Fakultät für
Informatik und
Mathematik

HOCHSCHULE
FÜR ANGEWANDTE
WISSENSCHAFTEN · FH
MÜNCHEN

Fachschaft der
Fakultät 07
StudierendenVertretung Hochschule München

Vorkurs /Mathematik

Eine Wiederholung des mathematischen Schulstoffs

von Experten ;)

3. September 2015

Fachschaft 07

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Worum geht's im Vorkurs Mathematik?

Jeder Studierende tut sich in unterschiedlichen Fächern schwer bzw. leicht. Es gibt jedoch Fächer in denen ist die Durchfallquote bereits über Jahre überdurchschnittlich hoch. Bei einem dieser Fächer mit besonders hoher Durchfallquote handelt es sich um das mathematische Fach Analysis. Aus diesem Grund haben wir als Fachschaft es uns, so wie bereits einige vor uns, zur Aufgabe gemacht dem ganzen ein wenig entgegen zu steuern und zu versuchen, euch die Grundlagen, welche für dieses Fach von Nöten sind, zu vermitteln.

1.2 An wen richtet sich dieser Kurs?

Dieser Kurs richtet sich an all jene,

- welche Schwächen in mathematischen Fächern haben.
- deren Schulzeit schon etwas länger her ist.
- welche nicht von mathematisch/technischen Schulen bzw. Gymnasien kommen.
- und an alle die der Meinung sind, eine Wiederholung schadet nie.

1.3 Warum braucht man Mathematik in Informatik?

Vor Allem in den ersten Semestern stehen die Mathematikvorlesungen im Informatik (Scientific Computing, Wirtschaftsinformatik, Geotelematik) immer etwas Abseits. Vielen Studierenden ist nicht klar, warum Mathematik so grundlegend wichtig für ihr Studium ist - schließlich studieren sie ja keine (reine) Mathematik! Dieses Kapitel soll dieses Verstndnisproblem lösen und aufzeigen, welche Schnittpunkte zwischen Mathematik und Informatik bestehen. Es ist nmlich keineswegs so, dass Mathematik immer die graue, langweilige Theorie ist, die “durchgestanden werden muss! Mit Mathematik haben Informatiker ein zustzliches, sehr mchtiges Werkzeug zur Hand, mit dem viele scheinbar unlösbare Probleme (in der Informatik!) plötzlich lösbar werden. Das tolle ist: man muss nicht erst die komplette Mathematik verstanden haben, um sie als Werkzeug verwenden zu können. Es gilt eher der Grundsatz: mehr hilft mehr! In manchen Bereichen ist allerdings ein Grundverstndnis notwendig, um sich das Werkzeug auch wirklich zu Nutze machen zu können. Einige dieser Bereiche versucht dieses Kapitel anzusprechen.

Zumindest grundlegende Mathematikkenntnisse sind in den folgenden Informatikbereichen wichtig. Diese Liste ist nicht vollständig und gibt nur einen kleinen Ausschnitt wider:

- Spieleentwicklung
- Physiksimulationen
- Supercomputing
- Robotics
- Business Analytics
- Data Mining
- Machine Learning

Die Themen Spieleentwicklung, Business Analytics und Machine Learning werden im folgenden Text als Beispiele verwendet, dass Mathematik auch als Werkzeug für Informatiker sehr nützlich ist.

1.3.1 Spieleentwicklung

Die Entwicklung eines Spiels umfasst neben Informatik noch sehr viele andere Bereiche: Design, Architektur, Psychologie, Soziologie, Teamführung, Finanzierung, Marketing und Musik sind alle in mehr oder weniger großem Umfang für ein gutes Spiel nötig. Die Mathematik ebenfalls: sobald sich ein Spielelement zumindest halbwegs realistisch bewegen soll, müssen die entsprechenden Bewegungsgleichungen (numerisch) integriert werden. Auch Lichteffekte wie Spiegelungen oder der Soundeffekte wie Widerhall müssen zuerst korrekt mathematisch beschrieben und dann implementiert werden, wenn sie ëchtäussehen sollen. Daneben sind auch Performanceprobleme zu lösen: zum Beispiel wurde im Spiel Quake eine schnelle Wurzelberechnung verwendet, ohne die alles unspielbar langsam geworden wäre. (Zur Implementierung siehe http://www5.in.tum.de/lehre/vorlesungen/konkr_math/SS_15/prog/NumPro_SS15_Programmieraufgabe_1.pdf) Alle beschriebenen Probleme können mit relativ einfachen, mathematischen Methoden gelöst werden - diese können alle im Studium gelernt werden (Analysis, Lineare Algebra, Numerik, Integraltransformationen, Differentialgleichungen).

1.3.2 Business Analytics

Der Begriff "Big Data ist in den letzten Jahren immer gebräuchlicher geworden - Unternehmen versuchen aus großen Datenmengen, die sie über ihre Kunden sammeln, Informationen und Wissen zu generieren. Dieses Wissen soll dann in Verbesserung von Produkten oder in neue Produkte umgesetzt werden, die verkauft werden können. Business Analytics ist ein Teilgebiet von Data Mining, das speziell die Probleme in der Unternehmenswelt mittels Datenanalyse zu lösen versucht. Solche Probleme sind zum Beispiel die Ermittlung von "Risikokunden von Handyverträgen, die unzufrieden sind und deshalb kündigen wollen. Können diese Kunden per Business Analytics gezielt ermittelt werden, werden ihnen Sonderangebote wie kostenlose Freiminuten geschenkt - mit dem Ziel, dass sie den Vertrag weiterlaufen lassen. Die Ermittlung der Kunden erfolgt durch statistische Analysen wie Regression oder Decision Trees - also alles wieder mathematische Werkzeuge, die im Studium erlernt werden können (Lineare Algebra, Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik).

1.3.3 Machine Learning

Durch die immer schneller rechnenden Computer können heute Probleme gelöst werden, die früher nur Menschen erledigen konnten. Dazu gehören automatische Gesichtserkennung, das Auffinden von Tumoren in medizinischen Bildern oder die Erkennung von Kreditkartenbetrug. Meist steht hinter diesen Anwendungen das sogenannte "Machine Learning, was bedeutet, dass die Maschine (der Computer) selbst lernt, welche Eigenschaften in den auftretenden Daten (Bilder von Gesichtern, Kreditkartenüberweisungen, Bilder von Tumoren oder gesundem Gewebe) zu welchem Ergebnis passt (Gesichter werden bestimmten Menschen zugeordnet, eine überweisung wird als Betrug markiert, ein Gewebebild wird als gesund gekennzeichnet). Das praktische am selbstlernenden Computer: der Mensch muss nur noch eine sogenannte Trainingsmenge an Datenmaterial bereitstellen, an der der Computer lernen kann - nach dem Training ist die Maschine selbständig in der Lage, eine Zuordnung zu machen - es ist also nicht nötig, in mühevoller Kleinarbeit selbst die Eigenschaften eines Tumors oder eines Kreditkartenbetrugs herauszufinden und sie die entsprechende Software zu schreiben. Die selbstlernenden Programme sind allerdings selbst von Menschen geschrieben und enthalten teilweise viel, teilweise aber auch relativ wenig Mathematik - es gibt allerdings keins, das komplett ohne mathematische Grundlagen in der Praxis gut funktioniert. Die sogenannten "neuronalen Netze (https://en.wikipedia.org/wiki/Artificial_neural_network) funktionieren im Hintergrund mit Matrix/Vektor-Multiplikationen, die schon im ersten Semester in Linearer Algebra gelernt werden können. Weitere Techniken wie Regression, Bildverarbeitung oder Filterungen können in weiterführenden, mathematischen Fächern erlernt werden und setzen auf die Grundlagen in Analysis (Integration, Differentiation, Funktionen) und Linearer Algebra (Matrizenrechnung) auf.

2 Aussagenlogik

Die Logik öffnete den Weg für die Informatik. Sie war immer eine Disziplin der Philosophie und hat eine sehr interessante Geschichte (von Aristoteles, Kant, Hegel, Boole, Russell, Gentzen, Skolem, Gödel, bis zu Turing und weiter) hinter sich gelassen. Die Aussagenlogik, als kleiner aber grundlegender Teil, ist intuitiv und auf sehr natürliche Weise begreifbar. Sie ist fundamental um mathematische Ausdrücke zu verstehen und wird in allen Bereichen der Mathematik verwendet. In der Informatik hat die Logik und damit auch die Aussagenlogik eine wichtige Bedeutung. In der technischen Informatik werden Kodierer und Dekodierer, Addierer und Multiplizierer mit sogenannten logischen Gattern realisiert. Ein Gatter ist nichts anders als eine logische Verknüpfung. Zum Beispiel ist das Und-Gatter ein Gatter mit zwei Eingängen x^1_{in}, x^2_{in} und einem Ausgang x_{out} mit

$$x_{out} = x^1_{in} \wedge x^2_{in},$$

legt man nun eine gewisse Spannung an x^1_{in} und gleichzeitig an x^2_{in} an so gibt das Gatter diese Spannung weiter ansonsten nicht. Die Gatter bilden den Kern für z.B. Mikroprozessoren. Zudem ist die Aussagenlogik in jeder Programmiersprache eingebettet und sie werden viele logische Ausdrücke, zum Beispiel in Java, schreiben.

Später im Studium werden Sie (Wirtschaftsinformatiker ausgeschlossen) das Konzept einer formalen Sprache kennenlernen, dabei sind formale Sprachen und bestimmte Teile der Logik eng miteinander verbunden. Die aktuelle Forschung beschäftigt sich mit der automatisierten Beweisüberprüfung und sogar mit dem automatisierten Beweisen bisher unbewiesener Aussagen. Die Logik ist zudem im Bereich künstliche Intelligenz und Robotik essentiell.

Wir werden lediglich die Aussagenlogik besprechen und einen ganz kurzen ersten Blick auf die Prädikatenlogik werfen. Beherrschen sie diese beiden Bereiche der Logik, so sind sie für das gesamte Bachelorstudium gewappnet.

2.1 Aussagen

Definition 2.1 (Aussage) *Eine Aussage ist ein als Satz formulierter Gedanke, dem man auf sinnvolle Weise einen Wahrheitswert zuordnen kann.*

Satz 2.1 (Gesetzt vom ausgeschlossenen Dritten) *Eine Aussage ist entweder **wahr (w)** oder **falsch (f)**.*

Beispiele

- A_1 := Die Sonne strahlt wärme ab.
- A_2 := Bayern München wird diese Saison wieder deutscher Meister.
- $A_3 := 1 + 1 = 2$
- A_4 := Wann ist in diesem Jahr Ostern?

A_1 und A_3 sind offensichtlich wahre Aussagen. A_2 können wir derzeit nicht überprüfen, sie ist aber trotzdem wahr oder falsch und darum zulässig. A_4 ist keine Aussage.

Schreibweisen

Wir schreiben gewöhnlich A ist **wahr** oder **falsch** bzw. **w** oder **f** bzw. (für uns Informatiker) **1** oder **0**.

2.2 Logische Verknüpfungen

Definition 2.2 (Negation) *Unter der Negation einer Aussage A versteht man die Aussage $\neg A$ (Mathe) bzw. $\overline{A}$ (Informatik) ('nicht A'), die genau dann wahr ist, wenn A selbst falsch ist.*

Es folgt eine sogenannte **Wahrheitstabelle** der Verknüpfung. In der ersten Spalte stehen die Werte die A annimmt und in der rechten Spalte Werte die $\neg A$ dann besitzt. Solche Wahrheitstabellen werden Sie in der technischen Informatik viele erstellen. Besitzt eine logische Verknüpfung bzw. eine aussagenlogische Formel k verschiedene Variablen, so gibt es 2^k verschiedene Belegungen. Dabei bedeutet, Belegung, dass jede Variable bzw. Aussage entweder wahr oder falsch ist. Jede Aussage kann 2 Werte annehmen bei k Aussagen sind das $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{k-\text{mal}} = 2^k$ Möglichkeiten.

A	$\neg A$
falsch	wahr
wahr	falsch

Beispiel

- Die Negation der Aussage '4 ist ungerade' ist die Aussage '4 ist gerade', denn es gibt nur diese beiden Möglichkeiten.

- Aber die Negation der Aussage '4.5 ist ungerade' ist nicht die Aussage '4.5 ist gerade', denn beide Aussagen sind falsch, ja sogar unsinnig. Die Negation der Aussage 'Diese Kuh ist schwarz' ist nicht etwa die Aussage 'Diese Kuh ist weiß', denn es gibt ja noch andere Farben. Vielmehr müsste man sagen:'Diese Kuh ist nicht schwarz'. Das umgangssprachliche Gegengenteil ist meist etwas anderes als die logische Verneinung.

Definition 2.3 (Konjunktion) *Unter der Konjunktion zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage $A \wedge B$ (Mathe) bzw. $A \cdot B$ (Informatik) (in Worten:'A und B'), die genau dann wahr ist, wenn A und B gleichzeitig wahr sind.*

In den ersten Spalten dieser **Wahrheitstabelle** stehen die Werte der Variablen der Konjunktion in der letzten Spalte der resultierende Wert.

A	B	$A \wedge B$
falsch	falsch	falsch
falsch	wahr	falsch
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

Beispiel

- '18 ist eine gerade Zahl und durch 3 teilbar', ist eine wahre Aussage im Rahmen des Axiomensystems für die Arithmetik, welche hier umgangssprachlich vorausgesetzt wurde. Eigentlich handelt es sich um die Aussage '18 ist eine gerade Zahl, und 18 ist durch 3 teilbar'.

- '15 ist eine gerade Zahl und durch 3 teilbar', ist eine falsche Aussage, denn der erste Teil ist falsch.

Definition 2.4 (Disjunktion) *Unter der Disjunktion zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage $A \vee B$ (Mathe) bzw. $A + B$ (Informatik) (in Worten:'A oder B'), die genau dann wahr ist, wenn wenigstens eine der Aussagen A oder B wahr ist.*

In den ersten Spalten dieser **Wahrheitstabelle** stehen die Werte der Variablen der Konjunktion in der letzten Spalte der resultierende Wert.

A	B	$A \vee B$
falsch	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
wahr	wahr	wahr

Hier beginnen die Schwierigkeiten mit der Umgangssprache. Umgangssprachlich meinen wir mit 'oder' meist 'entweder … oder'. Was aber nicht der logischen Disjunktion entspricht.

Beispiel

- 'Ich werde Mathematik oder Informatik studieren', diese Aussage ist auch dann wahr, wenn ich mich dafür entscheide, beide Fächer zu studieren. Falsch wird sie aber z.B., wenn ich nur Biologie studiere.
- 'Ich kann nur Hü oder Hott sagen'. Das ist natürlich falsch, denn ich kann ja beide Wörter vermeiden.

Definition 2.5 (Implikation) *Unter der Implikation zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage $A \Rightarrow B$ (in Worten:'A impliziert B' oder 'aus A folgt B'), versteht man die Zusammengesetzte Aussage $(\neg A) \vee B$.*

In den ersten Spalten dieser **Wahrheitstabelle** stehen die Werte der Variablen der Konjunktion in der letzten beiden Spalte der resultierenden Werte (in der letzten der finale Wert).

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$
falsch	falsch	wahr	wahr
falsch	wahr	wahr	wahr
wahr	falsch	falsch	falsch
wahr	wahr	falsch	wahr

Beispiel

A wird auch als Prämisse bezeichnet. Eigentlich sieht alles recht einfach aus. Nehmen wir die Aussagen:'(A) Wenn es regnet folgt daraus, dass (B) die Straße nass wird'. Wenn es nun regnet und die Straße nass wird ist die Aussage wahr. Doch was passiert wenn es nicht regnet? Hier liegt der Knackpunkt! Wenn es nicht regnet ist die Aussage immer wahr egal ob die Straße nun nass oder trocken ist.

Aus einer falschen Aussage kann man alles folgern!

Wir können die Aussage auch wie folgt formulieren:

Ist die Straße nicht nass, so folgt daraus, es regnet nicht.

Wir sehen hier die Anwendung des Kontropositionsgesetzes:

$$((\neg B) \Rightarrow (\neg A)) \iff (A \Rightarrow B)$$

Definition 2.6 (Äquivalenz) *Unter der äquivalenz zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage $A \iff B$ (in Worten:'A gilt genau dann wenn B gilt'). Diese ist genau dann wahr wenn $A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A$ wahr ist.*

In den ersten Spalten dieser **Wahrheitstabelle** stehen die Werte der Variablen der Konjunktion in der letzten Spalte der resultierende Wert.

A	B	$A \iff B$
falsch	falsch	wahr
falsch	wahr	falsch
wahr	falsch	falsch
wahr	wahr	wahr

Ein Beispiel wäre $x + 5 = 7 \iff x + 8 = 10$.

Definition 2.7 (Exklusives Oder) *Unter dem exklusives Oder zweier Aussagen A und B versteht man die Aussage A XOR B (in Worten:'entweder A oder B'). Diese ist genau dann wahr wenn $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$ wahr ist.*

In den ersten Spalten dieser **Wahrheitstabelle** stehen die Werte der Variablen der Konjunktion in der letzten Spalte der resultierende Wert.

A	B	A XOR B
falsch	falsch	falsch
falsch	wahr	wahr
wahr	falsch	wahr
wahr	wahr	falsch

Das exklusive Oder ist für die Informatiker so Hilfreich, dass es, anders als die Implikation, in die meisten Programmiersprachen als Standardfunktion eingebaut ist.

2.3 Vollständigkeit

Wie ihr sicher gesehen habt lassen sich XOR, $\iff$, $\Rightarrow$ mithilfe von $\neg, \wedge, \vee$ darstellen und tatsächlich reichen die Verknüpfungen $\neg, \wedge, \vee$ aus um jede denkbare Formel aufzustellen. Trotzdem sollte man die Bedeutung der anderen Symbole beherrschen, da diese in jedem Mathe- oder Informatikbuch auftauchen und sehr nützliche Abkürzungen sind. Man bedenke auch, dass auch eine andere Menge an Verknüpfungen vollständig sein kann $A \wedge B$ kann zum Beispiel durch $\neg(A \Rightarrow \neg B)$ ausgedrückt werden, man überlege warum?

2.4 Grundlegende Rechenregeln

Wir verwenden das Symbol $\equiv$ anstatt $\iff$ um anzudeuten, dass wir zwei Ausdrücke vergleichen möchten und diese sollen durch das $\equiv$-Symbol besser abgetrennt werden. Die Symbole können als identisch angesehen werden. Wir möchten mit $\equiv$-Symbol verdeutlichen, dass die eine durch die andere Formel ersetzt/vereinfacht werden kann, da sie äquivalent sind.

- Neutrales Element 1: $A \vee \text{wahr} \equiv \text{wahr}$
- Neutrales Element 2: $A \vee \text{falsch} \equiv A$
- Neutrales Element 3: $A \wedge \text{wahr} \equiv A$
- Neutrales Element 4: $A \wedge \text{falsch} \equiv \text{falsch}$
- Kommutativgesetz 1: $A \vee B \equiv B \vee A$
- Kommutativgesetz 2: $A \wedge B \equiv B \wedge A$
- Assoziativgesetz 1: $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$
- Assoziativgesetz 2: $A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$
- Distributivgesetz 1: $(A \wedge B) \vee C \equiv A \vee C \wedge B \vee C$
- Distributivgesetz 2: $(A \vee B) \wedge C \equiv A \wedge C \vee B \wedge C$
- Idempotenzgesetz 1: $A \vee A \equiv A$
- Idempotenzgesetz 2: $A \wedge A \equiv A$
- Negation 1: $\neg\neg A \equiv A$
- Negation 2: $\neg A \vee A \equiv \text{wahr}$

- Negation 3: $\neg A \wedge A \equiv$ falsch
- Absorbtionsgesetz 1: $A \vee (A \wedge B) \equiv A$
- Absorbtionsgesetz 2: $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
- Gesetz von de Morgan 1: $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ (sehr nützlich)
- Gesetz von de Morgan 2: $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$ (sehr nützlich)

Man bezeichnet wahr auch als das neutrale Element der Konjunktion (ähnlich der 1 in der Multiplikation) und falsch als das neutrale Element der Disjunktion (ähnlich der 0 in der Addition). Dies Erklärt auch die Informatikschreibweise denn verwenden wir anstatt wahr die 1 und anstatt falsch die 0 so können wir mit einer Aussageformel rechen: $A \wedge B \equiv A \cdot B$, $A \vee B \equiv A + B \equiv \min(A+B, 1)$, das aber nur am Rande.

2.5 Tautologie

Als Tautologie bezeichnet man eine Aussage die immer wahr ist. So zum Beispiel das Gesetzt vom ausgeschlossenen Dritten

Beispiel

$$A \vee (\neg A)$$

andere Tautologien sind nicht auf den ersten Blick zu Erkennen.

2.6 Widerspruch

Als Widerspruch bezeichnet man eine Aussage die immer falsch ist.

Satz 2.2 (Widerspruch) *F ist genau dann ein Widerspruch, wenn $\neg F$ eine Tautologie ist.*

Beispiel

Nehmen wir das Beispiel von oben:

$$(\neg A) \wedge A$$

ist immer falsch, denn immer wenn eine Seite der Konjunktion wahr ist, ist die andere falsch. Damit aber eine Konjunktion wahr wird müssen beide Seiten wahr sein. Verneinen wir diese Aussage so erhalten wir:

$$\neg((\neg A) \wedge A) \equiv^{\text{nach de Morgen 2}} ((\neg(\neg A)) \vee (\neg A)) \equiv^{\text{nach Negation 1}} (A \vee (\neg A))$$

2.7 Aussagelogik über Mengen

Bisher haben wir nur Aussagen betrachtet die sich nicht auf eine bestimmte Menge beschränken. Wir könnten zum Beispiel statt $A :=$ Tomaten sind rot, sagen

- $A :=$ **alle** Tomaten sind rot
- $A :=$ **keine** Tomate ist rot
- $A :=$ **es exisitiert mindestens eine** Tomate die rot ist
- $A :=$ **nicht alle** Tomaten sind rot

Später werden wir dafür noch spezielle mathematische Symbole definieren, jetzt interessiert uns allerdings was diese neuen Angaben genau aussagen.

- alle: Wenn eine Aussage für alle gelten soll, so ist sie bereits falsch, wenn sie für einen nicht gilt
- keiner: Wenn eine Aussage für keinen gelten soll, so ist sie bereits falsch, wenn sie für mindestens einen gilt
- mindestens einer: Wenn die Aussage für mindestens einen gelten soll, so ist sie falsch, wenn sie für keinen gilt
- nicht alle: Wenn die Aussage nicht für alle gilt, so ist sie falsch, wenn sie für alle gilt

Das sieht doch sehr logisch aus, ich denke da wäre jeder selbst drauf gekommen. Trotzdem ist es ein beliebter Fehler folgendes zu schreiben:

$A :=$ Alle Schafe sind schwarz $\Rightarrow \neg A :=$ Kein Schaf ist schwarz

Achtung: Umgangssprachlich vielleicht richtig aber logisch, mathematisch absolut falsch!!! Richtig wäre:

$A :=$ Alle Schafe sind schwarz $\Rightarrow$

$\neg A :=$ Es gibt mindestens ein Schaf das nicht schwarz ist

2.8 Aufgaben

Werten Sie folgende Ausdrücke aus

1. wahr $\wedge$ falsch $\vee$ wahr
2. wahr XOR (wahr $\vee$ falsch)
3. wahr XOR (wahr $\wedge$ falsch)
4. falsch XOR falsch $\vee$ wahr $\Rightarrow$ wahr
5. (falsch XOR falsch $\wedge$ wahr) $\Rightarrow$ falsch
6. falsch $\iff$ wahr
7. (wahr $\Rightarrow$ wahr) $\iff$ (falsch $\Rightarrow$ falsch)

Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke

1. $A \vee (B \wedge A) \vee (C \wedge A) \vee (D \wedge B)$
2. $A \vee \neg A \wedge (C \wedge \neg C)$
3. $(A \Rightarrow B) \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)$
4. $A \wedge (A \vee B)$

Führen Sie folgende Negationen aus

1. $\neg(\neg C \vee \neg D)$
2. $\neg((A \vee B) \wedge (C \vee D))$
3. $\neg A :=$ Kein Mensch kann Fußballspielen
4. $\neg A :=$ Alle Rosen sind rot
5. $\neg A :=$ Alle Tomaten schmecken klasse und sind rot
6. $\neg A :=$ Wenn ich im Lotto gewinne folgt daraus, dass ich viel Geld habe

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussageverknüpfungen Tautologien sind:

1. $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ (Abtrennungsregel)
2. $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ (Syllogismus-Regel)
3. $(A \Rightarrow B) \iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (Kontrapositionsgesetz)

2.9 Ergänzung

Dieser Teil ist nur für alle Interessierten gedacht und wird nicht in der Vorlesung betrachtet.

Theorien

Hierbei handelt es sich um eine Formalisierung, die **Intuition** von Logik die jedem Menschen innewohnt, die Aussagenlogik und die Prädikatenlogik reicht für das Studium an der HM völlig aus.

Wenn wir beweisen wollen, dass eine Aussage B wahr ist, und wenn wir schon wissen, dass Aussage A wahr ist und dass B von A impliziert wird, wie gehen wir dann vor? Es sei $\mathcal{A}$ das System der Axiome unserer Theorie. Das sind einfach Aussagen, deren Wahrheit wir einfach festsetzen. Zu ihrer Formulierung benutzen wir primitive Terme und logische Verknüpfungen. Mit Hilfe dieser primitiven Terme und logischen Verknüpfungen lassen sich weitere Aussagen formulieren, die entweder wahr oder falsch sind. Mit $\mathcal{W}$ sei die Gesamtheit derjenigen Aussagen bezeichnet, die unter Voraussetzung von $\mathcal{A}$ wahr sind. Theoretisch lassen sich diese wahren Aussagen mit Hilfe von Wahrheitstafeln bestimmen. Praktisch wird das meist nicht so einfach gehen, man müsste mit unendlich großen Tafeln arbeiten. Deshalb führen wir ein Regelsystem zur Bildung von Ketten wahrer Aussagen $A_1, A_2, \ldots$ (sogenannter Beweise) ein, und wir sehen die Wahrheit einer Aussage A als bewiesen an, wenn sie am Ende einer solchen Kette steht. Wir sagen dann, A ist aus $\mathcal{A}$ ableitbar und schreiben:

$$\mathcal{A} \vdash A$$

Eine Beweiskette $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wollen wir zulässig nennen, wenn jede Aussage A, die in der Kette vorkommt, eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. A ist eines der Axiome
2. A ist eine Tautologie ($\vdash A$)
3. Es gibt eine Kette vor A eine Aussage B und die Aussage $B \Rightarrow A$. Diese Beweis-Schema trägt auch die Bezeichnung modus ponens und kann so beschrieben werden: Wenn $\mathcal{A} \vdash B$ und $\mathcal{A} \vdash (B \Rightarrow A$ dann $\mathcal{A} \vdash A$ (direkter Beweis)
4. A entsteht aus einer vorher abgeleiteten zusammengesetzten Aussage B, indem man eine in B auftauchende Teilaussage durch eine äquivalente ersetzt. Dieses Ersetzungs-Prinzip verleiht den Tautologien eine besondere Bedeutung.

5. A ist eine Definition, führt also nur eine andere Bezeichnung für etwas bekanntes ein, wir verwenden hierfür $:=$ oder $:\iff$.

Konstruktivismus

Es gibt logische System, neben der klassischen Logik, in denen das Gesetzt vom ausgeschlossenen Dritten **nicht** gilt, solche Systeme vermeiden damit den Beweis durch Widerspruch. Was erst einmal irrsinnig klingt macht Sinn wenn man bedenkt, dass z.B. durch das Gesetzt die Existenz von Objekten beweisen können ohne diese 'anzufassen' indem wir von der Nicht-Existenz ausgehen und damit zu einem Widerspruch gelangen (Stichwort: Konstruktivismus). Der Konstruktivismus ist für Informatiker von großer Bedeutung. Die Beweise in der Informatik (sehen sie später in der theoretischen Informatik) sind fast immer konstruktiv. Solche Beweise liefern als Nebenprodukt oft einen konkreten Lösungsweg bzw. einen Algorithmus mit dem man etwas anfangen kann. Andere Beweise mögen einem eine Aussage beantworten, sonst haben sie aber keinerlei Mehrwert.

3 Funktionen

3.1 Grundlegende Eigenschaften von Funktionen

3.1.1 Was ist eine Funktion?

Eine **Funktion** f oder **Abbildung** f ist eine Relation zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge (Funktionsargument x) genau ein Element der anderen Menge (Funktionswert y) zuordnet.

1. Die **Definitionsmenge** $\mathbb{D}$ ist die Menge aus der das Funktionsargument x stammt.
2. Die **Zielmenge** Z ist die Menge der Funktionswerte y.
3. Die **Wertemenge** oder der besser **Bildbereich** $\mathbb{W} \subset Z$ ist die Menge der Funktionswerte die die Funktion annehmen kann

kurz schreiben wir

$$f : \mathbb{D} \to Z, x \mapsto y$$

Man beachte, dass zwar jedes $x \in \mathbb{D}$ sein $y \in Z$ hat aber nicht jedes $y \in Z$ sein $x \in \mathbb{D}$ (salopp ausgedrückt). Jedoch aht jedes $x \in \mathbb{W}$ sein $x \in \mathbb{D}$. Die Definitionsmenge gibt hierbei an in welchem Bereich die Funktion definiert ist, sprich welche Werte “in die Funktion eingesetzt werden dürfen“. Die Abbildungsvorschrift sorgt nun dafür, dass jedem Wert x des Definitionsbereichs genau ein Wert y des Bildbereiches zugeordnet werden kann. Die Wertemenge enthält genau jene Zahlen, welche man durch Abbildung des Definitionsbereiches mithilfe der Abbildungsvorschrift erhalten kann.

Zur Vorstellungserleichterung: Vorstellen kann man sich das wie die Funktionsweise eines Fotoapparates. Der Definitionsbereich wäre hierbei das, was in der realen Welt existiert und von der Kamera aufgenommen werden soll. Das ausgestrahlte Licht, der Bestandteile des Definitionsbereiches, wird nun mithilfe einer Linse eingefangen, gespiegelt und bei neueren Kameras mithilfe von Sensoren in digitale Bilder umgewandelt. Dieses digitale Bild ist nun das Ergebnis und jeder erreichte Wert (RGB, CMYK, ...) ist Bestandteil der Bildmenge.

Beispiele:

- $\mathbb{D} \to \mathbb{W}, f(x) = x^2$
- $\mathbb{D} \to \mathbb{W}, f(x) = 42x(12x - 12(3x^2))$

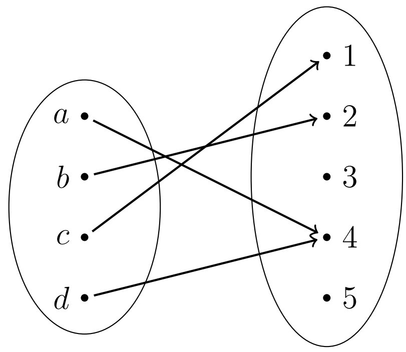


Abbildung 1: Eine Funktion mit einer endlichen $\mathbb{D} = \{a, b, c, d\}$ Definitionsmenge (rechts) und einer endlichen Zielmenge $Z = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und einer Bildmenge $\mathbb{W} = \{1, 2, 4\}$. Alle Elemente aus $\mathbb{D}$ besitzen genau eine 'Verbindungen'.

3.1.2 Surjektion

Eine Funktion f ist surjektiv genau dann wenn jeder Wert der Zielmenge (mindestens einmal) angenommen wird:

$$\forall y \in Z \; \exists x \in \mathbb{D} : f(x) = y$$

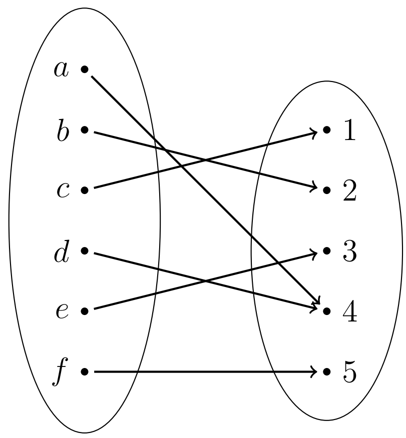


Abbildung 2: Eine surjektive Funktion.

3.1.3 Injektion

Eine Funktion f ist injektiv genau dann wenn jeder Wert der Bildmenge nicht mehrmals angenommen wird:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{D} : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

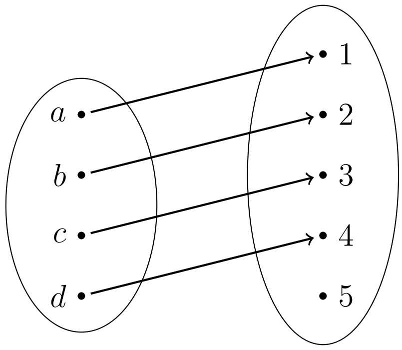


Abbildung 3: Eine injektive Funktion.

3.1.4 Bijektion

Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie zugleich injektiv und surjektiv ist. Eine solche Funktion ist eine eins-zu-eins Relation, sie besitzt zudem eine Umkehrfunktion.

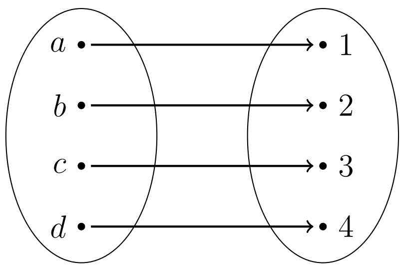


Abbildung 4: Eine bijektive Funktion.

3.1.5 Umkehrfunktion

Durch Einsetzen eines bestimmten x-Wertes in eine Funktion $f(x)$ erhält man den entsprechenden y-Wert. Will man jedoch den x-Wert zu einem bestimmten y-Wert bestimmen, so muss man zunächst dessen Umkehrfunktion $f(y)^{-1}$

berechnen. Dafür löst man die Funktion nach x auf. Durch das Bilden der Umkehrfunktion werden Definitions- und Wertemenge vertauscht. Die Umkehrfunktion muss natürlich die Anforderungen erfüllen welche an eine Funktion gestellt werden, erfüllen. Wenn nicht jedes y genau ein x abgebildet wird existiert die Umkehrfunktion nicht. Eine Funktion muss **bijektiv** sein (jeder Wert der **Zielmenge** wird angenommen (surjektiv) und kein Wert der **Bildmenge** wird mehrfach angenommen (injektiv)), damit aus ihr eine Umkehrfunktion gebildet werden kann.

Beispiel $f(x) = x^2$ besitzt keine Umkehrfunktion denn $f(2) = f(-2) = 4$. Somit müsste $f^{-1}(4) = \{2, -2\}$ (hier wird ein Wert 4 der Bildmenge mehrfach angenommen) sein, was aber die Definition einer Funktion widerspricht!

3.1.6 Monotonie

Wie bei Folgen und Reihen gibt es auch in der Welt der Funktionen den Begriff (strenge) Monotonie.

- Eine Funktion ist monoton fallend (bzw. wachsend), wenn gilt: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{D}, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$ $(bzw. f(x_1) \leq f(x_2))$
- Eine Funktion ist streng monoton fallend (bzw. wachsend), wenn gilt: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{D}, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2)$ $(bzw. f(x_1) < f(x_2))$

3.1.7 Symmetrie

Eine Funktion ist genau dann symmetrisch zur y-Achse, wenn gilt:

$$f(x) = f(-x)$$

Solche Funktionen werden auch als gerade Funktion bezeichnet. Eine Funktion ist genau dann symmetrisch zum Ursprung, oder auch ungerade, wenn gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

Achtung: Gerade hat in dem Sinne nichts mit der Geraden zu tun!!!

3.1.8 Periodizität

Eine Funktion ist dann periodisch, wenn es eine Konstante p gibt, für die gilt:

$$f(x + p) = f(x), \forall x \in \mathbb{D}$$

Diese Definition sagt eigentlich nichts anderes aus, als dass sich die Funktion ständig im gleichen Abstand wiederholt.

3.1.9 Nullstellen

Eine Nullstelle ist ein Punkt, an dem der Graf die x-Achse schneidet. Anders ausgedrückt: Ein Punkt an dem die Funktion $f(x)$ den Wert 0 erreicht. Um Nullstellen zu berechnen, löst man

$$f(x) = 0,$$

indem die Gleichung nach x aufgelöst wird. So kann man nun den x-Wert berechnen.

3.1.10 Stetigkeit

Eine Funktion ist stetig, wenn man ihren Graphen (innerhalb der Definitionsmenge) ohne Absetzen des Stiftes in einem Zug zeichnen kann (salopp). Achtung folgende Definition ist eine der knackigsten Ausdrücke die euch begegnen wird. Eine Funktion $f : \mathbb{D} \to Z$ ist stetig in $x_0 \in \mathbb{D}$, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathbb{D} \text{ mit } \ |x - x_0| < \delta \text{ gilt: } \ |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Intuitiv bedeutet dies, dass egal wie klein ich meine Funktionswert-Umgebung (ϵ) um $f(x_0)$ wähle, ich trotzdem alle Funktionswerte welche durch die Argument-Umgebung (δ) um x_0 entstehen einschließen kann.

3.1.11 Verschieben einer Funktion

Angenommen wir haben eine Funktion f mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und wollen eine neue Funktion f' bauen, wobei wir diese um $d > 0$ nach rechts verschieben wollen. Damit muss gelten:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = f(x - d) \iff \forall x \in \mathbb{R} : f'(x + d) = f(x).$$

Wir nehmen also einfach die gegebene Funktion $f(x)$ und ersetzen jedes x durch $x - d$. Setzen wir hingegen $f'(x) = f(x) + d$ so verschieben wir die Funktion nach oben. Für $d < 0$ folgt, dass wir die Funktion nach links bzw. nach unten verschieben.

3.2 Lineare Funktionen

Zu den einfachsten Funktionen gehören die linearen Funktionen. Alle linearen Funktionen (mit nur einer Variable) können in folgende Form gebracht werden:

$$f(x) = mx + t.$$

Hierbei ist m der konstante Wert der Steigung:

$$m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Die Konstante t ist auch als y-Achsenabschnitt bekannt. Er wird so bezeichnet, da die Funktion für den x-Wert 0 den Funktionswert $y = t$ annimmt. Viele komplizierte Funktionen werden am Ende doch wieder mit Hilfe einfacher lineare Funktionen angenähert. Lineare Funktionen lassen sich auf dem Computer leicht berechnen. Sie sind so prominent und verbreitet, dass es eine eigenen Vorlesung gibt: **Lineare Algebra**.

3.2.1 Die Punktsteigungsform

Um eine Gerade zu Definieren, sind immer zwei Dinge von Nöten:

- zwei Punkte $P_1 = (x_1, f(x_1)), P_2 = (x_2, f(x_2))$, welche auf der Geraden liegen **oder**
- ein Punkt $P = (x_p, f(x_p))$ und die Steigung m der Geraden

Im ersteren Fall berechnen wir m nach obiger Gleichung $m = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ und sind im Fall 2. Um dann weiter zu verfahren, benötigt man die Punktsteigungsform, welche wie folgt lautet:

$$f(x) = m \cdot (x - x_p) + y_p$$

m ist hierbei wie gehabt die Steigung der Geraden und x die Variable. x_p und $f(x_p) = y_p$ sind jedoch die Koordinaten eines Punktes P, welcher auf der Geraden liegt. Nachdem man die Punktsteigungsform dann ausmultipliziert hat, besitzt man wieder die ganz normale Geradengleichung, wie oben beschrieben.

3.2.2 Schnittpunkt zweier Geraden

Ein Schnittpunkt zweier Funktionen ist ein Punkt, welcher sich auf beiden Graphen der Funktionen befindet. Wenn ein Punkt auf beiden Graphen sein soll, so muss er beide Funktionen erfüllen. Seien f_1, f_2 Geradenfunktionen so scheiden sich die von ihnen definierten Geraden im Punkt $S = (x, y)$ wenn

$$f_1(x) = f_2(x) = y$$

Beispiel: Nehmen wir als Beispiel die Funktionen $f_1(x) = 4x$ und $f_2(x) = 12x - 23$. Es muss nun gelten

$$f_1(x) = f_2(x) \iff 4x = 12x - 23 \iff -8x = -23 \iff x = \frac{23}{8}$$

Nun muss man den erhaltenen x-Wert nur noch in eine der beiden Gleichungen einsetzen und man erhält das Ergebnis oder wir schreiben frech

$$S = \left(\frac{23}{8}, f_1(23/8)\right) = \left(\frac{23}{8}, \frac{23}{2}\right)$$

Der Schnittpunkt hat somit die Koordinaten $S = \left(\frac{23}{8}, \frac{23}{2}\right)$.

3.2.3 Besondere Geraden

- Besitzen zwei Geraden dieselbe Steigung, so sind diese parallel zueinander. Im Normalfall besitzen diese keinerlei Schnittpunkte. Eine besondere Art der Parallelität ist jedoch die Identität zweier Geraden. Identische Geraden besitzen logischer Weise unendlich viele Schnittpunkte.
- Sind zwei Geraden senkrecht (im rechten Winkel) zueinander, so ist das Produkt ihrer Steigungen -1: $m_1 \cdot m_2 = -1$.
- Eine Tangente berührt eine Kurve lediglich in einem einzigen Punkt.
- Eine Sekante schneidet eine Kurve in zwei Punkten.

3.3 Quadratische Funktionen

Die nächst einfachsten Funktionen nach den linearen stellen die so genannten quadratischen Funktionen dar. Sie werden auch als Parabelgleichungen bezeichnet. Ihren Namen verdanken diese Funktionen der Tatsache, dass ihre Variable zumindest einmal quadratisch und niemals mit einem höheren Exponenten als 2 in die Gleichung mit eingeht.

3.3.1 Die Normalparabel

Die Normalparabel besitzt die Formel

$$f(x) = x^2$$

Sie ist eine nach oben geöffnete, achsensymmetrische Kurve dar, deren niedrigster Punkt (Scheitel) S im Ursprung des Koordinatensystems $(0, 0)$ liegt.

3.3.2 Stauchen und Strecken

Durch Multiplizieren der Normalparabel mit einer konstanten a lässt sich die Kurve stauchen oder strecken. $f(x) = a \cdot x^2$ Ist der Betrag von a kleiner 1, so wird die Parabel gestaucht. Ist er größer 1, so wird sie gestreckt. Darüber hinaus wird die Funktion durch einen negativen Wert von a an der x-Achse gespiegelt und die Parabel ist somit nach unten geöffnet.

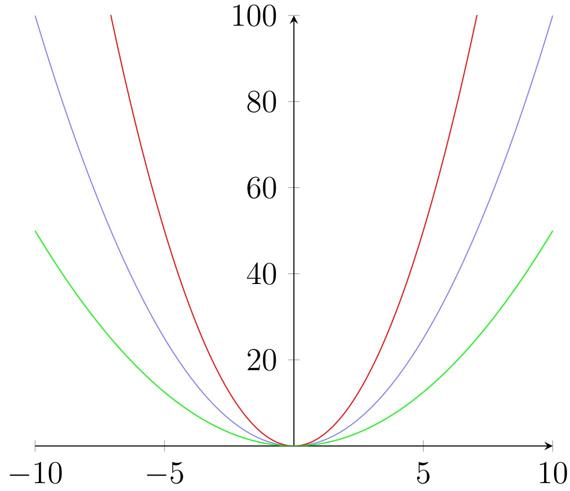


Abbildung 5: Normalparabel, gestreckte und gestauchte Normalparabel

3.3.3 Die Scheitelform

Durch Kombination von Stauchung/Streckung und Verschiebung erhält man die so genannte Scheitelform:

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$$

Mithilfe dieser Funktion lassen sich alle Arten quadratischer Funktionen darstellen. Außerdem lassen sich die Koordinaten des Scheitels, der Stauchungs- bzw. Streckungsfaktor der Funktion, sowie die Frage, ob sie nach oben oder unten geöffnet ist, auf einfachste Weise bestimmen.

3.3.4 Die Normalform einer quadratischen Gleichung

Multipliziert man die Scheitelform aus, so erhält man

$$f(x) = a \cdot x^2 - 2 \cdot a \cdot x_s x + x_s^2 + y_s.$$

Ersetzt man nun die konstanten Werte $-2ax_s$ durch b und $x_s^2 + y_s$ durch c, so erhält man die **Normalform** quadratischer Gleichungen:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

3.3.5 Die binomischen Formeln

Die binomischen Formeln sind das Ergebnis des Ausmultiplizierens, hat man sie jedoch im Kopf so spart man viel Zeit.

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

3.3.6 Die quadratische Ergänzung

Die quadratische Ergänzung hilft uns bei der Umwandlung der Normalform in die Scheitelform und somit bei der Bestimmung des Scheitels. Wir werden diese an anhand eines Beispiels erklären.

Beispiel: Sei

$$f(x) = 3x^2 - 6x - 24.$$

Im ersten Schritt klammern wir die Konstante "a" (hier gleich 3) aus:

$$f(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3 \cdot (x^2 - 2x - 8).$$

Schaut man sich nun den Term innerhalb der runden Klammern genauer an, so kann man eine gewisse Ähnlichkeit mit der ersten, bzw. zweiten binomischen Formel feststellen. Deshalb folgt nun auch der wichtigste Schritt, die eigentliche quadratische Ergänzung. Wir ergänzen die Formel nun so, dass wir eine der beiden binomischen Formeln anwenden können. Dafür müssen wir erste einmal feststellen, was der a- und was der b-Wert der binomischen Formeln ist. Die zweite binomische Formel lautet

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Vergleichen wir dies mit unserem Term

$$x^2 - 2x - 8$$

so sehen wir gleich, dass

$$a := x \Rightarrow 2ab = 2x \Rightarrow b = 1.$$

Allerdings ist b^2 für $b = +1$ nicht -8 sondern 1. Um f nicht zu verändern müssen wir deshalb eine Korrektur vornehmen:

$$f(x) = 3 \cdot \left(\underbrace{(x-1)^2}_{\text{wegen 2. bin. Formel}} + \underbrace{-1^2 - 8}_{\text{da } b^2=1 \text{ und nicht } -8} \right)$$

Hier nochmal die Übersicht:

$$f(x) = 3 \cdot \left(\underbrace{x^2}_{:=a^2} \underbrace{-2 \cdot x \cdot 1}_{:=-2ab} \underbrace{+1^2}_{:=+b^2} \underbrace{-1^2 - 8}_{:=-\text{Korrektur}} \right)$$

Nun können wir noch ein wenig zusammenfassen

$$f(x) = 3 \cdot ((x-1)^2 - 1^2 - 8) = 3((x-1)^2 - 9) = 3(x-1)^2 - 27$$

Und voilà, schon ist man fertig.

3.3.7 Berechnung der Nullstellen

Um die Nullstellen von quadratischen Gleichungen zu berechnen, gibt es mehrere Möglichkeiten.

Zerlegung in Linearfaktoren (auch für Polynome):

“Null multipliziert mit irgendwas ist immer Null“

Mit der Linearfaktorzerlegung erhalten wir eine Form der Funktion, die uns sagt für welche x ein Faktor Null und somit die gesamte Funktion Null ergibt. Auch dies zeigen wir an einem Beispiel.

Beispiel Sei

$$f(x) = 6x^2 - 24$$

Wir fragen uns für welche x ist $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \iff 6x^2 - 24 = 0 \iff x^2 - 4 = 0 \iff^{\text{3. bin. Formel}} (x-2)(x+2) = 0$$

Die Faktoren der Funktion sind somit $(x-2)$ und $(x+2)$. $(x-2) = 0$ für $x = 2$ und $(x+2) = 0$ für $x = -2$. Damit sind die Nullstellen:

$$N_1 = (2, f(2)) = (2, 0) \text{ und } N_2 = (-2, f(-2)) = (-2, 0)$$

Berechnung der Umkehrfunktionen (nicht nur für quadratischen Funktionen): Im Grundlagenteil haben wir den Begriff der Umkehrfunktion kennen gelernt. Angenommen x_0 sei eine Nullstelle der Funktion $f(x)$ und angenommen $f(x)$ besitzt eine Umkehrfunktion ($f(x)$ ist bijektiv), dann folgt daraus:

$$f(x_0) = 0 \iff f^{-1}(0) = x_0$$

Das heißt wir könnten $f^{-1}(x)$ berechnen und dann einfach 0 einsetzten und erhalten damit die Nullstelle von $f(x)$ nmlich $N = (f^{-1}(0), 0)$.

Beispiele

- Sei $f(x) = 3x^2 + 3x + 4$: Die Normalparabel ist nicht bijektiv und da jede quadratische Funktion eine gestauchte und verschobene 'Variante' der Normalparabel ist, sind quadratische Funktionen nicht bijektiv.
- Sei $f(x) = x - 7 \Rightarrow f^{-1}(y) = y + 7 \Rightarrow N = (f^{-1}(0), 0) = (7, 0)$

Die Mitternachtsformel: Eine weitere Möglichkeit, die Nullstellen einer quadratischen Funktion zu berechnen, wäre durch Verwendung der so genannten "Mitternachtsformel":

$$0 = ax^2 + bx + c \Rightarrow x_{1,2} := \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Falls jedoch

$$b^2 - 4ac < 0$$

existiert **keine Nullstelle**, da wir in den reellen Zahlen keine negative Wurzel kennen und falls

$$b^2 - 4ac = 0$$

handelt es sich um eine sog. **doppelte Nullstelle**. Ansonsten handelt es sich um **zwei Nullstellen**. Dabei nennen wir $b^2 - 4ac$ die Diskriminante. Wie entsteht diese Formel?

$$ax^2 + bx + c$$

Wird auf die Scheitelform gebracht

$$ax^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

und gleich Null gesetzt

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Den Beinamen “Mitternachtsformel“ verdankt sie ihrer Wichtigkeit. Sie wird nämlich tatsächlich so oft gebraucht, dass man sie auch noch auswendig aufsagen können sollte, wenn man um Mitternacht geweckt wird! (Auch wenn von euch vermutlich niemand bereits um Mitternacht schläft ...) Die Mitternachtsformel hat noch einen weiteren Vorteil. Mithilfe der Diskriminante (dem Term, der bei der Mitternachtsformel unter der Wurzel steht) lässt sich auch auf leichteste Weise feststellen, ob die Funktion Nullstellen besitzt und wenn ja, wie viele.

Raten der Nullstellen (nicht nur für quadratischen Funktionen): Ist man erfahren genug und die Funktion einfach genug, so kann man häufig die Nullstelle auch einfach erraten. Dann muss man noch einen Beweis erbringen, dass es sich wirklich um einen Nullstelle handelt. Hierfür setzten wir einfach das geratene x_0 in $f(x)$ ein und überprüfen ob

$$f(x_0) \stackrel{?}{=} 0$$

3.4 Übungen zu quadratischen Funktionen

1. Berechne die Scheitelpunkte folgender Gleichungen
   - $f(x) = 3x^2 - 3x + 6$
   - $f(x) = x^2 - 8x - 4$
   - $f(x) = x^2 + 4x + 1$
   - $f(x) = -4x^2 + 16x - 1$
2. Berechne die Nullstellen der oberen Gleichungen

3.5 Polynome

3.5.1 Was ist ein Polynom

Bei Funktionen der Form $f(x) = a_n x^b + a_{n-1} x^{b-1} + a_{n-2} x^{b-2} + ...a_0$ handelt es sich um so genannte Polynome.

3.5.2 Nullstellenberechnung mithilfe der Polynomdivision

Im Folgenden werde wir nun anhand des Beispiels

$$f(x) = 6x^3 - 12x^2 - 6x + 12$$

die Nullstellenberechnung mithilfe der Polynomdivision erläutern. Dabei werden alle Nullstellen erraten. Jede Nullstelle liefert einen Linearfaktor.

1. Wie immer setzen wir die Funktion gleich Null und werden den Faktor los:
$$6x^3 - 12x^2 - 6x + 12 = 0 \iff x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

2. Nun muss man (leider) die erste Nullstelle "erraten". Da es aber sehr viele Zahlen gibt, würde dies ohne einen kleinen Trick sehr schwer werden. Besitzt ein Polynom lediglich ganzzahlige Koeffizienten, so sind die x-Werte der Nullstellen ganzzahlige Teiler von a_0. Warum (nicht ganz leicht)? Unser Beispiel kann also nur Nullstellen bei x-Werten aus $\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -6, 6\}$, besitzen. Nun kann man systematisch alle möglichen Kandidaten abarbeiten oder sieht es direkt. Testen mit $x \stackrel{?}{=} -1$:
$$(-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 = 0$$
Glücklicherweise haben wir schon beim ersten Versuch eine Nullstelle bei $x_1 = -1$ entdeckt.

3. Nun werden wir uns die Eigenschaft des Faktorisierens zu Nutze machen, dass jedes Polynom in Faktoren $(x - x_{Nullstelle})$ zerlegt werden kann. Wir werden nun eine Division des Polynoms durch $(x - (-1)) = (x + 1)$ durchführen:
$$\begin{array}{l}
\big(\;\; x^3 - 2x^2 \;\; - x + 2\big) : \big(x + 1\big) = x^2 - 3x + 2 \\
\underline{-x^3 \;\; - x^2} \\
\qquad\; -3x^2 \;\; - x \\
\qquad\;\; \underline{3x^2 + 3x} \\
\qquad\qquad\qquad 2x + 2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-2x - 2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

4. Jetzt beginnt der Vorgang mit der neuen Funktion ($g(x) = x^2 - 3x + 2$), welche einen Grad weniger hat von Neuem. In unserem Fall jedoch, da wir nun eine quadratische Funktion haben, können wir die Mitternachtsformel zur Lösung heranziehen. Die drei Nullstellen unserer Beispielfunktion lauten:
$$x_0 = -1; x_1 = 1; x_2 = 2$$
Die Funktion lässt sich also auch wie folgt schreiben:
$$f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

3.6 Übungen zu Polynomen

Berechne die Nullstellen folgender Gleichungen

- $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
- $f(x) = 3x^3 + 12x^2 + 3x - 18$

3.7 Exponentialfunktionen

3.7.1 Was sind Exponentialfunktionen?

Exponentialfunktionen sind Funktionen der Form

$$f(x) = a \cdot b^{x-x_0} + y_0$$

Dabei ist

a Stauchungs- bzw. Streckungsfaktor

b Basis

x_0 Wert der Verschiebung in x-Richtung (siehe Abschnitt 3.1.11)

y_0 Wert der Verschiebung in y-Richtung (siehe Abschnitt 3.1.11)

Sie ist auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und ist für die Zielmenge $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ surjektiv. Sie ist außerdem injektiv uns somit für $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ als Zielmenge bijektiv.

3.7.2 Umkehrfunktion - die Logarithmusfunktion

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist die Logarithmusfunktion. Sei $f(x)$ gleich

$$f(x) = a \cdot b^{x-x_0} + y_0$$

So berechnet sich die Umkehrfunktion wie folgt:

$$\begin{aligned}
y = a \cdot b^{x-x_0} + y_0 &\iff \\
y - y_0 = a \cdot b^{x-x_0} &\iff \\
\frac{y-y_0}{a} = b^{x-x_0} &\iff \\
\log_b\left(\frac{y-y_0}{a}\right) = x - x_0 &\iff \\
\log_b\left(\frac{y-y_0}{a}\right) + x_0 = x &
\end{aligned}$$

Da die Exponentialfunktion mit einer Zielmenge gleich $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ bijektiv ist, ist die Umkehrfunktion, der die Logarithmusfunktion, nur auf $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ definiert!

3.8 Trigonometrische Funktionen

3.8.1 Die Winkelfunktionen rechtwinkliger Dreiecke

Grundlegend gibt es drei Winkelfunktionen, welche auf rechtwinklige Dreiecke angewandt werden können:

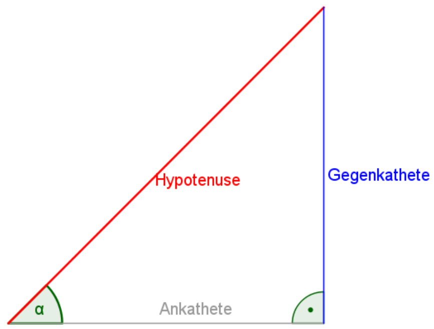
- Sinus $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{W} = [-2\pi; +2\pi]$
- Kosinus $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{W} = [-2\pi; +2\pi]$
- Tangens $\tan : \left(\mathbb{R} \setminus \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}\right) \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{W} = \mathbb{R}$

Der Tangens ist für die Nullstellen des Kosinus nicht definiert denn

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \tag{1}$$

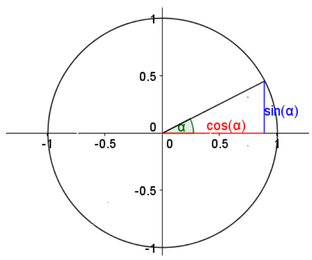
Die drei Seiten des Dreiecks werden als Hypotenuse (längste Seite des Dreiecks, -gegenüber des rechten Winkels-), Ankathete (kurze Seite, welche am Winkel α anliegt), und Gegenkathete (Seite gegenüber des Winkels α) bezeichnet.

1. $\sin(\alpha) = \frac{Gegekathete}{Hypotenuse}$
2. $\cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$
3. $\tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$



3.8.2 Der Einheitskreis

Am besten sieht man die Eigenschaften der Winkelfunktionen bei der Betrachtung des Einheitskreises. Der Einheitskreis ist an sich nichts anderes als ein Kreis, mit Radius r = 1 LE und Kreismittelpunkt im Ursprung.Dabei ist die x-Koordinate des Punktes, am Ende der Hypotenuse des eingezeichneten Dreiecks, der Kosinuswert des Winkels Alpha und die y-Koordinate der Sinuswert. Der Tangens ist die Steigung der Hypotenuse.

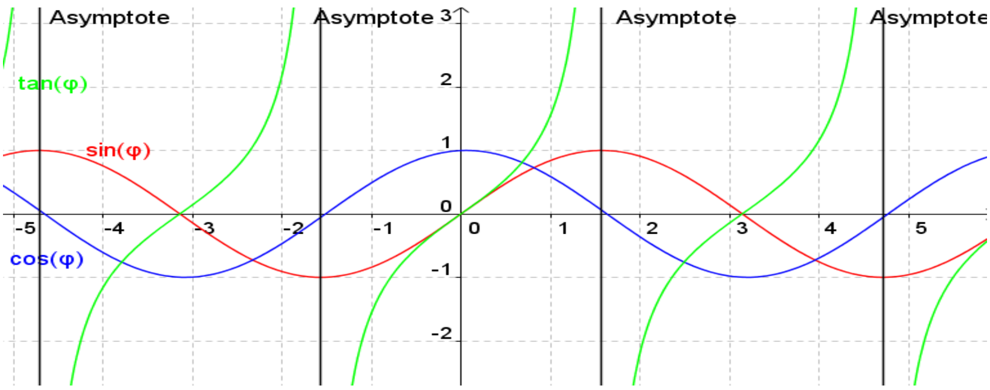


3.8.3 Winkelmaß und Bogenmaß

Bisher haben wir immer mit Winkelmaßen gerechnet, wie zum Beispiel 45°. Neben dieser Möglichkeit, Winkel auszudrücken, gibt es auch noch das Bogenmaß. Definition: Das Bogenmaß ist die Länge des Kreisbogens mit dem Radius r = 1 unter einem bestimmten Winkel. Wie ein Winkelwert mit ° gekennzeichnet wird, so kennzeichnet man das Bogenmaß mit dem Wörtchen "rad". An den meisten "höheren" Schulen wird das Bogenmaß bevorzugt.

3.8.4 Graphische Darstellung der Winkelfunktionen

Stellt man die Winkelfunktionen graphisch dar, so bekommt man folgende Zeichnungen.



3.8.5 Nullstellen, Asymptoten und Symmetrie

Alle Winkelfunktionen sind periodisch. Deshalb treten auch ihre Nullstellen in gleichbleibenden Abständen auf.

- Sinusfunktion:
  $$\sin(x) = 0 \iff x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\},$$
  was sich mit den Nullstellen des Tangens deckt.

- Kosinusfunktion:
  $$\cos(x) = 0 \iff x \in \left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\},$$
  was sich mit den Definitionslücken des Tangens deckt.

Des Weiteren besitzt die Tangensfunktion eine periodisch auftretende senkrechte Asymptote an den Nullstellen des Kosinus. Betrachtet man die Graphen im Hinblick auf ihre Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems, stellt man fest, dass die Sinus- und Tangesnsfunktion **punktsymmetrisch** zum Ursprung (ungerade) und die Kosinusfunktion achsensymmetriesch zur y-Achse (gerade) ist.

4 Differentiation

4.1 Ableiten von Funktionen

4.1.1 Ableiten von Funktionen

Definition (Ableitung): Die Ableitung ist die Steigung eines Punktes auf einem Graphen.
Wie erhalte ich die Ableitung? Die Steigung eines Punktes auf einem Graphen erhält man, indem man an eben diesem Punkt eine Tangente an den Graphen lege. Die Steigung dieser Tangenten ist somit auch die Steigung in diesem Punkt.
Definition (Tangente): Eine Tangente ist eine Gerade, die den Graphen in nur einem einzigen Punkt berührt.
Um die Tangentensteigung zu erhalten, betrachtet man zunächst die Steigung einer Sekante und nähert den zweiten Punkt dem ersten immer weiter an. Ja, das klingt stark nach einer Grenzwertbildung.
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

4.1.2 Differenzierbarkeit

Definition: Eine Funktion ist genau dann differenzierbar, wenn sie stetig ist und gleichzeitig keine Sprünge der Steigung, d.h keine "Knicke" enthält (egal ob man die Funktion von links oder rechts betrachtet, die Steigung muss in beiden Fällen gleich sein).

4.1.3 Die erste Ableitung

Um eine Funktion abzuleiten multipliziert man bei Polynomen jeweils die Exponenten mit den dazugehörigen Koeffizienten ihrer Basis und subtrahiert den Exponenten dabei um 1.
Zum Beispiel:
$f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 * 2x^{2-1} = 4x$
Konstanten fallen dabei weg.
Zum Beispiel:
$f(x) = 2x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 2 * 2x^(2-1) = 4x$
Für Logarithmus- und e-Funktionen sowie die Winkelfunktionen gelten besondere Ableitungsgesetze.

4.2 Besondere Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

4.3 Ableitungsregeln

Wie überall in der Mathematik gibt es auch für das Ableiten, insbesondere bei komplizierteren Funktionstermen, bestimmte Regeln im Hinblick auf ihre richtige Ableitung.

4.3.1 Produktregel

$f(x) = h(x) * g(x) \Rightarrow f'(x) = h'(x) * g(x) + h(x) * g'(x)$
Beispiel: $f(x) = 2x^3 * sin(x) \Rightarrow f'(x) = 6x^2 * sin(x) + 2x^3 * cos(x)$

4.3.2 Quotientenregel

$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{h'(x)*g(x)-h(x)*g'(x)}{(g(x))^2}$
Beispiel: $f(x) = \frac{2x^3}{2x^2+4} \Rightarrow f'(x) = \frac{6x^2*(2x^2+4)-2x^3*4x}{(2^2+4)^2}$

4.3.3 Kettenregel

Für ineinander geschachtelte (verkettete) Funktionen gilt die sogenannte Kettenregel.
Dabei wird die Funktion ganz normal abgeleitet und die innere Funktion nachdifferenziert. $f(x) = f(g(x)) \Rightarrow f'(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$
Beispiel: $f(g(x)) = x^{(x^2+4)} \Rightarrow f'(g(x)) = (x^2+4) * x^{(x^2+4-1)} * 2x$

4.4 Übungen

1. Bilde die Ableitungen folgender Terme
   - $f(x) = 12x^3 - 3x^2 + x + 12$
   - $f(x) = 6sin^2(x) + cos(x)$

- $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x}$
- $f(x) = \frac{3x}{12x^2-4x+2} * sin^2(x) - 3cos(x) + 1$

Welche dieser Funktionen sind nicht differenzierbar?

- $f(x) = \{^{3x; für x<3}_{2x; für x>3}$
- $f(x) = |x|$
- $f(x) = \frac{x^3}{sin(x)}$
- $f(x) = 0$

4.5 Kurvendiskussion

Definition: Bei einer Kurvendiskussion wird der Graph einer Funktion im Hinblick auf seine Eigenschaften, wie seinen Definitionsbereich, Grenzwerte, Asymptoten, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie, Extrem- und Terrassenpunkte, Monotonie und seinem Krümmungsverhalten, anhand des Funktionsterms untersucht.

4.5.1 Definitonsbereich

Zunchst beschreibt man, in welchem Bereich die Funktion definiert ist, indem man seine Definitions- und Wertemenge bestimmt.

4.5.2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Interessant können auch die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen sein, v.a. wenn man den Graphen skizzieren möchte.

Schnittpunkt mit der y-Achse
Diesen erhält man, wenn man für x den Wert 0 einsetzt.

Nullstellen
Als nächstes untersucht man die Funktion auf Nullstellen. Diese erhält man, indem man den Funktionsterm gleich Null setzt und nach x auflöst.
Merke: Ein Polynom hat höchstens so viele Nullstellen wie der höchste Exponent der Funktion, dabei erhält man zum Teil auch mehrfache Nullstellen, wie beispielsweise bei x^3. Diese Funktion hat ein dreifache Nullstelle an der Stelle x=0.

4.5.3 Grenzwerte

Nun betrachtet man das Verhalten des Graphen im Unendlichen. Dieses gibt man mit Hilfe des Limes an. Dabei ist interessant, ob sich der Graph einem bestimmten Wert annähert oder ob er ins Unendliche steigt oder fällt.

4.5.4 Asymptoten

Asymptoten können Geraden aber auch andere Funktionen sein, an die sich der Graph der zu untersuchenden Funktion beliebig nah annähert, ohne sie jemals zu berühren.
Asymptoten findet man vor allem bei gebrochen rationalen Funktionen. Dort, wo der Nenner den Wert 0 erreichen würde (an dieser Stelle ist die Funktion nicht definiert => Grenzwertbildung), befindet sich eine senkrechte Asymptote. Diese Stelle nennt man Polstelle. Es kann aber auch sein, dass es sich dort um ein Loch handelt, dies ist dann der Fall, wenn die Polstelle gleichsam eine Nullstelle der Funktion ist.
Beispiel: $\frac{2x}{4x-1}$ Der Nenner wird 0 bei x=0.25, es handelt sich dabei um keine Nullstelle, somit befindet sich an der Stelle x=0,25 eine senkrechte Asymptote.
Um den Graphen auf waagrechte oder andere Asymptoten zu untersuchen, schaut man sich die Exponenten der Variablen an.
Die folgenden Ausführungen beziehen sich rein auf die höchsten Exponenten der Variablen im Zähler und Nenner.

4.5.5 Symmetrie

Hier untersuchen wir die Symmetrie die Graphen zum Koordinatensystem.
Wir unterscheiden dabei Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung und Achsensymmetrie zur y-Achse.
Dabei untersucht man den Funktionsterm auf folgende Weise:

- Achsensymmetrie (y-Achse), wenn $f(x) = f(-x)$
- Punktsymmetrie (Ursprung), wenn $f(-x) = -f(x)$

4.5.6 Extrem- und Terrassenpunkte

Für die Untersuchung des Funktionsgraphen benötigt man zunächst die erste Ableitung des Funktionsterms. Bei einem Extrempunkt findet ein Vorzeichenwechsel der Steigung statt, d.h. die Ableitung ergibt in diesem Punkt 0. Bei einem Terrassenpunkt ist die Ableitung ebenfalls 0. Folglich müssen wir, um

diese Punkte zu erhalten, die erste Ableitung gleich Null setzen.
Somit ist die Nullstelle der ersten Ableitung entweder ein Extrem- oder Terrassenpunkt.
Ob es sich um einen Extrempunkt oder einen Terrassenpunkt handelt, erfahren wir mit Hilfe der zweiten Ableitung. Wenn die Werte der zweiten Ableitung ungleich 0 sind, handelt es sich um einen Extrempunkt.
Ist die zweite Ableitung an dieser Stelle jedoch 0, so wissen wir weiterhin nicht, ob es sich um einen Extrem- oder Terrassenpunkt handelt.
Dabei gilt:

- ist die zweite Ableitung negativ, handelt es sich um ein lokales Maximum
- ist die zweite Ableitung positiv, handelt es sich um ein lokales Minimum

Kurz: ein lokales Maximum oder Minimum besteht immer dann, wenn die erste Ableitung an ihrer Nullstelle einen Vorzeichenwechsel hat. Andernfalls handelt es sich um einen Terrassenpunkt.

4.5.7 Monotonie

Nachdem wir die Funktion hinreichend auf Extrem- und Terrassenpunkte untersucht haben, kann man ihre Monotonie analysieren. Diese gibt man üblicherweise in Intervallen an, deren Grenzen die Rnder und die Extremstellen bilden.

4.5.8 Krümmung

Um das Krümmungsverhalten einer Funktion zu untersuchen, benötigt man die zweite Ableitung des Funktionsterms.
Es gilt: $f''(x) < 0 \Rightarrow rechtsgekrümmt$
$f''(x) > 0 \Rightarrow linksgekrümmt$
Die Stelle, an welcher der Graph seine Krümmung ändert, bezeichnet man als Wendestelle.
Diese ist gleich der Nullstelle der zweiten Ableitung des Funktionsterms, d.h. die zweite Ableitung gleich 0 setzten und den zugehörigen x-Wert berechnen.

Das sind die wesentlichen Schritte einer Kurvendiskussion. Die Reihenfolge der Bearbeitung kann dabei natürlich variiert werden. Punkte, an denen sich die Richtung der Krümmung von rechts nach links, bzw. von links nach rechts ändert, nennt man Wendepunkte.

4.6 Übungen

1. Diskutiere die Kurven folgender Funktionen
   - $f(x) = x^4$
   - $f(x) = sin(x)$
   - $f(x) = 3x^2 + 12x - 4$
   - $f(x) = \frac{4x^3+x^2-x}{x+1}$
   - $f(x) = \frac{tan^2(x)}{sin^2(x)}$
2. Untersuche folgende Funktionen auf ihre Nullstellen, Extrempunkte und Krümmung.
   - $f(x) = (x-4)^2 - 3$
   - $f(x) = (x-2)(x+5)(x-4)$
   - $f(x) = \frac{1}{x}$

5 Integration

5.1 Integration

Definition (Integral): ein Integral ist die Flächenbilanz zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse.
Integrale werden immer in Intervallen berechnet.
Dabei unterscheidet man offene Integrale, d.h ein Integral ohne Grenzen und ein geschlossenes Integral, welches lediglich in einem bestimmten Intervall berechnet wird.
Schreibweise: $\int f(x)dx \Rightarrow$ offenes Integral
$\int\limits_a^b f(x)dx \Rightarrow$ geschlossenes Integral im Intervall [a;b]
Dabei beschreibt das dx am Ende jeweils, nach welcher Variable integriert wird. In der Physik beispielsweise findet man auch häufig die Bezeichnung dt.

5.1.1 Stammfunktionen

Definition: die Ableitung einer Stammfunktion ergibt den Funktionsterm der ursprnglichen Funktion.
Symbol der Stammfunktion: F(x) d.h. $F'(x) = f(x)$

5.1.2 Berechnung von Stammfunktionen

Die Stammfunktion erhält man, indem man die Ableitung rückwärts rechnet. D.h. ich addiere den Exponenten um 1, bilde daraus einen Bruch der Form $\frac{1}{Exponent+1}$ und multipliziere diesen mit dem Faktor vor der Basis. Mit dieser Methode lassen sich zu fast allen Polynomen Stammfunktionen berechnen. Da es sich um eine Stammfunktion handelt, muss sie am Ende noch mit einer unbekannten Konstanten C addiert werden.

5.1.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

HDI:!!!Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion der zu integrierenden Funktion!!!

5.1.4 Berechnung von Integralen

Zunächst berechnet man sich eine Stammfunktion der Integralfunktion.
$\int\limits_a^b f(x)dx \Rightarrow [F(x)]_a^b$

Als nächstes setzt man die obere Grenze in die Stammfunktion ein und subtrahiert von diesem Wert den Wert der Stammfunktion mit der eingesetzten unteren Grenze.
$F(b) - F(a)$

5.1.5 Berechnung von Fläche zwischen zwei Graphen

Um die Fläche zwischen zwei Graphen f(x) und g(x) zu ermitteln, berechnet man sich zunächst die Schnittpunkte der beiden Graphen, welche die Intervallgrenzen bilden. Wenn man nun eine neue Funktion h(x) aus der Subtraktion der beiden Funktionen f(x) und g(x) bildet und das Integral dieser Funktion über die beiden Schnittpunkte berechnet, erhält man die Fläche zwischen den beiden Graphen.

5.2 Übung

1. Berechne die Stammfunktionen folgender Funktionen
   - $f(x) = x^2 - 8$
   - $f(x) = 3x^2 + 4x - 16$
   - $f(x) = sin(x) - 3$
2. Berechne nun alle Flächen zwischen den oben gegebenen Graphen.

6 Folgen und Reihen

6.1 Folgen

Eine Folge ist eine Auflistung $a_1, a_2, a_3, \ldots$ von endlich bzw. unendlich vielen durchnummerierten Objekten. Formal ist eine Folge eine Abbildung a von den natrlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in eine Menge X wobei X meist gleich $\mathbb{R}$ ist. Wir schreiben allerdings anstatt $a(i)$, a_i. Besonders interessant sind unendliche Folgen, die oft durch ein so genanntes *Bildungsgesetz* dargestellt.

Beispiele:

- $a_n = \frac{1}{n}$ (wir knnten hier auch schreiben $a(n) = \frac{1}{n}$ oder $a(n) \mapsto \frac{1}{n}$)
- $a_n = \frac{1}{n^2}$
- $a_n = n^2$
- $a_n = \underbrace{\text{ggggg} \cdots \text{ggggg}}_{n-\text{mal}}$ (hier wre $a : \mathbb{N} \to \{g, gg, ggg, gggg, \ldots\}$)
- 1,2,4,8,16,32,...
- $a_{n+1} = 2a_n; \qquad a_1 = 1$ (rekursiv)

6.1.1 Arithmetische Folgen

Folgen, deren aufeinander folgenden Glieder immer eine konstante Differenz d aufweisen, werden arithmetische Folgen genannt.

Darstellungsarten arithmetischer Folgen:

- $a_n = a_1 + (n-1)d$ (explizit)
- $a_{n+1} = a_n + d$ (rekursiv)

Beispiele:

- $a_n = 2 + (n-1)4$
- $a_{n+1} = a_n + 3$
- $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

6.1.2 Geometrische Folgen

Folgen, der Form $a_n = a_1 \cdot q^n$, werden als geometrische Folgen bezeichnet. Ihre aufeinander folgenden Glieder unterscheiden sich jeweils um einen konstanten Faktor.

6.1.3 Rechnen mit Exponenten

Wie ihr vielleicht schon bemerkt habt, gibt es bei den geometrischen Folgen eine neue mathematische Schreibweise (q^n). Die Konstante q wird hierbei als Basis bezeichnet, während n Exponent genannt wird. Hierbei gilt:

- $q^0 = 1$
- $q^1 = q$
- $q^2 = q \cdot q$
- $q^3 = q \cdot q \cdot q$
- $q^4 = q \cdot q \cdot q \cdot q$
- $\ldots$

Rechengesetze für Exponenten

1. $((b)^n)^m = b^{n \cdot m}$
2. $b^n \cdot b^m = b^{n+m}$
3. $\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$

Rechengesetze für Wurzeln

1. $\sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$
2. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$
3. $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
4. $\sqrt[m]{b^n} = b^{\frac{n}{m}}$

6.1.4 Übungen

1. Vereinfache folgende Terme
   - $a_n = 7^3 + n^2 \cdot (n^3)^3 \cdot \sqrt{n} + 7 \cdot 7 \cdot 7$
   - $a_n = \sqrt[4]{(n^4)^{11} \cdot 16}$
   - $a_{n+1} = q^2 \cdot q^{n-1}$
2. Bringe diese Folgen in eine andere Form
   - $3, -3, 3, -3, 3, \ldots$
   - $26, 29, 32, 35, \ldots$
   - $a_n = 4 + (n-1) \cdot 5$
   - $a_{n+1} = a_n + 1; a_1 = 5$
3. Handelt es sich um eine besondere Art von Folge und wenn ja, um welche?
   - $1, 5, 9, 13, 17, \ldots$
   - $a_n = 4^{n+1}$
   - $a_{n+1} = a_n + 2$
   - $a_{n+1} = a_n \cdot 2$
   - $1, 5, -3, 24, -12, 4$

6.2 Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz

6.2.1 Monotonie

Eine Folge ist monoton fallend, wenn kein Folgeglied größer ist als dessen Vorgänger:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n-1}$$

Ist eine Folge monoton steigend, so ist jedes Folgeglied entweder größer oder gleich dessen Vorgänger:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n-1}$$

Strenge Monotonie Der Unterschied zwischen Monotonie und strenger Monotonie ist einfach. Bei Monotonie dürfen die Folgeglieder gleich deren Vorgänger sein, bei strenger Monotonie ist dies jedoch nicht der Fall:

- streng monoton steigend $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n-1}$
- streng monoton fallend $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n-1}$

6.2.2 Beschränktheit

Ist eine Folge nach unten beschränkt, so gilt

$$\exists s \in \mathbb{R} \text{ so dass } \forall n \in \mathbb{N} : s \leq a_n$$

Hierbei wird jeder Wert, welcher kleiner gleich des kleinsten Folgegliedes der Folge ist, als untere Schranke bezeichnet. Die größte untere Schranke wird als Infimum bezeichnet.

Eine Folge ist dann nach oben beschränkt, wenn es mindestens einen Wert s aus $\mathbb{N}$ gibt, welcher größer oder gleich des größten Folgegliedes ist. Diese Werte bezeichnet man als obere Schranke:

$$\exists s \in \mathbb{R} \text{ so dass } \forall n \in \mathbb{N} : s \geq a_n$$

Die kleinste obere Schranke heißt Supremum.

6.2.3 Konvergenz

Nähert sich eine Folge stetig einem bestimmten "Grenzwert" (oder "Limes") a beliebig nahe an, so sagt man, sie konvergiert gegen a:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ so dass } \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon$$

Epsilon ϵ ist hierbei eine beliebig kleine Zahl, welche den Abstand zwischen dem Wert von a_n und dem Grenzwert a beschreibt. Jetzt mal langsam. Was besagt der mathematische Ausdruck? Sei a unser Grenzwert dann gibt es fr jedes positive Epsilon, egal wie klein es auch ist (nur null darf es nicht sein), eine natürliche Zahl n_0, sodass der Abstand zwischen a alle Folgeglieder, die nach oder gleich dem n_0-ten Glied kommen, kleiner ist als Epsilon. Das heißt, wenn eine Folge gegen a konvergiert kann ich euch ein $\epsilon > 0$ geben, zum Beispiel 0.00000000001 ,und ihr könnt mir ein n_0 sagen, sodass $|a_n - a| < \epsilon$ und zwar für alle $n \geq n_0$. Jede nicht konvergente Folge wird als divergent bezeichnet.

Beispiel Sei unsere Folge $a_n = \frac{1}{n}$. Wir nehmen an, dass die Folge gegen 0 konvergiert. Ich gebe euch nun ein ϵ, nun soll gelten

$$|a_n - 0| < \epsilon \iff \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \iff^{\text{da } n>0} \frac{1}{n} < \epsilon$$

lsen wir doch einfach nach n auf:

$$\frac{1}{n} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}$$

Nun könnt ihr mir immer ein n nennen. Das n_0 ist hierbei mit irgendeinem n, was die Bedingung erfüllt identisch und alle $n \geq n_0$ erfüllen die Bedingung ebenso.

Asymptote Eine Asymptote ist eine Gerade, an die sich ein Graph annähert (konvergiert), ohne sie zu berühren.

6.2.4 Zusammenhänge

- Jede konvergente Folge ist auch beschränkt, allerdings ist **nicht** jede beschränkte Folge auch konvergent. Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit
- Jede beschränkte, monotone Folge ist konvergent. Beschränktheit und Monotonie $\Rightarrow$ Konvergenz

6.3 Nullfolgen

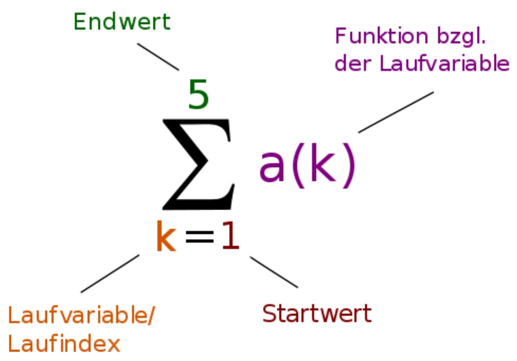
Nullfolgen sind eine besondere Art von Folgen. Ihren Namen erhalten sie durch ihre Eigenschaft, dass sie im Unendlichen gegen die Zahl Null konvergieren.

Beispiele für Nullfolgen:

- $a_n = \frac{1}{n}$
- $a_n = \frac{4}{n^3}$
- $a_n = \frac{1}{4n}$
- $a_n = 4 \cdot \left(-\frac{1}{n}\right)$

6.4 Reihen

Eine Reihe ist eine Folge von Partialsummen und somit auch eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach X (meist ist $X = \mathbb{R}$). Anders ausgedrückt, ist das k-te Reiheglied die Summe der ersten k Folgenglieder einer Folge. Da Mathematiker schreibfaul sind und es sehr aufwendig ist ein Reihenglied hinzuschreiben da man k Folgeglieder mit einen $+$ verknpft aufschreiben müsste, wurde ein neues, mathematisches Symbol eingeführt, das so genannte "Summen-Zeichen" $\sum$.



Startwert Dieser Wert ist der erste Wert der Laufvariable und bestimmt somit das erste aufsummierte Folgeglied.

Laufvariable Diese Variable ist auch Teil des Bildungsgesetzes und wird pro aufsummierten Folgeglieds um 1 erhöht, bis sie den Endwert erreicht hat.

Endwert Dieser Wert bestimmt, bis zu welchem Glied die Folge aufsummiert werden soll er kann auch unendlich ∞ sein.

Funktion bzw. der Laufvariable Hiermit ist das Bildungsgesetz der ursprünglichen Folge gemeint.

6.4.1 Endliche Reihen

Als endliche Reihen werden Reihen bezeichnet, deren Startwert und Endwert nicht gegen Unendlich gehen. (Ich sage hier mit Absicht "**gegen** plus oder minus Unendlich geht", da der Wert Unendlich logischer Weise niemals erreicht werden kann, auch wenn Chuck Norris bis Unendlich zählen kann...)

6.4.2 Unendliche Reihen

Was für eine Überraschung, dass es bei Unendlichen Reihen nun so ist, dass der Endwert gegen Unendlich geht.

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)$$

6.4.3 Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz

Genau wie Folgen können auch Reihen monoton, beschränkt und konvergent gegen einen bestimmten Wert sein. Die Definition dieser Begriffe bleibt jedoch genau die selbe, wie auch bei Folgen, weshalb ich sie mir hier spare.

6.5 Besondere Reihen

6.5.1 Konvergierende Reihen und Nullfolgen

Das Bildungsgesetz jeder konvergierenden Reihe beschreibt eine Nullfolge.

Anders herum stimmt das allerdings nicht!

Bekanntestes Gegenbeispiel hierfür ist die so genannte **Harmonische Reihe**:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Diese Reihe divergiert gegen Unendlich! Sie wird auch als harmonische Reihe bezeichnet. Beweis mithilfe einer Abschätzung:

$$\begin{aligned}
s^{2^{k+}} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right)}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8}} + \ldots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k+1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}\right)}_{\geq 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}}} \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + 2^1 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2}}_{k-\text{mal}} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{k}{2} = \frac{3+k}{2}
\end{aligned}$$

6.5.2 Geometrische Reihen

Jede geometrische Reihe kann auch wie folgt dargestellt werden:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{falls } q \neq 1 \\ n+1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

6.6 Übungen

1. Handelt es sich hierbei um eine besondere Art von Reihen?
   - $s_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$
   - $s_n = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$
   - $s_n = \sum\limits_{i=1}^{16} 4^i$
   - $s_n = \sum\limits_{i=2}^{8} i^2$

- $s_n = \sum_{i=0}^{\infty}(-3^i)$

2. Sind sie monoton fallend bzw. steigend?
3. Sind die dazugehörigen Folgen konvergent und/oder beschränkt? (Infimum, Supremum und Asymptoten angeben!)
4. Gebe die Ergebnisse der Reihen (auer der zweiten) an.

7 Beweisverfahren

7.1 Direkter Beweis

Den direkten Beweis haben wir im Kapitel über die quadratischen Funktionen schon kennengelernt. Es handelt sich hierbei um nichts anderes als das direkte Herleiten von Formeln. Wen wir zeigen können dass

$$A_1 \Rightarrow A_2, A_2 \Rightarrow A_3, \ldots A_{n-1} \Rightarrow A_n$$

und A_1 gilt, dann folgt A_n. Wir haben also Prämissen, folgern gewisse Schlüsse und gelangen dann zur zu zeigenden Aussage.

7.2 Indirekter Beweis

Im indirekten Beweis oder auch Widerspruchsbeweis schaut man sich den Fall an, welchen man beweisen will und zeigt, dass es nicht anders sein kann. Man geht also zunächst von der Negation aus und versucht auf einen Widerspruch zu stoßen. Angenommen wir wollen A beweisen. Wir wissen

$$A \vee \neg A$$

ist eine Tautologie. Wir zeigen nun dass $\neg A \equiv$ falsch, damit muss aber dann $A \equiv$ wahr gelten. Indirekte Beweise sind weniger schön in dem Sinne, dass sie weniger konstruktiv sind. Wir haben einen Widerspruchsannahme, folgern etwas und gelangen zu einem Widerspruch.

7.2.1 Beispiel

Das bekannteste Beispiel hierfür ist der Beweis der Aussage:

$$A := \sqrt{2} \text{ ist keine rationale Zahl}$$

Man geht nun zunächst davon aus, dass es eine rationale Zahl ist. Angenommen $\neg A \equiv$ wahr also angenommen $\sqrt{2}$ ist eine rationale Zahl.

$$\Rightarrow \exists q, p \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{q}{p},$$

wobei q und p teilerfremd sind (sonst einfach kürzen). Nun Quadrieren wir

$$\Rightarrow 2 = \frac{q^2}{p^2}$$

Nun noch mit p^2 multiplizieren

$$\Rightarrow 2 \cdot p^2 = q^2$$

Da es sich bei p und q um ganze Zahlen handelt, folgt ($\Rightarrow$) dass auch ihre Quadrate ganze Zahlen sind. Eine ganze Zahl mit 2 multipliziert ist auch wieder eine ganze Zahl.

$$\Rightarrow q^2 \in \mathbb{Z}$$

Wenn das Quadrat einer Zahl gerade ist, folgt ($\Rightarrow$) dass auch die Zahl selber gerade ist, deshalb lässt sich q auch folgendermaßen darstellen.

$$\exists r \in \mathbb{Z} : q = 2 \cdot r$$

Setzt man nun diesen Wert für q oben ein, so erhält man

$$2 \cdot p^2 = 4 \cdot r^2 \iff p^2 = 2 \cdot r^2$$

Nun sieht man das es sich auch bei p um eine ganze, gerade Zahl handelt. Da jede ganze, gerade Zahl den Teiler 2 hat, besitzen auch p und q den **gemeinsamen Teiler** 2. Einer unserer Voraussetzungen war allerdings, dass diese beiden Zahlen **teilerfremd** sind. Wenn wir auf solch einen Widerspruch treffen, so muss zumindest eine unserer Annahmen falsch sein. Die einzige Annahme, welche wir getroffen haben ist jedoch, dass es sich bei Wurzel 2 um eine rationale Zahl handelt. Diese ist also falsch ($(\neg A) \Rightarrow$ falsch ist wahr). Damit muss $\neg A \equiv$ falsch sein und damit $A \equiv$ wahr. Und somit haben wir bewiesen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

7.3 Vollständige Induktion

Das Induktionsprinzip ist sehr natürlich. Es geht im Endeffekt um nichts anderes als ums Zählen. Das beherrschen bereits Kleinkinder und Tiere. Stellen Sie sich eine Dominokette vor. Wenn sie der folgenden Aussage zustimmen können, haben sie die Induktion im Grunde verstanden:

> Wenn ich den ersten Dominostein umwerfe und zudem gilt: wenn ein Dominostein umfällt, folgt, dass sein Nachfolger umfällt, so fallen alle Dominosteine um.

Sie müssen nicht zeigen, dass jeder Stein umfällt sondern sie zeigen dass:

1. **Induktionsanfang**: der 1. Stein umfällt und
2. **Induktionsschluss:** dass wenn Stein n umfällt, fällt Stein $n + 1$ um (wenn n nicht der letzte Stein ist)

Allgemeiner nutzen wir dies um Eigenschaften von Objekten zu zeigen, die natürlich geordnet sind.

7.3.1 Beispiel

Wir wollen nun beweisen:

$$a_n = 2 \cdot a_{n-1}; a_1 = 2 \text{ entspricht } b_n = 2^n. \tag{2}$$

1. **Induktionsanfang:** $n = 1$ (1. Stein): $a_1 = 2 = 2^1 = b_n$ (passt)
2. **Induktionsschluss:** $n' = n + 1$ (Achtung nicht $n' = 2!$), wir dürfen zudem Annehmen das der n-te Stein gefallen ist, dass also $a_n = b_n$ (mehr nicht!).

$$\begin{aligned} a_{n+1} &=^{\text{nach Def.}} 2 \cdot a_{n+1-1} \\ &= 2 \cdot a_n \\ &=^{\text{nach Induktionsanfang}} 2 \cdot b_n \\ &=^{\text{nach Def.}} 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \\ &= b_{n+1}. \end{aligned}$$

(passt)

Wuhu! Wir haben bewiesen, dass unsere Aussage stimmt.

7.4 Übungen

1. Zeige, dass folgende Aussagen gelten:
   - $\sum\limits_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; für $q \neq 1$