite in orbita radente, e in moto circolare uniforme, intorno alla Luna, l'equazione del moto si scrive

$$m\omega^2 R = \frac{GMm}{R^2}, \tag{2.121}$$

dove m ed M denotano le masse del satellite e della Luna rispettivamente, R è il raggio della Luna, e

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2.122}$$

è la velocità angolare del moto, con T il suo periodo (l'unico dato del problema).

La (2.121) può essere riscritta come

$$\omega^2 R = \frac{GM}{R^2}, \tag{2.123}$$

ovvero

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{GM}{R^3}. \tag{2.124}$$

Osserviamo che al secondo membro della (2.124) compare il rapporto M/R^3, che è proporzionale alla densità media, $\rho_{\rm media}$, della Luna. Infatti,

$$\rho_{\rm media} = \frac{M}{V} = \frac{3}{4\pi}\frac{M}{R^3}, \tag{2.125}$$

[5] Il pedice NS sta per Neutron Star.

da cui
$$\frac{M}{R^3} = \frac{4\pi}{3}\rho_{\text{media}}, \tag{2.126}$$
Usando la (2.126) nella (2.124) otteniamo
$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi G}{3}\rho_{\text{media}}, \tag{2.127}$$
dalla quale ricaviamo il risultato cercato, ovvero
$$\rho_{\text{media}} = \frac{3}{4\pi G}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2. \tag{2.128}$$
Sostituendo il valore del periodo dato dal problema,
$$T = 110 \text{ minuti} = 6600 \text{ s}, \tag{2.129}$$
abbiamo
$$\rho_{\text{media}} = 3248.7 \text{ kg/m}^3. \tag{2.130}$$
Il valore (2.130) è in ottimo accordo con quello noto nella comunità scientifica, $\rho_{\text{media}} = 3340 \text{ kg/m}^3$.

2.17

Un corpo di massa $m = 100$ g, assimilabile a un punto materiale, è appeso ad una molla (di massa trascurabile) di costante elastica $K = 14$ N/m. Calcolare l'elongazione della molla all'equilibrio.

Soluzione. Sul corpo di massa m agiscono la forza peso e la forza di richiamo elastica, che hanno stessa direzione e verso opposto; all'equilibrio, il risultante di queste due forze è nullo, per cui
$$mg = Kx, \tag{2.131}$$
dove x denota l'elongazione della molla rispetto alla sua posizione di equilibrio. Abbiamo quindi
$$x = \frac{mg}{K}. \tag{2.132}$$
Sostituendo i valori numerici troviamo
$$x = 0.07 \text{ m} = 7 \text{ cm}. \tag{2.133}$$

2.18

Un corpo di massa $m = 1$ kg, assimilabile ad un punto materiale, è collegato ad una molla di massa trascurabile e di costante elastica $K = 50$ N/m su un piano orizzontale senza attrito. La massa, inizialmente in equilibrio nell'origine degli assi, è spostata lungo l'asse x nella posizione $X_0 = 50$ cm, ed è poi rilasciata con velocità iniziale nulla. Calcolare il modulo della velocità del corpo quando questo raggiunge l'origine degli assi, utilizzando esclusivamente la legge oraria del moto.

Soluzione. Il moto del corpo è chiaramente un moto armonico, la cui legge oraria è

$$x(t) = X_0 \cos \omega t, \tag{2.134}$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 7.07 \text{ s}^{-1}. \tag{2.135}$$

Il periodo dell'oscillazione è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 0.89 \text{ s}. \tag{2.136}$$

La velocità del corpo ha solo componente lungo l'asse x, ed il suo modulo è dato da

$$v = \left|\frac{dx}{dt}\right| = \omega X_0 |\sin \omega t|. \tag{2.137}$$

La particella passa nell'origine per i tempi $t = t_n$, dove

$$t_n = \frac{T}{4} + n\frac{T}{2}, \quad n > 0. \tag{2.138}$$

In questi tempi $\sin \omega t_n = \pm 1$ per cui $|\sin \omega t_n| = 1$. Quindi la velocità della particella nell'origine vale

$$v = \omega X_0 = 3.54 \text{ m/s}. \tag{2.139}$$

2.19

Un corpo di massa $m = 1$ kg, assimilabile ad un punto materiale, è collegato ad una molla di massa trascurabile e di costante elastica $K = 50$ N/m su un piano orizzontale senza attrito. La massa, inizialmente in equilibrio nell'origine degli assi, è spostata lungo l'asse x nella posizione $X_0 = 50$ cm, ed è poi rilasciata con velocità iniziale nulla. Calcolare il modulo della velocità del corpo quando questo raggiunge l'origine degli assi, nonché la sua energia cinetica, utilizzando esclusivamente la legge di conservazione dell'energia meccanica.

Soluzione. Il sistema fisico analizzato in questo problema è identico a quello studiato nel problema 2.18, nel quale però era richiesto di utilizzare solo la cinematica. Qui il problema chiede di usare la conservazione dell'energia meccanica.

L'energia meccanica di un punto materiale soggetto ad una forza elastica è

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{Kx^2}{2}, \tag{2.140}$$

dove x denota l'elongazione della molla rispetto alla sua posizione di equilibrio. Al tempo $t = 0$ la velocità della particella è nulla, per cui l'energia iniziale è

$$E_{\text{in}} = \frac{KX_0^2}{2}. \tag{2.141}$$

D'altra parte, quando la particella passa per l'origine degli assi, l'elongazione della molla è nulla mentre la velocità è massima. L'energia meccanica della particella in questo caso è

$$E_{\text{origine}} = \frac{mv^2}{2}, \tag{2.142}$$

cioè E_{origine} è puramente cinetica. La conservazione dell'energia meccanica impone che sia

$$E_{\text{origine}} = E_{\text{in}}. \tag{2.143}$$

Ma per la (2.142) l'energia meccanica nell'origine coincide con l'energia cinetica richiesta dal problema, quindi

$$E_{\text{origine}} = \frac{KX_0^2}{2}. \tag{2.144}$$

Sostituendo i valori numerici troviamo

$$E_{\text{origine}} = 6.25 \text{ J}. \tag{2.145}$$

Da questo risultato, e dalla (2.142), troviamo infine il modulo della velocità della particella quando questa passa per l'origine,

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\text{origine}}}{m}} = 3.54 \text{ m/s}. \tag{2.146}$$

Notiamo l'accordo con il risultato ottenuto nel problema 2.18, in particolare con la (2.139).

2.20

Un blocco di massa $m = 1$ kg striscia su un piano inclinato, con attrito, che è in equilibrio su un tavolo orizzontale; la superficie inclinata del piano forma un angolo $\theta = 60$ gradi con il tavolo. I coefficienti di attrito statico e cinematico sono $\mu_s = 1.0$, $\mu_c = 0.75$. Verificare che la componente tangente della forza peso è sufficiente a vincere la forza di attrito statico. Inoltre, assumendo che il blocco si trovi inizialmente ad una quota $h = 25$ cm, misurata rispetto al tavolo, e con velocità nulla, calcolare la velocità del blocco quando questo arriva sul tavolo (ovvero quando $h = 0$).

Soluzione. La componente della forza peso tangente al piano inclinato è

$$F_t = mg \sin\theta. \tag{2.147}$$

Il blocco striscia sul piano se F_t è maggiore di $\mu_s N$, dove N è il modulo della componente normale della reazione vincolare,

$$N = mg \cos\theta. \tag{2.148}$$

La condizione di strisciamento è dunque

$$mg \sin\theta > \mu_s mg \cos\theta, \tag{2.149}$$

ovvero

$$\tan\theta > \mu_s. \tag{2.150}$$

Poiché $\theta = 60$ gradi, $\tan\theta = \sqrt{3} = 1.73$, e $\mu_s = 1$, la la condizione (2.150) è soddisfatta: l'attrito statico non è sufficiente a bloccare il corpo, e questo striscia sul piano.

Quando il blocco è in moto sul piano, la componente normale della forza peso è bilanciata da quella della reazione vincolare del piano, mentre per le componenti tangenti abbiamo

$$mg \sin\theta - \mu_c N = ma_t, \tag{2.151}$$

ovvero

$$g \sin\theta - \mu_c g \cos\theta = a_t. \tag{2.152}$$

Dalla (2.152) osserviamo che a_t è costante, per cui il moto lungo il piano è un moto rettilineo uniformemente accelerato. Sostituendo i dati del problema abbiamo

$$a_t = 4.82 \text{ m/s}^2. \tag{2.153}$$

Per calcolare la velocità del blocco quando questo arriva sul tavolo ($h = 0$) possiamo sia utilizzare l'equazione del moto (2.152), che il teorema del lavoro e dell'energia cinetica. Esaminiamo separatamente i due approcci.

Approccio cinematico. Lo spazio percorso dal blocco sul piano inclinato è

$$s(t) = s_0 + v_{0,t}t + \frac{1}{2}a_t t^2, \tag{2.154}$$

$$v(t) = v_{0,t} + a_t t. \tag{2.155}$$

Scegliendo gli assi cartesiani in modo che $s = 0$ per $t = 0$, e osservando che il problema dà la condizione iniziale $v_{0,t}$, possiamo riscrivere le (2.154) e (2.155) come

$$s(t) = \frac{1}{2}a_t t^2, \tag{2.156}$$

$$v(t) = a_t t. \tag{2.157}$$

La relazione tra h e la distanza, d, che il blocco percorre lungo il piano inclinato, è ovviamente

$$\sin\theta = \frac{h}{d}, \tag{2.158}$$

da cui

$$d = \frac{h}{\sin\theta}. \tag{2.159}$$

Usando la (2.159) nella (2.156) possiamo calcolare il tempo, t_d, necessario affinché il blocco percorra la distanza d: infatti,

$$d = \frac{1}{2}a_t t_d^2, \tag{2.160}$$

da cui ricaviamo

$$t_d = \sqrt{\frac{2d}{a_t}}. \tag{2.161}$$

Sostituendo poi la (2.161) nella (2.157) abbiamo

$$v(t_d) = \sqrt{2a_t d} = \sqrt{\frac{2a_t h}{\sin\theta}}. \tag{2.162}$$

Sostituendo i valori numerici abbiamo

$$v(t_d) = 1.67 \text{ m/s}. \tag{2.163}$$

Approccio con il teorema del lavoro. La componente tangente della forza è data dal primo membro della (2.151), mentre la distanza percorsa dal blocco sul piano inclinato è la (2.159), per cui il lavoro che la forza compie sul blocco è

$$L = (mg \sin\theta - \mu_c N)d = m a_t d = \frac{m a_t h}{\sin\theta}. \tag{2.164}$$

Sostituendo i valori numerici, usando anche la (2.153), abbiamo

$$L = 1.39 \text{ J}. \tag{2.165}$$

Il lavoro (2.165) è uguale alla variazione dell'energia cinetica del blocco; tenendo conto che la velocità iniziale del blocco è nulla e che quella finale è $v(t_d)$, possiamo scrivere

$$L = \frac{mv(t_d)^2}{2}. \tag{2.166}$$

Dalla (2.166) ricaviamo

$$v(t_d) = \sqrt{\frac{2L}{m}}, \tag{2.167}$$

e sostituendo il risultato (2.166) abbiamo

$$v(t_d) = 1.67 \text{ m/s}, \tag{2.168}$$

in accordo con la (2.163).

2.21

Un blocco di massa $m = 0.3$ kg striscia su un piano inclinato con attrito in equilibrio su un tavolo orizzontale; la superficie inclinata del piano forma un angolo $\theta = 55$ gradi con il tavolo. Il coefficiente di attrito cinematico è $\mu_c = 0.75$. Assumendo che il blocco si trovi inizialmente ad una quota $h = 25$ cm, misurata rispetto al tavolo, e che la velocità iniziale del blocco sia nulla, calcolare il lavoro che la forza di attrito e la forza peso compiono per spostare il corpo ad $h = 0$.

Soluzione. Il problema fisico in esame qui è identico a quello analizzato nel problema 2.20, a parte i diversi valori dell'angolo θ e della massa del blocco. Le componenti tangenti di forza peso e attrito cinematico sono rispettivamente

$$p_t = mg\sin\theta, \tag{2.169}$$
$$f_a = -\mu_c mg\cos\theta. \tag{2.170}$$

Inoltre, la distanza d percorsa dal blocco lungo il piano inclinato è data dalla (2.159). Poiché le forze sono costanti lungo tutto il moto del blocco, i rispettivi lavori della forza peso, L_p, e della forza di attrito, L_a, sono dati da

$$L_p = mgd\sin\theta = mgh, \tag{2.171}$$
$$L_a = -\mu_c mgd\cos\theta = -\mu_c\frac{mgh}{\tan\theta}, \tag{2.172}$$

dove abbiamo usato la (2.159). Sostituendo i valori numerici abbiamo

$$L_p = 0.74 \text{ J}, \tag{2.173}$$
$$L_a = -0.39 \text{ J}. \tag{2.174}$$

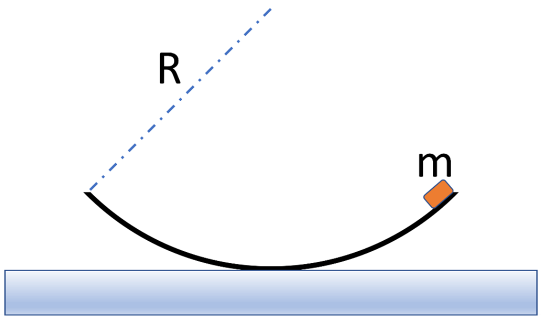

Figura 2.3: Guida circolare del problema 2.22.

2.22

Un corpo di massa $m = 0.2$ kg, assimilabile a un punto materiale, è libero di muoversi su una guida poggiata su un piano orizzontale; la forma della guida è quella di un arco circolare con raggio $R = 45$ cm e di lunghezza $L = 8.84$ cm. La guida è priva di attrito. Nell'istante iniziale il corpo è posizionato ad una delle due estremità della guida, ed è rilasciato con velocità nulla. Determinare la legge oraria del moto del corpo.

Soluzione. Il moto del corpo sulla guida circolare è formalmente identico a quello di una punto materiale appeso ad un filo inestensibile, ovvero a quello del pendolo semplice. Infatti, la componente normale della forza peso è bilanciata dalla reazione vincolare del piano (nel caso del pendolo semplice, il ruolo della reazione normale è giocato dalla tensione del filo), mentre la componente tangente della forza peso agisce come forza di richiamo verso la posizione di equilibrio (nel caso del pendolo semplice, questa corrisponde a $\theta = 0$).

Chiamato θ l'angolo in figura 2.3, data l'analogia con il moto del pendolo semplice possiamo scrivere la legge oraria come

$$\theta(t) = \theta_M \cos\omega t, \tag{2.175}$$

dove θ_M è l'angolo iniziale e ω è la pulsazione del moto,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}, \tag{2.176}$$

analoga alla $\omega = \sqrt{g/\ell}$ del pendolo semplice. Sostituendo i dati numerici del problema abbiamo

$$\omega = 4.67 \text{ s}^{-1}. \tag{2.177}$$

Per completare la legge oraria, dobbiamo convertire $\theta(t)$ in $s(t)$, la lunghezza dell'arco di circonferenza percorso dal corpo. Usando la nota relazione geometrica

$$s = R\theta, \tag{2.178}$$

abbiamo dalla (2.175)

$$s(t) = R\theta_M \cos\omega t. \tag{2.179}$$

L'unica incognita nella (2.179) è l'angolo massimo θ_M. Usando nuovamente la (2.178) abbiamo

$$R\theta_M = \frac{L}{2}. \tag{2.180}$$

Per cui, la legge oraria cercata è

$$s(t) = \frac{L}{2}\cos\omega t. \tag{2.181}$$

I dati del problema possono essere utilizzati per verificare che l'approssimazione di piccoli angoli, necessaria per ottenere la (2.175), sia valida. Dalla (2.180) abbiamo

$$\theta_M = \frac{L}{2R}. \tag{2.182}$$

Sostituendo i valori numerici, troviamo

$$\theta_M = 0.098 \text{ rad} = 5.63 \text{ gradi}. \tag{2.183}$$

In genere, riteniamo che l'approssimazione di piccoli angoli sia valida fino a $\theta \approx 10$ gradi. Notiamo quindi che nel problema in esame, tale approssimazione è verificata e l'uso della legge oraria approssimata (2.175) è giustificato.

2.23

Un corpo di massa $m = 0.45$ kg, assimilabile ad un punto materiale, è libero di muoversi su una guida poggiata su un piano orizzontale; la forma della guida è quella di un arco circolare con raggio $R = 90$ cm e di lunghezza $L = 70.69$ cm. La guida è priva di attrito. Nell'istante iniziale il corpo è posizionato ad una delle due estremità della guida, ed è rilasciato con velocità nulla. Calcolare la velocità con la quale il corpo raggiunge la base della guida, e la velocità con cui il corpo raggiunge l'altra estremità della guida.

Soluzione. Utilizzando la (2.182) del problema 2.23, calcoliamo θ_M per i dati del presente problema, ovvero

$$\theta_M = \frac{L}{2R} = 0.39 \text{ rad} = 22.50 \text{ gradi}. \tag{2.184}$$

Certamente non siamo in condizioni di applicare l'approssimazione di piccoli angoli, per cui non possiamo utilizzare la legge oraria (2.175). Possiamo però utilizzare la conservazione dell'energia meccanica, poiché la guida è senza attrito e le altre forze agenti sul corpo sono conservative.

Come nel caso del pendolo semplice, la componente normale della reazione vincolare non compie lavoro in questo moto perché è sempre perpendicolare allo spostamento. Quindi l'unico lavoro è compiuto dalla forza peso, e l'energia meccanica può scriversi come

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh, \tag{2.185}$$

dove h misura la quota a cui si trova il corpo, misurata rispetto al piano su cui è poggiata la guida circolare. L'energia iniziale è

$$E_{\text{in}} = mgh, \tag{2.186}$$

poiché la velocità iniziale è nulla. D'altra parte l'energia del corpo alla base della guida è

$$E_{\text{base}} = \frac{mv_{\text{base}}^2}{2}. \tag{2.187}$$

Ponendo $E_{\rm in} = E_{\rm base}$ troviamo
$$mgh = \frac{mv_{\rm base}^2}{2}, \tag{2.188}$$
ovvero
$$v_{\rm base} = \sqrt{2gh}. \tag{2.189}$$
Analogamente a quanto visto nei problemi 2.10 e 2.11 sul pendolo semplice, possiamo scrivere
$$h = R(1 - \cos\theta_M), \tag{2.190}$$
con θ_M dato dalla (2.184). Sostituendo i dati numerici del problema abbiamo
$$h = 0.068 \text{ m}. \tag{2.191}$$
Grazie alla (2.189) possiamo dunque calcolare
$$v_{\rm base} = 1.15 \text{ m/s}. \tag{2.192}$$
Quando il corpo raggiunge l'altra estremità della guida, la sua quota è uguale alla quota iniziale (2.191), per cui l'energia del corpo è
$$E_{\rm fin} = \frac{mv_{\rm fin}^2}{2} + mgh. \tag{2.193}$$
Eguagliando le energie iniziale e finale, $E_{\rm in} = E_{\rm fin}$, con $E_{\rm in}$ data dalla (2.186), abbiamo dunque che
$$v_{\rm fin} = 0. \tag{2.194}$$
Possiamo interpretare le (2.192) e (2.194) come segue. Inizialmente, il corpo si trova alla quota h con velocità nulla, per cui la sua energia meccanica è puramente potenziale. Quando il corpo scende lungo la guida e arriva alla base, la quota è zero e la sua velocità è data dalla (2.192). Quindi, l'energia potenziale iniziale è stata convertita interamente in energia cinetica. Infine, quando il corpo raggiunge l'altra estremità della guida, la sua velocità è nuovamente nulla e la sua quota h, per cui l'energia cinetica che aveva alla base è convertita completamente in energia potenziale.

2.24

Un corpo di massa $m = 0.15$ kg, assimilabile ad un punto materiale, è libero di muoversi su una guida poggiata su un piano orizzontale; la forma della guida è quella di un arco circolare con raggio $R = 190$ cm e di lunghezza $L = 0.2$ m. La guida è priva di attrito. Nell'istante iniziale il corpo è posizionato ad una delle due estremità della guida, ed è rilasciato con velocità nulla. Calcolare il lavoro che la forza peso e la reazione vincolare normale compiono nello spostare il corpo dalla posizione iniziale alla base della guida.

Soluzione. Analogamente a quanto visto nel problema 2.24, il lavoro della forza peso per spostare il corpo da una delle estremità della guida alla base della guida stessa è
$$L = mgh, \tag{2.195}$$
dove
$$h = R(1 - \cos\theta_M), \tag{2.196}$$

e con θ_M dato dalla (2.184). Nel caso in esame abbiamo

$$\theta_M = 0.53 \text{ rad} = 30.16 \text{ gradi}, \tag{2.197}$$

per cui dalla (2.196)

$$h = 0.026 \text{ m}. \tag{2.198}$$

Il lavoro della forza peso è quindi, per la 2.195,

$$L = 0.038 \text{ J}. \tag{2.199}$$

Il lavoro della della reazione vincolare è nullo: infatti, essendo la guida senza attrito, l'unica componente della reazione vincolare è quella normale alla guida stessa, $\vec{N}$. Ma $\vec{N}$ è sempre perpendicolare allo spostamento del corpo lungo la guida, per cui il lavoro compiuto da $\vec{N}$ è nullo.

2.25

Un corpo di massa $m = 0.15$ kg, assimilabile ad un punto materiale, è libero di muoversi su una guida poggiata su un piano orizzontale; la forma della guida è quella di un arco circolare con raggio $R = 190$ cm e di lunghezza $L = 0.2$ m. Il coefficiente di attrito cinematico tra il corpo e la guida è $\mu_c = 0.1$. Nell'istante iniziale il corpo è posizionato ad una delle due estremità della guida, ed è rilasciato con velocità nulla. Calcolare il lavoro che la forza peso e la forza di attrito compiono nello spostare il corpo dalla posizione iniziale alla base della guida.

Soluzione. Il presente problema è analogo al problema 2.24, con la differenza che ora si considera un attrito cinematico tra la guida e il corpo che scivola su di essa. Poiché i dati del problema sono gli stessi del problema 2.24, il lavoro della forza peso è ancora dato dalla (2.195), con h dato dalla (2.196). Numericamente, il lavoro cercato è dato dalla (2.199).

Il lavoro elementare della forza di attrito cinematico, $\vec{F}_a = -\mu_c N \hat{v}$, lungo la traiettoria del corpo può scriversi come

$$dL_a = \vec{F}_a \cdot d\vec{s} = -\mu_c mg \cos\theta \hat{v} \cdot d\vec{s}, \tag{2.200}$$

dove $\hat{v}$ corrisponde al versore della velocità del corpo, e $N = mg\cos\theta$ è la componente normale della reazione vincolare della guida. Ora notiamo che $\hat{v}$ e $d\vec{s}$ sono sempre paralleli (lo spostamento avviene nella direzione della velocità), per cui $\hat{v} \cdot d\vec{s} = ds$, e dL_a può essere scritto come

$$dL_a = -\mu_c mg \cos\theta ds. \tag{2.201}$$

ds è lo spostamento del corpo lungo la guida circolare, ovvero l'ascissa curvilinea, che per definizione è positiva se misurata dal punto iniziale della traiettoria, ed è tale che la lunghezza della traiettoria è data da

$$\int_{\theta=\theta_M}^{\theta=0} ds = \frac{L}{2}. \tag{2.202}$$

Confrontantdo queste con la relazione (2.178), osserviamo che nella traiettoria considerata, ovvero quella con angolo iniziale θ_M e angolo finale $\theta = 0$, è $d\theta < 0$, per cui la (2.178) dà

$$ds = -R d\theta. \tag{2.203}$$

In definitiva possiamo scrivere

$$dL_a = \mu_c mgR\cos\theta d\theta, \tag{2.204}$$

e il lavoro totale come

$$L_a = \mu_c mgR \int_{\theta_M}^{0} \cos\theta d\theta, \tag{2.205}$$

L'integrale nella (2.204) è elementare, e il risultato finale è

$$L_a = -mgR\sin\theta_M. \tag{2.206}$$

Sostituendo i valori numerici troviamo

$$L_a = -0.013 \text{ J}. \tag{2.207}$$

Notiamo che $L_a < 0$, in accordo col fatto che $\vec{F}_a$ è sempre orientata in maniera opposta alla velocità del corpo, ed è quindi una forza dissipativa. Inoltre, il valore assoluto di L_a è più piccolo del lavoro compiuto dalla forza peso (2.199), ed il lavoro complessivo compiuto sul corpo durante l'intero spostamento è

$$L_{\text{tot}} = L + L_a = 0.025 \text{ J}. \tag{2.208}$$

$L_{\text{tot}} > 0$, in accordo con il fatto che il risultante della forza agente sul corpo sposta il suo punto di applicazione concordemente al moto.

2.26

Un corpo di massa $M = 20$ kg è posizionato su un piano orizzontale. I coefficienti di attrito statico e cinematico in questo sistema sono $\mu_s = 0.2$ e $\mu_c = 0.1$. Calcolare il valore minimo della forza, F_{min}, da applicare al corpo per muoverlo sul piano. Inoltre, quando il corpo è in moto sul piano per effetto di una forza applicata, $\vec{F}$, parallela al piano, calcolare il modulo di F affinché la velocità del corpo rimanga costante.

Soluzione. Affinché il corpo si muova sul piano per effetto di una forza applicata, la componente tangente al piano di questa forza deve essere maggiore di

$$F_{\text{min}} = \mu_s N = \mu_s mg, \tag{2.209}$$

dove N è il modulo della reazione normale del piano sul corpo. Dai dati del problema ricaviamo

$$F_{\text{min}} = 39.24 \text{ N}. \tag{2.210}$$

Quando il corpo è in moto sul piano per effetto di una forza $\vec{F}$ parallela al piano, la proiezione dell'equazione del moto del corpo lungo la direzione parallela al piano è

$$F - \mu_c N = ma_t, \tag{2.211}$$

dove a_t è la componente tangente dell'accelerazione. Il problema richiede di calcolare il modulo di $\vec{F}$ tale che la velocità del corpo sia costante, ovvero affinché sia $a_t = 0$. Per cui dalla (2.211) abbiamo

$$F = \mu_c N = \mu_c mg. \tag{2.212}$$

Sostituendo i dati del problema troviamo

$$F = 19.62 \text{ N}. \tag{2.213}$$

Notiamo che nonostante il corpo si muova per effetto di $\vec{F}$, la velocità del corpo è costante. Questo perché la forza applicata è bilanciata da quella di attrito per cui il risultante della forza è nullo.

2.27

Un punto materiale, vincolato a muoversi su di una retta priva di attrito, è soggetto ad una forza conservativa la cui energia potenziale è $U(x) = k(x^2 - \lambda x + a^2)$, con $k = 12$ N/m, $\lambda = 2$ cm e $a = 3$ cm. Calcolare la posizione di equilibrio del punto. *Suggerimento.* Ricordare la relazione tra l'energia potenziale e la forza; inoltre, ricordare che nella posizione di equilibrio il risultante delle forze applicate al corpo è uguale a zero.

Soluzione. La relazione tra forza, $\vec{F}$, ed energia potenziale, U, è

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U, \tag{2.214}$$

ovvero, in coordinate cartesiane,

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{2.215}$$

Nel caso in esame, il moto è unidimensionale, per cui possiamo limitarci a considerare la prima delle (2.215); inoltre, tenendo presente che l'energia potenziale dipende solo dalla coordinata x,

$$F_x = -\frac{dU}{dx}. \tag{2.216}$$

All'equilibrio, la forza applicata al punto materiale deve essere nulla, $F_x = 0$, da cui ricaviamo la condizione di equilibrio

$$\frac{dU}{dx} = 0. \tag{2.217}$$

Data l'energia potenziale nella traccia del problema abbiamo

$$\frac{dU}{dx} = k(2x - \lambda). \tag{2.218}$$

La condizione di equilibrio (2.217) applicata alla (2.218) implica dunque

$$2x - \lambda = 0, \tag{2.219}$$

ovvero

$$x = \frac{\lambda}{2}. \tag{2.220}$$

Usando i dati del problema nella (2.220) abbiamo

$$x = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}. \tag{2.221}$$

Notiamo che la posizione di equilibrio non dipende da k e da a ma solo da λ.

2.28

Un punto materiale, vincolato a muoversi su di una retta priva di attrito, è soggetto ad una forza conservativa la cui energia potenziale è $U(x) = c(A^2/x^2 - B/x)$, con $c = 3$ J e $A = B = 1$ cm. Calcolare la posizione di equilibrio del punto.

Soluzione. Il problema è analogo al (2.27), per cui useremo ancora la (2.217) con la nuova energia potenziale data nella traccia. Abbiamo

$$\frac{dU}{dx} = c\left(-\frac{2A^2}{x^3} + \frac{B}{x^2}\right) = \frac{c}{x^2}\left(-\frac{2A^2}{x} + B\right). \tag{2.222}$$

Ponendo $dU/dx = 0$ abbiamo

$$-\frac{2A^2}{x} + B = 0, \tag{2.223}$$

ovvero

$$x = \frac{2A^2}{B}. \tag{2.224}$$

Sostituendo i dati del problema troviamo

$$x = 2 \text{ cm} = 0.02 \text{ m}. \tag{2.225}$$

Notiamo che come nel problema (2.27), la posizione di equilibrio (2.225) non dipende dal parametro c dell'energia potenziale. Questo perché c è una costante moltiplicativa in U, che può essere sempre fattorizzata quando si risolve l'equazione $dU/dx = 0$.

2.29

Un punto materiale di massa $m = 12$ kg, vincolato a muoversi su di una retta priva di attrito, è soggetto ad una forza conservativa la cui energia potenziale è $U(x) = c(A^2/x^2 - B/x)$, con $c = 128$ J e $A = B = 1$ m. Calcolare il lavoro compiuto dalla forza per spostare il punto materiale dalla posizione iniziale $x = X_1 = 1$ m a quella finale $x = X_2 = 12.3$ m. Calcolare inoltre l'energia cinetica del punto materiale in X_2, sapendo che in X_1 la velocità del punto è $V_1 = 3$ km/h.

Soluzione. Il lavoro che la forza compie sul punto materiale per il tragitto da X_1 a X_2 è uguale a

$$L = -\Delta U = U(X_1) - U(X_2), \tag{2.226}$$

ovvero

$$L = c\left(\frac{A^2}{X_1^2} - \frac{B}{X_1}\right) - c\left(\frac{A^2}{X_2^2} - \frac{B}{X_2}\right). \tag{2.227}$$

Sostituendo i dati numerici del problema troviamo

$$L = 9.56 \text{ J}. \tag{2.228}$$

Per calcolare l'energia cinetica del punto materiale in X_2 possiamo utilizzare il teorema del lavoro e dell'energia cinetica, che nel caso di forze conservative è equivalente alla conservazione dell'energia meccanica. Il lavoro è dato dalla (2.228), per cui

$$L = K(X_2) - K(X_1) = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}, \tag{2.229}$$

dove V_2 denota la velocità nel punto X_2. Quindi

$$K(X_2) = L + K(X_1) = L + \frac{mV_1^2}{2}. \tag{2.230}$$

Utilizzando la velocità V_1 data dal problema, troviamo

$$K(X_1) = 5.2 \times 10^3 \text{ J}, \tag{2.231}$$

per cui, dalle (2.228) e (2.230) troviamo

$$K(X_2) = 9.57 \text{ J}. \tag{2.232}$$

Notiamo che $L > 0$, per cui l'energia cinetica della particella nel punto X_2 è più alta di quella in X_1. Questo perché nonostante a grande distanza la forza con energia potenziale $U(x)$ sia attrattiva, la particella per $x \approx X_1$ sonda un centro fortemente repulsivo che tende a spingere la particella stessa lontana dall'origine degli assi: questa forte repulsione causa un aumento considerevole dell'energia cinetica della particella, che poi è parzialmente rallentata dalla forza $F_x = -dU/dx$ quando $x \gg X_1$.

2.30

Un corpo, assimilabile ad un punto materiale di massa $M = 1.4$ kg, si muove con velocità $V = 50$ km/h su un piano privo di attrito. Al tempo $t = 0$ il corpo entra in contatto con una molla (respingente) a riposo, fatta di una lega di titanio di costante elastica $K = 5228$ N/m. Supponendo che la direzione del moto del corpo e quella della molla coincidano, calcolare la massima variazione di lunghezza della molla per effetto dell'interazione con il corpo.

Soluzione. In questo problema, il corpo è soggetto alla sola forza elastica, che è conservativa, per cui l'energia meccanica è conservata. L'energia meccanica del corpo è

$$E = \frac{mM^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \tag{2.233}$$

dove x è l'elongazione della molla rispetto alla posizione di equilibrio.

All'istante $t = 0$, quando il corpo urta la molla con la velocità V, l'elongazione della molla è nulla, per cui l'energia del corpo è

$$E_{\text{in}} = \frac{MV^2}{2}. \tag{2.234}$$

D'altra parte, quando la compressione della molla è massima, $x = X$, la velocità del corpo è zero, per cui l'energia in questa configurazione vale

$$E_{\text{fin}} = \frac{KX^2}{2}. \tag{2.235}$$

Poiché l'energia totale è conservata,

$$E_{\text{in}} = E_{\text{fin}}, \tag{2.236}$$

ovvero

$$\frac{KX^2}{2} = \frac{MV^2}{2}. \tag{2.237}$$

X rappresenta l'elongazione (o in valore assoluto anche la compressione) massima della molla, che è la quantità richiesta dal problema, per cui, risolvendo per X, abbiamo dalla (2.237)

$$|X| = V\sqrt{\frac{M}{K}}. \tag{2.238}$$

Sostituendo i dati numerici del problema troviamo

$$|X| = 0.23 \text{ m}. \tag{2.239}$$

2.31

Un punto materiale di massa $m = 1.4$ kg si muove su una traiettoria rettilinea lungo l'asse z, per effetto di una forza conservativa di energia potenziale $U(z) = kz^2/2$ con $k = 9.12$ J/m^2. Sapendo che il punto passa per l'origine con velocità $V_0 = 1.3$ m/s, calcolare a quale distanza dall'origine si ferma prima di invertire il proprio moto.

Soluzione. Il problema è analogo al (2.32), in cui un corpo si muove sotto l'effetto di una forza conservativa elastica, il cui effetto è attrarre il corpo nell'origine. L'energia meccanica del punto materiale è dunque conservata.

Quando la particella passa per l'origine con velocità V_0, abbiamo $z = 0$, per cui la sua energia meccanica è puramente cinetica e uguale a

$$E_{\text{in}} = \frac{mV_0^2}{2}. \tag{2.240}$$

Quando invece la particella si ferma, la distanza dall'origine, $z = Z$, è massima, e la sua energia meccanica è puramente potenziale e pari a

$$E_{\text{fin}} = \frac{kZ^2}{2}. \tag{2.241}$$

La conservazione dell'energia meccanica, $E_{\text{in}} = E_{\text{fin}}$, implica dunque che

$$|Z| = V_0\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{2.242}$$

Sostituendo i dati del problema troviamo

$$|Z| = 0.51 \text{ m}. \tag{2.243}$$

2.32

Un pendolo semplice è costituito da corpo puntiforme di massa $m = 50$ g e un filo inestensibile di lunghezza $\ell = 15$ cm. Supponendo che l'angolo, θ, iniziale che il filo forma con la verticale sia $\theta = \theta_M = 10$ gradi, calcolare il modulo della tensione del filo quando $\theta = \theta_M$ e quando $\theta = 0$.

Soluzione. Il modulo della tensione del filo, τ, è uguale alla componente normale della forza peso, ovvero

$$\tau = mg\cos\theta, \tag{2.244}$$

dove θ è l'angolo che il filo forma con la verticale.

Per $\theta = \theta_M$ troviamo quindi

$$\tau = 0.48 \text{ N}. \tag{2.245}$$

Invece, per $\theta = 0$ troviamo

$$\tau = 0.49 \text{ N}. \tag{2.246}$$

Notiamo che $\tau(\theta = 0) > \tau(\theta = \theta_M)$. Questo perché la componente verticale della forza peso è massima quando il pendolo è in posizione verticale, per cui la tensione del filo deve essere massima per bilanciare la forza peso.

Capitolo 3

Trasformazioni dei gas perfetti

3.1

Una mole di idrogeno molecolare è portata alla temperatura $T = 25$ gradi Celsius in un recipiente rigido di volume $V = 0.015$ m^3[1]. Calcolare la pressione P_0 alla quale si trova il gas in queste condizioni. Il gas è poi riscaldato alla temperatura $T_N = 100$ gradi Celsius: calcolare il nuovo valore della pressione P_N. Supporre che il gas si comporti come un gas perfetto. Utilizzare le unità di misura del sistema internazionale.

Soluzione. L'equazione di stato dei gas perfetti è

$$PV = nRT, \tag{3.1}$$

dove P è la pressione del gas, V il volume occupato da questo, n il numero di moli di gas e T la temperatura del gas. R è la costante universale del gas perfetto, che nel SI vale

$$R = 8.314 \ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\ K}}. \tag{3.2}$$

Il problema richiede la pressione del gas a due diverse temperature, che possiamo ricavare dalla (3.1), ovvero

$$P = \frac{nRT}{V}. \tag{3.3}$$

Per calcolare la pressione del gas, dobbiamo convertire la temperatura da Celsius a Kelvin:

$$T(\mathrm{K}) = T(^\circ\mathrm{C}) + 273.15. \tag{3.4}$$

Nel primo caso del problema in esame abbiamo $T(^\circ\mathrm{C}) = 25$ per cui

$$T = 298.15 \ \mathrm{K}. \tag{3.5}$$

Inserendo il dato (3.5) nella (3.3) abbiamo

$$P_0 = 1.65 \times 10^5 \ \mathrm{Pa}. \tag{3.6}$$

Quando il gas è riscaldato alla nuova temperatura $T_N = 100$ °C = 373.15 K la nuova pressione, sempre usando la (3.3), è data da

$$P_N = 2.07 \times 10^5 \ \mathrm{Pa}. \tag{3.7}$$

[1] Questo corrisponde al volume di una normale bombola da cucina di 15*litri*.

Nonostante il problema richieda di esprimere le pressioni nel sistema di unità internazionale, per curiosità possiamo esprimere le pressioni (3.6) e (3.7) in atmosfere. Ricordiamo che

$$1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}. \tag{3.8}$$

Quindi, la (3.6) diventa

$$P_0 = 1.63 \text{ atm}. \tag{3.9}$$

Analogamente, la (3.7) diventa

$$P_N = 2.04 \text{ atm}. \tag{3.10}$$

3.2

Tre moli di ossigeno molecolare sono in un recipiente rigido di volume $V = 1$ m^3 alla temperatura $T = 10$ °C. Calcolare la pressione P_0 alla quale si trova il gas in queste condizioni. Il gas è poi riscaldato fino a quando la sua pressione è $P = 3P_0$: calcolare la temperatura finale del gas, T_F. Supporre che il gas si comporti come un gas perfetto. Utilizzare le unità di misura del sistema internazionale.

Soluzione. La pressione P_0 può essere calcolata tramite la (3.3),

$$P_0 = 7.06 \times 10^3 \text{ Pa}. \tag{3.11}$$

Per ottenere la (3.11) abbiamo convertito la temperatura $T = 10$ °C in Kelvin tramite la (3.4).

Nella seconda parte del problema si assume che il gas sia riscaldato a volume costante, fino a quando la sua nuova pressione è $P = 3P_0$, e si chiede la temperatura finale del gas. Per calcolarla, possiamo utilizzare nuovamente l'equazione di stato (3.1), che dà

$$T = \frac{PV}{nR}. \tag{3.12}$$

Nel caso in esame abbiamo

$$T_F = \frac{3P_0V}{nR}. \tag{3.13}$$

Sostituendo nella (3.13) i valori numerici troviamo

$$T_F = 849.45 \text{ K}. \tag{3.14}$$

Notiamo che $T_F = 3T$. Questo è naturale perché il gas è stato riscaldato a volume costante, e per questa trasformazione la pressione è proporzionale alla temperatura: se la pressione aumenta di un fattore 3 allora la temperatura aumenta dello stesso fattore.

3.3

Una mole di azoto molecolare è contenuta in un recipiente cilindrico la cui base superiore, di massa trascurabile, è libera di muoversi senza attrito. Inizialmente il gas è in equilibrio con l'ambiente esterno, con pressione $P_0 = 1$ atm e $T_0 = 20$ °C. Calcolare il volume iniziale del gas, V_0. Successivamente, il gas è riscaldato molto lentamente, in modo che per tutta la trasformazione la sua pressione possa considerarsi in equilibrio con quella esterna. Calcolare la temperatura finale del gas, T_F, sapendo che il volume finale è $V_F = 2V_0$.

Supporre che il gas si comporti come un gas perfetto. Utilizzare le unità di misura del sistema internazionale.

Soluzione. La trasformazione in questo problema è una espansione a pressione costante, in quanto si fa l'ipotesi che la pressione del gas sia sempre in equilibrio con quella esterna. In questo caso, volume e temperatura del gas sono direttamente proporzionali.

Per calcolare il volume iniziale del gas è sufficiente utilizzare l'equazione di stato dei gas perfetti (3.1), che riscriviamo in termini delle variabili iniziali come

$$P_0 V_0 = nRT_0. \tag{3.15}$$

Da questa ricaviamo il volume iniziale come

$$V_0 = \frac{nRT_0}{P_0}. \tag{3.16}$$

Prima di sostituire i valori numerici dobbiamo esprimere la pressione in Pascal utilizzando la (3.8). Troviamo

$$V_0 = 0.024 \text{ m}^3. \tag{3.17}$$

Per il calcolo della temperatura finale, possiamo utilizzare il fatto che volume e temperatura sono direttamente proporzionali per una trasformazione a pressione costante, ovvero

$$\frac{V_0}{T_0} = \frac{V_F}{T_F}, \tag{3.18}$$

da cui ricaviamo che

$$T_F = T_0 \frac{V_F}{V_0}. \tag{3.19}$$

Poiché $V_F = 2V_0$ abbiamo

$$T_F = 2T_0 = 586.3 \text{ K}. \tag{3.20}$$

Capitolo 4

Primo Principio della Termodinamica

4.1

Un blocco di un materiale solido di massa $m = 1$ g è riscaldato dalla temperatura iniziale $T_{\text{in}} = 5$ °C a quella finale $T_{\text{fin}} = 120$ °C. Calcolare il calore assorbito dal corpo durante la trasformazione e la variazione della sua energia interna, sapendo che il suo calore specifico è $c = 160$ J/Kg K. Utilizzare le unità di misura del sistema internazionale.

Soluzione. Il calore assorbito dal corpo può essere espresso come

$$Q = mc(T_{\text{fin}} - T_{\text{in}}). \tag{4.1}$$

Per calcolare il calore assorbito nelle unità del sistema internazionale dobbiamo esprimere la massa in chilogrammi,

$$m = 1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}. \tag{4.2}$$

Dovremmo anche convertire le temperature da gradi Celsius a gradi Kelvin: notiamo però che nella (4.1) entra solo la differenza tra le temperature finale e iniziale, e ricordando che Kelvin e Celsius differiscono solo per un fattore additivo, questo fattore additivo si cancella nella (4.1). Possiamo pertanto calcolare Q utilizzando le temperature in Celsius. Sostituendo i valori numerici nella (4.1) abbiamo

$$Q = 18.4 \text{ J}. \tag{4.3}$$

4.2

Un blocco di un materiale solido di massa $m = 3$ g è raffreddato dalla temperatura iniziale $T_{\text{in}} = 50$ °C a quella finale $T_{\text{fin}} = 0$ °C. Sapendo che la variazione di energia interna del corpo durante la trasformazione è $\Delta U = -33$ J, calcolarne il calore specifico. Utilizzare le unità di misura del sistema internazionale.

Soluzione. Dal Primo Principio della Termodinamica ricaviamo che la variazione di energia interna di un corpo solido, ΔU, è uguale al calore scambiato da quel corpo (4.1). Possiamo quindi scrivere

$$\Delta U = mc(T_{\text{fin}} - T_{\text{in}}), \tag{4.4}$$

da cui ricaviamo il calore specifico,

$$c = \frac{1}{m} \frac{\Delta U}{(T_{\text{fin}} - T_{\text{in}})}. \tag{4.5}$$

Sostituendo i valori numerici nella (4.5), dopo aver prestato attenzione a convertire m da grammi a chilogrammi, troviamo

$$c = 220 \text{ J/kg K}. \tag{4.6}$$

4.3

Due corpi solidi, di massa $M_1 = 1$ kg ed $M_2 = 3$ g, hanno entrambi calore specifico $c = 180$ J/Kg K. I due sono messi in contatto termico tra loro e isolati dall'ambiente esterno. Sapendo che le loro temperature iniziali sono rispettivamente $T_1 = 0$ °C e $T_2 = 35$ °C, calcolare la loro temperatura di equilibrio, T_{eq}, e il calore che il secondo corpo cede al primo. Trascurare le variazioni di volume dei due corpi dovute al raffreddamento/riscaldamento.

Soluzione. La temperatura di equilibrio di questo sistema può essere facilmente calcolata imponendo la condizione che tutto il calore ceduto dal corpo a temperatura inizialmente più alta, T_2, venga assorbito dal corpo a temperatura inizialmente più bassa, T_1. Si ottiene

$$T_{\text{eq}} = \frac{M_1 c T_1 + M_2 c T_2}{c M_1 + c M_2}. \tag{4.7}$$

Poiché il calore specifico è lo stesso per i due corpi, la (4.7) si semplifica in

$$T_{\text{eq}} = \frac{M_1 T_1 + M_2 T_2}{M_1 + M_2}. \tag{4.8}$$

Notiamo che possiamo convertire la temperatura da Celsius a Kelvin alla fine del calcolo: sostituendo nella (4.8) le temperature in Celsius, otterremo T_{eq} in Celsius.

Notando che $M_2 = 0.003$ kg, sostituendo i dati numerici nella (4.8) abbiamo

$$T_{\text{eq}} = 0.1 \text{ °C} = 273.25 \text{ K}. \tag{4.9}$$

Osserviamo che $T_{\text{eq}} \approx T_1$, come conseguenza del fatto che $M_1 \gg M_2$. Il corpo di massa M_2 ha ceduto calore a quello di massa M_1, senza che questo abbia cambiato considerevolmente la sua temperatura. In altri termini, il corpo di massa M_1 si è comportato come una sorgente isoterma di calore. Notiamo anche che essendo il calore specifico dei due corpi uguale, questo non ha alcun effetto sulla temperatura di equilibrio, la quale dipende solo dalle temperature iniziali dei due corpi e dalle loro masse.

Possiamo calcolare il calore che il corpo di massa M_2 ha ceduto all'altro tramite la nota relazione

$$Q = c M_2 (T_2 - T_{\text{eq}}). \tag{4.10}$$

Sostituendo i dati numerici troviamo

$$Q = -18.85 \text{ J}. \tag{4.11}$$

Il calore è negativo, in quanto il corpo di massa M_2 ha ceduto energia termica al corpo di massa M_1.

4.4

Una mole di azoto molecolare ($C_V = 5R/2$) è riscaldata in un recipiente a volume costante tramite un dispositivo che cede la quantità di calore $Q = 33$ J. Calcolare la variazione di energia interna del gas, e il suo aumento di temperatura.

Soluzione. La trasformazione del gas in questo problema è isocora, per cui dal Primo Principio della Termodinamica abbiamo

$$Q = \Delta U, \tag{4.12}$$

dove ΔU è la variazione di energia interna cercata e Q è il calore che il gas assorbe dalla sorgente. Poiché Q è noto, troviamo subito

$$\Delta U = 33 \text{ J}. \tag{4.13}$$

Per calcolare la variazione di temperatura, ΔT, del gas, legato alla variazione di energia interna del gas, usiamo la relazione

$$\Delta U = nC_V \Delta T, \tag{4.14}$$

dove ΔT è la variazione di temperatura del gas. Nel caso in esame dobbiamo considerare una mole di gas, con $C_V = 5R/2$, per cui

$$\Delta U = 5R\Delta T/2. \tag{4.15}$$

Da questa ricaviamo

$$\Delta T = \frac{2}{5R}\Delta U, \tag{4.16}$$

dove ΔU è data da (4.13). Sostituendo i valori numerici troviamo

$$\Delta T = 1.59 \text{ K}. \tag{4.17}$$

4.5

Un recipiente rigido di volume $V = 1$ m^3 contiene una mole di ossigeno molecolare ($C_V = 5R/2$) alla temperatura iniziale $T_{\text{in}} = 20$ °C. Un dispositivo riscalda il gas mantenendone il volume costante fino alla temperatura finale $T_{\text{fin}} = 40$ °C. Calcolare il calore assorbito dal gas durante la trasformazione, la variazione di energia interna e la pressione finale del gas.

Soluzione. Il processo descritto nel problema è un riscaldamento del gas a volume costante. Di conseguenza, il calore assorbito è dato da

$$Q = C_V \Delta T, \tag{4.18}$$

dove abbiamo usato il fatto che il numero di moli di gas è $n = 1$. La variazione di temperatura è $\Delta T = T_{\text{fin}} - T_{\text{in}} = 20$ °C= 20 K. Abbiamo quindi

$$Q = 415.7 \text{ J}. \tag{4.19}$$

Essendo la trasformazione in esame isocora, il lavoro di espansione è nullo, per cui dal Primo Principio della Termodinamica abbiamo $Q = \Delta U$, e dalla (4.19) troviamo

$$\Delta U = 415.7 \text{ J}. \tag{4.20}$$

La pressione finale del gas può essere calcolata con l'equazione di stato dei gas perfetti scritta per una mole di gas,

$$P_{\text{fin}} = \frac{RT_{\text{fin}}}{V}. \tag{4.21}$$

Usando $T_{\text{fin}} = 313.15$ K e il volume dato dal problema troviamo

$$P_{\text{fin}} = 2.6 \times 10^3 \text{ Pa}. \tag{4.22}$$

4.6

Una mole di gas perfetto monoatomico ($C_V = 3R/2$), contenuto in un recipiente munito di pistone mobile che può scorrere orizzontalmente senza attrito, ha inizialmente volume $V_{\text{in}} = 1$ dm^3 e pressione $P_{\text{in}} = 1$ atm. Il gas scambia calore con una sorgente isoterma e si espande isotermicamente fino a quando la pressione raggiunge il valore $P_{\text{fin}} = 0.3$ atm. Calcolare la temperatura del gas, il volume finale del gas, il lavoro e il calore scambiati durante la trasformazione e la variazione di energia interna del gas.

Soluzione. La temperatura del gas può essere calcolata utilizzando i dati sullo stato iniziale del gas, e l'equazione di stato riscritta per una mole di gas nella forma

$$T = \frac{P_{\text{in}}V_{\text{in}}}{R}. \tag{4.23}$$

Ricordando che

$$1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad 1 \text{ dm}^3 = 0.001 \text{ m}^3, \tag{4.24}$$

abbiamo dalla (4.23)

$$T = 12.18 \text{ K}. \tag{4.25}$$

Il volume finale del gas può essere calcolato immediatamente ricordando che per una trasformazione isoterma di un gas perfetto, pressione e volume sono inversamente proporzionali,

$$P_{\text{in}}V_{\text{in}} = P_{\text{fin}}V_{\text{fin}}, \tag{4.26}$$

da cui

$$V_{\text{fin}} = \frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{fin}}}V_{\text{in}}. \tag{4.27}$$

Sostituendo i valori numerici troviamo

$$V_{\text{fin}} = 3.33V_{\text{in}} = 3.33 \text{ dm}^3 = 3.33 \times 10^{-3} \text{ m}^3. \tag{4.28}$$

Il lavoro di espansione in una trasformazione isoterma di una mole di gas perfetto è dato da

$$L = RT \log(V_{\text{fin}}/V_{\text{in}}). \tag{4.29}$$

Dalla (4.28) notiamo che $V_{\text{fin}}/V_{\text{in}} = 3.33$, da cui

$$L = 121.82 \text{ J}. \tag{4.30}$$

Durante la trasformazione isoterma del gas perfetto la sua energia interna non varia, per cui $\Delta U = 0$. Dal Primo Principio della Termodinamica ricaviamo dunque $Q = L$, e il calore assorbito dal gas, tenendo conto della (4.30), è dato da

$$Q = 121.82 \text{ J}. \tag{4.31}$$

Concludiamo questo problema osservando che nella trasformazione isoterma del gas, tutto il calore assorbito è convertito in lavoro di espansione.

4.7

Una mole di gas perfetto monoatomico ($C_V = 3R/2$), contenuto in un recipiente munito di pistone mobile che può scorrere orizzontalmente senza attrito, ha inizialmente volume $V_{\rm in}$=1 dm^3 ed è in equilibrio meccanico con l'ambiente esterno alla pressione $P_0 = 1$ atm. Il gas si espande fino al volume finale $V_{\rm fin} = 3V_{\rm in}$. Calcolare le temperature iniziale e finale del gas, il lavoro e il calore scambiati durante la trasformazione e la variazione di energia interna del gas.

Soluzione. Il gas è soggetto ad una espansione isobara. La temperatura iniziale può essere calcolata tramite l'equazione di stato per una mode di gas,

$$T_{\rm in} = \frac{P_0 V_{\rm in}}{R}. \tag{4.32}$$

Convertendo la pressione in Pascal e il volume in m^3 come nella (4.24), e sostituendo i dati numerici del problema nella (4.32), troviamo

$$T_{\rm in} = 12.18 \text{ K}. \tag{4.33}$$

La temperatura finale del gas può essere calcolata osservando che in una trasformazione isobara il volume del gas è direttamente proporzionale alla sua temperatura, quindi

$$\frac{V_{\rm in}}{T_{\rm in}} = \frac{V_{\rm fin}}{T_{\rm fin}}, \tag{4.34}$$

da cui

$$T_{\rm fin} = \frac{V_{\rm fin}}{V_{\rm in}} T_{\rm in}. \tag{4.35}$$

Osservando che $V_{\rm fin}/V_{\rm in} = 3$ troviamo

$$T_{\rm fin} = 3T_{\rm in} = 36.54 \text{ K}. \tag{4.36}$$

Il lavoro di espansione in una trasformazione isobara alla pressione P_0 è dato da

$$L = P_0 \Delta V = P_0(V_{\rm fin} - V_{\rm in}), \tag{4.37}$$

e sostituendo i dati numerici abbiamo

$$L = 202.6 \text{ J}. \tag{4.38}$$

Il volume finale è maggiore di quello iniziale, per cui è il sistema a compiere lavoro.

La variazione di energia interna di una mole di gas perfetto è data da

$$\Delta U = C_V \Delta T = C_V(T_{\rm fin} - T_{\rm in}). \tag{4.39}$$

Dalla (4.36) abbiamo $T_{\rm fin} - T_{\rm in} = 2T_{\rm in} = 24.36$ K. Per cui, osservando anche che per un gas monoatomico $C_V = 3R/2$,

$$\Delta U = 303.8 \text{ K}. \tag{4.40}$$

Infine, il calore scambiato può essere calcolato tramite il Primo Principio della Termodinamica, $Q = L + \Delta U$, ovvero dalle (4.38) e (4.40)

$$Q = 506.4 \text{ J}. \tag{4.41}$$

Poiché $Q > 0$ il calore è assorbito dal sistema. Il significato fisico dei risultati in questo problema è che il gas assorbe calore dall'ambiente esterno: poiché il gas è in equilibrio meccanico con l'ambiente esterno, la sua pressione è uguale a quella esterna, P_0. Il calore assorbito viene dunque utilizzato dal sistema sia per aumentare la sua energia interna, che per produrre lavoro di espansione. Notiamo che non tutto il calore assorbito è convertito in lavoro, a differenza di quanto accade in una espansione isoterma come esaminato nel problema 4.6.

Possiamo controllare che Q nella (4.41) è in accordo con quello che otterremmo utilizzando la nota relazione per una trasformazione isobara, che per una mole di gas si scrive

$$Q = C_P \Delta T, \tag{4.42}$$

con $C_P = C_V + R$. Abbiamo quindi

$$Q = (C_V + R)\Delta T = (C_V + R)(T_{\text{fin}} - T_{\text{in}}). \tag{4.43}$$

Dalla (4.36) abbiamo $T_{\text{fin}} - T_{\text{in}} = 2T_{\text{in}}$ per cui

$$Q = 2(C_V + R)T_{\text{in}} = \frac{5R}{2} \times 2T_{\text{in}}. \tag{4.44}$$

Sostituendo i valori numerici troviamo

$$Q = 506.4 \text{ J}, \tag{4.45}$$

in accordo con la (4.41).

4.8

Una mole di gas perfetto monoatomico ($C_V = 3R/2$) contenuto in un recipiente, occupa inizialmente il volume $V_{\text{in}} = 1 \text{ dm}^3$ alla pressione $P_{\text{in}} = 1$ atm. Calcolare la temperatura iniziale del gas. Il gas è poi compresso in maniera adiabatica fino a quando la sua pressione raddoppia, $P_{\text{fin}} = 2P_{\text{in}}$. Calcolare il volume occupato dal gas e la sua temperatura nello stato finale. Calcolare inoltre la variazione di energia interna del gas, e stabilire se il lavoro è fatto dall'ambiente sul sistema o viceversa.

Soluzione. La temperatura iniziale di una mole di gas può essere calcolata tramite l'equazione di stato come nella (4.32),

$$T_{\text{in}} = \frac{P_{\text{in}} V_{\text{in}}}{R}. \tag{4.46}$$

Ricordando la (4.24) e sostituendo i dati numerici del problema nella (4.46) troviamo

$$T_{\text{in}} = 12.18 \text{ K}. \tag{4.47}$$

Per calcolare il volume finale, V_{fin}, ricordiamo che per una trasformazione adiabatica di un gas perfetto

$$PV^\gamma = \text{ costante}, \tag{4.48}$$

con $\gamma = C_P/C_V$. Nel caso del gas monoatomico del problema in esame, ricordando anche che $C_P = C_V + R$,

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1 + \frac{R}{C_V} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} = 1.67. \tag{4.49}$$

Abbiamo quindi

$$P_{\text{fin}} V_{\text{fin}}^{1.67} = P_{\text{in}} V_{\text{in}}^{1.67}, \tag{4.50}$$

ed essendo $P_{\text{fin}} = 2P_{\text{in}}$

$$V_{\text{fin}}^{1.67} = \frac{V_{\text{in}}^{1.67}}{2}. \tag{4.51}$$

Per calcolare V_{fin} dalla (4.51) prendiamo il logaritmo naturale di ambo i membri,

$$\log \left(\frac{V_{\text{fin}}}{V_{\text{in}}} \right)^{1.67} = \log(1/2) = -\log 2 = -0.69. \tag{4.52}$$

Usando la nota proprietà dei logaritmi

$$\log a^b = b \log a \tag{4.53}$$

possiamo riscrivere la (4.52) come

$$1.67 \log \frac{V_{\text{fin}}}{V_{\text{in}}} = -0.69, \tag{4.54}$$

ovvero

$$\log \frac{V_{\text{fin}}}{V_{\text{in}}} = -0.42, \tag{4.55}$$

da cui infine

$$V_{\text{fin}} = V_{\text{in}} e^{-0.42}. \tag{4.56}$$

Sostituendo in questa relazione il valore numerico del volume iniziale troviamo

$$V_{\text{fin}} = 6.6 \times 10^{-4} \text{ m}^3. \tag{4.57}$$

Notiamo che $V_{\text{fin}} < V_{\text{in}}$ in accordo con l'informazione che la trasformazione del gas è una compressione adiabatica.

Per calcolare la temperatura finale del gas utilizziamo nuovamente l'equazione di stato, questa volta scritta con i parametri di stato finali, ovvero

$$T_{\text{fin}} = \frac{P_{\text{fin}} V_{\text{fin}}}{R}. \tag{4.58}$$

Sostituendo in questa i valori numerici troviamo

$$T_{\text{fin}} = 16.01 \text{ K}. \tag{4.59}$$

Notiamo che $T_{\text{fin}} > T_{\text{in}}$, ovvero il gas si riscalda per effetto della compressione adiabatica. Interpreteremo questo risultato subito dopo aver calcolato lavoro e variazione di energia interna del gas.

La variazione di energia interna dovuta alla compressione è data dalla usuale relazione

$$\Delta U = C_V \Delta T = C_V (T_{\text{fin}} - T_{\text{in}}). \tag{4.60}$$

Dai risultati calcolati sopra deduciamo che $\Delta T = 3.83$ K, ed essendo il gas monoatomico $C_V = 3R/2$, da cui

$$\Delta U = 47.76 \text{ J}. \tag{4.61}$$

Inoltre, essendo la trasformazione adiabatica abbiamo $Q = 0$ da cui $\Delta U = -L$ e quindi

$$L = -47.76 \text{ J}. \tag{4.62}$$

Notiamo che $L < 0$, per cui è l'esterno che compie lavoro sul sistema.

Possiamo ora interpretare i risultati ottenuti nel problema. L'ambiente esterno compie lavoro sul gas durante la compressione adiabatica: non essendoci scambio di calore, tutto il lavoro esterno è convertito in energia interna del gas. Poiché il lavoro è compiuto dall'esterno, l'energia interna del gas aumenta, e questo si traduce in un aumento della sua temperatura.

Concludiamo questo problema notando che se invece di considerare una compressione avessimo considerato un'espansione, sarebbe stato il gas a compiere lavoro a spese della sua energia interna, per cui la sua energia interna sarebbe diminuita e di conseguenza sarebbe diminuita anche la sua temperatura.

Invitiamo infine a non confondere la trasformazione studiata in questo problema con l'espansione libera dell'esperimento di Joule: in quella, infatti, anche il lavoro di espansione è nullo in quanto le pareti sono rigide e quindi le forze di pressione non spostano, in media, il loro punto di applicazione e l'energia interna del gas non cambia. Nelle trasformazioni analizzate in questo problema invece, compressione ed espansione non sono libere perché le molecole di gas esercitano una pressione sulle pareti del recipiente, pistone incluso, e il pistone si sposta, per cui le forze di pressioni spostano il loro punto di applicazione. Di conseguenza, mentre l'espansione libera adiabatica non comporta una variazione di temperatura del gas ideale, quella analizzata nel problema comporterebbe un raffreddamento del gas.

4.9

In questo problema esaminiamo un'applicazione dell'espansione adiabatica di un gas perfetto, ovvero il calcolo del gradiente adiabatico della temperatura dell'atmosfera. Trascuriamo fenomeni di condensazione, e trattiamo l'aria come un gas perfetto.

Soluzione. Con buona approssimazione, possiamo supporre che l'aria che si espande

$$dP = -\rho g dh, \tag{4.63}$$

dove $\rho = m/V$ denota la densità di una massa m di aria che occupa il volume V.

$$\lim_{m\to 0} \langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\pi\rho(\lambda = 0) \tag{4.64}$$

$$\gamma_5 D \;=\; \gamma_5\gamma^\mu \Big(\partial_\mu \;-\; i\, g\, A_\mu(x)\Big). \tag{4.65}$$

$$\gamma_5 D\psi_0(x) = \lambda\psi_0(x) \tag{4.66}$$

$$\gamma_5 D\psi_0(x) = 0 \tag{4.67}$$

$$\rho(\lambda) = \lim_{V\to\infty} \frac{1}{V} \left\langle \sum_k \delta(\lambda - \lambda_k) \right\rangle_A \tag{4.68}$$

4.10

In questo problema esaminiamo un'applicazione dell'espansione isoterma di un gas perfetto, ovvero il calcolo della pressione atmosferica in funzione dell'altezza sul livello del mare.

Capitolo 5

Secondo Principio della Termodinamica

5.1

Una macchina termica a gas perfetto lavora con un ciclo di Carnot alle temperature $T_C = 350$ K e $T_F = 150$ K. Calcolare il rendimento della macchina.

Soluzione. Il rendimento di una macchina di Carnot è dato da

$$\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C}. \tag{5.1}$$

Sostituendo i dati del problema troviamo

$$\eta = 0.57. \tag{5.2}$$

5.2

Una macchina termica reversibile con due sorgenti assorbe la quantità di calore $Q_C = 350$ J dalla sorgente calda e cede la quantità di calore $Q_F = 120$ J alla sorgente fredda. Calcolare il rendimento della macchina termica, e il rapporto T_F/T_C tra la temperatura della sorgente fredda e quella della sorgente calda.

Soluzione. Il rendimento di una macchina termica che lavora con due sorgenti è

$$\eta = 1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|}. \tag{5.3}$$

Dai dati del problema ricaviamo

$$\eta = 0.66. \tag{5.4}$$

Per calcolare il rapporto delle temperature delle sorgenti fredda e calda, osserviamo che per il teorema di Carnot abbiamo

$$1 - \frac{|Q_F|}{|Q_C|} = 1 - \frac{T_F}{T_C}, \tag{5.5}$$

in quanto la macchina è reversibile. Per cui possiamo scrivere, per il rapporto cercato,

$$\frac{T_F}{T_C} = \frac{|Q_F|}{|Q_C|}. \tag{5.6}$$

Sostituendo i dati numerici del problema troviamo

$$\frac{T_F}{T_C} = 0.34. \tag{5.7}$$

5.3

Due corpi solidi, di massa $M_1 = M_2 = 25$ g, hanno entrambi calore specifico $c = 180$ J/Kg K. I due sono messi in contatto termico tra loro e isolati dall'ambiente esterno. Sapendo che le loro temperature iniziali sono rispettivamente $T_1 = 273$ K e $T_2 = 373$ K, calcolare la loro temperatura di equilibrio, $T_{\rm eq}$, e la variazione di entropia legata al trasferimento di calore dal corpo caldo a quello freddo. Trascurare le variazioni di volume dei due corpi dovute al raffreddamento/riscaldamento.

Soluzione. Abbiamo esaminato un problema simile in 4.3: in particolare, la temperatura di equilibrio tra due corpi di ugual calore specifico è data dalla (4.8); nel caso in esame $M_1 = M_2$, per cui la (4.8) diventa

$$T_{\rm eq} = \frac{T_1 + T_2}{2}. \tag{5.8}$$

Ovvero, se i due corpi hanno stessa massa e stesso calore specifico, la temperatura di equilibrio è data dalla media aritmetica delle temperature iniziali dei due corpi, indipendentemente dalle loro masse e dai calori specifici. Nel caso in esame, sostituendo i dati numerici del problema, troviamo

$$T_{\rm eq} = 323 \text{ K}. \tag{5.9}$$

Per calcolare la variazione di entropia legata al trasferimento di calore tra i due corpi, ricordiamo che per un corpo solido di massa m e calore specifico c, la variazione di entropia per il cambiamento di temperatura da $T_{\rm in}$ a $T_{\rm fin}$ è con buona approssimazione data da

$$\Delta S = mc \log \frac{T_{\rm fin}}{T_{\rm in}}. \tag{5.10}$$

Di conseguenza, la variazione di entropia nel problema in esame è data da

$$\Delta S = mc \log \frac{T_{\rm eq}}{T_1} + mc \log \frac{T_{\rm eq}}{T_2}; \tag{5.11}$$

il primo addendo nel secondo membro della (5.11) rappresenta la variazione di entropia dovuta al cambiamento di temperatura da T_1 a $T_{\rm eq}$ del primo corpo, mentre il secondo addendo rappresenta l'analoga variazione di entropia del secondo corpo. Usando le proprietà dei logaritmi, insieme alla (5.9), abbiamo

$$\Delta S = mc \log \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1T_2}. \tag{5.12}$$

Sostituendo i valori numerici troviamo

$$\Delta S = 0.11 \text{ J/K}. \tag{5.13}$$

Notiamo che $\Delta S > 0$, ed essendo il sistema isolato, questo è sufficiente a concludere che la trasformazione è spontanea. Come è facile verificare con un conto analogo a quello che ha condotto alla (5.13), per il processo inverso, ovvero per il trasferimento di calore tra due corpi inizialmente in equilibrio termico alla temperatura $T_{\rm eq}$ e che nello stato finale abbiano le temperature T_1 e T_2, si ha $\Delta S < 0$. Possiamo quindi concludere che in un sistema isolato questo secondo processo non è spontaneo, nonostante non violi la conservazione dell'energia.

5.4

Una mole di gas perfetto monoatomico ($C_V = 3R/2$) si espande in maniera non statica tra due stati di equilibrio: lo stato iniziale è caratterizzato da pressione $P_1 = 1$ atm, $T_1 = 300$ K, mentre in quello finale $P_2 = 0.1$ atm e $T_2 = T_1$. Calcolare i volumi iniziale e finale del gas e la variazione di entropia associata alla trasformazione termodinamica.

Soluzione. La trasformazione considerata nel problema è un'espansione irreversibile tra due stati di equilibrio termodinamico. Di conseguenza, i parametri di stato negli stati iniziale e finale sono ben definiti e possono essere calcolati tramite l'equazione di stato dei gas perfetti. In particolare, il volume iniziale, V_1, è dato da

$$V_1 = \frac{RT_1}{P_1}. \tag{5.14}$$

Sostituendo i dati numerici del problema troviamo

$$V_1 = 2.5 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^3. \tag{5.15}$$

Inoltre, per calcolare il volume finale possiamo applicare la relazione

$$P_1V_1 = P_2V_2, \tag{5.16}$$

che è conseguenza diretta dell'equazione di stato, la quale implica

$$V_2 = V_1\frac{P_1}{P_2}. \tag{5.17}$$

Dai dati del problema ricaviamo $P_1/P_2 = 10$, per cui

$$V_2 = 10V_1 = 0.25\ \mathrm{m}^3. \tag{5.18}$$

Per calcolare la variazione di entropia legata all'espansione del gas, dobbiamo prima scegliere una trasformazione (o un insieme di trasformazioni) reversibile (reversibili), che parta da (P_1, V_1) e termini in (P_2, V_2). Notiamo che $T_1 = T_2$, per cui la scelta più ovvia è quella di una isoterma di un gas perfetto alla temperatura T_1. La variazione di entropia, ΔS, di una mole di gas perfetto è

$$\Delta S = C_V \log\frac{T_2}{T_1} + R\log\frac{V_2}{V_1}, \tag{5.19}$$

dove V_1, V_2 denotano i volumi iniziale e finale del gas, mentre T_1 e T_2 sono le temperature iniziale e finale del gas. Nell'isoterma $T_1 = T_2$, per cui

$$\Delta S = R\log\frac{V_2}{V_1}. \tag{5.20}$$

Dalla (5.18) ricaviamo

$$\Delta S = R\log 10 = 19.14\ \mathrm{J/K}. \tag{5.21}$$

Notiamo che $\Delta S > 0$ come conseguenza di $V_2 > V_1$, per cui l'espansione considerata è spontanea. Ad esempio, la trasformazione irreversibile analizzata nel problema potrebbe essere realizzata prendendo un gas rarefatto, in contatto termico con una sorgente isoterma alla temperatura T_1 e in equilibrio meccanico con l'esterno alla pressione P_1, e diminuendo improvvisamente la pressione esterna al valore P_2. Come risultato dell'improvvisa variazione di pressione, il gas si espanderà fino a quando la sua pressione non torni in equilibrio con quella esterna. La trasformazione è improvvisa, per cui gli stati intermedi non sono di equilibrio: ad esempio, la pressione del gas non è uniforme, e di conseguenza non tutti i parametri di stato del gas sono ben definiti. D'altra parte, la variazione di entropia per questa trasformazione è ben definita ed è calcolabile scegliendo una qualunque trasformazione reversibile che connetta gli stati iniziale e finale di equilibrio, come mostrato nel problema.

Dalla (5.20) notiamo anche che $\Delta S \neq 0$ per una espansione isoterma di un gas perfetto, nonostante sia $\Delta U = 0$: si ha quindi una variazione di entropia del sistema anche se la sua energia interna non cambia. Nella trasformazione in esame, questo accade perché il sistema assorbe calore e lo converte integralmente in lavoro di espansione[1], per cui la sua energia interna rimane costante. Questa osservazione è utile a sradicare un errore grossolano che si incontra spesso nella divulgazione scientifica di pessima qualità, ovvero che energia interna ed entropia sono equivalenti: se queste due quantità fossero davvero equivalenti, non esisterebbe una trasformazione nella quale l'una è zero e l'altra no.

5.5

Nel problema 5.4 abbiamo calcolato la variazione di entropia di un gas per una particolare trasformazione irreversibile, ricavando la (5.20). Per arrivare alla (5.20) abbiamo utilizzato una trasformazione reversibile isoterma, dopo aver notato che le temperature iniziale e finale del gas sono le stesse.

La scelta della trasformazione isoterma reversibile nel problema 5.4 è indubbiamente la più naturale, ma non è l'unica possibile. Infatti, possiamo scegliere un qualunque set di trasformazioni reversibili per calcolare la variazione di entropia del gas, essendo l'entropia una funzione di stato e pertanto dipende solo dagli stati iniziale e finale del gas e non dalla trasformazione che connette i due stati.

Dimostriamo concretamente, analiticamente, come ottenere nuovamente la (5.20) usando un altro set di trasformazioni. In particolare, consideriamo le due seguenti trasformazioni in sequenza:

1. isocora reversibile, dallo stato (P_1, V_1, T_1) allo stato (P_2, V_1, T_3);
2. isobara reversibile, dallo stato (P_2, V_1, T_3) allo stato (P_2, V_2, T_1).

Per la trasformazione 1. abbiamo

$$\Delta S_1 = C_V \log \frac{T_3}{T_1}, \tag{5.22}$$

mentre per la trasformazione 2. abbiamo

$$\Delta S_2 = C_V \log \frac{T_1}{T_3} + R \log \frac{V_2}{V_1}. \tag{5.23}$$

Pertanto

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = R \log \frac{V_2}{V_1}, \tag{5.24}$$

in accordo con la (5.20).

[1]Notiamo che questa trasformazione non è in disaccordo con il Secondo Principio della Termodinamica, in quanto il processo considerato non è ciclico.

5.6

Una mole di gas perfetto biatomico ($C_V = 5R/2$) è contenuta in un recipiente a pareti rigide. Inizialmente lo stato termodinamico del gas è caratterizzato dalla pressione $P_1 = 1$ atm e temperatura $T_1 = 250$ K. Il gas è poi riscaldato fino a quando la sua pressione è $P_2 = 1.5P_1$. Calcolare la temperatura finale del gas e la variazione di entropia associata alla trasformazione termodinamica.

Soluzione. La trasformazione del gas è una isocora, per cui pressione e temperatura sono direttamente proporzionali tra loro,

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}, \tag{5.25}$$

da cui

$$T_2 = \frac{P_2}{P_1}T_1. \tag{5.26}$$

I dati del problema implicano che $P_2/P_1 = 1.5$, per cui

$$T_2 = 1.5T_1 = 375 \text{ K}. \tag{5.27}$$

Per calcolare la variazione di entropia, osserviamo dalla (5.19) che per $V_1 = V_2$ (trasformazione isocora)

$$\Delta S = C_V \log \frac{T_2}{T_1}, \tag{5.28}$$

Dalla (5.27) leggiamo che $T_2/T_1 = 1.5$, da cui

$$\Delta S = C_V \log 1.5 = 8.43 \text{ J/K}. \tag{5.29}$$

Notiamo che $\Delta S > 0$ in quanto $T_2 > T_1$: il riscaldamento del gas ne aumenta l'entropia.

5.7

Un gas perfetto monoatomico ($C_V = 3R/2$), contenuto in un recipiente dotato di pistone mobile di area A, subisce un'espansione adiabatica irreversibile. Lo stato iniziale del gas è $V_1 = 1$ m^3, $P_1 = 3$ atm e $T_1 = 300$ K. Il volume finale del gas è $V_2 = 2$ m^3. L'espansione avviene mantenendo la pressione esterna, $P_{\text{ext}} = 1$ atm, costante. Calcolare il numero di moli del gas, la temperatura finale del gas, la variazione di entropia di gas e ambiente legate alla trasformazione.

Soluzione. Cominciamo con il calcolo del numero di moli, n, di gas. Lo stato iniziale del gas è uno stato di equilibrio, del quale conosciamo pressione, volume e temperatura, per cui possiamo usare l'equazione di stato dei gas perfetti per calcolare n, ovvero

$$n = \frac{P_1V_1}{RT_1} \approx 122 \text{ moli}. \tag{5.30}$$

Passiamo ora al calcolo della temperatura finale del gas, T_2. In questo problema, analizziamo un'espansione adiabatica irreversibile. Poiché la trasformazione non è quasi-statica, non possiamo utilizzare le leggi per le adiabatiche derivabili in condizioni di equilibrio (come quelle viste nel Problema 4.8) per il calcolo della temperatura finale.

In un processo irreversibile, infatti, il gas non si trova in uno stato di equilibrio a ogni istante: pressione, volume e temperatura non sono uniformi né ben definiti in tutto il gas, e non è quindi possibile descrivere il sistema mediante la semplice equazione di stato dei gas perfetti lungo l'intera trasformazione.

Per il calcolo di T_2 possiamo però utilizzare il Primo Principio della Termodinamica per una trasformazione adiabatica,

$$U_2 - U_1 = -L, \tag{5.31}$$

dove L è il lavoro di espansione del gas. Infatti, anche se la trasformazione è irreversibile, gli stati iniziale e finale del gas sono di equilibrio, e la variazione di energia interna non dipende dal tipo di trasformazione che connette i due stati. Abbiamo quindi, dalla (5.31),

$$nC_V(T_2 - T_1) = -L, \tag{5.32}$$

ovvero

$$T_2 = T_1 - \frac{L}{nC_V}. \tag{5.33}$$

Dobbiamo ora specificare il lavoro di espansione del gas. Notiamo che del gas conosciamo solo la pressione iniziale, e non abbiamo, in particolare, alcuna informazione sulla pressione finale del gas. Possiamo però calcolare comunque il lavoro di espansione del gas in questa trasformazione irreversibile. Infatti, sappiamo che la pressione esterna è costante, per cui possiamo calcolare il lavoro che le forze esterne, L_{ext}, compiono sul sistema; L_{ext} è dovuto allo spostamento del punto di applicazione delle forze esterna sul pistone mobile, che si muove durante l'espansione. Per il terzo principio della dinamica, $L = -L_{\text{ext}}$, in quanto se l'ambiente esterno esercita una forza $\vec{F}_{\text{ext}}$ sul sistema (in particolare, sul pistone), la forza che il sistema esercita sull'ambiente esterno è $\vec{F} = -\vec{F}_{\text{ext}}$.

Se il pistone si sposta di una quantità Δh contro la pressione esterna costante, il lavoro che l'ambiente compie è

$$L_{\text{ext}} = -F_{\text{ext}}\Delta h = -P_{\text{ext}}A\Delta h, \tag{5.34}$$

dove il segno tiene conto del fatto che la forza esterna ha verso opposto a quello dello spostamento del pistone. Poiché

$$A\Delta h = V_2 - V_1, \tag{5.35}$$

abbiamo

$$L_{\text{ext}} = -P_{\text{ext}}(V_2 - V_1), \tag{5.36}$$

da cui

$$L = P_{\text{ext}}(V_2 - V_1). \tag{5.37}$$

Quindi, dalla (5.33) ricaviamo la temperatura finale del gas,

$$T_2 = T_1 - \frac{P_{\text{ext}}(V_2 - V_1)}{nC_V} \approx 233 \text{ K}. \tag{5.38}$$

Possiamo adesso calcolare la variazione di entropia del gas legata all'espansione,

$$\Delta S_{\text{sistema}} = nC_V \log\frac{T_2}{T_1} + nR\log\frac{V_2}{V_1}. \tag{5.39}$$

Sostituendo i dati troviamo

$$\Delta S_{\text{sistema}} \approx 320 \text{ J/K}. \tag{5.40}$$

Infine, $\Delta S_{\text{ambiente}} = 0$ in quanto il sistema non scambia calore con l'ambiente esterno. Questa osservazione risponde all'ultima richiesta del problema.

Notiamo che se la trasformazione del gas fosse stata una adiabatica *reversibile*, avremmo potuto calcolare la temperatura finale del gas usando la legge

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2^{\text{rev}} V_2^{\gamma-1}, \tag{5.41}$$

con $\gamma = C_P/C_V = 1.67$. Dalla (5.41) abbiamo

$$T_2^{\text{rev}} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1 = 189 \text{ K}. \tag{5.42}$$

Troviamo che $T_2^{\text{rev}} < T_2$: la temperatura del gas che si espande adiabaticamente in maniera irreversibile è più alta di quella che si avrebbe se il gas si espandesse in modo reversibile.

Inoltre, se la trasformazione fosse reversibile dovremmo trovare $\Delta S_{\text{sistema}} = 0$, come si deduce facilmente dalla definizione di entropia. Possiamo verificare questo usando direttamente le (5.39), e (5.41), che danno

$$\begin{aligned}
\Delta S_{\text{sistema}} &= nC_V \log\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} + nR\log\frac{V_2}{V_1} \\
&= nC_V(\gamma-1)\log\frac{V_1}{V_2} + nR\log\frac{V_2}{V_1} \\
&= n(C_P - C_V)\log\frac{V_1}{V_2} + nR\log\frac{V_2}{V_1} \\
&= nR\log\frac{V_1}{V_2} + nR\log\frac{V_2}{V_1} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{5.43}$$

dove abbiamo usato $C_P = C_V + R$.

Come commento finale, notiamo che la pressione del gas nello stato finale è diversa dalla pressione che il gas avrebbe se fosse in equilibrio con la pressione esterna. Infatti, applicando l'equazione di stato dei gas perfetti per lo stato finale, abbiamo

$$P_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = 1.16 \text{ atm}. \tag{5.44}$$

Quindi $P_2 > P_{\text{ext}}$.

Bibliografia

[1] R. A. Serway, J. W. Jewett, *Fondamenti di Fisica.* Edises (2022). ISBN-13: 978-8836230730.

[2] C. Mencuccini, V. Silvestrini, *Fisica. Meccanica e Termodinamica.* Casa Editrice Ambrosiana (2016). ISBN-13: 978-8808186492.

[3] U. Gasparini, M. Margoni, F. Simonetto, *Fisica. Meccanica e Termodinamica.* Piccin-Nuova Libraria (2019). ISBN-13: 978-8829929726.

[4] G. Vannini, W. E. Gettys, *Gettys fisica. Meccanica, termodinamica (Vol. 1).* McGraw-Hill Education; 5° edizione (2015). ISBN-13: 978-8838668838.

[5] D. Sette, M. Bertolotti, A. Alippi, *Lezioni di Fisica 1.* Zanichelli (2021). ISBN-13: 978-8808420206.