Fakultät für
Informatik und
Mathematik

HOCHSCHULE
FÜR ANGEWANDTE
WISSENSCHAFTEN · FH
MÜNCHEN

Fachschaft der
Fakultät 07
StudierendenVertretung Hochschule München

Vorkurs /Mathematik

Eine Wiederholung des mathematischen Schulstoffs

by Stephan Plöderl

20. Juni 2015

Fachschaft 07

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

1.1 Worum geht's im Vorkurs Mathematik?

Jeder Studierende tut sich in unterschiedlichen Fächern schwer bzw. leicht. Es gibt jedoch Fächer in denen ist die Durchfallquote bereits über Jahre überdurchschnittlich hoch. Bei einem dieser Fächer mit besonders hoher Durchfallquote handelt es sich um das mathematische Fach Analysis. Aus diesem Grund haben wir als Fachschaft es uns, so wie bereits einige vor uns, zur Aufgabe gemacht dem ganzen ein wenig entgegen zu steuern und zu versuchen, euch die Grundlagen, welche für dieses Fach von Nöten sind, zu vermitteln.

1.2 An wen richtet sich dieser Kurs?

Dieser Kurs richtet sich an all jene,

- welche Schwächen in mathematischen Fächern haben.
- deren Schulzeit schon etwas länger her ist.
- welche nicht von mathematisch/technischen Schulen bzw. Gymnasien kommen.
- und an alle die der Meinung sind, eine Wiederholung schadet nie.

2 Folgen und Reihen

2.1 Folgen

Eine Folge ist eine Auflistung a_1, a_2, a_3 von endlich bzw. unendlich vielen durchnummerierten Objekten a_n $(n \in \mathbb{N})$. In der Mathematik werden besonders die unendlichen Folgen meist durch ein so genanntes *Bildungsgesetz* dargestellt.

Beispiele:

- $a_n = \frac{1}{n}$
- $a_n = \frac{1}{n^2}$
- $a_n = n^2$
- 1,2,4,8,16,32,...
- $a_{n+1} = 2a_n; \qquad a_1 = 1$ (rekursiv)

2.1.1 Arithmetische Folgen

Folgen, deren aufeinander folgenden Glieder immer eine konstante Differenz d aufweisen, werden arithmetische Folgen genannt.

Darstellungsarten arithmetischer Folgen:

- $a_n = a_1 + (n-1)d$ (explizit)
- $a_{n+1} = a_n + d$ (rekursiv)

Beispiele:

- $a_n = 2 + (n-1)4$
- $a_{n+1} = a_n + 3$
- $1, 3, 5, 7, 9, ...$

2.1.2 Geometrische Folgen

Folgen, der Form $a_n = a_1 * q^n$, werden als geometrische Folgen bezeichnet. Ihre aufeinander folgenden Glieder unterscheiden sich jeweils um einen konstanten Faktor.

2.1.3 Rechnen mit Exponenten

Wie ihr vielleicht schon bemerkt habt, gibt es bei den geometrischen Folgen eine neue mathematische Schreibweise (q^n).
Die Konstante q wird hierbei als Basis bezeichnet, während n Exponent genannt wird.
Hierbei gilt:

- $q^0 = 1$
- $q^1 = q$
- $q^2 = q * q$
- $q^3 = q * q * q$
- $q^4 = q * q * q * q$
- ...

Rechengesetze für Exponenten

Ursprünglich	Vereinfacht
$((b)^n)^m$	b^{n*m}
$b^n * b^m$	b^{n+m}
$\frac{b^n}{b^m}$	b^{n-m}

Rechengesetze für Wurzeln

Ursprünglich	Vereinfacht
$\sqrt[m]{a}$	$a^{\frac{1}{m}}$
$\sqrt[m]{a} * \sqrt[m]{b}$	$\sqrt[m]{a * b}$
$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$	$\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$
$\sqrt[m]{b^n}$	$b^{\frac{n}{m}}$

2.1.4 Übungen

1. Vereinfache folgende Terme
   - $a_n = 7^3 + n^2 * (n^3)^3 * \sqrt{n} + 7 * 7 * 7$
   - $a_n = \sqrt[4]{(n^4)^{11} * 16}$
   - $a_{n+1} = q^2 * q^{n-1}$

2. Bringe diese Folgen in eine andere Form
   - $3, -3, 3, -3, 3, ...$
   - $26, 29, 32, 35, ...$
   - $a_n = 4 + (n-1) * 5$
   - $a_{n+1} = a_n + 1; a_1 = 5$

3. Handelt es sich um eine besondere Art von Folge und wenn ja, um welche?

   - 1,5,9,13,17,...
   - $a_n = 4^{n+1}$
   - $a_{n+1} = a_n + 2$
   - $a_{n+1} = a_n * 2$
   - 1,5,-3,24,-12,4

2.2 Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz

2.2.1 Monotonie

Eine Folge ist monoton fallend, wenn kein Folgeglied größer ist als dessen Vorgänger.
Mathematisch ausgedrückt: $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n-1}$
Ist eine Folge monoton steigend, so ist jedes Folgeglied entweder größer oder gleich dessen Vorgänger.
Mathematisch ausgedrückt: $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n-1}$

Strenge Monotonie Der Unterschied zwischen Monotonie und strenger Monotonie ist einfach. Bei Monotonie dürfen die Folgeglieder gleich deren Vorgänger sein, bei strenger Monotonie ist dies jedoch nicht der Fall.

Mathematisch ausgedrückt:

- streng monoton steigend $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n-1}$
- streng monoton fallend $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n-1}$

2.2.2 Beschränktheit

Ist eine Folge nach unten beschränkt, so gilt $\exists s \forall n \in \mathbb{N} : s \leq a_n$ Hierbei wird jeder Wert, welcher kleiner gleich des kleinsten Folgegliedes der Folge ist, als untere Schranke bezeichnet.
Die größte untere Schranke wird als Infimum bezeichnet.
Eine Folge ist dann nach oben beschränkt, wenn es mindestens einen Wert s aus $\mathbb{N}$ gibt, welcher größer oder gleich des größten Folgegliedes ist. Diese Werte bezeichnet man als obere Schranke.
Mathematisch ausgedrückt: $\exists s \forall n \in \mathbb{N} : s \geq a_n$
Die kleinste obere Schranke heißt Supremum.

2.2.3 Konvergenz

Nähert sich eine Folge stetig einem bestimmten "Grenzwert" (oder "Limes") a beliebig nahe an, so sagt man, sie konvergiert gegen a.
Mathematisch: $\forall n \geq n_0 : (\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \epsilon)$
Epsilon ϵ ist hierbei eine beliebig kleine Zahl, welche den Abstand zwischen dem Wert von a_n und dem Grenzwert a beschreibt.
Jede nicht konvergente Folge wird als divergent bezeichnet.

Asymptote Eine Asymptote ist eine Gerade, an die sich ein Graph annähert (konvergiert), ohne sie zu berühren.

2.2.4 Zusammenhänge

- Jede konvergente Folge ist auch beschränkt, allerdings ist **nicht** jede beschränkte Folge auch konvergent. Konvergenz $\Rightarrow$ Beschränktheit
- Jede beschränkte, monotone Folge ist konvergent. Beschränktheit und Monotonie $\Rightarrow$ Konvergenz

2.3 Nullfolgen

Nullfolgen sind eine besondere Art von Folgen. Ihren Namen erhalten sie durch ihre Eigenschaft, dass sie im Unendlichen gegen die Zahl Null konvergieren.

Beispiele für Nullfolgen:

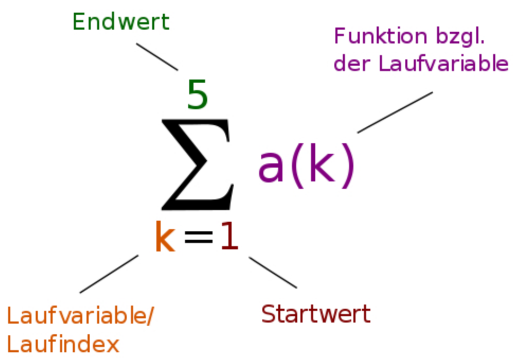
- $a_n = \frac{1}{n}$

- $a_n = \frac{4}{n^3}$
- $a_n = \frac{1}{4n}$
- $a_n = 4 * -\frac{1}{n}$

2.4 Reihen

Eine Reihe ist eine Folge von Partialsummen.
Anders ausgedrückt eine Reihe ist im Grunde genommen das was entsteht, wenn man die einzelnen Glieder einer Folge aufsummiert. Will man nun eine bestimmte Anzahl (oder alle) Glieder der Folge $a_n = \frac{1}{n}$ aufsummieren, so wäre es umständlich, wenn nicht sogar unmöglich, diese alle auszurechnen und dann erst hinzuschreiben.
Deshalb wurde ein neues, mathematisches Symbol eingeführt, das so genannte "Summen-Zeichen" $\sum$.

Folgende Grafik zeigt nun noch einmal aus welchen Teilen sich das Summen-Zeichen zusammen setzt:



Endwert Dieser Wert bestimmt, bis zu welchem Glied die Folge aufsummiert werden soll.

Startwert Dieser Wert ist der erste Wert der Laufvariable und bestimmt somit das erste aufsummierte Folgeglied.

Laufvariable Diese Variable ist auch Teil des Bildungsgesetzes und wird pro aufsummierten Folgeglieds um 1 erhöht, bis sie den Endwert erreicht hat.

Funktion bzw. der Laufvariable Hiermit ist das Bildungsgesetz der ursprünglichen Folge gemeint.

2.4.1 Endliche Reihen

Als endliche Reihen werden Reihen bezeichnet, deren Startwert und Endwert nicht gegen Unendlich gehen. (Ich sage hier mit Absicht "**gegen** plus oder minus Unendlich geht", da der Wert Unendlich logischer Weise niemals erreicht werden kann, auch wenn Chuck Norris bis Unendlich zählen kann...)

2.4.2 Unendliche Reihen

Was für eine Überraschung, dass es bei Unendlichen Reihen nun so ist, dass der Endwert gegen Unendlich geht.

Schreibweise $s = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)$

2.4.3 Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz

Genau wie Folgen können auch Reihen monoton, beschränkt und konvergent gegen einen bestimmten Wert sein. Die Definition dieser Begriffe bleibt jedoch genau die selbe, wie auch bei Folgen, weshalb ich sie mir hier spare.

2.5 Besondere Reihen

2.5.1 Konvergierende Reihen und Nullfolgen

Das Bildungsgesetz jeder konvergierenden Reihe beschreibt eine Nullfolge.
Anders herum stimmt das allerdings nicht!
Bekanntestes Gegenbeispiel hierfür ist die so genannte **Harmonische Reihe**:
$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
Diese Reihe divergiert gegen Unendlich! Sie wird auch als harmonische Reihe bezeichnet.
Beweis mithilfe einer Abschätzung:

$$s_{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \ldots \frac{1}{8}\right)}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8}} + \ldots \underbrace{\left(\frac{1}{2^k+1} + \ldots \frac{1}{2^{k+1}}\right)}_{\geq 2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}}$$
$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + \ldots 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{k+3}{2}$$ [1]

2.5.2 Geometrische Reihen

Jede geometrische Reihe kann auch wie folgt dargestellt werden:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{falls } q \neq 1 \\ n+1 & \text{falls } q = 1 \end{cases}$$

[1] Prof. Eich-Soellner, Analysis-Skript SS 2011, S.30

2.6 Übungen

1. Handelt es sich hierbei um eine besondere Art von Reihen?
   - $s_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$
   - $s_n = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$
   - $s_n = \sum_{i=1}^{16} 4^i$
   - $s_n = \sum_{i=2}^{8} i^2$
   - $s_n = \sum_{i=0}^{\infty} (-3^i)$
2. Sind sie monoton fallend bzw. steigend?
3. Sind die dazugehörigen Folgen konvergent und/oder beschränkt? (Infimum, Supremum und Asymptoten angeben!)
4. Gebe die Ergebnisse der Reihen (auer der zweiten) an.

3 Funktionen

3.1 Grundlegende Eigenschaften von Funktionen

3.1.1 Was ist eine Funktion?

Eine Funktion besteht grundlegend aus drei Dingen:

1. Definitionsmenge: $\mathbb{D}$
2. Bildbereich/Wertemenge: $\mathbb{W}$
3. Abbildungsvorschrift: f

Die Definitionsmenge gibt hierbei an in welchem Bereich die Funktion definiert ist, sprich welche Werte "in die Funktion eingesetzt werden dürfen".

Die Abbildungsvorschrift sorgt nun dafür, dass jedem Wert x des Definitionsbereichs genau ein Wert y des Bildbereiches zugeordnet werden kann.

Die Wertemenge enthält genau jene Zahlen, welche man durch Abbildung des Definitionsbereiches mithilfe der Abbildungsvorschrift erhalten kann.

Zur Vorstellungserleichterung:
Vorstellen kann man sich das wie die Funktionsweise eines Fotoapparates. Der Definitionsbereich wäre hierbei das, was in der realen Welt existiert und von der Kamera aufgenommen werden soll. Das ausgestrahlte Licht, der Bestandteile des Definitionsbereiches, wird nun mithilfe einer Linse eingefangen, gespiegelt und bei neueren Kameras mithilfe von Sensoren in digitale Bilder umgewandelt. Dieses digitale Bild ist nun das Ergebnis und jeder erreichte Wert (RGB, CMYK, ...) ist Bestandteil der Bildmenge.

Beispiele:

- $\mathbb{D} \to \mathbb{W}, f(x) = x^2$
- $\mathbb{D} \to \mathbb{W}, f(x) = 42x(12x - 12(3x^2))$

3.1.2 Monotonie

Wie bei Folgen und Reihen gibt es auch in der Welt der Funktionen den Begriff (strenge) Monotonie.

- Eine Funktion ist monoton fallend (bzw. wachsend), wenn gilt:
  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{D}, x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2) \ (bzw. f(x_1) \leq f(x_2))$
- Eine Funktion ist streng monoton fallend (bzw. wachsend), wenn gilt:
  $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{D}, x_1 < x_2 : f(x_1) > f(x_2) \ (bzw. f(x_1) < f(x_2))$

3.1.3 Symmetrie

Eine Funktion ist genau dann symmetrisch zur y-Achse, wenn gilt:
$f(x) = f(-x)$
Solche Funktionen werden auch als gerade Funktion bezeichnet.

Eine Funktion ist genau dann symmetrisch zum Ursprung, oder auch ungerade, wenn gilt:
$f(-x) = -f(x)$

Achtung: Eine Gerade ist nicht immer eine gerade Funktion!!!

3.1.4 Periodizität

Eine Funktion ist dann periodisch, wenn es eine Konstante p gibt, für die gilt:
$f(x + p) = f(x), \forall x \in \mathbb{D}$

Diese Definition sagt eigentlich nichts anderes aus, als dass sich die Funktion ständig im gleichen Abstand wiederholt.

3.1.5 Nullstellen

Eine Nullstelle ist ein Punkt, an dem der Graf die x-Achse schneidet.
Anders ausgedrückt: Ein Punkt an dem die Funktion f(x) den Wert 0 erreicht. Um Nullstellen zu berechnen, setzt man im Normalfall die Gleichung erst einmal gleich 0 und stellt diese dann nach “x“ um. So kann man nun den x-Wert berechnen (der y-Wert eine Nullstelle ist logischerweise 0, weshalb er nicht berechnet werden muss).

3.1.6 Stetigkeit

Eine Funktion ist stetig, wenn man ihren Graphen (innerhalb der Definitionsmenge) ohne Absetzen des Stiftes in einem Zug zeichnen kann.

3.2 Lineare Funktionen

Zu den einfachsten Funktionen gehören die linearen Funktionen.
Alle linearen Funktionen (mit nur einer Variable) können in folgende Form gebracht werden: $f(x) = mx + t$.
Hierbei ist m der konstante Wert der Steigung:
$m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
Die Konstante t ist auch als y-Achsenabschnitt bekannt. Er wird so bezeichnet, da die Funktion für den x-Wert 0 den Funktionswert y = t annimmt.
Lineare Funktionen existieren in drei Ausprägungen. Geraden, Halbgeraden und Strecken.
Eine Gerade ist unendlich lang, eine Strecke existiert nur zwischen zwei reellen Punkten und eine Halbgerade startet oder endet in genau einem Punkt. Der andere Teil geht ins Unendliche.

3.2.1 Die Punktsteigungsform

Um eine Gerade zu Definieren, sind immer zwei Dinge von Nöten:

- zwei Punkte, welche auf der Geraden liegen
- ein Punkt und die Steigung der Geraden

Um deren Gleichung zu berechnen, benötigt man die Punktsteigungsform, welche wie folgt lautet:
$f(x) = m(x - x_p) + y_p$ m ist hierbei wie gehabt die Steigung der Geraden und x die Variable.
x_p und y_p sind jedoch die Koordinaten eines Punktes P, welcher auf der Geraden liegt. Besitzt man die Steigung m nicht, sondern nur zwei Punkte der Geraden, so kann man diese mit deren Hilfe berechnen.
Nachdem man die Punktsteigungsform dann ausmultipliziert hat, besitzt man wieder die ganz normale Geradengleichung, wie oben beschrieben.

3.2.2 Schnittpunkt zweier Geraden

Ein Schnittpunkt zweier Funktionen ist ein Punkt, welcher sich auf beiden Graphen der Funktionen befindet.
Die Berechnung eines Schnittpunktes ist rein theoretisch sehr logisch. Wenn ein Punkt auf beiden Graphen sein soll, so muss er beide Funktionen erfüllen.
Nehmen wir als Beispiel die Funktionen $y_1 = 4x$ und $y_2 = 12x - 23$.
Wenn der Punkt nun beide Funktionen erfüllen soll, so gilt $y_1 = y_2$.
$=> 4x = 12x - 23$

$-8x = -23$
$x = \frac{23}{8}$
Nun muss man den erhaltenen x-Wert nur noch in eine der beiden Gleichungen einsetzen und man erhält das Ergebnis.
$y = 4\frac{23}{8} = \frac{23}{2}$
Der Schnittpunkt hat somit die Koordinaten S($\frac{23}{8}/\frac{23}{2}$).

3.2.3 Besondere Geraden

- Besitzen zwei Geraden dieselbe Steigung, so sind diese parallel zueinander. Im Normalfall besitzen diese keinerlei Schnittpunkte. Eine besondere Art der Parallelität ist jedoch die Identität zweier Geraden. Identische Geraden besitzen logischer Weise unendlich viele Schnittpunkte.
- Sind zwei Geraden senkrecht (im rechten Winkel) zueinander, so ist das Produkt ihrer Steigungen -1: $m_1 * m_2 = -1$.
- Eine Tangente berührt eine Kurve lediglich in einem einzigen Punkt.
- Eine Sekante schneidet eine Kurve in zwei Punkten.

3.2.4 Umkehrfunktion

Durch Einsetzen eines bestimmten x-Wertes in eine Funktion f(x) erhält man den entsprechenden y-Wert.
Will man jedoch den x-Wert zu einem bestimmten y-Wert bestimmen, so muss man zunächst dessen Umkehrfunktion $f(y)^{-1}$ berechnen.
Dafür löst man die Funktion nach x auf.
Durch das Bilden der Umkehrfunktion werden Definitions- und Wertemenge vertauscht.

3.3 Quadratische Funktionen

Die nächst einfachsten Funktionen nach den linearen stellen die so genannten quadratischen Funktionen dar. Sie werden auch als Parabelgleichungen bezeichnet.
Ihren Namen verdanken diese Funktionen der Tatsache, dass ihre Variable zumindest einmal quadratisch und niemals mit einem höheren Exponenten als 2 in die Gleichung mit eingeht.

3.3.1 Die Normalparabel

Die Normalparabel besitzt die Formel $f(x) = x^2$
Graphisch stellt sie eine nach oben geöffnete, achsensymmetrische Kurve dar, deren niedrigster Punkt (Scheitel) S im Ursprung des Koordinatensystems (0,0) liegt.

3.3.2 Verschieben einer Parabel

Eine Parabel lässt sich um den Wert x_s in x-Richtung verschieben, indem man diesen Wert von der Variable x subtrahiert, daraus folgt:
$f(x) = (x - x_s)^2$

Durch Addition des gesamten Terms mit dem Wert y_s wird die Parabel um den gleichen Wert in y-Richtung verschoben.
Die Gleichung der Parabel lautet nun wie folgt:
$f(x) = (x - x_s)^2 + y_s$
Ihr Scheitel besitzt die Koordinaten $S(x_s, y_s)$.

3.3.3 Stauchen und Strecken

Durch Multiplizieren der Funktion der Normalparabel mit einer konstanten a lässt sich die Kurve stauchen oder strecken.
$f(x) = ax^2$
Ist der Betrag von a kleiner 1, so wird die Parabel gestaucht. Ist er größer 1, so wird sie gestreckt.
Darüber hinaus wird die Funktion durch einen negativen Wert von a an der x-Achse gespiegelt und die Parabel ist somit nach unten geöffnet.

3.3.4 Die Scheitelform

Durch Kombination von Stauchung/Streckung und Verschiebung erhält man die so genannte Scheitelform:
$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$
Mithilfe dieser Funktion lassen sich alle Arten quadratischer Funktionen darstellen.
Außerdem lassen sich die Koordinaten des Scheitels, der Stauchungs- bzw. Streckungsfaktor der Funktion, sowie die Frage, ob sie nach oben oder unten geöffnet ist, auf einfachste Weise bestimmen.

3.3.5 Die Normalform einer quadratischen Gleichung

Multipliziert man die Scheitelform aus, so erhält
$f(x) = ax^2 - 2ax_sx + x_s^2 + y_s$.
Ersetzt man nun die konstanten Werte $-2ax_s$ durch b und $x_s^2 + y_s$ durch c, so erhält man die Normalform quadratischer Gleichungen:
$f(x) = ax^2 + bx + c$

3.3.6 Die binomischen Formeln

Bei den binomischen Formeln handelt es sich wohl um drei der wichtigsten Umrechnungsregeln, welche in der Mathematik Verwendung finden.

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

3.3.7 Die quadratische Ergänzung

Will man zum Beispiel zur Bestimmung des Scheitelpunktes die Normalform der quadratischen Gleichung in die Scheitelform umwandeln, so geht dies unter anderem mithilfe der so genannten quadratischen Ergänzung.
Zunächst einmal besitzt man eine quadratische Gleichung in der Normalform.
Im Folgenden wird nun die Scheitelform der Funktion $f(x) = 3x^2 - 6x - 24$ berechnet:
Der erste Schritt hierfür ist das Ausklammern der Konstante "a", in unserem Fall der 3:
$f(x) = 3(x^2 - 2x - 8)$
Schaut man sich nun den Term innerhalb der runden Klammern genauer an, so kann man eine gewisse Ähnlichkeit mit der ersten, bzw. zweiten binomischen Formel feststellen.
Deshalb folgt nun auch der wichtigste Schritt, die eigentliche quadratische Ergänzung. Wir ergänzen die Formel nun so, dass wir eine der beiden binomischen Formeln anwenden können. Dafür müssen wir erste einmal feststellen, was der a- und was der b-Wert der binomischen Formeln ist.
Dies ist zum Glück relativ einfach!
Nun ja, die zweite binomische Formel lautet $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
Vergleichen wir dies mit unserem Term $x^2 - 2x - 8$, so sehen wir gleich, dass der a-Wert gleich x ist!

Jetzt benötigen wir nur noch den Wert für b. Betrachten wir hierfür jeweils den nächsten Summanden beider Terme.
Auf der einen Seite hätten wir nun 2x und auf der anderen 2ab. Wir wissen bereits das a=x, daraus lässt sich schließen, dass b in unserem Fall den Wert 1 repräsentiert.
Nun addieren wir einfach den Wert für b^2 zu dem Term hinzu um die vollständige binomische Formel zu erhalten. Da wir dies nicht ohne Weiteres machen dürfen, ziehen wir den gleichen Wert einfach wieder ab.
=> $f(x) = 3(x^2 - 2 * x * 1 + 1^2 - 1^2 - 8)$
Anschließend stellen wir die Formel noch mithilfe der nun entstandenen binomischen Formel um:
$f(x) = 3((x - 1)^2 - 1^2 - 8)$
Der Rest sind nur noch kleine Änderungen.
$f(x) = 3((x - 1)^2 - 1^2 - 8) \leftrightarrow$
$f(x) = 3((x - 1)^2 - 9) \leftrightarrow$
$f(x) = 3(x - 1)^2 - 27$
Und voilà schon ist man fertig.

3.3.8 Berechnung der Nullstellen

Um die Nullstellen von quadratischen Gleichungen zu berechnen, gibt es mehrere Möglichkeiten.

Zerlegung in Linearfaktoren

"Null multipliziert mit irgendwas ist immer Null"
Aus diesem Grund lassen sich, wenn eine quadratische Funktion zwei reelle Nullstellen besitzt, diese häufig am leichtesten dadurch berechnen, dass man die Funktion in ihre Linearfaktoren zerlegt.

Nehmen wir beispielsweise die Funktion $f(x) = 6x^2 - 24$

1. **"Gleich Null setzen" und durch Faktor vor x^2 teilen**
   $0 = 6x^2 - 24$
   $0 = x^2 - 4$

2. **Teilen in Linearfaktoren**
   Besonders leicht lassen sich Terme in ihre Linearfaktoren zerlegen, wenn es sich bei ihnen um binomische Formeln handelt, wie in unserem Fall.
   $0 = (x - 2)(x + 2)$
   Der Linearfaktor $x - 2$ erreicht den Wert 0 für $x_1 = 2$, der andere für $x_2 = -2$. Somit sind auch dies die x-Werte der Nullstellen.

Die Nullstellen selbst sind also $N_1(-2,0)$ und $N_2(2,0)$

Berechnung der Umkehrfunktionen

Bei den linearen Funktionen haben wir den Begriff der Umkehrfunktion kennen gelernt. Wenn wir also rein theoretisch die Funktion umkehren und 0 einsetzen, so müssten wir die x-Werte der Nullstellen herausbekommen. Wollen wir jedoch eine quadratische Gleichung umkehren, so stoßen wir allerdings auf ein kleines Problem...

Schauen wir uns dafür mal ein Beispiel an:
$y = 3x^2 + 3x + 4$
Zunächst müsste man dafür sorgen, dass das x nicht mehr in zwei verschiedenen Potenzen auftaucht. Dies geht ganz leicht über die quadratische Ergänzung.
$y = 3(x+0,5)^2 + 3,25 | -3,25 \leftrightarrow$
$3(x+0,5)^2 = y - 3,25 | : 3 \leftrightarrow$
$(x+0,5)^2 = \frac{y-3,25}{3}$
Nun müssten wir die Wurzel ziehen. Hier kommt das Problem zum Vorschein. Die Wurzel einer bestimmten Zahl kann sowohl positiv als auch negativ sein. Nehmen wir zum Beispiel die Zahl 4: ihre Wurzel ist ± 2.
Da die Regel, dass jedem x-Wert genau ein y-Wert zugeordnet wird, nicht mehr erfüllt wird, handelt es sich nicht mehr um eine Funktion, sondern um eine Relation. Aus diesem Grund gilt auch für unsere Gleichung:
$x + 0,5 = \pm\sqrt{\frac{y-3,25}{3}} \leftrightarrow$
$x = 0,5 \pm \sqrt{\frac{y-3,25}{3}}$
Nun muss man noch für y 0 einsetzen und gucken was passiert.
In unserem Fall bemerkt man schnell, dass unter der Wurzel ein negativer Wert heraus kommt. Dies darf jedoch nicht sein, da in den reellen Zahlen die Wurzel von negativen Zahlen nicht definiert ist.
Somit hat unsere Funktion keinerlei Nullstellen.

Die Lösungsformel

Eine weitere Möglichkeit, die Nullstellen einer quadratischen Funktion zu berechnen, wäre durch Verwendung der so genannten Lösungsformel, auch bekannt unter dem Namen "Mitternachtsformel".

Wie man sieht, ist es sehr umständlich, jedes Mal die Umkehrrelation zu berechnen und in diese dann für y den Wert 0 einzusetzen... Aus diesem Grund wurden allgemeine Formeln zur Berechnung der Nullstellen

quadratischer Gleichungen hergeleitet:
Zunächst hat man die allgemeine Formel $y = ax^2 + bx + c$ gegeben.
Diese wird "gleich Null" gesetzt:
$0 = ax^2 + bx + c$
Nun wird die Gleichung mittels quadratischer Ergänzung in die Scheitelpunktsform gebraucht.
$0 = (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}$
Durch Umstellen und anschließendem Ziehen der Wurzel erhalten wir:
$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
Dies ist die so genannte Lösungsformel.
Den Beinamen "Mitternachtsformel" verdankt sie ihrer Wichtigkeit. Sie wird nämlich tatsächlich so oft gebraucht, dass man sie auch noch auswendig aufsagen können sollte, wenn man um Mitternacht geweckt wird! (Auch wenn von euch vermutlich niemand bereits um Mitternacht schläft...)

Die Mitternachtsformel hat noch einen weiteren Vorteil. Mithilfe der Diskriminante (dem Term, der bei der Mitternachtsformel unter der Wurzel steht) lässt sich auch auf leichteste Weise feststellen, ob die Funktion Nullstellen besitzt und wenn ja, wie viele.

Zwei Nullstellen Die Funktion besitzt zwei Nullstellen, wenn der Wert der Diskriminante größer 0 ist.

Eine Nullstelle Die Funktion besitzt nur eine (doppelte) Nullstelle, wenn die Diskriminante 0 ergibt.

Keine Nullstelle Die Funktion hat keinerlei Nullstellen, wenn für die Diskriminante ein Wert kleiner 0 heraus kommt.

3.4 Übungen zu quadratischen Funktionen

1. Berechne die Scheitelpunkte folgender Gleichungen
   - $f(x) = 3x^2 - 3x + 6$
   - $f(x) = x^2 - 8x - 4$
   - $f(x) = x^2 + 4x + 1$
   - $f(x) = -4x^2 + 16x - 1$
2. Berechne die Nullstellen der oberen Gleichungen

3.5 Polynome

3.5.1 Was ist ein Polynom

Bei Funktionen der Form $f(x) = a_n x^b + a_{n-1}x^{b-1} + a_{n-2}x^{b-2} + ...a_0$ handelt es sich um so genannte Polynome.

3.5.2 Nullstellenberechnung mithilfe der Polynomdivision

Im Folgenden werde ich nun anhand des Beispiels $f(x) = 6x^3 - 12x^2 - 6x + 12$ die Nullstellenberechnung mithilfe der Polynomdivision erläutern.

1. Zunächst wird die Funktion gleich Null gesetzt.
   $6x^3 - 12x^2 - 6x + 12 = 0$

2. Anschließend kann man die ganze Funktion einmal durch den Koeffizienten vor dem x mit der höchsten Potenz teilen.
   In unserem Fall also durch den Wert 6.
   $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

3. Nun muss man, so komisch es auch klingt, zunächst einmal eine Nullstelle "erraten".
   Da es aber sehr viele Zahlen gibt, würde dies ohne einen kleinen Trick sehr schwer werden.
   Besitzt ein Polynom lediglich ganzzahlige Koeffizienten, so sind die x-Werte der Nullstellen ganzzahlige Teiler von a_0.
   Unser Beispiel kann also nur Nullstellen bei x-Werten von -1,1,-2,2,-3,3,-6 und 6 besitzen.
   Nun kann man systematisch alle möglichen Kandidaten abarbeiten.
   Testen mit x = -1:
   $(-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 = 0$
   Glücklicherweise haben wir schon beim ersten Versuch eine Nullstelle entdeckt.

4. Nun werden wir uns die Eigenschaft des Faktorisierens zu Nutze machen, dass jedes Polynom in Faktoren $(x - x_{Nullstelle})$ zerlegt werden kann.
   Wir werden nun nämlich eine schriftliche Division des Polynoms durch (x-(-1)) durchführen.

   $(x^3 - 2x^2 - x + 2) : (x + 1) = x^2 - 3x + 2$
   $\underline{-x^3 - x^2}$
   $\quad -3x^2 - x$

$$\begin{array}{r} \underline{+3x^2 + 3x} \\ +2x + 2 \\ \underline{-2x - 2} \\ 0 \end{array}$$

5. Jetzt beginnt der Vorgang mit der neuen Funktion ($g(x) = x^2 - 3x + 2$), welche einen Grad weniger hat von Neuem. In unserem Fall jedoch, da wir nun eine quadratische Funktion haben, können wir die Mitternachtsformel zur Lösung heranziehen.
   Die drei Nullstellen unserer Beispielfunktion lauten:
   $x_0 = -1; x_1 = 1; x_2 = 2$
   Die Funktion lässt sich also auch wie folgt schreiben:
   $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$

3.6 Übungen zu Polynomen

Berechne die Nullstellen folgender Gleichungen

- $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$
- $f(x) = 3x^3 + 12x^2 + 3x - 18$

3.7 Exponentialfunktionen

3.7.1 Was sind Exponentialfunktionen?

Exponentialfunktionen sind Funktionen der Form $f(x) = a * b^{x-x_0} + y_0$

a Stauchungs- bzw. Streckungsfaktor

b Basis

x_0 Wert der Verschiebung in x-Richtung

y_0 Wert der Verschiebung in y-Richtung

3.7.2 Umkehrfunktion - die Logarithmusfunktion

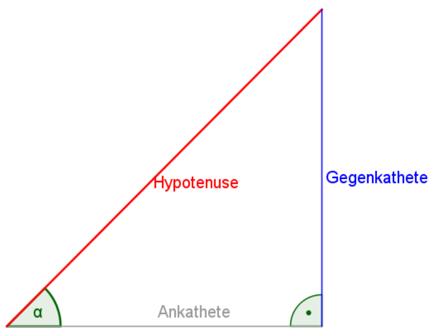
Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist die Logarithmusfunktion.
$y = a * b^{f^{-1}(y)-x_0} + y_0$
$\frac{y-y_0}{a} = b^{f^{-1}(y)-x_0}$
$\log_b(\frac{y-y_0}{a}) = f^{-1}(y) - x_0$
$f^{-1}(y) = \log_b(\frac{y-y_0}{a}) + x_0$

3.8 Trigonometrische Funktionen

3.8.1 Die Winkelfunktionen rechtwinkliger Dreiecke

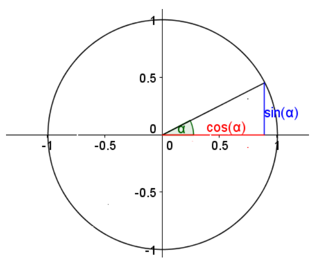
Grundlegend gibt es drei Winkelfunktionen, welche auf rechtwinklige Dreiecke angewandt werden können.
Zum einen wäre das der Sinus, dann der Kosinus und letztendlich der Tangens.
Die drei Seiten des Dreiecks werden als Hypotenuse (längste Seite des Dreiecks, -gegenüber des rechten Winkels-), Ankathete (kurze Seite, welche am Winkel α anliegt), und Gegenkathete (Seite gegenüber des Winkels α) bezeichnet.

1. $\sin(\alpha) = \frac{Gegekathete}{Hypotenuse}$
2. $\cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}$
3. $\tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$



3.8.2 Der Einheitskreis

Am besten sieht man die Eigenschaften der Winkelfunktionen bei der Betrachtung des Einheitskreises.
Der Einheitskreis ist an sich nichts anderes als ein Kreis, mit Radius r = 1 LE und Kreismittelpunkt im Ursprung.



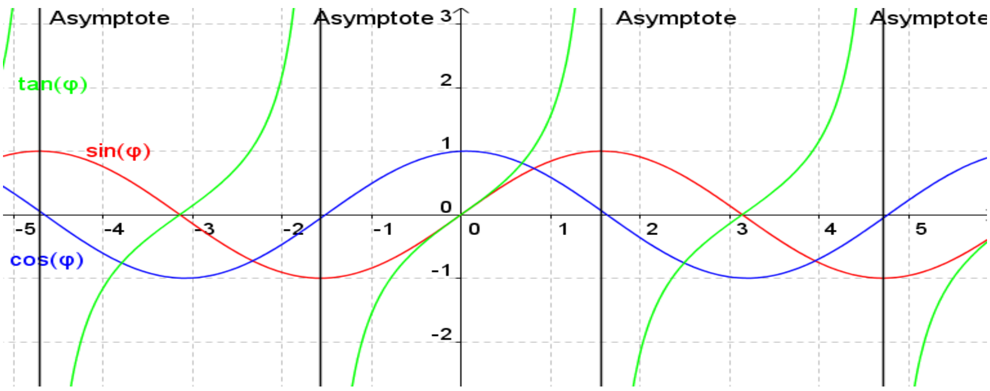
Dabei ist die x-Koordinate des Punktes, am Ende der Hypotenuse des eingezeichneten Dreiecks, der Kosinuswert des Winkels Alpha und die y-Koordinate der Sinuswert.
Der Tangens ist die Steigung der Hypotenuse.

3.8.3 Winkelmaß und Bogenmaß

Bisher haben wir immer mit Winkelmaßen gerechnet, wie zum Beispiel 45°. Neben dieser Möglichkeit, Winkel auszudrücken, gibt es auch noch das Bogenmaß.
Definition: Das Bogenmaß ist die Länge des Kreisbogens mit dem Radius r = 1 unter einem bestimmten Winkel.
Wie ein Winkelwert mit ° gekennzeichnet wird, so kennzeichnet man das Bogenmaß mit dem Wörtchen “rad“.
An den meisten “höheren“ Schulen wird das Bogenmaß bevorzugt.

3.8.4 Graphische Darstellung der Winkelfunktionen

Stellt man die Winkelfunktionen graphisch dar, so bekommt man folgende Zeichnungen.



3.8.5 Nullstellen, Asymptoten und Symmetrie

Alle Winkelfunktionen sind periodisch. Deshalb treten auch ihre Nullstellen in gleichbleibenden Abständen auf.

- Sinusfunktion: $x + n * \pi rad$, welche sich mit den Nullstellen der Tangesnfunktion decken
- Kosinusfunktion: $(0,5 + n) * \pi rad$

Des Weiteren besitzt die Tangensfunktion eine periodisch auftretende senkrechte Asymptote an den Nullstellen des Kosinus.
Betrachtet man die Graphen im Hinblick auf ihre Symmetrie bezüglich des Koordinatensystems, stellt man fest, dass die Sinus- und Tangesnsfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung (ungerade) und die Kosinusfunktion achsensymmetriesch zur y-Achse (gerade) ist.

4 Differentiation

4.1 Ableiten von Funktionen

4.1.1 Ableiten von Funktionen

Definition (Ableitung): Die Ableitung ist die Steigung eines Punktes auf einem Graphen.
Wie erhalte ich die Ableitung? Die Steigung eines Punktes auf einem Graphen erhält man, indem man an eben diesem Punkt eine Tangente an den Graphen lege. Die Steigung dieser Tangenten ist somit auch die Steigung in diesem Punkt.
Definition (Tangente): Eine Tangente ist eine Gerade, die den Graphen in nur einem einzigen Punkt berührt.
Um die Tangentensteigung zu erhalten, betrachtet man zunächst die Steigung einer Sekante und nähert den zweiten Punkt dem ersten immer weiter an. Ja, das klingt stark nach einer Grenzwertbildung.
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

4.1.2 Differenzierbarkeit

Definition: Eine Funktion ist genau dann differenzierbar, wenn sie stetig ist und gleichzeitig keine Sprünge der Steigung, d.h keine "Knicke" enthält (egal ob man die Funktion von links oder rechts betrachtet, die Steigung muss in beiden Fällen gleich sein).

4.1.3 Die erste Ableitung

Um eine Funktion abzuleiten multipliziert man bei Polynomen jeweils die Exponenten mit den dazugehörigen Koeffizienten ihrer Basis und subtrahiert den Exponenten dabei um 1.
Zum Beispiel:
$f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 2 * 2x^{2-1} = 4x$
Konstanten fallen dabei weg.
Zum Beispiel:
$f(x) = 2x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 2 * 2x^(2-1) = 4x$
Für Logarithmus- und e-Funktionen sowie die Winkelfunktionen gelten besondere Ableitungsgesetze.

4.2 Besondere Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$ln(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x

4.3 Ableitungsregeln

Wie überall in der Mathematik gibt es auch für das Ableiten, insbesondere bei komplizierteren Funktionstermen, bestimmte Regeln im Hinblick auf ihre richtige Ableitung.

4.3.1 Produktregel

$f(x) = h(x) * g(x) \Rightarrow f'(x) = h'(x) * g(x) + h(x) * g'(x)$
Beispiel: $f(x) = 2x^3 * sin(x) \Rightarrow f'(x) = 6x^2 * sin(x) + 2x^3 * cos(x)$

4.3.2 Quotientenregel

$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{h'(x)*g(x)-h(x)*g'(x)}{(g(x))^2}$
Beispiel: $f(x) = \frac{2x^3}{2x^2+4} \Rightarrow f'(x) = \frac{6x^2*(2x^2+4)-2x^3*4x}{(2^2+4)^2}$

4.3.3 Kettenregel

Für ineinander geschachtelte (verkettete) Funktionen gilt die sogenannte Kettenregel.
Dabei wird die Funktion ganz normal abgeleitet und die innere Funktion nachdifferenziert. $f(x) = f(g(x)) \Rightarrow f'(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$
Beispiel: $f(g(x)) = x^{(x^2+4)} \Rightarrow f'(g(x)) = (x^2+4) * x^{(x^2+4-1)} * 2x$

4.4 Übungen

1. Bilde die Ableitungen folgender Terme
   - $f(x) = 12x^3 - 3x^2 + x + 12$
   - $f(x) = 6sin^2(x) + cos(x)$
   - $f(x) = \frac{x^2-x}{x^2+x}$
   - $f(x) = \frac{3x}{12x^2-4x+2} * sin^2(x) - 3cos(x) + 1$

Welche dieser Funktionen sind nicht differenzierbar?

- $f(x) = \{^{3x;f\ddot{u}rx<3}_{2x;f\ddot{u}rx>3}$
- $f(x) = |x|$
- $f(x) = \frac{x^3}{sin(x)}$
- $f(x) = 0$

4.5 Kurvendiskussion

Definition: Bei einer Kurvendiskussion wird der Graph einer Funktion im Hinblick auf seine Eigenschaften, wie seinen Definitionsbereich, Grenzwerte, Asymptoten, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Symmetrie, Extrem- und Terrassenpunkte, Monotonie und seinem Krümmungsverhalten, anhand des Funktionsterms untersucht.

4.5.1 Definitonsbereich

Zunchst beschreibt man, in welchem Bereich die Funktion definiert ist, indem man seine Definitions- und Wertemenge bestimmt.

4.5.2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Interessant können auch die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen sein, v.a. wenn man den Graphen skizzieren möchte.

Schnittpunkt mit der y-Achse

Diesen erhält man, wenn man für x den Wert 0 einsetzt.

Nullstellen

Als nächstes untersucht man die Funktion auf Nullstellen. Diese erhält man, indem man den Funktionsterm gleich Null setzt und nach x auflöst.
Merke: Ein Polynom hat höchstens so viele Nullstellen wie der höchste Exponent der Funktion, dabei erhält man zum Teil auch mehrfache Nullstellen, wie beispielsweise bei x^3. Diese Funktion hat ein dreifache Nullstelle an der Stelle x=0.

4.5.3 Grenzwerte

Nun betrachtet man das Verhalten des Graphen im Unendlichen. Dieses gibt man mit Hilfe des Limes an. Dabei ist interessant, ob sich der Graph einem bestimmten Wert annähert oder ob er ins Unendliche steigt oder fällt.

4.5.4 Asymptoten

Asymptoten können Geraden aber auch andere Funktionen sein, an die sich der Graph der zu untersuchenden Funktion beliebig nah annähert, ohne sie jemals zu berühren.
Asymptoten findet man vor allem bei gebrochen rationalen Funktionen. Dort, wo der Nenner den Wert 0 erreichen würde (an dieser Stelle ist die Funktion nicht definiert => Grenzwertbildung), befindet sich eine senkrechte Asymptote. Diese Stelle nennt man Polstelle. Es kann aber auch sein, dass es sich dort um ein Loch handelt, dies ist dann der Fall, wenn die Polstelle gleichsam eine Nullstelle der Funktion ist.
Beispiel: $\frac{2x}{4x-1}$ Der Nenner wird 0 bei x=0.25, es handelt sich dabei um keine Nullstelle, somit befindet sich an der Stelle x=0,25 eine senkrechte Asymptote.
Um den Graphen auf waagrechte oder andere Asymptoten zu untersuchen, schaut man sich die Exponenten der Variablen an.
Die folgenden Ausführungen beziehen sich rein auf die höchsten Exponenten der Variablen im Zähler und Nenner.

4.5.5 Symmetrie

Hier untersuchen wir die Symmetrie die Graphen zum Koordinatensystem. Wir unterscheiden dabei Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung und Achsensymmetrie zur y-Achse.
Dabei untersucht man den Funktionsterm auf folgende Weise:

- Achsensymmetrie (y-Achse), wenn $f(x) = f(-x)$
- Punktsymmetrie (Ursprung), wenn $f(-x) = -f(x)$

4.5.6 Extrem- und Terrassenpunkte

Für die Untersuchung des Funktionsgraphen benötigt man zunächst die erste Ableitung des Funktionsterms. Bei einem Extrempunkt findet ein Vorzeichenwechsel der Steigung statt, d.h. die Ableitung ergibt in diesem Punkt 0. Bei einem Terrassenpunkt ist die Ableitung ebenfalls 0. Folglich müssen wir, um diese Punkte zu erhalten, die erste Ableitung gleich Null setzen.
Somit ist die Nullstelle der ersten Ableitung entweder ein Extrem- oder Terrassenpunkt.

Ob es sich um einen Extrempunkt oder einen Terrassenpunkt handelt, erfahren wir mit Hilfe der zweiten Ableitung. Wenn die Werte der zweiten Ableitung ungleich 0 sind, handelt es sich um einen Extrempunkt.
Ist die zweite Ableitung an dieser Stelle jedoch 0, so wissen wir weiterhin nicht, ob es sich um einen Extrem- oder Terrassenpunkt handelt.
Dabei gilt:

- ist die zweite Ableitung negativ, handelt es sich um ein lokales Maximum
- ist die zweite Ableitung positiv, handelt es sich um ein lokales Minimum

Kurz: ein lokales Maximum oder Minimum besteht immer dann, wenn die erste Ableitung an ihrer Nullstelle einen Vorzeichenwechsel hat. Andernfalls handelt es sich um einen Terrassenpunkt.

4.5.7 Monotonie

Nachdem wir die Funktion hinreichend auf Extrem- und Terrassenpunkte untersucht haben, kann man ihre Monotonie analysieren. Diese gibt man üblicherweise in Intervallen an, deren Grenzen die Rnder und die Extremstellen bilden.

4.5.8 Krümmung

Um das Krümmungsverhalten einer Funktion zu untersuchen, benötigt man die zweite Ableitung des Funktionsterms.
Es gilt: $f''(x) < 0 \Rightarrow$ *rechtsgekrümmt*
$f''(x) > 0 \Rightarrow$ *linksgekrümmt*
Die Stelle, an welcher der Graph seine Krümmung ändert, bezeichnet man als Wendestelle.
Diese ist gleich der Nullstelle der zweiten Ableitung des Funktionsterms, d.h. die zweite Ableitung gleich 0 setzten und den zugehörigen x-Wert berechnen.

Das sind die wesentlichen Schritte einer Kurvendiskussion. Die Reihenfolge der Bearbeitung kann dabei natürlich variiert werden. Punkte, an denen sich die Richtung der Krümmung von rechts nach links, bzw. von links nach rechts ändert, nennt man Wendepunkte.

4.6 Übungen

1. Diskutiere die Kurven folgender Funktionen

- $f(x) = x^4$
- $f(x) = sin(x)$
- $f(x) = 3x^2 + 12x - 4$
- $f(x) = \frac{4x^3+x^2-x}{x+1}$
- $f(x) = \frac{tan^2(x)}{sin^2(x)}$

2. Untersuche folgende Funktionen auf ihre Nullstellen, Extrempunkte und Krümmung.
   - $f(x) = (x-4)^2 - 3$
   - $f(x) = (x-2)(x+5)(x-4)$
   - $f(x) = \frac{1}{x}$

5 Integration

5.1 Integration

Definition (Integral): ein Integral ist die Flächenbilanz zwischen einem Funktionsgraphen und der x-Achse.
Integrale werden immer in Intervallen berechnet.
Dabei unterscheidet man offene Integrale, d.h ein Integral ohne Grenzen und ein geschlossenes Integral, welches lediglich in einem bestimmten Intervall berechnet wird.
Schreibweise: $\int f(x)dx \Rightarrow$ offenes Integral

$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow$ geschlossenes Integral im Intervall [a;b]

Dabei beschreibt das dx am Ende jeweils, nach welcher Variable integriert wird. In der Physik beispielsweise findet man auch häufig die Bezeichnung dt.

5.1.1 Stammfunktionen

Definition: die Ableitung einer Stammfunktion ergibt den Funktionsterm der ursprnglichen Funktion.
Symbol der Stammfunktion: F(x) d.h. $F'(x) = f(x)$

5.1.2 Berechnung von Stammfunktionen

Die Stammfunktion erhält man, indem man die Ableitung rückwärts rechnet. D.h. ich addiere den Exponenten um 1, bilde daraus einen Bruch der Form $\frac{1}{Exponent+1}$ und multipliziere diesen mit dem Faktor vor der Basis. Mit dieser Methode lassen sich zu fast allen Polynomen Stammfunktionen berechnen. Da es sich um eine Stammfunktion handelt, muss sie am Ende noch mit einer unbekannten Konstanten C addiert werden.

5.1.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

HDI:!!!Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion der zu integrierenden Funktion!!!

5.1.4 Berechnung von Integralen

Zunächst berechnet man sich eine Stammfunktion der Integralfunktion.

$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow [F(x)]_a^b$

Als nächstes setzt man die obere Grenze in die Stammfunktion ein und subtrahiert von diesem Wert den Wert der Stammfunktion mit der eingesetzten unteren Grenze.
$F(b) - F(a)$

5.1.5 Berechnung von Fläche zwischen zwei Graphen

Um die Fläche zwischen zwei Graphen f(x) und g(x) zu ermitteln, berechnet man sich zunächst die Schnittpunkte der beiden Graphen, welche die Intervallgrenzen bilden. Wenn man nun eine neue Funktion h(x) aus der Subtraktion der beiden Funktionen f(x) und g(x) bildet und das Integral dieser Funktion über die beiden Schnittpunkte berechnet, erhält man die Fläche zwischen den beiden Graphen.

5.2 Übung

1. Berechne die Stammfunktionen folgender Funktionen
   - $f(x) = x^2 - 8$
   - $f(x) = 3x^2 + 4x - 16$
   - $f(x) = sin(x) - 3$
2. Berechne nun alle Flächen zwischen den oben gegebenen Graphen.

6 Beweisverfahren

6.1 Direkter Beweis

Den direkten Beweis haben wir im Kapitel über die quadratischen Funktionen schon kennengelernt.
Es handelt sich hierbei um nichts anderes als das direkte Herleiten von Formeln.

6.2 Indirekter Beweis

Im indirekten Beweis schaut man sich den Fall an, welchen man beweisen will und zeigt, dass es nicht anders sein kann.
Man geht also zunächst vom Gegenteil aus und versucht auf einen Widerspruch zu stoßen.

6.2.1 Beispiel

Das bekannteste Beispiel hierfür ist der Beweis dafür, dass es sich bei Wurzel 2 um keine rationale Zahl handelt.
Man geht nun zunächst davon aus, dass es eine rationale Zahl ist.
Wenn dies der Fall ist, so würde sich Wurzel 2 folgendermaßen ausdrücken lassen:
$\exists q, p \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{q}{p}$
Wichtig hierfür ist die Voraussetzung, dass es sich bei q und p um teilerfremde Zahlen handelt, der Bruch also vollständig gekürzt ist.
Quadriert man nun die Gleichung, so bekommt man:
$2 = \frac{q^2}{p^2}$
Nun noch mit p^2 multiplizieren:
$2 * p^2 = q^2$
Da es sich bei p und q um ganze Zahlen handelt, sind natürlich auch deren Quadrate ganze Zahlen.
Eine ganze Zahl mit 2 multipliziert ist auch wieder eine ganze Zahl. => Es handelt sich bei q^2 um eine ganze, gerade Zahl handelt.
Wenn das Quadrat einer Zahl gerade ist, ist auch die Zahl selber gerade, deshalb lässt sich q auch folgendermaßen darstellen.
$\exists r : q = 2 * r$
Setzt man nun diesen Wert für q oben ein, so erhält man:
$2 * p^2 = 4 * r^2 \Leftrightarrow p^2 = 2 * r^2$
Nun sieht man das es sich auch bei p um eine ganze, gerade Zahl handelt.

Da jede ganze, gerade Zahl den Teiler 2 hat, besitzen auch p und q den gemeinsamen Teiler 2.
Einer unserer Voraussetzungen war allerdings, dass diese beiden Zahlen teilerfremd sind.
Wenn wir auf solch einen Widerspruch treffen, so muss zumindest eine unserer Annahmen falsch sein.
Die einzige Annahme, welche wir getroffen haben ist jedoch, dass es sich bei Wurzel 2 um eine rationale Zahl handelt.
Dies ist also falsch. Und somit haben wir bewiesen, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

6.3 Vollständige Induktion

Wenn man beweisen will, dass zwei Aussagen im Zahlenraum $\mathbb{N}$ gelten, so greift man oft auf die Vollständige Induktion zurück.
Bei der vollständigen Induktion zeigt man zunächst, dass es für kleine n gilt, dies wird auch als Induktionsanfang bezeichnet.
Zum Beispiel: man will beweisen, dass $a_n = 2a_{n-1}; a_1 = 2$ gleich $a_n = 2^n$ ist.
Induktionsanfang:
$n = 1 : a_1 = 2; a_1 = 2^1 = 2 =>$passt.
Nun stellen wir unsere Annahme auf, dies ist nichts anderes, als dass wir sagen, dass die beiden Aussagen für n gleich sind (für kleine n's stimmt dies ja).
Induktionsannahme:
$2a_{n-1} = 2^n; a_1 = 2$
Als nächstes folgt nun die Induktionsbehauptung, wir behaupten, dass, wenn es für n gilt, es auch für n+1 gilt, also:
Induktionsbehauptung:
$2a_{n+1-1} = 2^{n+1}; a_1 = 2$
$\Leftrightarrow 2a_n = 2^{n+1}; a_1 = 2$
Jetzt kommen wir zum eigentlichen Beweis! Und zwar ersetzen wir das a_n aus unserer Behauptung durch das $a_n = 2^n$ aus unserer Annahme, denn mit dieser dürfen wir auf Grund der Tatsache, dass es für kleine n's gilt, arbeiten.
Und wenn die Aussage stimmt, kommt genau die andere Seite unserer Behauptung heraus, also 2^{n+1}
Induktionsbeweis:
$2(2^n) = 2^{n+1}$
Wuhu! Wir haben bewiesen, dass unsere Aussage stimmt. Aber warum ist dies so?
Ganz einfach, wir haben gezeigt, dass die Aussage für $n = 1$ gilt und dass,

wenn sie für n gilt auch für n+1 gilt...
Wenn sie also nun für n = 1 gilt, so gilt sie auch für n=2 und somit auch wieder für n=3.
So können wir uns nun durch den gesamten Zahlenraum $\mathbb{N}$ hangeln... =>
q.e.d.

6.4 Übungen

1. Zeige, dass folgende Aussagen gelten:
   - $\sum\limits_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; für $q \neq 1$