Lecture 1:

优化问题的分类：

1. 是否总是能获得最优的解？
    - 是：Exact Optimization Algorithms（精确优化算法）线性规划，动态规划
    - 否：Approximation Algorithms（近似算法）贪心，遗传
2. 决策变量连续还是离散？
    - Continuous Optimization 连续优化问题：线性规划
    - Discrete (Combinatorial) Optimization 离散优化问题：整数规划
    - Mixture 1,2的混合
3. 目标函数的数量
    - 单目标优化
    - 多目标优化
4. 目标值的类型
    - 目标值是精确值：标准优化问题
    - 目标值带有一定不确定性：区间编程，随机规划，模糊编程。。。
5. 有无约束条件：
    - 有约束优化 （LP，背包，几乎所有现实世界的问题）
    - 无约束优化 （TSP）

Lecture 2: TSP Problem

Input: City set and distance between each pair of cities

Objecttive: Minimization of a tour length starting from a city,
visiting all cities and returning to the start city

解决方案质量（Solution Quality Index）$= \frac{\text{Tour Length}}{\text{Optimal Tour Length}}$

Greedy:

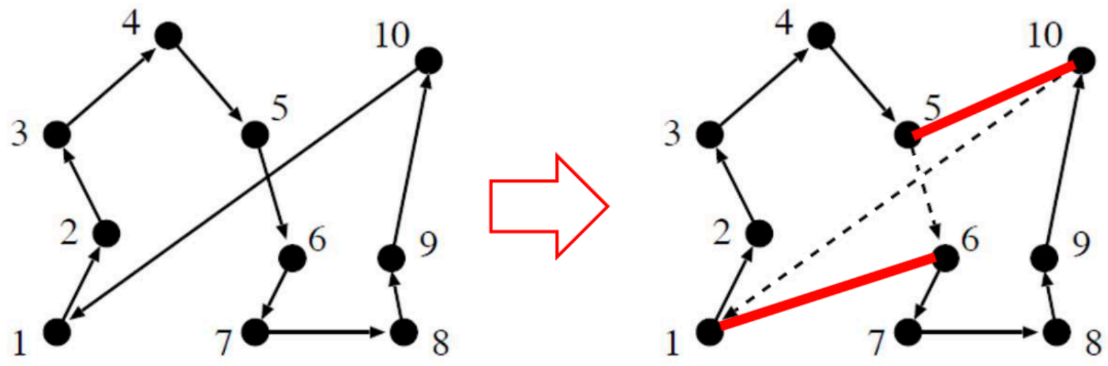
随意选择一个城市后，每次前往最近的那个城市。

Note： 如果一个旅行有交叉点，则该旅行不是最优的。

Best Move Local Search

检查通过对当前解应用一次反转操作生成的所有邻居。然后用所有邻居中最好的解替换当前解（如果最好的解优于当前解）。如果最好的解不优于当前解，则终止局部搜索的迭代。

从n条边中进行依次反转操作可能产生$\frac{n(n-1)}{2}$个解。



Lecture 3&4: Load Balancing Problem

- Input: = m identical machines: $M1, M2, \ldots, Mm$

  n jobs: $J1, J2, \ldots, Jn$

  Processing Time of each jobL $t_j (j = 1, 2, \ldots, n)$
- Question: What is the best assignment with the minimum makespan?

Greedy

将工作分配给负载最小的机器，按照任意顺序进行作业。

2-approximation (二近似)

当工作数量与机器数量相同或少于机器数量时，该算法获得最优

最差结果出现在 **最长的任务**被**最后分配**的情况（例如：5, 5, 10分配给两台机器，贪心最差解为15，即先分配两个5给两台机器，最后分配10）

Sorted Greedy Algorithm

将作业分配给负载最小的机器，按照作业的降序排列（最长的作业优先）

3/2-Approximation Algorithm （1.5近似）(其实应该是4/3-approximation)

最差情况出现在n足够小时，最短的作业时长接近$\frac{T^*}{2}$ （其实应该是$\frac{T^*}{3}$），因为想要出现一台机器负载多个任务且计算该问题有意义的情况下，m一定大于1。

General Settings of Load Balancing （可能出现的general setting变种）

1. Some machines can process only a part (i.e., subset) of jobs.
2. Each job appears at different time

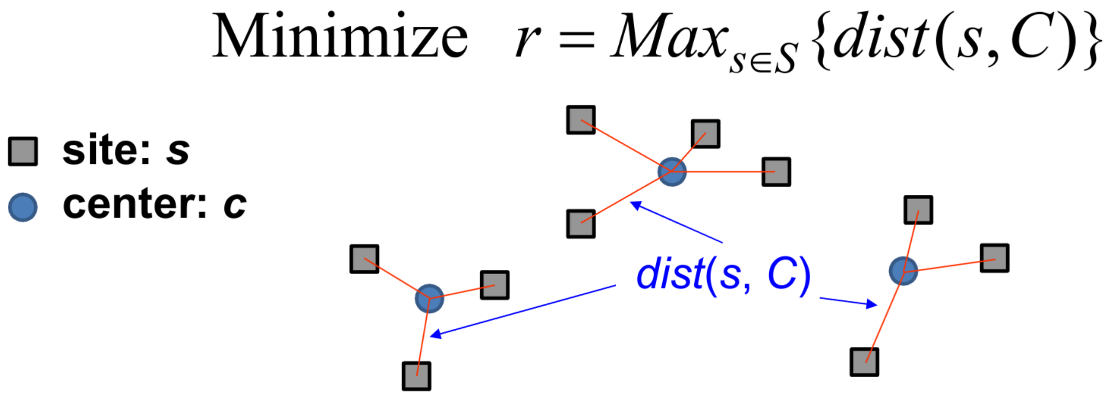
Lecture 5&6: Center Selection Problem

- Input: n cities $S = s_1, s_2, \ldots, s_n$
- Output: Location of k centers: $C = c_1, c_2, \ldots, c_k$

- Objective: Minimize the maximum distance from each site to the nearest center. (最小化中心点到城市的最大距离)

两种情况：

1. 对中心点位置没有约束
2. 中心点必须在集合 S 中



一个**虚拟的**中心选择算法 (2-approximation)：

- 选择距离最优解的一个中心距离r^*范围的一个随机点，删除所有距离为$2r^*$的点
- 重复上个过程直到没有点

能够工作的原因：能保证所有的点至少有一个距离为$2r^*$的点在其附近。

Greedy inclusion algorithm

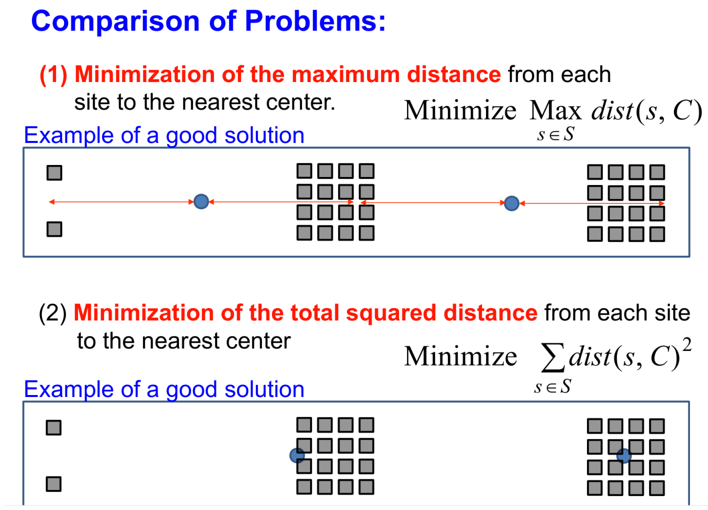
在每一步迭代中，选择一个能够最小化**将其添加到中心集合后**每个站点到最近中心的最大距离

每次迭代都至少有两个价值的点，需要从中随机选择一个继续。

Lecture 7: Clusting

- Input: n cities $S = s_1, s_2, \ldots, s_n$
- Output: Location of k centers: $C = c_1, c_2, \ldots, c_k$
- Objective: Minimize the total square distance from each site to the nearest center. (最小化中心点到城市的最大距离)

与Center Selection算法的区别：



K-Means （not an exact algorithm）

Objective: 最小化每个站点到最近中心的**总平方距离**

Steps:

1. 取当前簇的算术平均值作为簇的中心
2. 依靠距离簇中心的距离将点划分给簇
3. 重新计算簇中心
4. 重复以上过程直到收敛

k-medoids

类似K-Means， 但在第一步中在簇中选择一个到所有其他站点的总距离最小的点。

Fuzzy c-means

Lecture 8: Set Cover

- Input: n jobs $s_1, s_2, \dots, s_n$
- m machines, where
  - Each machine have a price $w_1, w_2, \dots, w_n$
  - Each machine can handle a subset S_j in the n jobs

Objective: Choise machines to minimize the cost.

$$\text{Minimize } w(C) = \sum_{S_i \in C} \text{ subject to } \bigcup_{S_i \in C} S_i = U$$

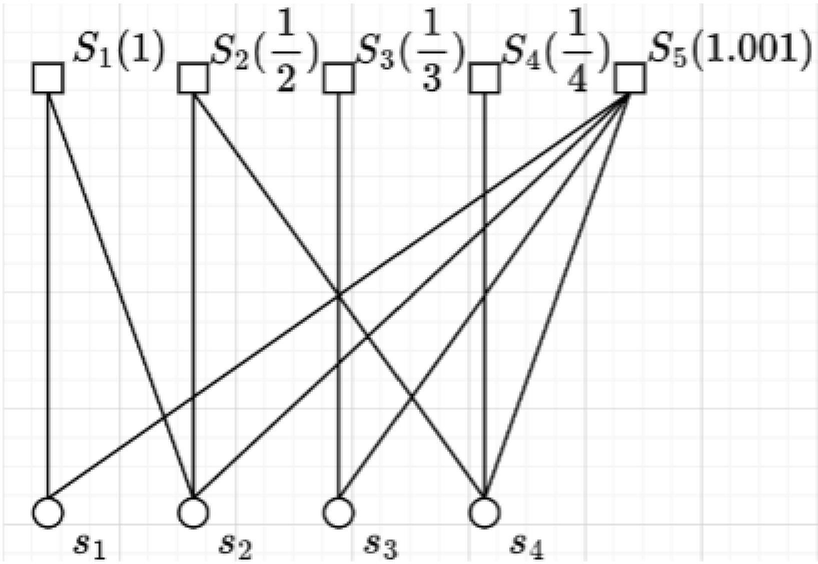
Greedy

选择目前完成任务平均cost最小的机器

例如机器A在目前剩余的四个任务中能够解决三个，cost为6，那平均cost为 $6/3 = 2$

最坏结果：$w \leq H(max_k|S_k|)w^*$, where $H(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$

最坏结果出现在每次最优解集都刚好差一点点被选择（如下面的S_5）



Lecture 9: Vertex Cover Problem

- Input: Graph G: $G = (V, E)$

  Weight of each vertex (node): $w_i (i \in V)$
- Output: Vertex cover S can cover every edge in G with minimum weight.

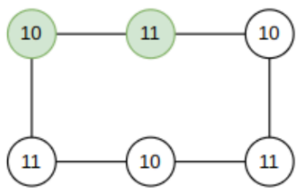
Can be modeled with set cover problem.

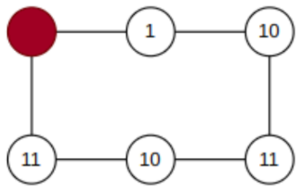
Pricing Method: 2-approximation

设 p 为边 e 愿意支付的覆盖费用。所有与顶点 v 相连的边的价格总和应小于或等于 w.

Process: 随机选择一条边，增长该边的价格直到与之相连的一条边tight.

差解出现在权重较大的边被边的价格消耗，从而先于权重较小的边被选择。





Lecture 10&11： Vertex Cover Problem - Use of LP （2-approximation）

Vertex Cover 的整数规划(Integer Programming)形式表达：

$$\text{Minimize } w_{IP}(x) = \sum_{i \in V} w_i x_i$$
$$\text{Subject to } Ax \geq 1$$
$$x \in \{0,1\} \text{ for } i \in V$$

Matrix A: Rows of A correspond to edges in E
Columns of A correspond to vertexes in V

线性规划：寻找一条线在一个空间中的最值

Relaxation Problem: 对于一个整数规划问题，其线性规划问题是一个松弛解

整数规划问题的全局最优解不会超过其松弛解，同时也不会差于贪心算法的解

Lecture 12: Generalized Load Balancing Problem(Use of LP)

Input: Set of m machines: $M = \{\text{Machine } 1, \dots, \text{Machine m}\}$
Set of n jobs: $J = \{\text{Job } 1, \dots, \text{Job n}\}$
Processing time of each job: $t_j (j = 1, 2, \dots, n)$
Subset of M for each job: $M_j (j = 1, 2, \dots, n)$
Constraint: Job j should be assigned to a machine in M_j
Objective: Minimization of the makespan
Output: Assignment of n jobs to m machines

整数规划建模

Minimize L

Flow from each job j is t_j.

subject to $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = t_j$ for all $j \in J$ (job j in J)

Total flow to machine i.

$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq L$ for all $i \in M$ (machine i in M)

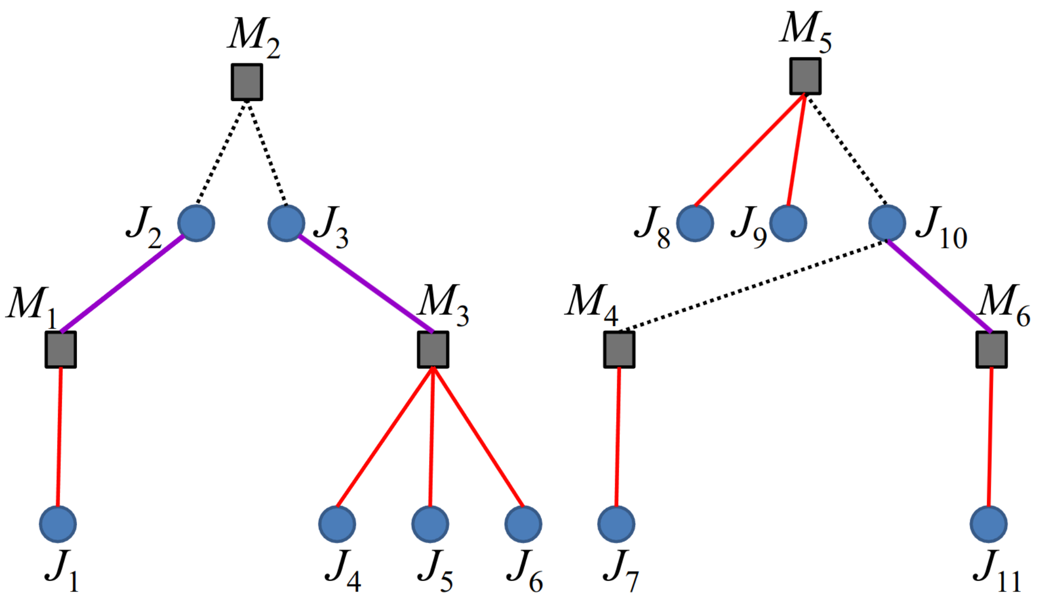
$x_{ij} \in \{0, t_j\}$ for all $j \in J,\ i \in M_j$

$x_{ij} = 0$ for all $j \in J,\ i \notin M_j$

线性规划建模

$$
\begin{aligned}
&\text{Minimize } L \\
&\text{subject to } \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = t_j \quad \text{for all } j \in J \quad (\text{job } j \text{ in } J) \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le L \quad \text{for all } i \in M \quad (\text{machine } i \text{ in } M) \\
&\qquad \boxed{x_{ij} \in \{0, t_j\} \Rightarrow x_{ij} \ge 0} \quad \text{for all } j \in J,\ i \in M_j \\
&\qquad x_{ij} = 0 \quad \text{for all } j \in J,\ i \notin M_j
\end{aligned}
$$

Question: How to obtain a feasible solution from the obtained solution of the relaxation problem?



Job Assignment

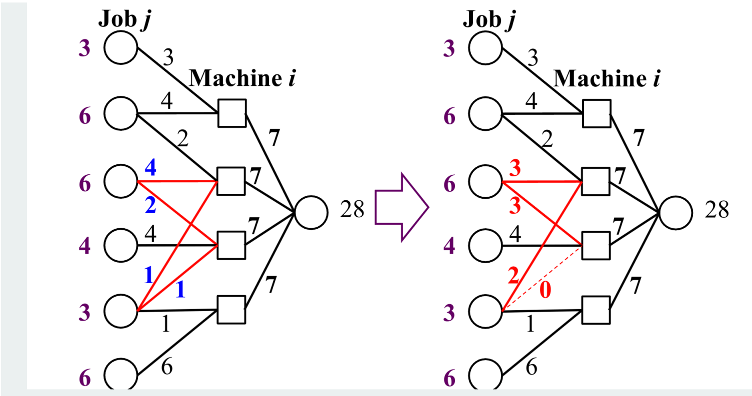
(1) Each leaf is assigned to its parent. (——)

(2) Each intermediate job node is assigned to an arbitrary child

(1) 每个叶子节点被分配给其父节点。

(2) 每个中间作业节点被分配给一个任意的子节点。

Question: How to eliminate cycles from the obtained graph?



选择一个循环。沿着循环改变每条边的流量，而不改变每个节点的总输入和每个节点的总输出（即，不改变目标值 L）。

Lecture 13: Disjoint Paths Problem

Greedy: 选择最短路径（$2\sqrt{m}+1$ approximation）

Lecture 14: Knapback Problem

Greedy Algorithm

Choose the item with the largest value per unit weight.

If the total weight of the selected items is the same as the weight capacity W with no item skip, the greedy solution is the optimal solution.