Описание задачи и подход к решению

Постановка задачи

Задание состоит в

- написании программы, реализующей численное решение антагонистической матричной игры
- иллюстрировании работы программы путем решения нескольких игр и визуализации спектров оптимальных стратегий игроков в различных ситуациях
- оформлении решения в виде пакета
- написании unit-тестов для решения

Формулировка задачи

По заданной матрице выигрыша построить векторы стратегий игроков, найти цену игры. (Без ограничения общности считаем, что стратегия первого игрока заключается в минимизации выигрыша, стратегия второго – в максимизации)

Алгоритм численного решения

Решение в чистых стратегиях Если матрица имеет *седловую точку*, то можно выписать решение в чистых стратегиях

Решение в смешанных стратегиях

1. Пусть в матрице есть отрицательные элементы. Избавимся от них – это не повлияет на решение игры, изменится только значение (т. фон Неймана). Для этого к каждому элементу матрицы добавим модуль наименьшего элемента

2. Сведем задачу к задаче линейного программирования. Решим прямую задачу линейного программирования симплексным методом с использованием симплексной таблицы. Систему неравенств приведем к системе уравнений путем введения дополнительных переменных. Полученная система будет записана в канонической форме.

3. Построим первичную симплекс-таблицу. За первичный базис возьмем дополнительные переменные. Индексная строка принимает значение -1 в столбцах основных переменных и 0 в столбцах дополнительных переменных

4. Будем переходить от базиса к базису до тех пор, пока все значения индексной строки не станут положительными. Если в индексной строке есть отрицательные значения, то опорный план не является оптимальным. В этом случае нужно построить новую таблицу с новыми базисными переменными y_s.

   Приведем алгоритм поиска базовых переменных:

   - Выберем ведущий столбец (c), в котором значение индексной строки (r) минимально
   - Столбец значений поэлементно поделим на значения ведущего столбца. Наименьшее значение определяет ведущую строку.
   - На пересечении ведущего столбца и ведущей строки находится ведущий элемент a^*.

- Базисная переменная, соответствующая ведущему столбцу заменит базисную переменную, соответсвующую ведущей строке.

5. Проведем с таблицей следующие преобразования:

    - Разделим каждый элемент ведущей строки на a^*

    $$a_{rj} \mapsto \frac{a_{rj}}{a^*}, j \in 1, ..., N$$

    - Зафиксируем i, j. Вычтем из a_{ij} произведение $a_{ic}a_{rj}$

    $$a_{ij} \mapsto a_{ij} - a_{ic}a_{rj}$$

6. Если в индексной строке остались отицательные элементы, повторяем пункт 4.

7. Построим вероятностные векторы:

    - *Для первого игрока:* вектор, состоящий из значений столбца значений, соответствующих основным переменным в порядке их индексирования. Если переменная отсутвует – вероятность, соответсвующая этой переменной, равна 0.
    - *Для второго игрока:* вектор, состоящий из значений индексной строки, соответсвующих дополнительным переменным в порядке их индексирования. Если переменная отсутвует – вероятость, соответсвующая этой переменной, равна 0.
    - Число, обратное к сумме значений вектора – значение игры. Умножим каждый вектор на значение игры и получим вероятностные векторы.

Вклад участников в решение задачи

- **Алексей Сомов:** реализация симплекс метода, отладка
- **Дмитрий Попов:** реализация автоматического тестирования, написание readme
- **Юлия Голубева:** написание readme, отладка
- **Алиса Боос:** реализация визуализации спектров, написание readme
- **Юйтун Ли:** реализация поиска седловой точки, отладка