HOCHSCHULE
FÜR ANGEWANDTE
WISSENSCHAFTEN
MÜNCHEN

Fachschaft der
Fakultät 07
StudierendenVertretung Hochschule München

Vorkurs/Mathematik

Eine kompakte Vorbereitung der Mathematik des Informatikstudiums

von Experten ;)

28. September 2016
Fachschaft 07

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Worum geht's im Vorkurs Mathematik?

Jeder Studierende tut sich in unterschiedlichen Fächern unterschiedlich schwer. Es gibt jedoch Fächer, in denen die Durchfallquote bereits über hinweg Jahre überdurchschnittlich hoch ist. Bei einem dieser Fächer mit besonders hoher Durchfallquote handelt es sich um das mathematische Fach Analysis. Aus diesem Grund haben wir als Fachschaft es uns so wie bereits einige vor uns zur Aufgabe gemacht, dem ganzen ein wenig entgegenzusteuern und zu versuchen, euch die Grundlagen, welche für dieses Fach von Nöten sind zu vermitteln.

1.2 An wen richtet sich dieser Kurs?

Dieser Kurs richtet sich an all jene,

- welche Schwächen in mathematischen Fächern haben.
- deren Schulzeit schon etwas länger her ist.
- welche nicht von mathematisch/technischen Schulen bzw. Gymnasien kommen.
- und an all jene welche der Meinung sind, eine Wiederholung schadet nie.

1.3 Warum Mathematik im Informatikstudium?

Vielen Studierenden ist nicht klar, warum Mathematik so grundlegend wichtig für ihr Studium ist - schließlich studieren sie ja keine (reine) Mathematik! Dieses Kapitel soll jenes Verständnisproblem lösen und aufzeigen, welche Schnittpunkte zwischen Mathematik und Informatik bestehen.
Mit Mathematik haben Informatiker ein zusätzliches, sehr mächtiges Werkzeug zur Hand, mit dem viele scheinbar unlösbare Probleme plötzlich lösbar werden. Deshalb gibt es in der Informatik einige Bereiche in denen ein gewisses mathematisches Grundverständnis notwendig ist.
Im Folgenden möchten wir nun anhand einiger Beispiele den Nutzen von Mathematik-Kenntnissen im Bereich Informatik verdeutlicht:

1.3.1 Spieleentwicklung

Die Entwicklung eines Spiels umfasst neben der Programmierung noch sehr viele andere Bereiche, wie Psychologie, Design und Soziologie (um nur ein paar zu nennen).
Auch die Mathematik spielt hierbei eine große Rolle:
So ermöglicht es einem die (nummerische) Integration, dass sich Figuren realistischer Bewegen können.
Auch Lichteffekte wie Spiegelungen oder der Soundeffekte wie Widerhall müssen zuerst korrekt mathematisch beschrieben und dann implementiert werden, wenn sie

„realistisch“wirken sollen.
Alle beschriebenen Probleme können mit relativ einfachen, mathematischen Methoden gelöst werden.

1.3.2 Business Analytics

Business Analytics wird eingesetzt, um die Probleme in der Unternehmenswelt mittels Analyse großer Datenmengen (Big Data) zu lösen.
Solche Probleme sind zum Beispiel die Ermittlung von „Risikokunden“, die unzufrieden sind und deshalb ihren Handyvertrag kündigen wollen. Können diese Kunden per Business Analytics gezielt ermittelt werden, so ist es möglich sie mit speziellen Angeboten, wie Freiminuten, von der Kündigung abzuhalten.
Die Ermittlung der Kunden erfolgt hierbei durch statistische Analysen wie Regression oder Decision Trees.

1.3.3 Machine Learning

Durch die immer schneller rechnenden Computer können heute Probleme gelöst werden, die früher nur Menschen erledigen konnten. Dazu gehören automatische Gesichtserkennung, das Auffinden von Tumoren in medizinischen Bildern oder die Erkennung von Kreditkartenbetrug. Meist steht hinter diesen Anwendungen das sogenannte „Machine Learning “, was bedeutet, dass die Maschine (der Computer) selbst lernt, welche Eigenschaften in den auftretenden Daten (Bilder von Gesichtern, Kreditkartenüberweisungen, Bilder von Tumoren oder gesundem Gewebe) zu welchem Ergebnis passt (Gesichter werden bestimmten Menschen zugeordnet, eine überweisung wird als Betrug markiert, ein Gewebebild wird als gesund gekennzeichnet). Das praktische am selbstlernenden Computer: der Mensch muss nur noch eine sogenannte Trainingsmenge an Datenmaterial bereitstellen, an der der Computer lernen kann - nach dem Training ist die Maschine selbständig in der Lage, eine Zuordnung zu machen. Diese selbstlernenden Programme basieren auf mathematische Grundlagen.
Einen hierfür oft verwendeten Ansatz bieten die sogenannten „neuronalen Netze“. Welche wiederum auf Matrix/Vektor-Multiplikationen beruhen.

Alle mathematischen Grundkenntnisse, welche in diesen und weiteren Bereichen benötigt werden, können im Studium erlernt werden.

2 Logik

Die Logik öffnete den Weg für die Informatik. Sie war immer eine Disziplin der Philosophie und hat eine sehr interessante Geschichte (von Aristoteles, Kant, Hegel, Boole, Russell, Gentzen, Skolem, Gödel, bis zu Turing und weiter) hinter sich gelassen. Die Aussagenlogik, als kleiner aber grundlegender Teil, ist fundamental um mathematische Ausdrücke zu verstehen und wird in allen Bereichen der Mathematik verwendet.

☞ In der Informatik hat die Logik eine wichtige Bedeutung. In der technischen Informatik werden Recheneinheiten mit sogenannten logischen Gattern realisiert. Ein Gatter ist nichts anders als eine logische Verknüpfung. Zum Beispiel ist das Und-Gatter ein Gatter mit zwei Eingängen x_{in}^1, x_{in}^2 und einem Ausgang x_{out}.
Legt man nun Spannung an x_{in}^1 und *gleichzeitig* x_{in}^2 an, so gibt das Gatter diese Spannung weiter, ansonsten nicht. Die Gatter bilden den Kern der Computerhardware wie z.B. Mikroprozessoren. Zudem ist die Aussagenlogik in jeder Programmiersprache eingebettet.

2.1 Aussagenlogik

Definition 2.1 (Aussage) *Eine Aussage ist ein als Satz formulierter Gedanke, dem man auf sinnvolle Weise einen Wahrheitswert zuordnen kann.*

Eine Aussage ist entweder **wahr (w)** oder **falsch (f)** (Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten).

Beispiele

- $A_1 :=$ Die Sonne strahlt wärme ab.
- $A_2 :=$ Bayern München wird diese Saison wieder deutscher Meister.
- $A_3 := 1 + 1 = 2$
- $A_4 :=$ Wird in diesem Jahr Ostern gefeiert?

A_1 und A_3 sind offensichtlich wahre Aussagen. A_2 können wir derzeit nicht überprüfen, sie ist aber trotzdem wahr oder falsch und darum zulässig. A_4 ist keine Aussage, sondern eine Frage - die Antwort darauf kann wieder eine Aussage sein (z.B. *In diesem Jahr wird Ostern gefeiert.*).

Schreibweisen

Wir schreiben gewöhnlich A ist **wahr** oder **falsch**, **w** oder **f** bzw. (für uns Informatiker) **1** oder **0**.

2.1.1 Logische Verknüpfungen

Definition 2.2 (Negation) *Unter der Negation einer Aussage A versteht man die Aussage $\neg A$ (Mathe) bzw. $\overline{A}$ (Informatik) (in Worten: „nicht A“), die genau dann wahr ist, wenn A selbst falsch ist.*

Es folgt eine sogenannte **Wahrheitstabelle** der Verknüpfung. In der ersten Spalte stehen die Werte, die A annimmt, und in der rechten Spalte, Werte, die $\neg A$ dann besitzt.

A	$\neg A$
falsch	wahr
wahr	falsch

Beispiel:

- Die Negation der Aussage „4 ist ungerade“ ist die Aussage „4 ist gerade“, denn es gibt nur diese beiden Möglichkeiten.
- Aber die Negation der Aussage „4.5 ist ungerade“ ist nicht die Aussage „4.5 ist gerade“, denn beide Aussagen sind falsch, ja sogar unsinnig. Die Negation der Aussage „Diese Kuh ist schwarz“ ist nicht etwa die Aussage „Diese Kuh ist weiß“, denn es gibt ja noch andere Farben. Vielmehr müsste man sagen: „Diese Kuh ist nicht schwarz“. Das umgangssprachliche Gegengenteil ist meist etwas anderes als die logische Verneinung.

Definition 2.3 (Konjunktion) *Unter der Konjunktion zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage $A \wedge B$ (Mathe) bzw. $A \cdot B$ (Informatik) (in Worten: „A und B“), die genau dann wahr ist, wenn A und B gleichzeitig wahr sind.*

In den ersten Spalten dieser **Wahrheitstabelle** stehen die Werte der Variablen der Konjunktion, in der letzten Spalte der resultierende Wert.

A	B	$A \wedge B$
falsch	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

Beispiel:

- „18 ist eine gerade Zahl und durch 3 teilbar“, ist eine wahre Aussage im Rahmen des Axiomensystems für die Arithmetik, welche hier umgangssprachlich vorausgesetzt wurde. Eigentlich handelt es sich um die Aussage „18 ist eine gerade Zahl, und 18 ist durch 3 teilbar“.

- „15 ist eine gerade Zahl und durch 3 teilbar“, ist eine falsch, denn der erste Teil der Aussage ist falsch.

Definition 2.4 (Disjunktion) *Unter der Disjunktion zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage $A \vee B$ (Mathe) bzw. $A + B$ (Informatik) (in Worten: „A oder B“), die genau dann wahr ist, wenn wenigstens eine der Aussagen A oder B wahr ist.*

In den ersten Spalten dieser **Wahrheitstabelle** stehen die Werte der Variablen der Disjunktion, in der letzten Spalte der resultierende Wert.

A	B	$A \vee B$
falsch	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
wahr	wahr	wahr

☞ Umgangssprachlich meinen wir mit „oder“ meist „entweder ... oder“. Was aber nicht der logischen Disjunktion entspricht.

Beispiel:

- „Ich werde Mathematik oder Informatik studieren“, diese Aussage ist auch dann wahr, wenn ich mich dafür entscheide, beide Fächer zu studieren. Falsch wird sie aber z.B., wenn ich nur Biologie studiere.
- „Ich kann nur Hü oder Hott sagen“. Das ist natürlich falsch, denn ich kann ja beide Wörter vermeiden.

Definition 2.5 (Implikation) *Unter der Implikation zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage $A \Rightarrow B$ (in Worten: „A impliziert B“oder „aus A folgt B“), versteht man die Zusammengesetzte Aussage $(\neg A) \vee B$.*

In den ersten Spalten dieser **Wahrheitstabelle** stehen die Werte der Variablen der Implikation, in der letzten beiden Spalte der resultierenden Werte (in der letzten der finale Wert).

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
falsch	falsch	wahr	wahr
falsch	wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	falsch
wahr	wahr	falsch	wahr

A wird auch als Prämisse bezeichnet. Eigentlich sieht alles recht einfach aus. Nehmen wir die Aussagen: (A) „Wenn es regnet folgt daraus, dass (B) die Straße nass wird". Wenn es nun regnet und die Straße nass wird ist die Aussage wahr. Doch was passiert wenn es nicht regnet?
Wenn es nicht regnet ist die Aussage immer wahr egal ob die Straße nun nass oder trocken ist. Wir können die Aussage auch wie folgt formulieren:

„Ist die Straße nicht nass, so folgt daraus, dass es nicht regnet."
(Kontropositionsgesetz)

$$((\neg B) \Rightarrow (\neg A)) \iff (A \Rightarrow B)$$

Definition 2.6 (Äquivalenz) *Unter der Äquivalenz zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage $A \iff B$ (in Worten:„A gilt genau dann wenn B gilt"). Diese ist genau dann wahr wenn $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$ wahr ist.*

In den ersten Spalten dieser **Wahrheitstabelle** stehen die Werte der Variablen der Äquivalenz, in der letzten Spalte der resultierende Wert.

A	B	$A \iff B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	falsch
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

Ein Beispiel wäre $x + 5 = 7 \iff x + 8 = 10$.

Definition 2.7 (Exklusives Oder) *Unter dem exklusives Oder zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage A XOR B (in Worten:„entweder A oder B"). Diese ist genau dann wahr wenn $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ wahr ist.*

In den ersten Spalten dieser **Wahrheitstabelle** stehen die Werte der Variablen des exklusiven Oder, in der letzten Spalte der resultierende Wert.

A	B	A XOR B
falsch	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
wahr	wahr	falsch

☞ Das exklusive Oder ist in die meisten Programmiersprachen, als Standardfunktion, eingebaut ist.

2.1.2 Grundlegende Rechenregeln (Bonus)

Wir verwenden das Symbol $\equiv$ anstatt $\iff$ um anzudeuten, dass wir zwei Ausdrücke vergleichen möchten und diese sollen durch das $\equiv$-Symbol besser abgetrennt werden. Die Symbole können als identisch angesehen werden. Wir möchten mit dem $\equiv$-Symbol verdeutlichen, dass die eine durch die andere Formel ersetzt/vereinfacht werden kann, da sie äquivalent sind.

- Neutrales Element (bezgl. oder): $A \vee \text{falsch} \equiv A$
- Neutrales Element (bezgl. und): $A \wedge \text{wahr} \equiv A$
- Absorbierendes Element (bezgl. oder): $A \vee \text{wahr} \equiv \text{wahr}$
- Absorbierendes Element (bezgl. und): $A \wedge \text{falsch} \equiv \text{falsch}$
- Kommutativgesetz 1: $A \vee B \equiv B \vee A$
- Kommutativgesetz 2: $A \wedge B \equiv B \wedge A$
- Assoziativgesetz 1: $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- Assoziativgesetz 2: $A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- Distributivgesetz 1: $(A \wedge B) \vee C \equiv A \vee C \wedge B \vee C$
- Distributivgesetz 2: $(A \vee B) \wedge C \equiv A \wedge C \vee B \wedge C$
- Idempotenzgesetz 1: $A \vee A \equiv A$
- Idempotenzgesetz 2: $A \wedge A \equiv A$
- Negation 1: $\neg\neg A \equiv A$
- Tautologie: $\neg A \vee A \equiv \text{wahr}$
- Widerspruch: $\neg A \wedge A \equiv \text{falsch}$
- Absorbtionsgesetz 1: $A \vee (A \wedge B) \equiv A$
- Absorbtionsgesetz 2: $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
- De-Morgan-Gesetzt 1: $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (sehr nützlich)
- De-Morgan-Gesetzt 2: $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (sehr nützlich)

Man bezeichnet wahr auch als das **neutrale** Element der **Konjunktion** (ähnlich der 1 in der Multiplikation) und falsch als das **neutrale** Element der **Disjunktion** (ähnlich der 0 in der Addition). Dies Erklärt auch die Informatikschreibweise denn verwenden wir anstatt wahr die 1 und anstatt falsch die 0, so können wir mit einer Aussageformel rechen: $A \wedge B \equiv A \cdot B$, $A \vee B \equiv A + B \equiv \min(A + B, 1)$, das aber nur am Rande.

2.1.3 Tautologie

Als Tautologie bezeichnet man eine Aussage die immer wahr ist. So zum Beispiel das Gesetz vom ausgeschlossenen Dritten

Beispiel:

$$A \vee (\neg A)$$

2.1.4 Widerspruch

Als Widerspruch bezeichnet man eine Aussage die immer falsch ist.

Beispiel

$$(\neg A) \wedge A$$

2.1.5 Aufgaben

Werten folgende Ausdrücke aus:

1. wahr $\wedge$ falsch $\vee$ wahr
2. wahr XOR (wahr $\vee$ falsch)
3. wahr XOR (wahr $\wedge$ falsch)
4. falsch XOR falsch $\vee$ wahr $\Rightarrow$ wahr
5. (falsch XOR falsch $\wedge$ wahr) $\Rightarrow$ falsch
6. falsch $\iff$ wahr
7. (wahr $\Rightarrow$ wahr) $\iff$ (falsch $\Rightarrow$ falsch)

Vereinfache folgende Ausdrücke:

1. $A \vee (B \wedge A) \vee (C \wedge A) \vee (D \wedge B)$
2. $A \vee \neg A \wedge (C \wedge \neg C)$
3. $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)$
4. $A \wedge (A \vee B)$

Führe folgende Negationen aus:

1. $\neg(\neg C \vee \neg D)$
2. $\neg((A \vee B) \wedge (C \vee D))$

Zeige, dass die folgenden Aussageverknüpfungen Tautologien sind:

1. $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (Abtrennungsregel)
2. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (Syllogismus-Regel)
3. $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Kontrapositionsgesetz)

Eine atomare Formel hat die Form A_i, wobei $i = 1, 2, 3, \ldots$. Formeln werden durch folgenden induktiven Prozesse definiert:

1. Alle atomaren Formeln sind Formeln.
2. Für alle Formeln F und G sind $(F \wedge G)$ und $(F \vee G)$ Formeln.
3. Für jede Formel F ist $\neg F$ eine Formel.

2.2 Prädikatenlogik

Dies ist eine sehr kurz gehaltene Einführung in die Prädikatenlogik. Kurz gesagt ist die **Prädikatenlogik ≈ Aussagenlogik mit Quantoren**. Wir möchten einem Objekt x eine Eigenschaft/**Prädikat** P(x) zuweisen z.B. „7 ist eine Primzahl“. In diesem Fall ist das Prädikat *Primzahl* und 7 das *Objekt*.
Prädikate können eine unterschiedliche Stelligkeit besitzen ($P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, n-stelliges Prädikat). Um Elementen/Objekten eine Eigenschaft zuzuweisen benötigen wir noch eine Menge M an Objekten. Wir schreiben dann:

$$\underbrace{\exists}_{\text{es existiert ein}} \underbrace{x}_{\text{x}} \underbrace{\in}_{\text{in}} \underbrace{M}_{\text{M}} \underbrace{|}_{\text{sodass}} \text{x die Eigenschaft } \underbrace{P(x)}_{\text{P}} \text{ besitzt.}$$

oder

$$\underbrace{\forall}_{\text{für alle}} \underbrace{x}_{\text{x}} \underbrace{\in}_{\text{in}} \underbrace{M}_{\text{M}} \underbrace{:}_{\text{gilt dass}} \text{x die Eigenschaft } \underbrace{P(x)}_{\text{P}} \text{ besitzt.}$$

Beispiel

Sei T die Menge aller Tomaten und das Prädikat $R(x) :=$ „x ist rot“ gegeben, so kommen wir von der klassischen Aussage $A :=$ „Tomaten sind rot“, nun zu:

- „**alle** Tomaten sind rot“: $\forall x \in T : R(x)$
- „**keine** Tomate ist rot“: $\forall x \in T : \neg R(x)$ (bzw. $\neg(\exists x \in T : R(x))$)
- „**es exisitiert mindestens eine** Tomate die rot ist“: $\exists x \in T : R(x)$ (bzw. $\neg(\forall x \in T : \neg R(x))$)
- „**nicht alle** Tomaten sind rot“: $\exists x \in T : \neg R(x)$ (bzw. $\neg(\forall x \in T : R(x))$)

Man bedenke:

- $\neg(\forall x \exists y P(x, y)) \equiv \exists x \forall y \neg P(x, y)$

- $\neg(\exists x \forall y P(x,y)) \equiv \forall x \exists y \neg P(x,y)$

Die Verneinung der Aussage **„alle Tomaten sind rot“** ($\neg(\forall x \in T : R(x))$) ist eben nicht „keine Tomate ist rot“ $\forall x \in T : \neg R(x)$ sondern **„es gibt mindestens eine Tomate dir nicht rot ist“** $\exists x \in T : \neg R(x)$!

2.2.1 Aufgaben

Führen Sie folgende Negationen aus:

- $\neg A$, mit $A :=$ Kein Mensch kann Fußballspielen.
- $\neg A$, mit $A :=$ Alle Rosen sind rot.
- $\neg A$, mit $A :=$ Alle Tomaten schmecken klasse und sind rot.
- $\neg A$, mit $A :=$ Wenn jemand im Lotto gewinne folgt daraus, dass diese Person viel Geld hat-

Sei nun M die Menge aller Menschen, R die Menge aller Rosen, T die Menge aller Tomaten. Definieren Sie geeignete Prädikate und formulieren Sie möglichst kurze Aussagen der Prädikatenlogik, welche den obigen Aussagen entsprechen. Führen Sie anschließend die gleiche Negation durch.

3 Mengen

In diesem Kapitel möchten wir einen weiteren Blick auf die Mathematik als Sprache richten. Mit der Logik aus dem vorherigen Kapitel, soll dies dazu führen, dass ihr die Angst vor kompliziert anmutenden Formeln wie

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{D} \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ gilt: } |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

verliert.

Was auf den ersten Blick schwierig aussieht wird einfach(er), wenn man es wie einen normalen Satz lesen kann: *Für alle positiven Zahlen Epsilon gibt es (mindestens) eine positive Zahl Delta, so dass für alle Zahlen x in D mit einem kleineren Abstand zu x_0 als Delta gilt, dass die Funktionswerte von f an der Stelle x weniger als Epsilon von den Funktionswerten von f an der Stelle x_0 entfernt sind.* Dieses Kapitel hilft, Formeln wie die obige in lesbare Sätze zu übersetzen, die dann (im nächsten Schritt) diskutiert und verstanden werden können.

3.1 Die Mengenlehre

Eine Menge ist eine **ungeordnete** Gruppe von **verschiedenen** Objekten. Ein Objekt einer Menge M nennen wir *Element* von M. Falls das Element x **ein Element von** M ist so schreiben wir

$$x \in M.$$

Falls x **nicht Element von** M ist, schreiben wir

$$x \notin M.$$

☞ $(x \in M \lor x \notin M)$ ist eine Tautologie, denn folgendes ist immer wahr: Ein Element x ist Element einer Menge M oder es ist nicht Element von M.

3.1.1 Beispiele

Mengen können in den unterschiedlichsten Schreibweisen auftreten:

- $M := \{a, b, c\}$ ist die Menge mit den Elementen a, b, c, also z.B. $b \in \{a, b, c\}$ bzw. $b \in M$
- $M := \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist die unendliche Menge die alle ganzen positiven Zahlen > 0 enthält.
- $X := \{x \mid x < 8 \;\wedge\; x \text{ ist eine ganze positive Zahl}\}$,
  $M := \{x \in X \mid x \text{ ist eine Primzahl}\} = \{2, 3, 5, 7\}$.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \ldots$ sind Symbole für Mengen die wir häufig verwenden.

3.1.2 Mengenoperationen

Mengen sind eng mit der Aussagenlogik verbunden. Ähnlich wie zwei Aussagen können wir auch zwei Mengen verknüpfen. Seien A und B zwei Mengen.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

Wir sehen hier, dass das $\cap$ in der Mengenlehre dem logischen $\wedge$ in der Aussagenlogik entspricht.

- Schnitt, sprich **A geschnitten B**: $A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$
- Vereinigung, sprich **A vereinigt mit B**: $A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$
- Differenz, sprich **A ohne B**: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$
- Komplement, sprich **nicht A**: $(A \subseteq U)$: $A^C = \bar{A} = \{x \in U \mid x \notin A\}$.

☞ Das Komplement macht nur Sinn, wenn wir ein sog. Universum U haben, das A *einschließt*.
Für U gilt dann: $U := \bar{A} \cup A$

Durch die Analogie zur Aussagenlogik gelten die gleichen **Rechenoperationen**, darum verzichten wir auf eine Auflistung. Ein Beispiel wären die **De Morgen-Regeln**:

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$
$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

3.1.3 Mengenrelationen

Eine Relation stellt zwei mathematische Objekte in eine Beziehung/Relation. So etwa die $<$-Relation (sprich: kleiner-Relation).
$4 < 5$ besagt, dass 4 in der $<$-Relation zu 5 steht, also dass 4 eben kleiner als 5 ist. Wir benötigen aber auch Relationen für Mengen um diese z.B. zu vergleichen. Wir wollen Aussagen, dass alle Elemente von A auch in B enthalten sind oder andersherum.

- Teilmenge: $(A \subseteq B) \iff (x \in A \Rightarrow x \in B)$ quasi $(\leq)$
- Supermenge: $A \supseteq B \iff (x \in A \Leftarrow x \in B)$ quasi $(\geq)$
- Echte Teilmenge: $(A \subset B) \iff (x \in A \Rightarrow x \in B \wedge A \neq B)$ quasi $(<)$
- Echte Supermenge: $(\supset B) \iff (x \in A \Leftarrow x \in B \wedge A \neq B)$ quasi $(>)$

☞ Der Unterschied zwischen einer *Teilmenge* und einer *echten Teilmenge* ist, dass die *echte Teilmenge* auf jeden Fall weniger Elemente als die zugehörige Supermenge besitzt.

3.1.4 Die leere Menge

Die leere Menge ist jene, welche keinerlei Elemente enthält. Für diese besondere Menge gibt es zwei Schreibweisen, welche sich durchgesetzt haben:

- $\emptyset$
- $\{\}$

☞ Egal welche Menge betrachtet wird, die leere Menge ist stets eine Teilmenge von ihr.

3.2 Zahlenmengen

Dieses Kapitel gibt einen kurzen überblick über die in der Mathematik üblichen Zahlenmengen.

3.2.1 Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ umfassen alle ganzen Zahlen von 1 aufwärts.
$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$

☞ Ob die Zahl Null zu den natürlichen Zahlen gehört ist eine Streitfrage unter den Mathematikern. Um Klarheit zu verschaffen, wird in diesem Fall oft $\mathbb{N}_0$ $(\mathbb{N} mit 0)$ verwendet. Dies ist jedoch nicht garantiert. Ihr solltet im Zweifelsfall euren Professor fragen, wie er dies handhabt.

3.2.2 Ganze Zahlen

$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, diese Zahlen erweitern die natürlichen Zahlen um negative ganze Zahlen (und Null). Mit ihnen ist es möglich, uneingeschränkt zu subtrahieren.

Beispiel: $3 - 4 = -1$

3.2.3 Rationale Zahlen

$\mathbb{Q} := \left\{q \ : \ q = \frac{x}{y},\ x, y \in \mathbb{Z} \ \wedge \ y \neq 0\right\} \supset \mathbb{N}$, mit der Erweiterung auf die rationalen Zahlen sind alle vier Grundrechenarten inklusive der Division möglich.

Beispiele: $\frac{1}{3}, -\frac{7}{13}$, $1 = \frac{1}{1}$, $-8 = \frac{-8}{1}$

3.2.4 Reelle Zahlen

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, wobei wir mit $\mathbb{I}$ die irrationalen Zahlen bezeichnen. Die irrationalen Zahlen bilden **unendliche**, **nicht periodische** und demzufolge nicht als Bruch darstellbare Zahlen.

Beispiele: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{17}$, π, e

3.2.5 Ordnung der Zahlenmengen

Mit Ausnahme der irrationalen Zahlen können die (hier behandelten) Zahlenmengen als Erweiterungen der jeweils vorhergehenden verstanden werden. $\mathbb{N}$ bildet dabei die Basis.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

3.2.6 Intervalle

Ein Intervall I ist eine Teilmenge bestehend aus allen Zahlen einer Zahlenmenge, welche zwischen einer unteren a und einer oberen Grenze b eingeschlossen sind.

Beispiel (informell): *Das Intervall I umfasst alle natürlichen Zahlen größer 1 und kleiner 6.*

Abgeschlossene Intervalle

Um auszudrücken, dass die Variable x einen Wert in einem gewissen Intervall A mit der linken Grenze a und der rechten Grenze b hat, schreibt man es als **(ab)geschlossenes Intervall**; es schließt die beiden Werte **a** und **b** mit ein.

$$x \in [a; b]$$

☞ Oft werden a und b auch durch ein Komma ($x \in [a, b]$) getrennt, was sich aber bei Zahlen in deutscher Notation als ungeschickt herausstellen kann, da hier das Komma als Dezimaltrennzeichen verwendet wird.

Offene Intervalle

Um beide Werte auszuschließen, schreibt man ein **offenes Intervall**

$$x \in (a; b) \text{ bzw. } x \in]a; b[$$

☞ Es gibt mehrere Notationen, Werte eines Intervalls auszugrenzen. Die am meisten gebrauchte Schreibweise ist die Notation mit runden Klammern.

Halboffene Intervalle

Zudem gibt es noch **halboffene Intervalle**, wie das **rechtsoffene Intervall**

$$x \in [a; b) \text{ bzw. } x \in [a; b[$$

und das **linksoffene Intervall**

$$x \in (a; b] \text{ bzw. } x \in]a; b]$$

☞ Ein Intervall ist eine Menge, deshalb können wir somit alle Mengenoperationen damit durchführen:

$$[0.5; 10] \cup \mathbb{N} \setminus \{20\}$$

beinhaltet zum Beispiel alle reellen Zahlen von 0.5 bis 10, sowie alle natürlichen Zahlen, außer 20.

3.3 Aufgaben

1. Seien $A = \{1, 3, 4, 5\}, B = \{4, 5, 6, 7\}$ gegeben, berechne $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$
2. Gilt das Distributiv Gesetz also $(A \cap B) \cap C) = A \cap (B \cap C)$ und $(A \cup B) \cup C) = A \cup (B \cup C)$? (inklusive Begründung).
3. Begründe, gilt $A^C \setminus B^C == (A \setminus B)^C$?.
4. Gilt $(A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A) \iff (A = B)$?
5. Seien A, B zwei Mengen. Verwende die Mengenoperationen um die Menge zu konstruieren, die alle Elemente aus A oder B enthältt, die nicht zugleich in A und in B liegen. Um welche Operation handelt es sich?
6. Man addiere eine Zahl aus $\mathbb{N}$ und eine aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. In welcher Menge liegt die neue Zahl? (ohne Rundung!)
7. Zähle die fünf größten Elemente von $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ auf!
8. Definiere mit Hilfe der natürlichen Zahlen die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen! $\mathbb{Z}$ darf innerhalb der Definition nicht verwendet werden!
9. Schreibe folgende Mengen in Intervallschreibweise und vereinfache sie so gut es geht:

- $[5; 100] \cup (-\infty; 5)$
- $(3; 5] \cup (0; 3)$
- $\mathbb{N} \setminus (9; 15]$
- $(-1; 8] \cap (9; 15]$

4 Funktionen

4.1 Definition

Eine **Funktion** (oder **Abbildung**) f ist eine Relation zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge (Funktionsargument x) genau ein Element der anderen Menge (Funktionswert y) zuordnet, so dass

$$y = f(x).$$

Ist $x_1 \neq x_2$, dann ist $f(x_1) = f(x_2)$ natürlich zulässig.

1. Die **Definitionsmenge** $\mathbb{D}$ von f ist die Menge, aus der das Funktionsargument x stammt.

2. Die **Zielmenge** Z von f ist die Menge der Funktionswerte y.

3. Die **Wertemenge** oder besser der **Bildbereich** von f (manchmal auch nur das **Bild** von f) $\mathbb{W} \subset Z$ ist die Menge der Funktionswerte, die die Funktion annehmen kann. Oder kurz

$$\mathbb{W} := \{f(x) \mid x \in \mathbb{D}\}$$

Wir schreiben kurz

$$f : \mathbb{D} \to Z, x \mapsto f(x) \text{ oder } f : \mathbb{D} \to Z, \text{„}f(x)\text{“} := f(x)$$

um anzugeben was $\mathbb{D}$ und Z ist und wie die Funktion aussieht, also zum Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 5 \text{ bzw. } f(x) := 2x + 5$$

☞ Jedes $x \in \mathbb{D}$ hat sein $y \in Z$, aber nicht jedes $y \in Z$ sein $x \in \mathbb{D}$ (sprich jedem Wert der Definitionsmenge wird ein Zielwert zugeordnet, aber nicht jeder Zielwert muss einen Wert in der Definitionsmenge haben). Jedoch hat jedes $y \in \mathbb{W}$ sein $x \in \mathbb{D}$ (jeder Wert im Bildbereich der Funktion hat einen zugehörigen Wert im Definitionsbereich).

Die Definitionsmenge gibt hierbei an, in welchem Bereich die Funktion definiert ist, sprich welche Werte „in die Funktion eingesetzt werden dürfen“. Die Abbildungsvorschrift sorgt nun dafür, dass jedem Wert x des Definitionsbereichs genau ein Wert y des Bildbereiches zugeordnet werden kann. Die Wertemenge enthält genau jene Zahlen, welche man durch Abbildung des Definitionsbereiches mithilfe der Abbildungsvorschrift erhalten kann.

Zur Vorstellungserleichterung: Vorstellen kann man sich das ganze wie die Erschaffung eines Gemäldes. Die Definitionsmenge ist hierbei die abzubildende Szene (zum Beispiel eine Landschaft).
Die Zielmenge sind alle Farben, welche der Künstler besitzt (und mischen kann), um das Bild anzufertigen.
Die Wertemenge, ist die Menge der Farben, welche der Künstler wirklich verwendet, um das Gemälde zu erzeugen.

☞ Die Worte Bild und Urbild, stammen tatsächlich aus dem Bereich der Kunst. Das Urbild ist die Originalszene und das Bild die Abbildung dieser Szene, welche der Künstler erstellt. In der Mathematik werden die x-Werte ab und an auch als Urbild und die y-Werte als Bild bezeichnet.

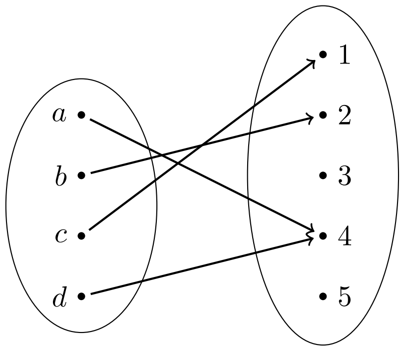


Abbildung 1: Eine Funktion mit einer endlichen Definitionsmenge $\mathbb{D} = \{a, b, c, d\}$ (links), einer endlichen Zielmenge $Z = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (rechts) und einer Bildmenge $\mathbb{W} = \{1, 2, 4\}$. Alle Elemente aus $\mathbb{D}$ besitzen genau eine „Verbindung“.

Beispiele:

- $\mathbb{D} \to \mathbb{W}, f(x) := x^2$ bzw. $x \mapsto x^2$
- $\mathbb{D} \to \mathbb{W}, f(x) := 42x(12x - 12(3x^2))$ bzw. $x \mapsto 42x(12x - 12(3x^2))$

4.2 Grundlegende Eigenschaften von Funktionen (Bonus)

4.2.1 Surjektivität (Bonus)

Eine Funktion f ist surjektiv (siehe Abb. 2) genau dann wenn jeder Wert der Zielmenge mindestens einmal angenommen wird:

$$\forall y \in Z \ \exists x \in \mathbb{D} : f(x) = y$$

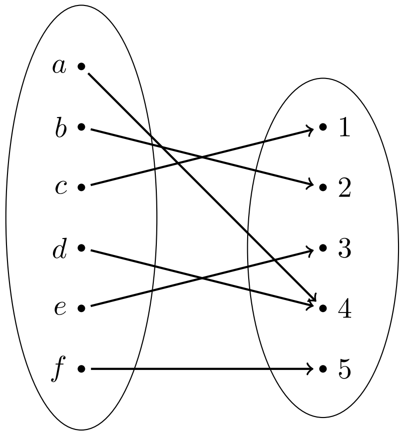


Abbildung 2: Eine surjektive Funktion.

4.2.2 Injektivität (Bonus)

Eine Funktion f ist injektiv (siehe Abb. 3) genau dann wenn jeder Wert der Bildmenge **nicht mehrmals** angenommen wird:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{D} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

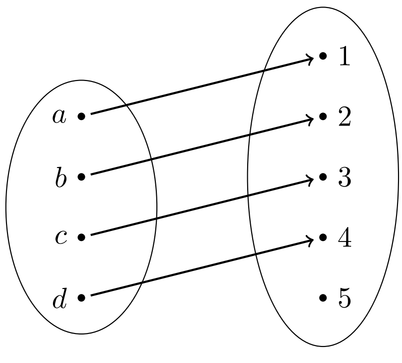


Abbildung 3: Eine injektive Funktion.

4.2.3 Bijektion (Bonus)

Eine Funktion ist bijektiv (siehe Abb. 4), wenn sie zugleich injektiv und surjektiv ist. Eine solche Funktion ist eine eins-zu-eins Relation, sie besitzt zudem eine Umkehrfunktion.

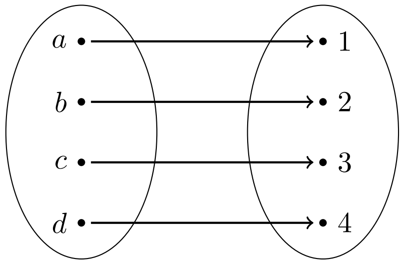


Abbildung 4: Eine bijektive Funktion.

4.3 Lineare Funktionen

Zu den einfachsten Funktionen gehören die linearen Funktionen. Alle linearen Funktionen (mit nur einer Variable) können in folgende Form gebracht werden:

$$f(x) = mx + t.$$

Hierbei ist m der konstante Wert der Steigung:

$$m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Die Konstante t ist auch als y-Achsenabschnitt bekannt. Er wird so bezeichnet, da die Funktion für den x-Wert 0 den Funktionswert $y = t$ annimmt. Viele komplizierte Funktionen werden am Ende doch wieder mit Hilfe einfacher lineare Funktionen angenähert. Lineare Funktionen lassen sich auf dem Computer leicht berechnen. Sie sind so prominent und verbreitet, dass es für sie eine eigene Vorlesung gibt: **Lineare Algebra**.

4.3.1 Die Punktsteigungsform

Um eine Gerade zu Definieren, sind immer zwei Dinge von Nöten:

- zwei Punkte $P_1 = (x_1, f(x_1)), P_2 = (x_2, f(x_2))$, welche auf der Geraden liegen **oder**
- ein Punkt $P = (x_p, f(x_p))$ und die Steigung m der Geraden

Im ersteren Fall berechnen wir m nach obiger Gleichung $m = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ und sind im Fall 2. Um dann weiter zu verfahren, benötigt man die Punktsteigungsform, welche wie folgt lautet:

$$f(x) = m \cdot (x - x_p) + y_p$$

m ist hierbei wie gehabt die Steigung der Geraden und x die Variable. x_p und $f(x_p) = y_p$ sind jedoch die Koordinaten eines Punktes P, welcher auf der Geraden liegt. Nachdem man die Punktsteigungsform dann ausmultipliziert hat, besitzt man wieder die ganz normale Geradengleichung, wie oben beschrieben.

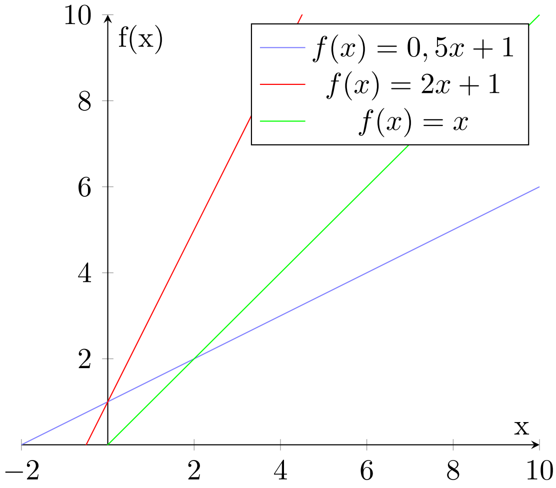


Abbildung 5: Beispiele linearer Funktionen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

4.3.2 Schnittpunkt zweier Geraden

Ein Schnittpunkt zweier Funktionen ist ein Punkt, welcher sich auf beiden Graphen der Funktionen befindet. Wenn ein Punkt auf beiden Graphen sein soll, so muss er beide Funktionen erfüllen. Seien f_1, f_2 Geradenfunktionen so scheiden sich die von ihnen definierten Geraden im Punkt $S = (x, y)$ wenn

$$f_1(x) = f_2(x) = y$$

Beispiel: Nehmen wir als Beispiel die Funktionen $f_1(x) = 4x$ und $f_2(x) = 12x-23$. Es muss nun gelten

$$f_1(x) = f_2(x) \iff 4x = 12x - 23 \iff -8x = -23 \iff x = \frac{23}{8}$$

Nun muss man den erhaltenen x-Wert nur noch in eine der beiden Gleichungen einsetzen und man erhält das Ergebnis oder wir schreiben frech

$$S = \left(\frac{23}{8}, f_1(23/8)\right) = \left(\frac{23}{8}, \frac{23}{2}\right)$$

Der Schnittpunkt hat somit die Koordinaten $S = \left(\frac{23}{8}, \frac{23}{2}\right)$.

4.3.3 Besondere Geraden

- Besitzen zwei Geraden dieselbe Steigung, so sind diese parallel zueinander. Im Normalfall besitzen diese keinerlei Schnittpunkte. Eine besondere Art der Parallelität ist jedoch die Identität zweier Geraden. Identische Geraden besitzen unendlich viele Schnittpunkte.

- Sind zwei Geraden senkrecht (im rechten Winkel) zueinander, so ist das Produkt ihrer Steigungen -1: $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- Eine Tangente ist eine Gerade, die mindestens einen Punkt, sowie an diesem Punkt die Steigung mit einer Kurve gemeinsam hat. Man sagt auch, sie berührt den Punkt der Kurve an dieser stelle.
- Eine Sekante schneidet eine Kurve in zwei Punkten.

4.4 Quadratische Funktionen

Nach den linearen sind die sogenannten quadratischen Funktionen noch relativ einfach. Sie werden auch als Parabelgleichungen bezeichnet. Ihren Namen verdanken diese Funktionen der Tatsache, dass ihre Variable zumindest einmal quadratisch und niemals mit einem höheren Exponenten als 2 in die Funktion mit eingeht.
Um diese Definition jedoch richtig zu verstehen, müssen wir zunächst einmal anschauen, was ein Exponent ist:

4.5 Exponent und Basis

Die Worte Exponent und Basis, spielen immer dann eine Rolle in der Mathematik, wenn es sich um ein Konstrukt wie a^b handelt (Gesprochen: “a hoch b“).
In diesem Konstrukt wird “a“ als Basis und “b“ als Exponent bezeichnet. Hierbei gilt:

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^2 = a \cdot a$
- $a^3 = a \cdot a \cdot a$
- $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$
- $\ldots$

Rechengesetze für Exponenten

1. $((b)^n)^m = b^{n \cdot m}$
2. $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$
3. $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$

Will man nun, solch eine Funktion umkehren, so muss man die n-te Wurzel ziehen:

Beispiel für Wurzeln

1. $f(x) = x^2 => f^{-1}(y) = \sqrt[2]{y}$ oder kürzer $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$
2. $f(x) = x^3 => f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$
3. $f(x) = x^4 => f^{-1}(y) = \sqrt[4]{y}$

Rechengesetze für Wurzeln

1. $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$
2. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$
3. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
4. $\sqrt[m]{b^n} = b^{\frac{n}{m}}$

Im Fall a^2 wird auch oft einfach nur "a zum Quadrat" gesagt.
Dies kommt daher, dass ein Quadrat aus vier gleich langen Seiten besteht und es sich bei allen Innenwinkel (die Winkel innerhalb des Rechtecks), um so genannte "rechte Winkel" (genau 90 Grad) handelt. Die Fläche eines Quadrats, mit der Seitenlänge a, lässt sich deshalb mit der Formel $a \cdot a$ oder auch a^2 berechnen.

4.5.1 Die Normalparabel

Die Normalparabel besitzt die Formel

$$f(x) = x^2$$

Sie ist eine nach oben geöffnete, achsensymmetrische Kurve dar, deren niedrigster Punkt (Scheitel) S im Ursprung des Koordinatensystems $(0, 0)$ liegt.

4.5.2 Stauchen und Strecken

Durch Multiplizieren der Normalparabel mit einer konstanten a lässt sich die Kurve stauchen oder strecken $f(x) = a \cdot x^2$. Ist der Betrag von a kleiner 1, so wird die Parabel gestaucht (siehe Abb. 6). Ist er größer 1, so wird sie gestreckt. Darüber hinaus wird die Funktion durch einen negativen Wert von a an der x-Achse gespiegelt und die Parabel ist somit nach unten geöffnet.

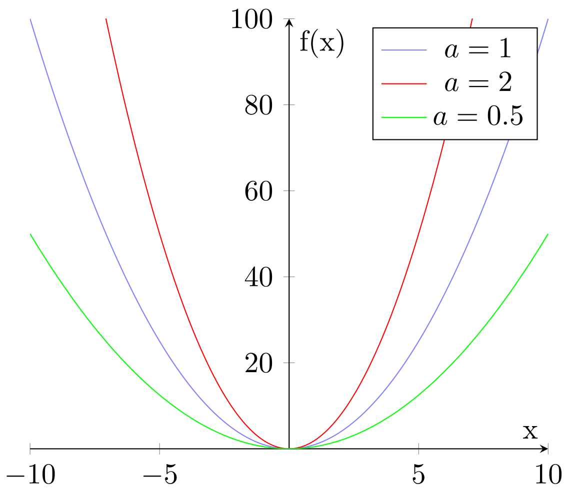


Abbildung 6: Normalparabel (blau), gestreckte (rot) und gestauchte Normalparabel (grün).

4.5.3 Die Scheitelform

Durch Kombination von Stauchung/Streckung und Verschiebung erhält man die so genannte Scheitelform:

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s.$$

Mithilfe dieser Form lassen sich alle Arten quadratischer Funktionen darstellen. Außerdem lassen sich die Koordinaten des Scheitels, der Stauchungs- bzw. Streckungsfaktor der Funktion, sowie die Frage, ob sie nach oben oder unten geöffnet ist, auf einfachste Weise bestimmen.

4.5.4 Die Normalform einer quadratischen Gleichung

Multipliziert man die Scheitelform aus, so erhält man

$$f(x) = a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x_s x + x_s^2 + y_s.$$

Ersetzt man nun die konstanten Werte $-2ax_s$ durch b und $x_s^2 + y_s$ durch c, so erhält man die **Normalform** quadratischer Gleichungen:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

4.5.5 Verschieben einer Funktion (für alle Funktionen)

Angenommen wir haben eine Funktion f mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und wollen eine neue Funktion f^* bauen, wobei wir diese um $d > 0$ nach rechts verschieben wollen. Damit muss gelten:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f^*(x) = f(x - d) \iff \forall x \in \mathbb{R} : f^*(x + d) = f(x).$$

Wir nehmen also einfach die gegebene Funktion $f(x)$ und ersetzen jedes x durch $x - d$. Setzen wir hingegen $f^*(x) = f(x) + d$ so verschieben wir die Funktion nach oben. Für $d < 0$ folgt, dass wir die Funktion nach links bzw. nach unten verschieben.

4.5.6 Die binomischen Formeln

Die binomischen Formeln sind das Ergebnis des Ausmultiplizierens, hat man sie jedoch im Kopf so spart man viel Zeit:

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

4.5.7 Die quadratische Ergänzung

Die quadratische Ergänzung hilft uns bei der Umwandlung der Normalform in die Scheitelform und somit bei der Bestimmung des Scheitels. Wir werden diese an anhand eines Beispiels erklären.

Beispiel: Sei

$$f(x) = 3x^2 - 6x - 24.$$

Im ersten Schritt klammern wir die Konstante "a" (hier gleich 3) aus:

$$f(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3 \cdot (x^2 - 2x - 8).$$

Schaut man sich nun den Term innerhalb der runden Klammern genauer an, so kann man eine gewisse Ähnlichkeit mit der ersten, bzw. zweiten binomischen Formel feststellen. Deshalb folgt nun auch der wichtigste Schritt, die eigentliche quadratische Ergänzung. Wir ergänzen die Formel nun so, dass wir eine der beiden binomischen Formeln anwenden können. Dafür müssen wir erst einmal feststellen, was der a- und was der b-Wert der binomischen Formeln ist. Die zweite binomische Formel lautet

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Vergleichen wir dies mit unserem Term

$$x^2 - 2x - 8$$

so sehen wir gleich, dass

$$a := x \Rightarrow 2ab = 2x \Rightarrow b = 1.$$

Allerdings ist b^2 für $b = +1$ nicht -8 sondern 1. Um f nicht zu verändern müssen wir deshalb eine Korrektur vornehmen:

$$f(x) = 3 \cdot \left(\underbrace{(x-1)^2}_{\text{wegen 2. bin. Formel}} + \underbrace{-1^2 - 8}_{\text{da } b^2=1 \text{ und nicht } -8} \right)$$

Hier nochmal die Übersicht:

$$f(x) = 3 \cdot \left(\underbrace{x^2}_{:=a^2} \underbrace{-2 \cdot x \cdot 1}_{:=-2ab} \underbrace{+1^2}_{:=+b^2} \underbrace{-1^2 - 8}_{:=-\text{Korrektur}} \right)$$

Nun können wir noch ein wenig zusammenfassen

$$f(x) = 3 \cdot ((x-1)^2 - 1^2 - 8) = 3((x-1)^2 - 9) = 3(x-1)^2 - 27$$

Und voilà, schon ist man fertig.

4.5.8 Berechnung der Nullstellen

Eine Nullstelle ist ein Punkt, an dem der Graph die x-Achse schneidet. Anders ausgedrückt: Ein Punkt an dem die Funktion $f(x)$ den Wert 0 erreicht. Um Nullstellen zu berechnen, löst man die Gleichung

$$f(x) = 0,$$

nach x. Beispiel: $f(x) = x^2 - 1$, Nullstellen: $x^2 - 1 = 0 \implies x^2 = 1$, Lösungen sind $+1$ und -1. Die Gleichung kann also auch mehrere Lösungen haben.
Um die Nullstellen von quadratischen Gleichungen zu berechnen, gibt es mehrere Möglichkeiten.

Zerlegung in Linearfaktoren (auch für Polynome höherer Ordnung): Mit der Linearfaktorzerlegung erhalten wir eine Form der Funktion, die uns sagt für welche x ein Faktor Null und somit die gesamte Funktion Null ergibt. Auch dies zeigen wir an einem Beispiel.

Beispiel Sei

$$f(x) = 6x^2 - 24$$

Wir fragen uns für welche x ist $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \iff 6x^2 - 24 = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \overset{\text{3. bin. Formel}}{\iff} (x-2)(x+2) = 0$$

Die Faktoren der Funktion sind somit $(x-2)$ und $(x+2)$. $(x-2) = 0$ für $x = 2$ und $(x+2) = 0$ für $x = -2$. Damit sind die Nullstellen:

$$N_1 = (2, f(2)) = (2, 0) \text{ und } N_2 = (-2, f(-2)) = (-2, 0)$$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen (Mitternachtsformel): Eine weitere Möglichkeit, die Nullstellen einer quadratischen Funktion zu berechnen, wäre durch Verwendung der so genannten "Mitternachtsformel":

$$0 = ax^2 + bx + c \Rightarrow x_{1,2} := \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Falls jedoch

$$b^2 - 4ac < 0$$

existiert **keine Nullstelle**, da wir in den reellen Zahlen keine negative Wurzel kennen und falls

$$b^2 - 4ac = 0$$

handelt es sich um eine sog. **doppelte Nullstelle**. Ansonsten handelt es sich um **zwei Nullstellen**. Dabei nennen wir $b^2 - 4ac$ die Diskriminante. Wie entsteht diese Formel?

$$ax^2 + bx + c$$

Wird auf die Scheitelform gebracht

$$ax^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

und gleich Null gesetzt

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Den Beinamen "Mitternachtsformel" verdankt sie ihrer Wichtigkeit. Sie wird nämlich tatsächlich so oft gebraucht, dass man sie auch noch auswendig aufsagen können sollte, wenn man um Mitternacht gefragt wird!

Raten der Nullstellen (für alle Funktionen): Ist man erfahren genug und die Funktion einfach genug, so kann man häufig die Nullstelle auch einfach erraten. Dann muss man noch einen Beweis erbringen, dass es sich wirklich um einen Nullstelle handelt. Hierfür setzten wir einfach das geratene x_0 in $f(x)$ ein und überprüfen ob

$$f(x_0) \stackrel{?}{=} 0$$

4.5.9 Symmetrie

Eine Funktion ist genau dann symmetrisch zur y-Achse, wenn gilt:

$$f(x) = f(-x).$$

Solche Funktionen werden auch als gerade Funktion bezeichnet. Eine Funktion ist genau dann symmetrisch zum Ursprung, oder auch ungerade, wenn gilt:

$$f(-x) = -f(x).$$

Quadratische Funktionen sind immer Achsensymmetrisch, jedoch nicht immer zur y-Achse.

☞ **Achtung:** Gerade hat in dem Sinne nichts mit der Geraden zu tun!!! Die Bezeichnungen gerade und ungerade Funktion stammen daher, dass alle Polynome 4.7, welche lediglich gerade Exponenten aufweisen, auf jeden Fall symmetrisch sind. Polynome mit ausschließlich ungeraden Exponenten sind Punktsymmetrisch.

4.6 Übungen

1. Berechnen Sie die Scheitelpunkte folgender Gleichungen
   - $f(x) = 3x^2 - 3x + 6$
   - $f(x) = x^2 - 8x - 4$
   - $f(x) = x^2 + 4x + 1$
   - $f(x) = -4x^2 + 16x - 1$
2. Berechnen Sie die Nullstellen der oberen Gleichungen

4.7 Polynome

4.7.1 Was ist ein Polynom

Bei Funktionen der Form $f(x) = a_n x^b + a_{n-1}x^{b-1} + a_{n-2}x^{b-2} + ...a_0$ handelt es sich um so genannte Polynome. Da sie sehr einfach differenzierbar und integrierbar sind, haben sie eine sehr wichtige Rolle als mathematisches Werkzeug, vor allem in der Numerik. Hier nähert man komplexe Funktionen mit Polynomen an und kann diese dann einfach ableiten oder integrieren, was mit der komplexen Funktion meist nicht so einfach ist.

4.7.2 Nullstellenberechnung mithilfe der Polynomdivision (Bonus)

Im Folgenden werde wir nun anhand des Beispiels

$$f(x) = 6x^3 - 12x^2 - 6x + 12$$

die Nullstellenberechnung mithilfe der Polynomdivision erläutern. Dabei werden alle Nullstellen erraten. Jede Nullstelle liefert einen Linearfaktor.

1. Wie immer setzen wir die Funktion gleich Null und werden den Faktor los:

   $$6x^3 - 12x^2 - 6x + 12 = 0 \iff x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

2. Nun muss man (leider) die erste Nullstelle "erraten". Da es aber sehr viele Zahlen gibt, würde dies ohne einen kleinen Trick sehr schwer werden. Besitzt ein Polynom lediglich ganzzahlige Koeffizienten, so sind die x-Werte der Nullstellen ganzzahlige Teiler von des letzten Koeffizienten (a_0). Warum dies so

ist, schauen wir uns später an. Unser Beispiel kann also nur Nullstellen bei x-Werten aus $\{-1, 1, -2, 2\}$, besitzen. Nun kann man systematisch alle möglichen Kandidaten abarbeiten oder sieht es direkt. Testen mit $x \stackrel{?}{=} -1$:

$$(-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 = 0$$

Glücklicherweise haben wir schon beim ersten Versuch eine Nullstelle bei $x_1 = -1$ entdeckt.

3. Nun werden wir uns die Eigenschaft des Faktorisierens zu Nutze machen, dass jedes Polynom in Faktoren $(x - x_{Nullstelle})$ zerlegt werden kann. Wir werden nun eine Division des Polynoms durch $(x - (-1)) = (x + 1)$ durchführen:

$$\begin{array}{l} \big(\ \ x^3 - 2x^2 \ \ - x + 2\big) : \big(x + 1\big) = x^2 - 3x + 2 \\ \underline{-x^3 \ \ - x^2} \\ \qquad - 3x^2 \ \ - x \\ \qquad \underline{\ \ 3x^2 + 3x} \\ \qquad\qquad\quad 2x + 2 \\ \qquad\qquad\ \underline{- 2x - 2} \\ \qquad\qquad\qquad\ \ 0 \end{array}$$

4. Jetzt beginnt der Vorgang mit der neuen Funktion $(g(x) = x^2 - 3x + 2)$, welche einen Grad weniger hat von Neuem. In unserem Fall jedoch, da wir nun eine quadratische Funktion haben, können wir die Mitternachtsformel zur Lösung heranziehen. Die drei Nullstellen unserer Beispielfunktion lauten:

$$x_0 = -1; x_1 = 1; x_2 = 2$$

Die Funktion lässt sich also auch wie folgt schreiben:

$$f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

Anhand der “neuen Darstellungsart“ der Funktion können wir sehen, warum alle Nullstellen, unter der Voraussetzung, dass sie alle ganzzahlig sind, ganzzahlige Teiler des letzten Koeffizienten sind.
Nehmen wir dafür ein generisches Beispiel zur Hand:
$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c) = (x^2 - ax - bx + ab)(x - c) = (x^3 - ax^2 - bx^2 + abx - cx^2 + acx + bcx - abc)$
Man kann also sehen, dass der Betrag des letzten Koeffizienten lediglich die Multiplikation aller Nullstellen ist. Sind diese nun alle ganzzahlig, so ist auch jede Nullstelle ein ganzzahliger Teiler des letzten Koeffizienten.

4.8 Übungen

Berechne die Nullstellen folgender Gleichungen:

- $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
- $f(x) = 3x^3 + 12x^2 + 3x - 18$

4.9 Exponentialfunktionen

4.9.1 Was sind Exponentialfunktionen?

Exponentialfunktionen sind Funktionen der Form

$$f(x) = a \cdot b^{x-x_0} + y_0$$

Dabei ist

a Stauchungs- bzw. Streckungsfaktor

b Basis

x_0 Wert der Verschiebung in x-Richtung (siehe Abschnitt 4.5.5)

y_0 Wert der Verschiebung in y-Richtung (siehe Abschnitt 4.5.5)

4.9.2 Umkehrfunktion - die Logarithmusfunktion

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist die Logarithmusfunktion. Sei $f(x)$ gleich

$$f(x) = a \cdot b^{x-x_0} + y_0$$

So berechnet sich die Umkehrfunktion wie folgt:

$$\begin{aligned}
y = a \cdot b^{x-x_0} + y_0 &\overset{-y_0}{\iff} \\
y - y_0 = a \cdot b^{x-x_0} &\overset{/a}{\iff} \\
\frac{y-y_0}{a} = b^{x-x_0} &\overset{\log_b}{\iff} \\
\log_b\left(\frac{y-y_0}{a}\right) = x - x_0 &\overset{+x_0}{\iff} \\
\log_b\left(\frac{y-y_0}{a}\right) + x_0 = x &
\end{aligned}$$

Da die Exponentialfunktion nur mit einer Zielmenge $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ bijektiv ist, ist ihre Umkehrfunktion, die Logarithmusfunktion, nur auf $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ definiert!

4.10 Trigonometrische Funktionen

4.10.1 Die Winkelfunktionen rechtwinkliger Dreiecke

Grundlegend gibt es drei Winkelfunktionen, welche auf rechtwinklige Dreiecke angewandt werden können:

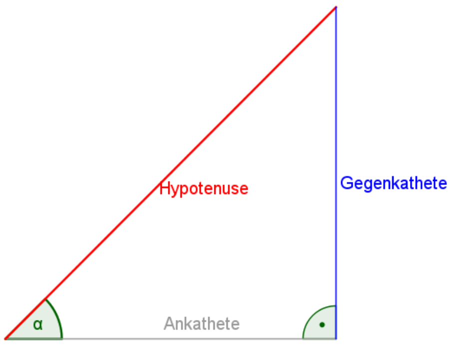
- Sinus $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathbb{W} = [-1; 1]$
- Kosinus $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \mathbb{W} = [-1; 1]$
- Tangens $\tan : \left(\mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}\right) \to \mathbb{R}, \mathbb{W} = \mathbb{R}$

☞ Der Tangens ist für die Nullstellen des Kosinus nicht definiert denn

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Die drei Seiten des Dreiecks werden als Hypotenuse (längste Seite des Dreiecks, -gegenüber des rechten Winkels-), Ankathete (kurze Seite, welche am Winkel α anliegt), und Gegenkathete (Seite gegenüber des Winkels α) bezeichnet.

1. $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegekathete}}{\text{Hypotenuse}}$
2. $\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$
3. $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$



4.10.2 Der Einheitskreis

Am besten sieht man die Eigenschaften der Winkelfunktionen bei der Betrachtung des Einheitskreises. Der Einheitskreis ist an sich nichts anderes als ein Kreis, mit Radius $r = 1$ LE (Längeneinheiten) und Kreismittelpunkt im Ursprung. Dabei ist die x-Koordinate des Punktes, am Ende der Hypotenuse des eingezeichneten Dreiecks, der Kosinuswert des Winkels Alpha und die y-Koordinate der Sinuswert. Der Tangens ist die Steigung der Hypotenuse. Der Zusammenhang zwischen Einheitskreis und den Funktionen ist in Abb. 7 zu sehen.

4.10.3 Winkelmaß und Bogenmaß

Bisher haben wir immer mit Winkelmaßen gerechnet, wie zum Beispiel $\alpha = 45°$. Neben dieser Möglichkeit, Winkel auszudrücken, gibt es auch noch das Bogenmaß $b = 2\pi\ rad$. Das Bogenmaß ist die Länge des Kreisbogens mit dem Radius $r = 1$ unter einem bestimmten Winkel. Die Umrechnung ist einfach

$$rad(\alpha) = 2\pi\frac{\alpha}{360} rad \text{ für } \alpha \in [0°; 360°] \quad rad^{-1}(b) = 360 \cdot \frac{b}{2\pi}^{\circ} \text{ für } b \in [0; 2\pi]$$

Wie ein Winkelwert mit ° gekennzeichnet wird, so kennzeichnet man das Bogenmaß mit dem Wörtchen “*rad*“.

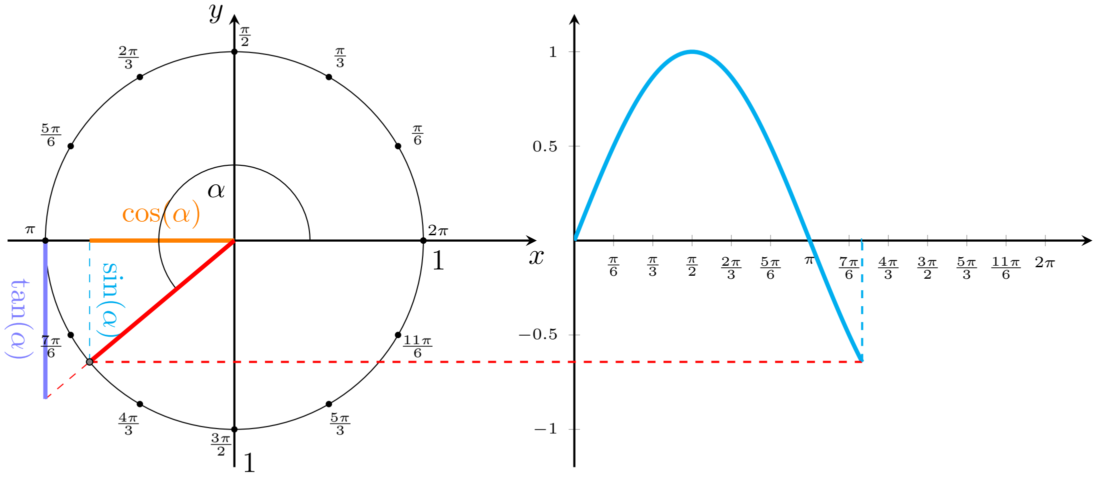


Abbildung 7: Einheitskreis (links) und die Sinusfunktion (rechts).

> ☞ An den meisten "höheren" Schulen wird das Bogenmaß bevorzugt.
> Ihr solltet eure Taschenrechner dementsprechend umstellen (meist ist dies über eine *Mode*-Taste zu bewerkstelligen)

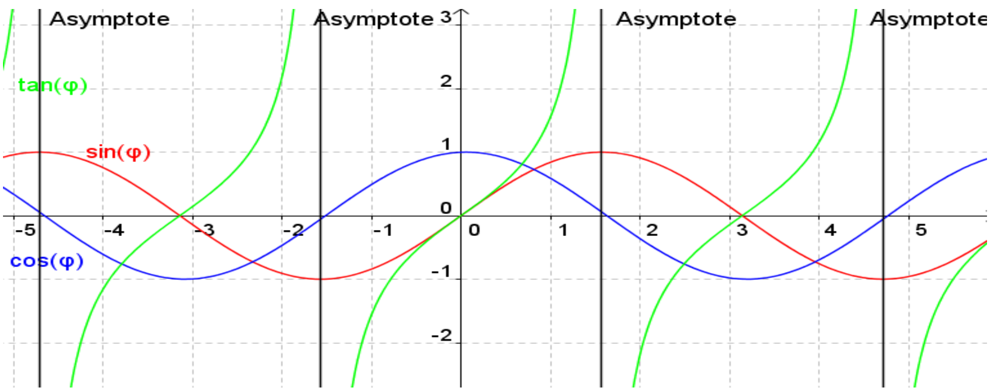


Abbildung 8: Funktionsgraphen von Sinus, Kosinus und Tangens

4.10.4 Nullstellen, Asymptoten und Symmetrie

Alle Winkelfunktionen sind periodisch. Deshalb treten auch ihre Nullstellen in gleichbleibenden Abständen auf.

- Sinusfunktion:
$$\sin(x) = 0 \iff x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$

was sich mit den Nullstellen des Tangens deckt.

- Kosinusfunktion:

$$\cos(x) = 0 \iff x \in \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\},$$

was sich mit den Definitionslücken des Tangens deckt.

Des Weiteren besitzt die Tangensfunktion eine periodisch auftretende senkrechte Asymptote an den Nullstellen des Kosinus. Betrachtet man die Graphen im Hinblick auf ihre Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems, stellt man fest, dass die Sinus- und Tangesnsfunktion **punktsymmetrisch** zum Ursprung (ungerade) und die Kosinusfunktion achsensymmetriesch zur y-Achse (gerade) ist.

4.10.5 Periodizität

Eine Funktion ist dann periodisch, wenn es eine Konstante p gibt, für die gilt:

$$f(x + p) = f(x), \forall x \in \mathbb{D}$$

Diese Definition sagt eigentlich nichts anderes aus, als dass sich die Funktion ständig im gleichen Abstand wiederholt.

5 Differentiation

Um die Differentiation zu verstehen, benötigen wir zunächst einmal etwas Wissen über Grenzwerte.

5.1 Limes

Das Wort Limes kommt aus dem Latein und bedeutet so viel wie *Grenzweg* und bezeichnet die Grenzwälle, welche das Römische Reich zwischen dem 1. und 6. Jahrhundert in Europa, Vorderasien und Nordafrika angelegt hatten.
Auch im Bereich der Mathematik bezeichnet der Limes einen Grenzwall. Dieser kann nie ganz erreicht werden, jedoch kann man sich beliebig nah an ihn annähern.
Wenn also x_0 der Wert ist, an dem sich dieser Grenzwert befindet, so kann man den Abstand zwischen dem aktuell betrachtetem x-Wert und x_0 immer kleiner werden lassen. Man schreibt auch $\lim\limits_{x \to x_0}$. Geht x beliebig nahe an x_0 heran, so kann man schließlich den s.g. Grenzwert berechnen $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Hierfür betrachtet man, wie sich die Funktion verhält, wenn der Abstand immer kleiner wird.
Ausgesprochen wird dies *Limes von x gegen x_0 von f von x* Beim Ableiten möchten wir etwas über die Veränderung einer Funktion erfahren.

> ☞ Hin und wieder will man lediglich den Grenzwert aus einer bestimmten Richtung betrachten.
> Will man den linksseitigen Grenzwert bestimmen, so schreibt man:
> $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x_0)$ da x immer etwas kleiner ist, als x_0. Der rechtsseitige Grenzwert, wird wie folgt angegeben:
> $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x_0)$
> Es existieren auch noch weitere Schreibweisen, welche mit de $>$ *und* $<$ Zeichen gebildet werden, jedoch belassen wir es im Moment bei dieser Schreibweise.

5.2 Heranführung an die Differentiation

Angenommen ein Auto startet an einem Punkt und die Funktion $s(t)$ gibt an wie viele Meter das Auto zum Zeitpunkt t zurückgelegt hat. Wir fragen uns nun wie schnell das Auto nach 10 Sekunden fährt. Wie können wir dies herausfinden? Wir können das abschätzen indem wir

$$\bar{v} = \frac{\text{Strecke}}{\text{Zeit}} \approx \frac{s(11) - s(9)}{11 - 9} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(11) - s(9)}{2}$$

Aber ist $\bar{v} \stackrel{?}{=} v(10)$? Nein $\bar{v}$ ist nur die durchschnittliche Geschwindigkeit zwischen $s(9)$ und $s(11)$. Wenn wir die Geschwindigkeit genauer bestimmen möchten, müssen wir den Abstand/die *Umgebung* von/um 10 kleiner wählen, 0 darf er jedoch nicht werden, denn wir dürfen nicht durch Null teilen. Hilfe gibt uns der Grenzwert:

$$v(10) = \lim_{h \to 0} \frac{s(10+h) - s(10)}{h}$$

Der Grenzwert muss natürlich existieren! Nehmen wir einmal an das Auto beschleunigt und $s(t) = 2t^2$.

$$\begin{aligned} v(10) &= \lim_{h \to 0} \frac{s(10+h) - s(10)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(10+h)^2 - 2(10)^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{40h + 2h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (40 + 2h) \to 40 \end{aligned}$$

5.3 Ableiten von Funktionen

Die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0, geschrieben $f'(x_0)$ beschreibt das Verhalten der Funktion in der *Umgebung* an der Stelle x_0. Sie ist auch die Steigung der Funktion an dem Punkt x_0. Die Tangente an x_0 hat die Steigung $f'(x_0)$. Eine Tangente ist eine Gerade, die den Graphen in nur einem einzigen Punkt berührt. Um die Tangentensteigung zu erhalten, betrachtet man zunächst die Steigung einer Sekante und nähert den zweiten Punkt dem ersten immer weiter an.

Definition 5.1 (Differenzierbarkeit in x_0) *Eine Funktion heißt differenzierbar an der Stelle x_0 wenn der Grenzwert*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \text{ mit } h = x - x_0$$

existiert. Dieser Grenzwert wird Ableitung nach x an der Stelle x_0 genannt und wird als $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}(x_0)$ notiert.

Ein Grenzwert a an der Stelle x_0 der Funktion f existiert wenn der linke Grenzwert gleich dem rechten Grenzwert gleich dem Funktionswert gleich a ist, also

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) = a$$

Definition 5.2 (Differenzierbarkeit) *Eine Funktion heißt differenzierbar, wenn sie an jeder Stelle $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar ist.*

Anmerkung: Eine differenzierbare Funktion ist stetig und eine in x_0 differenzierbare Funktion ist stetig in x_0. Die Umkehrung gilt nicht!

5.3.1 Die erste Ableitung

Für die gewöhnlichen differenzierbaren Funktionen gibt es die uns bekannten Ableitungsregeln. Um eine Funktion abzuleiten multipliziert man bei Polynomen jeweils die Exponenten mit den dazugehörigen Koeffizienten ihrer Basis und subtrahiert den Exponenten dabei um 1. Konstanten fallen dabei weg.

$$f(x) = a_1 \cdot (x - a_2)^{a_3} + a_4 \Rightarrow f'(x) = a_1 \cdot (x - a_2)^{a_3 - 1} \cdot a_3 \text{ mit } a_1, a_2, a_3 \text{ konstant.}$$

Beispiel:

$$f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 2x^{2-1} = 4x$$

5.4 Besondere Ableitungen

Für Logarithmus- und e-Funktionen sowie die Winkelfunktionen gelten besondere Ableitungsgesetze:

- $\sin'(x) = \cos(x)$
- $\cos'(x) = -\sin(x)$
- $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- $\ln'(x) = \frac{1}{x}$
- $(e^x)' = e^x$

5.5 Ableitungsregeln

Bei komplizierteren Funktionstermen gibt es bestimmte Regeln im Hinblick auf ihre Ableitung.

5.5.1 Produktregel

$$f(x) = h(x) \cdot g(x) \Rightarrow f'(x) = h'(x) \cdot g(x) + h(x) \cdot g'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = 2x^3 \cdot \sin(x) \Rightarrow f'(x) = 6x^2 \cdot \sin(x) + 2x^3 \cdot \cos(x)$$

Die Produktregel gilt auch für einfache Funktionen, z.B.

$$f(x) = x^2 = x \cdot x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$$

Hier bietet sich aber die Ableitungsregel für Polynome an (siehe oben).

5.5.2 Quotientenregel

$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{h'(x) \cdot g(x) - h(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Diese Regel kann auf die Produktregel zurückgeführt werden, man bemerke $\frac{h(x)}{g(x)} = h(x) \cdot g(x)^{-1}$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x^3}{2x^2+4} \Rightarrow f'(x) = \frac{6x^2 \cdot (2x^2+4) - 2x^3 \cdot 4x}{(2^2+4)^2}$$

5.5.3 Kettenregel

Für ineinander geschachtelte (verkettete) Funktionen gilt die sogenannte Kettenregel. Diese ist besonders nützlich und wird oft mehrmals hintereinander angewendet! Dabei wird die Funktion ganz normal abgeleitet und die innere Funktion nachdifferenziert.

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Beispiel:

$$f(g(x)) = x^{(x^2+4)} \Rightarrow f'(g(x)) = (x^2+4) \cdot x^{(x^2+4-1)} \cdot 2x$$

5.6 Übungen

1. Bilde die Ableitungen folgender Terme
   - $f(x) = 12x^3 - 3x^2 + x + 12$
   - $f(x) = 6\sin^2(x) + \cos(x)$
   - $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x}$
   - $f(x) = \frac{3x}{12x^2-4x+2} \cdot \sin^2(x) - 3\cos(x) + 1$

   Welche dieser Funktionen sind nicht differenzierbar?
   - $f(x) = \{^{3x; für x<3}_{2x; für x>3}$
   - $f(x) = |x|$
   - $f(x) = \frac{x^3}{\sin(x)}$
   - $f(x) = 0$

6 Kurvendiskussion

Die Kurvendiskussion ist die Analyse einer Funktion im Hinblick auf ihre Eigenschaften, wie ihren Definitionsbereich, Grenzwerte, Asymptoten, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie, Extrem- und Terrassenpunkte, Monotonie und ihrem Krümmungsverhalten. Die Reihenfolge spielt durchaus eine Rolle. Es macht z.B. keinen Sinn den Wertebereich vor dem Definitionsbereich zu bestimmen, da der Wertebereich direkt vom Definitionsbereich abhängt.

6.1 Definitons- und Wertebereich

Wir möchten meist den maximalen Definitionsbereich bestimmen, den Bereich also möglichst wenig einschränken. So ist $f(x) = \frac{1}{x}$ für die Zahl Null nicht definiert. Damit wäre ein möglicher Definitionsbereich

$$\mathbb{D} := \mathbb{R}/\{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

Ein ebenfalls gültiger Definitionsbereich wäre $[10; 15]$. Solche Einschränkungen machen Sinn, wenn uns nur dieser Bereich der Funktion interessiert.
Um den Wertebereich einer Funktion F zu bestimmen, bestimmen wir

$$\mathbb{W}_f = f(\mathbb{D}_f) = \{f(x) \mid x \in \mathbb{D}_f\},$$

hierzu kann es vonnöten sein zuerst die Grenzwerte (Abschnitt 6.3) zu betrachten.

6.2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Interessant können auch die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen sein, v.a. wenn man den Graphen skizzieren möchte.

- Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0)$, einfach einsetzten und ausrechnen.
- Nullstellen: $f(x) = 0$ (siehe Abschnitt **??**).
  Merke: Ein Polynom hat höchstens so viele Nullstellen wie der höchste Exponent der Funktion, dabei erhält man zum Teil auch mehrfache Nullstellen, wie beispielsweise bei x^3. Diese Funktion hat ein dreifache Nullstelle an der Stelle $x = 0$.

6.3 Grenzwerte

☞ Achtung: Es heißt nicht x geht unendlich nahe an x_0, sondern beliebig nahe.
Die Bezeichnung *unendlich Nahe* existiert nicht und manche Professoren achten sehr darauf.

6.3.1 Polstellen und Löcher

Eine Polstelle oder ein Pol, ist eine einpunktige Definitionslücke einer Funktion, wenn die Funktionswerte in jeder Umgebung des Punktes (betragsmäßig) beliebig groß werden. Der Punkt $x_0 = 1$ der Funktion f_1 erfüllt dies nicht (hier handelt es sich um ein **Loch**), denn $f_1(x) = 1$ in der Umgebung von x_0. Betrachten wir

$$f(x) := \frac{1}{x-1}$$

so handelt es sich bei $x_0 = 1$ um einen Pol der Funktion f da

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \infty \text{ und } \lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

1^+ ist der **rechter Grenzwert** bei $x = 1$ (annäherung von rechts) und 1^- ist der **linke Grenzwert** bei $x = 1$ (annäherung von links). Genau dieses Verhalten, also die Grenzwerte interessieren uns bei den Polstellen.

6.3.2 Verhalten im Unendlichen

Nun betrachtet man das Verhalten des Graphen im Unendlichen, also

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ und } \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Dabei ist interessant, ob sich der Graph einem bestimmten Wert annähert oder ob er ins Unendliche steigt oder fällt.

☞ Achtet darauf das *Unendlich* kein Wert ist, der einfach eingesetzt werden darf. *Unendlich* kann niemals erreicht werden, dadurch kann x diesen Wert auch nicht annehmen. Man kann lediglich x gegen Unendlich gehen lassen.

6.4 Asymptoten

Sei f eine Funktion, so ist eine Asymptote von f eine Gerade die f im Unendlichen, in x oder in y Richtung, annähert. Asymptoten gehen somit direkt mit den Grenzwerten der Funktion f einher. Die Gerade muss keine Funktionsgerade sein! Betrachten wir erneut

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

so ist die Gerade $x = 1$ eine Asymptote von f. $y = 0$ ist ebenfalls eine Asymptote.

6.5 Symmetrie

Hier untersuchen wir die Symmetrie die Graphen zum Koordinatensystem. Wir unterscheiden dabei **Punktsymmetrie** zum Koordinatenursprung und **Achsensymmetrie zur y-Achse**:

- Achsensymmetrie (y-Achse), wenn $f(x) = f(-x)$
- Punktsymmetrie (Ursprung), wenn $f(-x) = -f(x)$

siehe Abschnitt 4.5.9

6.6 Extrem- und Terrassenpunkte

Angenommen Sie sind mit dem Auto unterwegs und sei $v(t)$ die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t. Sie beschleunigen zuerst und reduzieren anschließend die Beschleunigung auf 0. Sagen wir zum Zeitpunkt t_0 ist die Beschleunigung gleich Null. Nun gibt es 2 Möglichkeiten:

1. Sie bremsen: lokaler- oder globaler Extrempunkt von $v(t)$
2. Sie beschleunigen wieder: Terrassenpunkt bin $v(t)$

Wenn sie bremsen (negative Beschleunigung), ist klar, dass sie zum Zeitpunkt t_0 eine lokale oder globale Maximalgeschwindigkeit erreicht haben. Beschleunigen sie wieder, war die Beschleunigung gleich Null, steigt dann aber wieder an. Um nun herauszufinden wann sie die maximale Geschwindigkeit erreicht haben, müssen wir den Zeitpunkt finden, an dem Sie beginnen zu bremsen. D.h. an dem die Beschleunigung gleich Null und somit die Ableitung von $v(t)$ gleich Null ist. Das gibt uns **mögliche** Punkte, es könnte aber sein, dass Sie wieder beschleunigt haben. Falls dies der Fall ist hätte sich die Beschleunigung in der Umgebung um t_0 nicht geändert und damit wäre die Ableitung der Beschleunigung also die 2. Ableitung von v an t_0 gleich Null. Andernfalls handelt es sich um den ersten Fall, also um einen Extrempunkt. Im Allgemeinen wissen wir:

$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 \text{ ist ein Extrem- oder Terrassenpunkte}$$

Mit der 2. Ableitung ergibt sich folgendes:

- $f''(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ ist Terrassenpunkte
- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ ist lokales Maximum
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ ist lokales Minimum

Kurz: ein lokales Maximum oder Minimum besteht immer dann, wenn die erste Ableitung an ihrer Nullstelle einen Vorzeichenwechsel hat. Andernfalls handelt es sich um einen Terrassenpunkt, dies können wir auch überprüfen ohne die 2. Ableitung zu berechnen. Achtung: Ist der Definitionsbereich eingeschränkt so kann ein Maximum/Minimum auch an den Definitionsgrenzen liegen. Wenn Sie von immer beschleunigen aber $v(t)$ nur bis 10 Sekunden betrachten, dann ist natürlich $v(10)$ ihr Maximum, aber die Ableitung ist an dieser Stelle nicht Null.

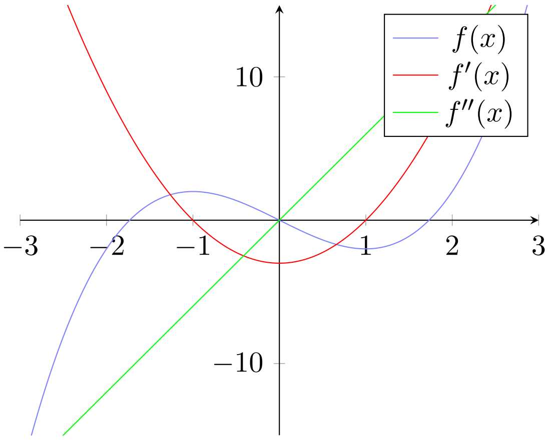


Abbildung 9: $f(x) = x^3 - 3x$, bei $x = 1$ befindet sich ein lokales Minimum und bei $x = -1$ befindet sich ein lokales Maximum. Lokal da $f(3)$ ist größer als das lokale Maximum und $f(-3)$ kleiner als das lokale Minimum. f besitzt einen Wendepunkt bei $x = 0$.

6.7 Monotonie

Nachdem wir die Funktion hinreichend auf Extrem- und Terrassenpunkte untersucht haben, kann man ihre Monotonie analysieren. Diese gibt man üblicherweise in Intervallen an, deren Grenzen die Ränder und die Extremstellen bilden. Um beim obigen Beispiel zu bleiben gibt uns die Monotonie die separierten Bereiche an denen wir Beschleunigt bzw. Abgebremst haben.

6.8 Krümmung

Um das Krümmungsverhalten einer Funktion zu untersuchen, benötigt man die zweite Ableitung des Funktionsterms. Es gilt:

- $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ ist an x_0 *rechtsgekrümmt*
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ ist an x_0 *linksgekrümmt*

Die Stelle x_0, an welcher der Graph seine Krümmung ändert, bezeichnet man als Wendepunkt, hier ändert sich die Richtung der Krümmung von rechts nach links, bzw. von links nach rechts. Der Wendepunkt ist gleich der Nullstelle der 2. Ableitung des Funktionsterms, d.h. die zweite Ableitung gleich 0 setzten und den zugehörigen x-Wert berechnen. Das sind die wesentlichen Schritte einer Kurvendiskussion.

6.9 Übungen

1. Diskutiere die Kurven folgender Funktionen

- $f(x) = x^4$
- $f(x) = \sin(x)$
- $f(x) = 3x^2 + 12x - 4$
- $f(x) = \frac{4x^3+x^2-x}{x+1}$
- $f(x) = \frac{\tan^2(x)}{\sin^2(x)}$

2. Untersuche folgende Funktionen auf ihre Nullstellen, Extrempunkte und Krümmung.
   - $f(x) = (x-4)^2 - 3$
   - $f(x) = (x-2)(x+5)(x-4)$
   - $f(x) = \frac{1}{x}$

7 Integration (Bonus)

Die Integration ist aus der Flächenberechnung entstanden. Das Integral ist ein Oberbegriff für das **bestimmte** und **unbestimmte** Integral. Die Integration bezeichnet die **Berechnung** von Integralen. Wir verzichten hier auf den axiomatischen Zugang. Dieses Kapitel ist ein Bonus zum Vorkurs, da die Integration auch in der Vorlesung genauer behandelt wird. Um vorbereitet zu sein schadet es allerdings nicht, sich dieses Kapitel auch jetzt schon durchzulesen.

7.1 Bestimmtes Integral

Ein geschlossenes Integral der Funktion f im kompakten (*abgeschlossen* und *beschränkt*) Intervall $[a; b]$ ist der Flächeninhalt der zwischen der Funktion f, der x-Achse und der Geraden $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen ist. Diese Flächeninhalt wird als

$$\int\limits_a^b f(x)dx,$$

gelesen: Integral von a bis b von f dx. Anmerkung: Sei müsse noch nicht wissen was *kompakt* bzw. *beschränkt* bedeutet.

7.2 Unbestimmtes Integral / Stammfunktion

In gewissem Sinne ist die Integration die Umkehrung der Differentiation. So ist F die **Stammfunktion** der Funktion f, wenn

$$F' = f$$

ist. F nennen wir auch unbestimmtes Integral. Hin und wieder wird mit dem **unbestimmten Integral** auch die Menge der Stammfunktionen von f bezeichnet.

Beispiel: Sei $f(x) = x^2$, so ist $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ein (nicht das) unbestimmtes Integral von f. Beweis: $F'(x) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{3-1} = f(x)$. Allerdings sind alle Funktionen aus der Menge

$$\mathcal{F} := \left\{ F \mid F(x) = \frac{1}{3}x^3 + c : c \in \mathbb{R} \right\}$$

eine Stammfunktion von f.

7.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Dieser Satz stellt eine Beziehung zwischen Stammfunktion und Integral her. Sei f eine auf $[a; b]$ stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f, so gilt:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

7.4 Berechnung von Stammfunktionen

Die Stammfunktion erhält man, indem man die Ableitung rückwärts rechnet. D.h. für Polynome addiert man zum Exponenten 1 hinzu, bilde daraus einen Bruch der Form $\frac{1}{Exponent+1}$ und multipliziere diesen mit dem Faktor vor der Basis. Mit dieser Methode lassen sich zu fast allen Polynomen Stammfunktionen berechnen. Da wir hierbei eine Menge $\mathcal{F}$ an Funktionen berechnen müssen wir noch festlegen welche Funktion, wir genau meinen. Wir legen dafür das c (siehe obiges Beispiel) fest.

7.5 Berechnung von Integralen

Wir benutzen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung um ein Integral $\int_a^b f(x)dx$ zu berechnen:

1. Berechne F, sodass $F' = f$
2. Berechne $F(b) - F(a)$

7.6 Berechnung von Fläche zwischen zwei Graphen

Um die Fläche zwischen zwei Graphen $f(x)$ und $g(x)$ zu ermitteln, berechnet man zunächst die Schnittpunkte der beiden Graphen, welche die Intervallgrenzen bilden. Wenn man nun eine neue Funktion $h(x)$ aus der Subtraktion der beiden Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bildet und das Integral dieser Funktion über den beiden Schnittpunkten berechnet, erhält man die Fläche zwischen den beiden Graphen.

7.7 Das Riemann-Integral (Bonus)

Um den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden zu können muss f in $[a; b]$ stetig sein. Gilt dies nicht, so können wir das Integral nicht ohne weiteres berechnen. Beim Riemann-Integral reduziert man die Berechnung des Integrals auf die Berechnung von vielen, einfach zu berechnenden Rechtecken. Dabei wird das Intervall $[a; b]$ in n Intervalle $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ aufgeteilt. Zudem gibt es für jedes Intervall eine Zwischenstelle $t_i \in I_i$. Dabei gilt $a = x_0, b = x_n$. Die Bedingung ist nun, dass die Zerlegung hinreichend fein gewählt werden kann. Es folgt dann

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

und für $n \to \infty$

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Es existieren Funktionen die nicht riemannintegrierbar sind. Ein weiteres Integral, welches allerdings nicht in der Vorlesung besprochen wird, ist das sog. Lebesgue-Integral. Es gibt Funktionen die Lebesgue-integrierbar aber nicht Riemann-integrierbar sind. Beim Lebesqueintegral wird die Funktion nicht über Rechtecke auf dem Definitionsbereich angenähert, sondern mittels Rechtecksfunktionen auf dem Wertebereich.

7.8 Übung

1. Berechne die Stammfunktionen folgender Funktionen
   - $f(x) = x^2 - 8$
   - $f(x) = 3x^2 + 4x - 16$
   - $f(x) = sin(x) - 3$
2. Berechne nun alle Flächen zwischen den oben gegebenen Graphen.

8 Folgen und Reihen (Bonus)

8.1 Folgen

Eine Folge ist eine Auflistung $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von endlich bzw. unendlich vielen durchnummerierten Objekten. Formal ist eine Folge eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to X$ von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in eine Menge X wobei X meist gleich oder eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Wir schreiben allerdings anstatt $a(i)$, a_i. Besonders interessant sind unendliche Folgen. Eine Folge wird entweder direkt, als *Funktion* angegeben oder über ein *rekursives Bildungsgesetzt.*

Beispiele:

- $a_n = \frac{1}{n}$ (wir könnten hier auch schreiben $a(n) = \frac{1}{n}$ oder $n \mapsto \frac{1}{n}$)
- $a_n = \frac{1}{n^2}$
- $a_n = n^2$
- $a_n = \underbrace{ggggg \cdots ggggg}_{n-\text{mal}}$ (hier wäre $a : \mathbb{N} \to \{g, gg, ggg, gggg, \ldots\}$)
- 1,2,4,8,16,32,...
- $a_{n+1} = 2a_n;$ $\qquad a_1 = 1$ (rekursiv)

8.1.1 Arithmetische Folgen

Folgen, deren aufeinander folgenden Glieder immer eine konstante Differenz d aufweisen, werden arithmetische Folgen genannt.

Darstellungsarten arithmetischer Folgen:

- $a_n = a_1 + (n-1)d$ (explizit)
- $a_{n+1} = a_n + d$ (rekursiv)

Beispiele:

- $a_n = 2 + (n-1)4$
- $a_{n+1} = a_n + 3$
- $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

8.1.2 Geometrische Folgen

Folgen, der Form $a_n = a_1 \cdot q^n$, werden als geometrische Folgen bezeichnet. Ihre aufeinander folgenden Glieder unterscheiden sich jeweils um einen konstanten Faktor.

8.1.3 Rechnen mit Exponenten

Wie ihr vielleicht schon bemerkt habt, gibt es bei den geometrischen Folgen eine neue mathematische Schreibweise (q^n). Die Konstante q wird hierbei als Basis bezeichnet, während n Exponent genannt wird. Hierbei gilt:

- $q^0 = 1$
- $q^1 = q$
- $q^2 = q \cdot q$
- $q^3 = q \cdot q \cdot q$
- $q^4 = q \cdot q \cdot q \cdot q$
- $\ldots$

Rechengesetze für Exponenten

1. $((b)^n)^m = b^{n \cdot m}$
2. $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$
3. $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$

Rechengesetze für Wurzeln

1. $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$
2. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$
3. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
4. $\sqrt[m]{b^n} = b^{\frac{n}{m}}$

8.1.4 Übungen

1. Vereinfache folgende Terme
   - $a_n = 7^3 + n^2 \cdot (n^3)^3 \cdot \sqrt{n} + 7 \cdot 7 \cdot 7$
   - $a_n = \sqrt[4]{(n^4)^{11} \cdot 16}$
   - $a_{n+1} = q^2 \cdot q^{n-1}$
2. Bringe diese Folgen in eine andere Form
   - $3, -3, 3, -3, 3, \ldots$
   - $26, 29, 32, 35, \ldots$
   - $a_n = 4 + (n-1) \cdot 5$

- $a_{n+1} = a_n + 1; a_1 = 5$

3. Handelt es sich um eine besondere Art von Folge und wenn ja, um welche?
   - $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$
   - $a_n = 4^{n+1}$
   - $a_{n+1} = a_n + 2$
   - $a_{n+1} = a_n \cdot 2$
   - $1, 5, -3, 24, -12, 4$

8.2 Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz

8.2.1 Monotonie

Eine Folge ist monoton fallend, wenn kein Folgeglied größer ist als dessen Vorgänger:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n-1}$$

Ist eine Folge monoton steigend, so ist jedes Folgeglied entweder größer oder gleich dessen Vorgänger:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n-1}$$

Strenge Monotonie Der Unterschied zwischen Monotonie und strenger Monotonie ist einfach. Bei Monotonie dürfen die Folgeglieder gleich deren Vorgänger sein, bei strenger Monotonie ist dies jedoch nicht der Fall:

- streng monoton steigend $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n-1}$
- streng monoton fallend $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n-1}$

8.2.2 Beschränktheit

Ist eine Folge nach unten beschränkt, so gilt:

$$\exists s \in \mathbb{R} \text{ so dass } \forall n \in \mathbb{N} : s \leq a_n.$$

Hierbei wird jeder Wert, welcher kleiner gleich des kleinsten Folgegliedes der Folge ist, als untere Schranke bezeichnet. Die größte untere Schranke wird als Infimum bezeichnet. Eine Folge ist dann nach oben beschränkt, wenn es mindestens einen Wert s aus $\mathbb{N}$ gibt, welcher größer oder gleich des größten Folgegliedes ist. Diese Werte bezeichnet man als obere Schranke:

$$\exists s \in \mathbb{R} \text{ so dass } \forall n \in \mathbb{N} : s \geq a_n$$

Die kleinste obere Schranke heißt Supremum.

8.2.3 Konvergenz

Nähert sich eine Folge stetig einem bestimmten "Grenzwert" (oder "Limes") a beliebig nahe an, so sagt man, sie konvergiert gegen a:

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

Epsilon ϵ ist hierbei eine beliebig kleine Zahl, welche den Abstand/die *Umgebung* zwischen dem Wert von a_n und dem Grenzwert a beschreibt. Jetzt mal langsam. Was besagt der mathematische Ausdruck? Sei a unser Grenzwert dann gibt es für jedes positive Epsilon, egal wie klein es auch ist (nur null darf es nicht sein), eine natürliche Zahl n_0, sodass der Abstand zwischen a alle Folgeglieder, die nach oder gleich dem n_0-ten Glied kommen, kleiner ist als Epsilon. Das heißt, wenn eine Folge gegen a konvergiert kann ich euch ein $\epsilon > 0$ geben, zum Beispiel 0.00000000001, und ihr könnt mir ein n_0 sagen, sodass $|a_n - a| < \epsilon$ und zwar für alle $n \geq n_0$. Jede nicht konvergente Folge wird als divergent bezeichnet.

Beispiel Sei unsere Folge $a_n = \frac{1}{n}$. Wir nehmen an, dass die Folge gegen 0 konvergiert. Ich gebe euch nun ein ϵ, nun soll gelten

$$|a_n - 0| < \epsilon \iff \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \overset{\text{da } n>0}{\iff} \frac{1}{n} < \epsilon$$

lösen wir doch einfach nach n auf:

$$\frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$$

Nun könnt ihr mir immer ein n nennen. Das n_0 ist hierbei mit irgendeinem n, was die Bedingung erfüllt identisch und alle $n \geq n_0$ erfüllen die Bedingung ebenso.

8.2.4 Zusammenhänge

- Jede konvergente Folge ist auch beschränkt, allerdings ist **nicht** jede beschränkte Folge auch konvergent. Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit
- Jede beschränkte, monotone Folge ist konvergent. Beschränktheit und Monotonie $\Rightarrow$ Konvergenz

8.3 Nullfolgen

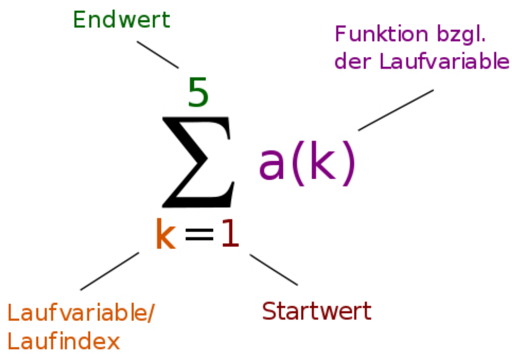
Nullfolgen sind eine besondere Art von Folgen. Ihren Namen erhalten sie durch ihre Eigenschaft, dass sie im Unendlichen gegen die Zahl Null konvergieren.

Beispiele:

- $a_n = \frac{1}{n}$
- $a_n = \frac{4}{n^3}$
- $a_n = \frac{1}{4n}$
- $a_n = 4 \cdot \left(-\frac{1}{n}\right)$

8.4 Reihen

Eine Reihe ist eine Folge von Partialsummen und somit auch eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach X (meist ist $X \subseteq \mathbb{R}$). Anders ausgedrückt, ist das k-te Reihenglied die Summe der ersten k Folgenglieder einer Folge. Da Mathematiker schreibfaul sind und es sehr aufwendig ist ein Reihenglied hinzuschreiben da man k Folgeglieder mit einen $+$ verknüpft aufschreiben müsste, wurde ein neues, mathematisches Symbol eingeführt, das so genannte "Summen-Zeichen" $\sum$.



Startwert Dieser Wert ist der erste Wert der Laufvariable und bestimmt somit das erste aufsummierte Folgeglied.

Laufvariable Diese Variable ist auch Teil des Bildungsgesetzes und wird pro aufsummierten Folgeglieds um 1 erhöht, bis sie den Endwert erreicht hat.

Funktion bzw. der Laufvariable Hiermit ist das Bildungsgesetz der ursprünglichen Folge gemeint.

Endwert Dieser Wert bestimmt, bis zu welchem Glied die Folge aufsummiert werden soll er kann auch unendlich ∞ sein.

8.4.1 Endliche Reihen

Als endliche Reihen werden Reihen bezeichnet, deren Endwert nicht gegen plus Unendlich ($+\infty$) geht. (Ich sage hier mit Absicht "**gegen** plus Unendlich geht", da der Wert Unendlich logischer Weise niemals erreicht werden kann, auch wenn Chuck Norris bis Unendlich zählen kann...)

8.4.2 Unendliche Reihen

Was für eine Überraschung, dass es bei Unendlichen Reihen nun so ist, dass der Endwert gegen Unendlich geht.

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)$$

8.4.3 Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz

Genau wie Folgen können auch Reihen monoton, beschränkt und konvergent gegen einen bestimmten Wert sein. Die Definition dieser Begriffe bleibt jedoch genau die selbe, wie auch bei Folgen, weshalb ich sie mir hier spare.

8.5 Besondere Reihen

8.5.1 Konvergierende Reihen und Nullfolgen

Das Bildungsgesetz jeder konvergierenden Reihe beschreibt eine Nullfolge.

Anders herum stimmt das allerdings nicht!

Bekanntestes Gegenbeispiel hierfür ist die so genannte **Harmonische Reihe**:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Diese Reihe divergiert gegen Unendlich! Sie wird auch als harmonische Reihe bezeichnet. Beweis mithilfe einer Abschätzung:

$$\begin{aligned}
s^{2^{k+}} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k+1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\right)}_{\geq 2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}} \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + 2^{1} \cdot \frac{1}{4} + 2^{2} \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{k} \cdot \frac{1}{2^{k+1}} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{k-\text{mal}} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{k}{2} = \frac{3+k}{2}
\end{aligned}$$

8.5.2 Geometrische Reihen

Jede geometrische Reihe kann auch wie folgt dargestellt werden:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{falls } q \neq 1 \\ n+1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

8.6 Übungen

1. Handelt es sich hierbei um eine besondere Art von Reihen?
   - $s_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$
   - $s_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$
   - $s_n = \sum\limits_{i=1}^{16} 4^i$
   - $s_n = \sum\limits_{i=2}^{8} i^2$
   - $s_n = \sum\limits_{i=0}^{\infty} (-3^i)$
2. Sind sie monoton fallend bzw. steigend?
3. Sind die dazugehörigen Folgen konvergent und/oder beschränkt? (Infimum, Supremum und Asymptoten angeben!)
4. Gebe die Ergebnisse der Reihen (außer der zweiten) an.

9 Beweisverfahren (Bonus)

9.1 Direkter Beweis

Beim direkten Beweis handelt es sich um das **direkte** Herleiten von Aussagen unter der Annahme von bereits bewiesenen, wahren Aussagen. Wenn wir zeigen können dass

$$A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, \dots A_{n-1} \Rightarrow A_n$$

gilt und A_1 eine bereits bewiesene wahre Aussage ist, dann folgt A_n. Wir haben also Prämissen, folgern gewisse Schlüsse und gelangen dann zur zu zeigenden Aussage A_n.

9.2 Indirekter Beweis

Im **indirekten Beweis** oder auch **Widerspruchsbeweis** der Aussage A geht man davon aus, dass A nicht zutrifft und zeigt, dass dies aufgrund eines Widerspruchs nicht sein kann. Man geht also zunächst von der Negation aus und versucht auf einen Widerspruch zu stoßen. Angenommen wir wollen A beweisen. Wir wissen

$$A \vee \neg A$$

ist eine Tautologie. Wir zeigen nun, dass $\neg A \equiv$ falsch, damit muss $A \equiv$ wahr gelten. Indirekte Beweise sind weniger schön in dem Sinne, dass sie weniger konstruktiv sind. Wir haben einen Widerspruchsannahme, folgern etwas und gelangen zu einem Widerspruch. Dabei kann es sein, dass wir nichts daraus „lernen“ und wir, bis auf das A gilt, nichts aus dem Beweis „mitnehmen“. Solche Beweise wirken oft „wie vom Himmel gefallen“ und geben oft kaum Auskunft darüber, welche Idee der Beweisende hatte oder wie und warum er darauf gekommen ist.

9.2.1 Beispiel

Das bekannteste Beispiel hierfür ist der Beweis der Aussage:

$$A := \sqrt{2} \text{ ist keine rationale Zahl}$$

Man geht nun davon aus, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist. Angenommen $\neg A \equiv$ wahr also angenommen $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl.

$$\Rightarrow \exists q, p \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{q}{p},$$

wobei q und p teilerfremd sind (sonst einfach kürzen). Nun quadrieren wir

$$\Rightarrow 2 = \frac{q^2}{p^2}$$

Nun noch mit p^2 multiplizieren

$$\Rightarrow 2 \cdot p^2 = q^2$$

Da es sich bei p und q um ganze Zahlen handelt, folgt ($\Rightarrow$) dass auch ihre Quadrate ganze Zahlen sind. Eine ganze Zahl mit 2 multipliziert ist auch wieder eine ganze Zahl.

$$\Rightarrow q^2 \in \mathbb{Z}$$

Wenn das Quadrat einer Zahl gerade ist, folgt ($\Rightarrow$) dass auch die Zahl selber gerade ist, deshalb lässt sich q auch folgendermaßen darstellen.

$$\exists r \in \mathbb{Z} : q = 2 \cdot r$$

Setzt man nun diesen Wert für q oben ein, so erhält man

$$2 \cdot p^2 = 4 \cdot r^2 \iff p^2 = 2 \cdot r^2$$

Nun sieht man, dass es sich auch bei p um eine ganze, gerade Zahl handelt. Da jede ganze, gerade Zahl den Teiler 2 hat, besitzen auch p und q den **gemeinsamen Teiler** 2. Einer unserer Voraussetzungen war allerdings, dass diese beiden Zahlen **teilerfremd** sind. Wenn wir auf solch einen Widerspruch treffen, so muss zumindest eine unserer Annahmen falsch sein. Die einzige Annahme, welche wir getroffen haben ist jedoch, dass es sich bei Wurzel 2 um eine rationale Zahl handelt. Diese ist also falsch (($\neg A$) $\Rightarrow$ falsch ist wahr). Damit muss $\neg A \equiv$ falsch sein und damit $A \equiv$ wahr. Und somit haben wir bewiesen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

9.3 Vollständige Induktion

Das Induktionsprinzip ist sehr natürlich. Es geht im Endeffekt um nichts anderes als ums Zählen. Zählen, so scheint es, liegt in der Natur jedes intelligenten Lebewesens. Stellen Sie sich eine Dominokette vor. Wenn Sie der folgenden Aussage zustimmen können, haben Sie die Induktion im Grunde verstanden:

Wenn ich den ersten Dominostein umwerfe und zudem gilt, dass wenn ein Dominostein umfällt, folgt, dass sein Nachfolger umfällt, so fallen alle Dominosteine um.

In Form der Prädikatenlogik und unter Annahme, dass wir es mit natürlichen Zahlen zu tun haben, kann man dies wie folgt schreiben

$$(P(1) \;\wedge P(x) \Rightarrow P(x+1)) \Rightarrow P(y)$$

Sie müssen nicht zeigen, dass jeder Stein umfällt sondern Sie zeigen dass:

1. **Induktionsanfang**: der 1. Stein umfällt und
2. **Induktionsschluss:** dass wenn Stein n umfällt, fällt Stein $n+1$ um (wenn n nicht der letzte Stein ist)

Allgemeiner nutzen wir dies um Eigenschaften von Objekten zu zeigen, die wir mit einer natürlichen Zahl identifizieren können (Reihen, Folgen, aber auch die n-te Ableitung von f).

9.3.1 Beispiel

Wir wollen nun beweisen:

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1}; a_1 = 2 \text{ entspricht } b_n = 2^n. \tag{1}$$

1. **Induktionsanfang:** $n = 1$ (1. Stein): $a_1 = 2 = 2^1 = b_n$ (passt)

2. **Induktionsschluss:** $n' = n + 1$ (Achtung nicht $n' = 2$), wir dürfen zudem Annehmen das der n-te Stein gefallen ist, dass also $a_n = b_n$ (mehr nicht!).

$$\begin{aligned} a_{n+1} &\overset{\text{nach Def.}}{=} 2 \cdot a_{n+1-1} \\ &= 2 \cdot a_n \\ &\overset{\text{nach Induktionsanfang}}{=} 2 \cdot b_n \\ &\overset{\text{nach Def.}}{=} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \\ &= b_{n+1}. \end{aligned}$$

(passt)

Wuhu! Wir haben bewiesen, dass unsere Aussage stimmt.

9.4 Übungen

1. Zeige, dass folgende Aussagen gelten:
   - $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; für $q \neq 1$