UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Intelligenza Artificiale and Data Analytics

SISTEMI DINAMICI

“Conigli contro Pecore”

Alberto Facchin

Luglio 2023

TESTO TRACCIA

Conigli contro pecore:

Si consideri il sistema dinamico

$\dot{x} = x(3 - ax - by)$,

$\dot{y} = y(2 - x - y)$.

che rappresenta la competizione per le stesse risorse di una popolazione di conigli (x) e di pecore (y). $a > 0$ è l'inverso della capacità portante dell'ambiente per i conigli e $b > 0$ il coefficiente di competizione dei conigli con le pecore. In particolare si consideri il caso $a = 2$ e $b = 1$.

- Determinare i punti fissi e studiarne la stabilità.
- Tracciare le isocline.
- Studiare numericamente il campo vettoriale.
- Linearizzare il flusso intorno ai punti fissi e tracciare numericamente alcune orbite intorno ai punti fissi. Individuare le varietà lineari stabile e instabile vicino ai punti fissi.
- Studiare numericamente l'estensione non lineare delle varietà stabili e instabili.

Usando il codice numerico, si studi cosa succede al variare di a e di b nell'intervallo $1 < a < 3$, $1 < b < 3$.

PUNTI FISSI E STABILITÀ

Si può notare come il nostro sistema siano due ODE non lineari di primo ordine in cui in ognuna compare sia la variabile x che la variabile y. Per trovare i punti fissi del sistema è quindi necessario fissare $\dot{x} = \dot{y} = 0$, e trovare i valori di x e y che soddisfino tale condizione.

Così facendo, presi **a = 2** e **b = 1**, si individuano i seguenti punti fissi:

$(0, 0), (0, 2), (1, 1), (\frac{3}{2}, 0)$

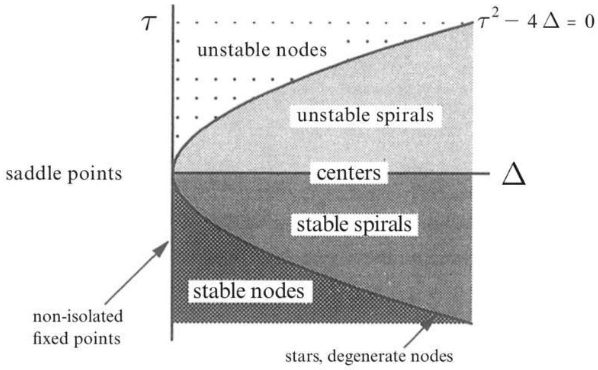
Per determinare la stabilità dei punti si può utilizzare il metodo della linearizzazione, ovvero il processo utilizzato in un'equazione differenziale per verificare la stabilità delle traiettorie attorno ai punti fissi data una piccola perturbazione. Si procede dunque con la costruzione della matrice Jacobiana, contenente le derivate parziali rispetto ad x e y:

- $f(x, y) = x(3 - ax - by)$
- $g(x, y) = y(2 - x - y)$

Si ottiene quindi una matrice così composta:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x + 3 - y & -x \\ -y & -2y + 2 - x \end{pmatrix}$$

Procediamo ora a calcolare la matrice Jacobiana in tutti i punti fissi, calcolando il valore delle tracce e determinanti utilizzando il diagramma della classificazione dei punti.



Analisi punto (0, 0):	Analisi punto (1, 1):

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$(\tau = 5, \Delta = 6)$

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$

$\mathcal{V}_1 = (1, 0), \mathcal{V}_2 = (0, 1)$

(0, 0) è un nodo instabile

$$J_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$(\tau = -3, \Delta = 1)$

$\lambda_1 = \frac{-\sqrt{5}-3}{2}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$

$\mathcal{V}_1 = (\frac{\sqrt{5}+1}{2}, 1), \mathcal{V}_2 = (\frac{-\sqrt{5}+1}{2}, 1)$

(1, 1) è un nodo stabile

Analisi punto (0, 2):

$$J_{(0,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(τ = -1, Δ = -2)

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$

$\mathcal{V}_1 = (1, -\frac{2}{3}), \mathcal{V}_2 = (0, 1)$

(0, 2) è un punto di sella

Analisi punto ($\frac{3}{2}$, 0):

$$J_{(\frac{3}{2},0)} = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

($\tau = -\frac{5}{2}$, $\Delta = -\frac{3}{2}$)

$\lambda_1 = -3, \ \lambda_2 = \frac{1}{2}$

$\mathcal{V}_1 = (1, 0), \mathcal{V}_2 = (-\frac{3}{7}, 1)$

($\frac{3}{2}$, 0) è un punto di sella

ISOCLINE

Trattandosi di un sistema di equazioni differenziali in cui si ha come scopo studiare il comportamento delle due popolazioni (conigli e pecore), le isocline possono essere definite come le curve in cui $\dot{x} = 0$ oppure $\dot{y} = 0$, quindi quando il tasso di crescita di una delle due popolazioni è pari a 0.
Si decide di analizzare prima le isocline separatamente, e poi di visualizzarle all'interno di un unico grafico.

X-isocline:

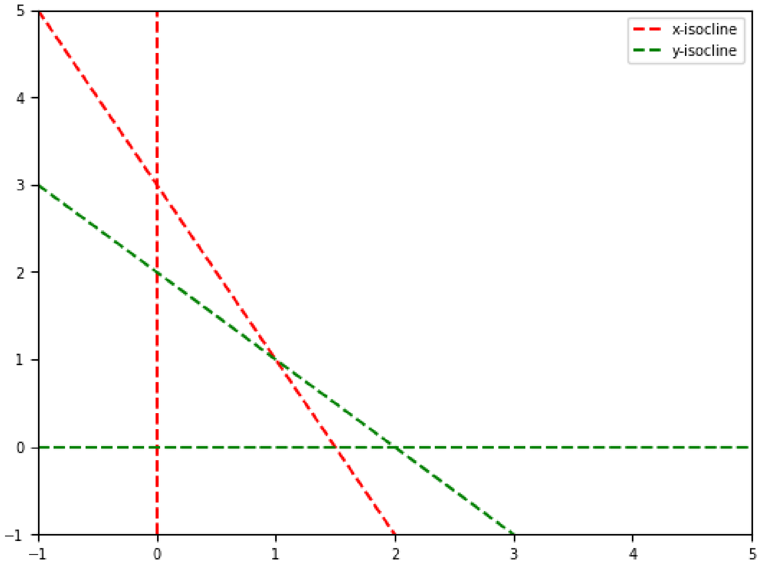
Sostituiamo y = 3 - 2x in y(2 - x - y):
(3 - 2x)(2 - x - (3 - 2x)) > 0
Otteniamo dunque che per 1 < x < 3 abbiamo valori positivi.

Sostituiamo ora x = 0 in y(2 - x - y):
y(2 - y) > 0
Abbiamo quindi che per 0 < y < 2 abbiamo valori positivi.

Y-isocline:

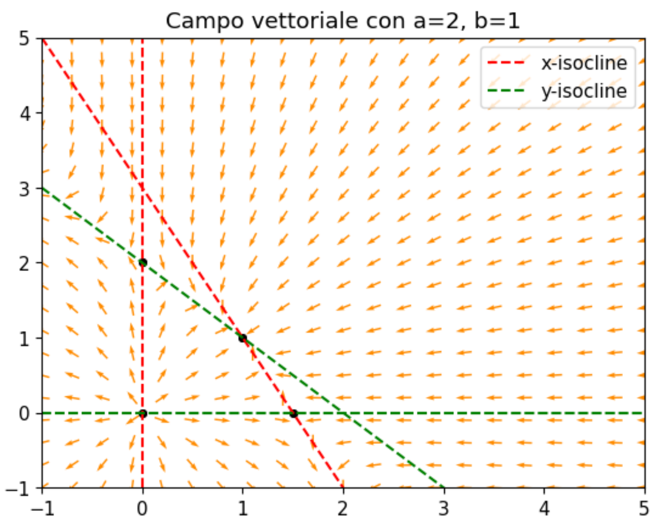
Sostituiamo y = 2 - x in x(3 - 2x - y):
x(3 - 2x - (2 - x)) > 0
Si ha che per 0 < x < 1 abbiamo valori positivi.

Sostituiamo ora y = 0 in x(3 - 2x - y):
x(3 - 2x) > 0
Quindi per 0 < x < 3 abbiamo valori positivi



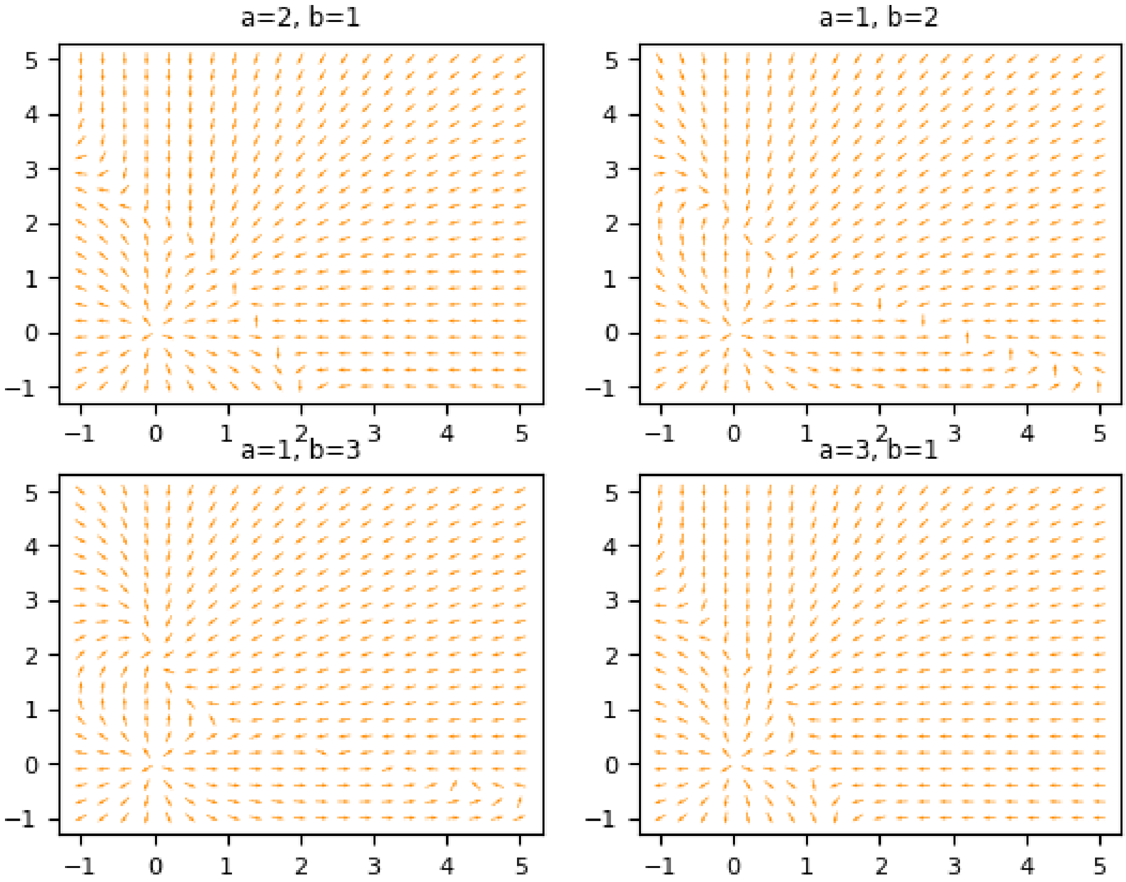
CAMPO VETTORIALE

Utilizziamo ora il computer per visualizzare numericamente il campo vettoriale e confrontare il grafico ottenuto con i valori analitici ottenuti precedentemente.



Del campo vettoriale ricavato qua sopra chiaramente andrà studiato solamente il primo quadrante, in quanto trattandosi di popolazioni i valori devono essere considerati sempre maggiori di 0. Si può notare come le specie cerchino di convergere a 1, il che può essere spiegato dal fatto che il punto (1,1) è, infatti, un nodo stabile. Infine, si osserva come i grafici disegnati analiticamente coincidano con i grafici ottenuti numericamente.

Passiamo ora a visualizzare come varia il campo vettoriale cambiando i parametri a e b.

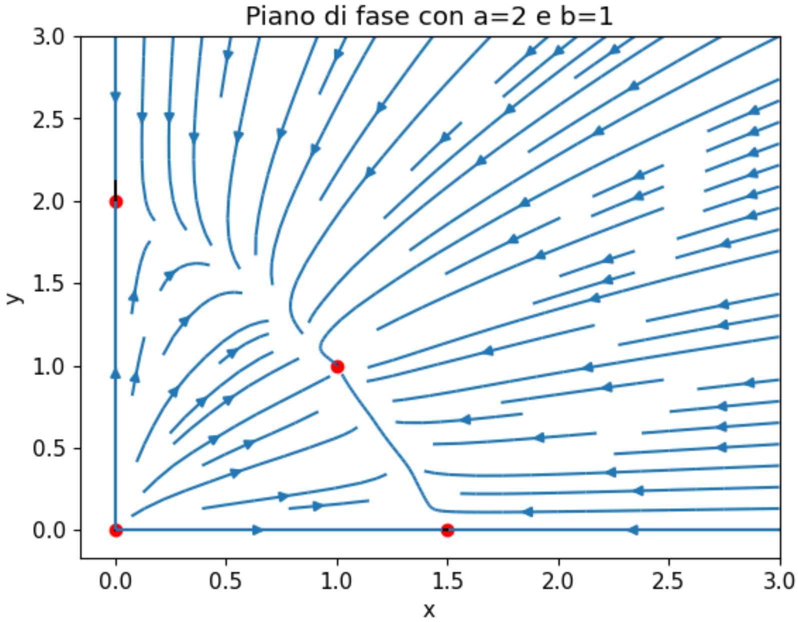


Secondo il "principio di esclusione competitiva" una specie può portare all'estinzione l'altra specie, come accade nei casi in cui il valore di a è minore del valore di b.

Le traiettorie che partono al di sotto del manifold stabile portano all'estinzione delle pecore, viceversa, le traiettorie che partono al di sopra del manifold stabile conducono all'estinzione della specie dei conigli.

Invece, nei casi in cui il parametro a è maggiore di b, si ottiene un risultato diverso: entrambe le specie sopravvivono grazie alla presenza di un nodo stabile, di un punto di equilibrio, in cui nessuna specie riesce a prevalere sull'altra.

PIANO DI FASE



Come si evince dal campo vettoriale precedente, le soluzioni del sistema tendono ad avvicinarsi al punto (1, 1) con $t \to +\infty$. Si può inoltre notare come i punti (0, 2) e $(\frac{3}{2}, 0)$, essendo punti di sella, non permettono l'estinzione di una specie: quando la popolazione di una specie arriva vicino a 0, il sistema creato porta ad un aumento della popolazione inferiore e ad una diminuzione di quella superiore, fino a raggiungere una sorta di equilibrio.

MANIFOLD

I manifold possono essere definiti come le varietà che attraversano un punto fisso e sui quali le traiettorie del sistema si avvicinano o si allontanano dal punto fisso. Inoltre, i manifold possono essere stabili o instabili a seconda della direzione delle traiettorie rispetto al punto fisso. Si considerino quindi i punti fissi precedentemente calcolati:

- (0, 2) ha come autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ e autovettori rispettivamente $\mathcal{V}_1 = (1, -\frac{2}{3})$ (manifold instabile), $\mathcal{V}_2 = (0, 1)$(manifold stabile);
- $(\frac{3}{2}, 0)$ ha come autovalori $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ e autovettori rispettivamente $\mathcal{V}_1 = (1, 0)$ (manifold stabile), $\mathcal{V}_2 = (-\frac{3}{7}, 1)$ (manifold instabile);

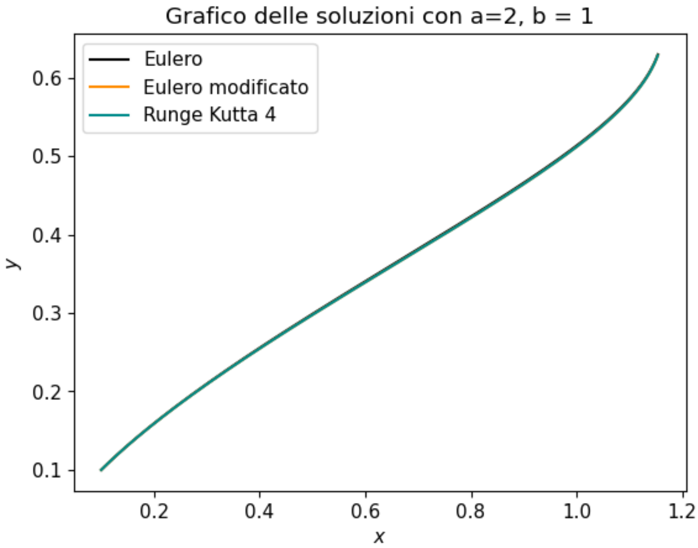
- (0, 0) ha come autovettori $\mathcal{V}_1 = (1, 0)$, $\mathcal{V}_2 = (0, 1)$ dai quali si generano due manifolds instabili;
- (1, 1) ha come autovettori $\mathcal{V}_1 = (\frac{\sqrt{5}+1}{2}, 1)$, $\mathcal{V}_2 = (\frac{-\sqrt{5}+1}{2}, 1)$ dai quali si generano due manifolds stabili.

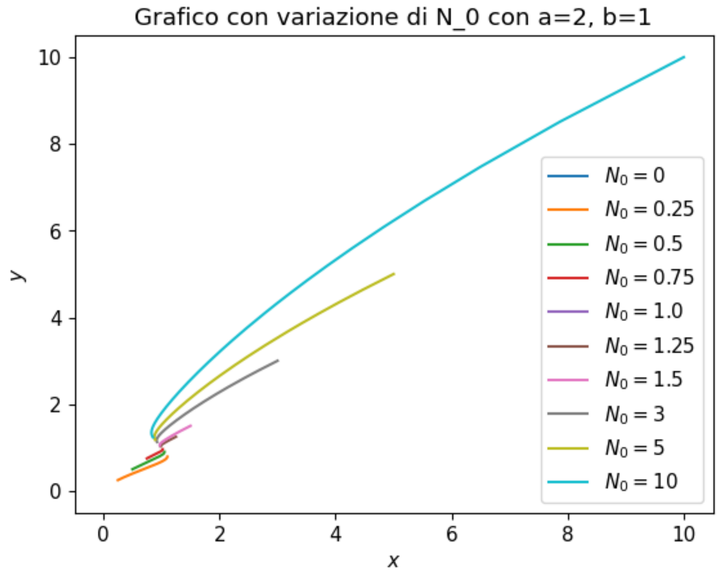
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

Concludiamo dunque con la rappresentazione grafica del nostro sistema mediante l'utilizzo del computer, variando i parametri a e b.

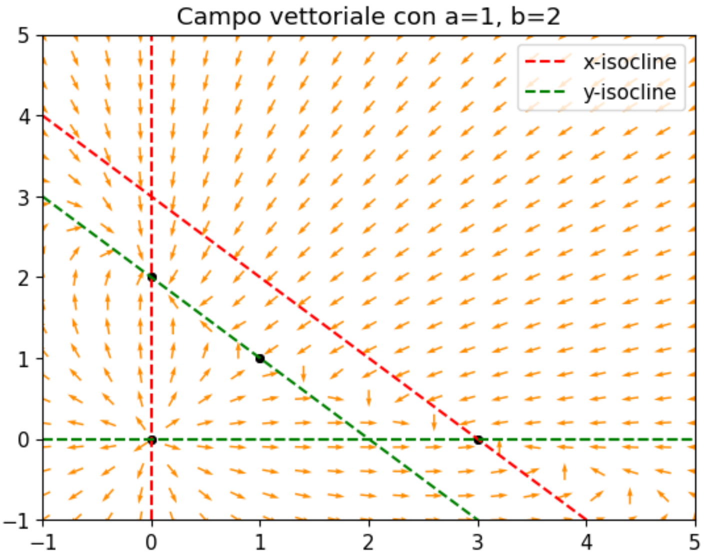
Di seguito riportiamo i grafici delle soluzioni con gli algoritmi di Eulero, Eulero modificato e Runge Kutta del quarto ordine considerando un numero di passi pari a 200, $\Delta t = 0.01$ secondi e $x_0 = 0.1$, $y_0 = 0.1$.

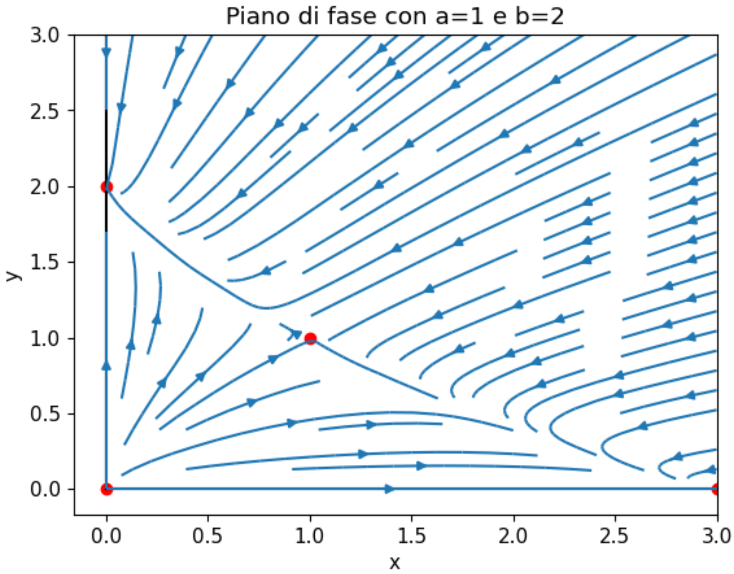
A fianco viene riportato come variano le soluzioni quando varia il numero di individui iniziale N_0.

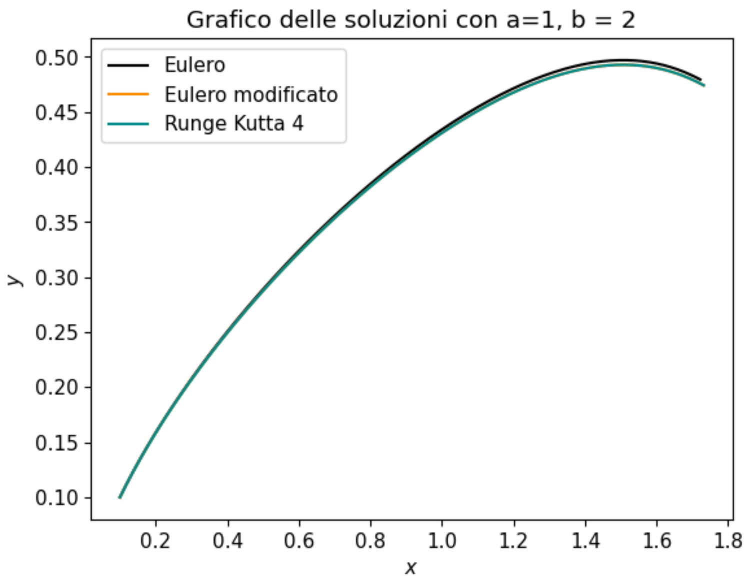


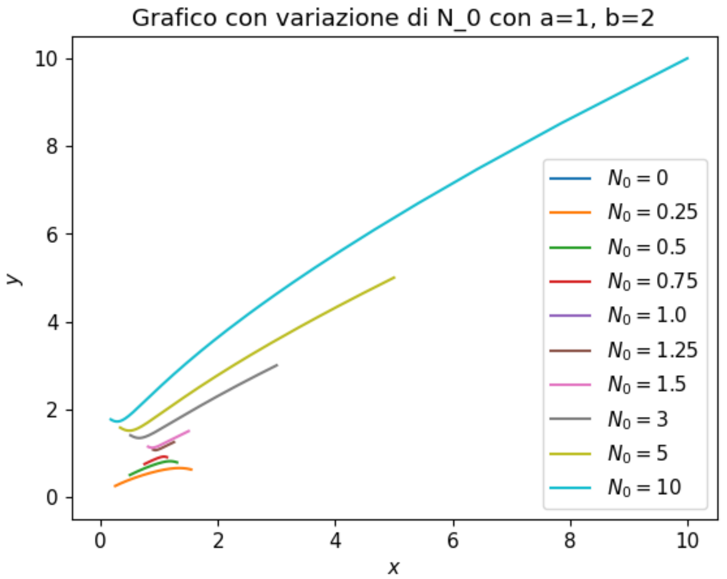


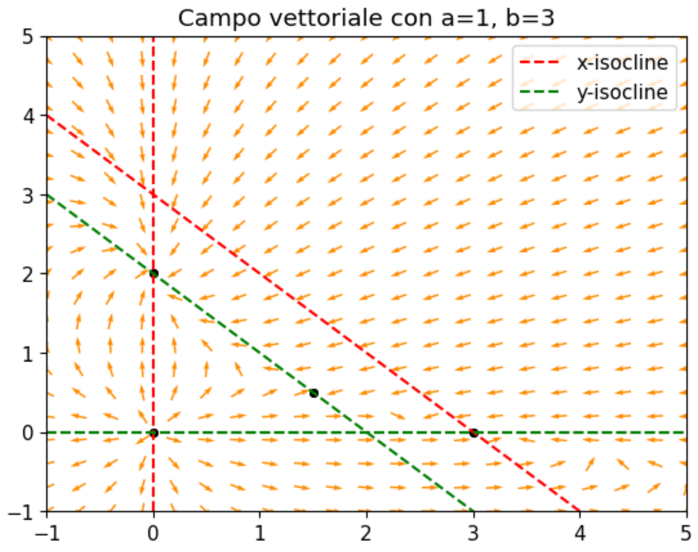
Analizziamo ora come cambiano i grafici, precedentemente presi in considerazione con a = 2 e b = 1, al variare di a e b.

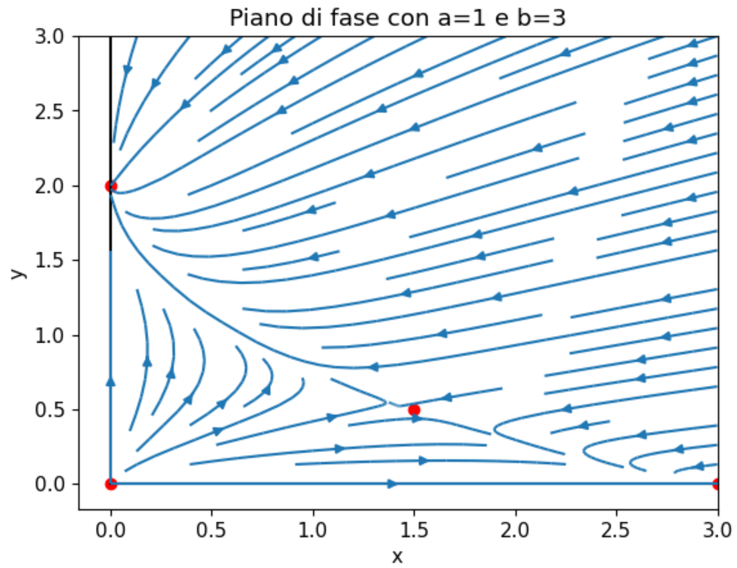









Campo vettoriale con a=1, b=3
x-isocline
y-isocline


Piano di fase con a=1 e b=3
x
y

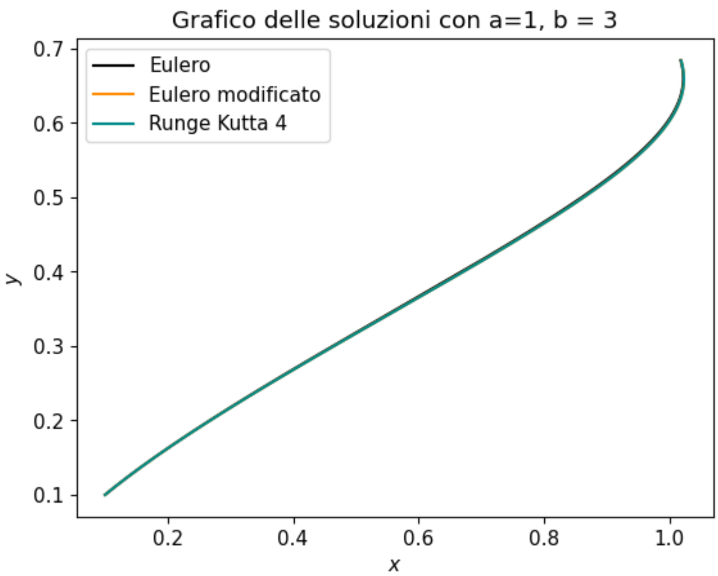


Grafico delle soluzioni con a=1, b = 3
Eulero
Eulero modificato
Runge Kutta 4
x
y

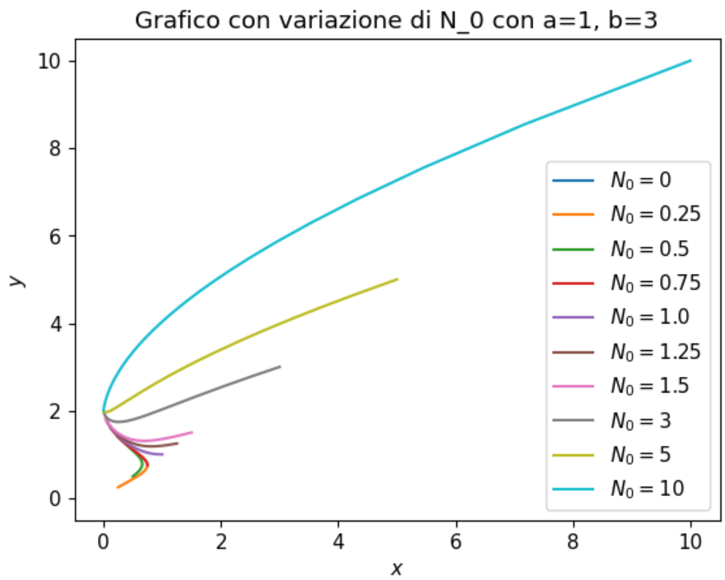
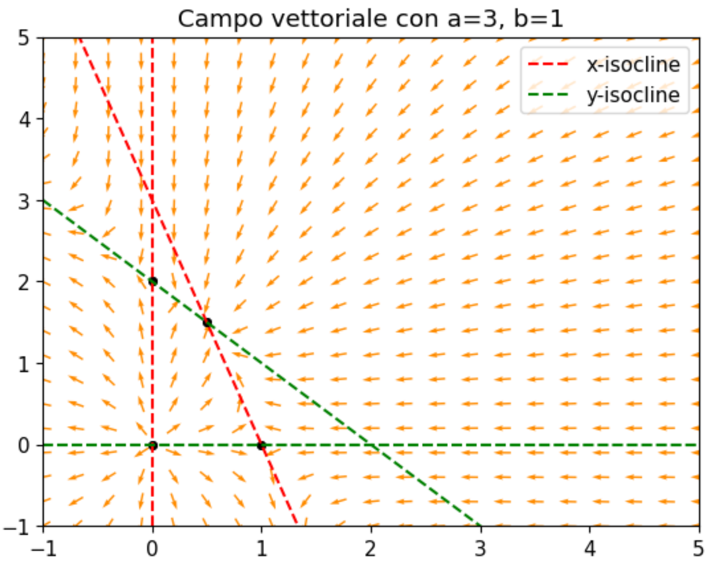
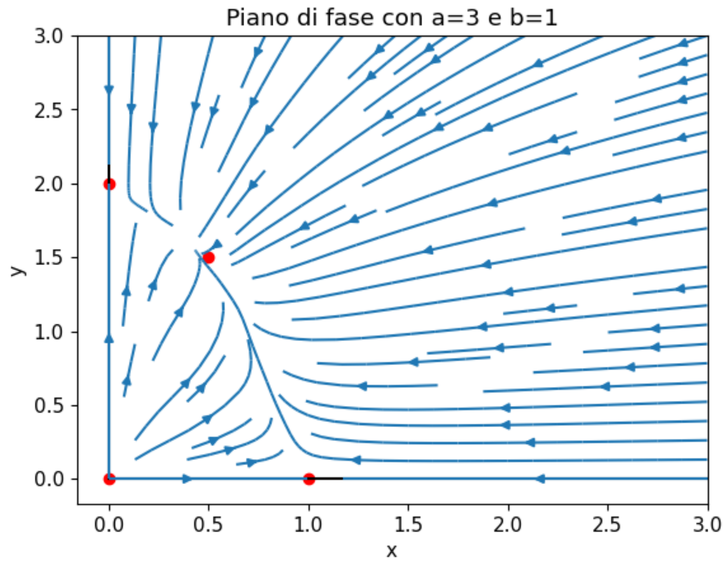


Grafico con variazione di N_0 con a=1, b=3
$N_0 = 0$
$N_0 = 0.25$
$N_0 = 0.5$
$N_0 = 0.75$
$N_0 = 1.0$
$N_0 = 1.25$
$N_0 = 1.5$
$N_0 = 3$
$N_0 = 5$
$N_0 = 10$
x
y


Campo vettoriale con a=3, b=1
x-isocline
y-isocline


Piano di fase con a=3 e b=1
x
y

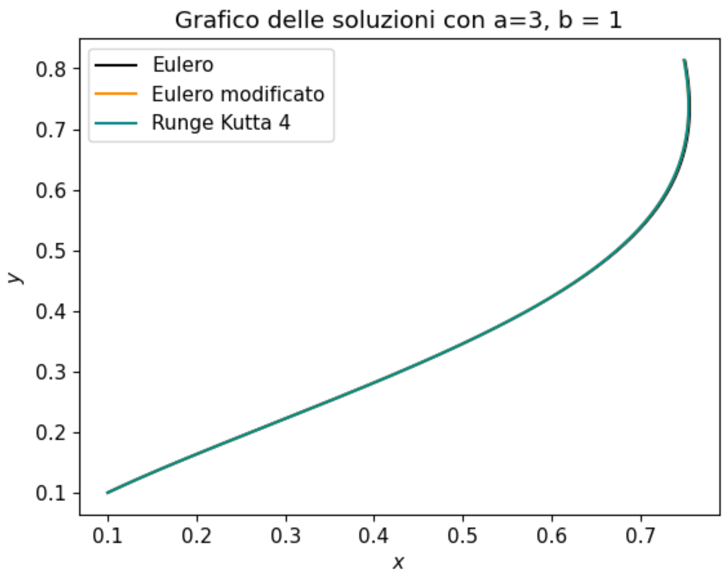


Grafico delle soluzioni con a=3, b = 1
Eulero
Eulero modificato
Runge Kutta 4
x
y

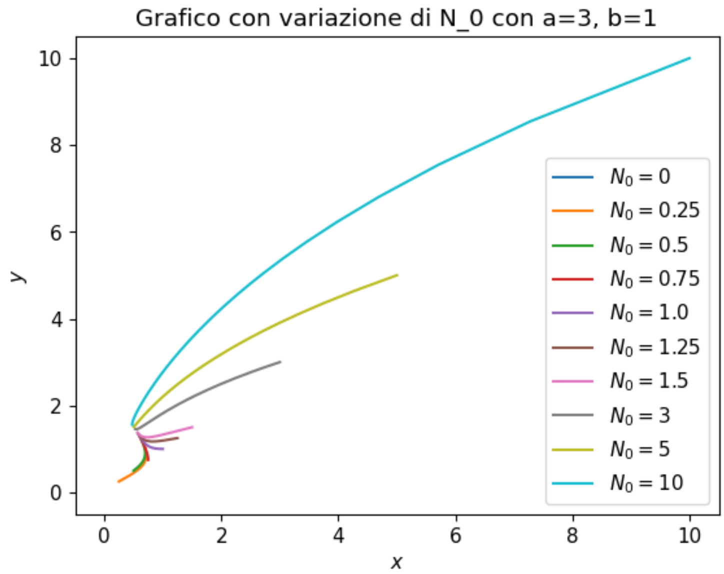


Grafico con variazione di N_0 con a=3, b=1
$N_0 = 0$
$N_0 = 0.25$
$N_0 = 0.5$
$N_0 = 0.75$
$N_0 = 1.0$
$N_0 = 1.25$
$N_0 = 1.5$
$N_0 = 3$
$N_0 = 5$
$N_0 = 10$
x
y