

Gruppen

Übungsaufgaben

Aufgabe 1: Beweise:

Sei (G, e, \circ) eine Gruppe und a, b beliebige Elemente von G . Dann gilt:

(a) $\exists! x \in G : a \circ x = b$

(b) $\exists! y \in G : y \circ a = b$

Aufgabe 2: Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

(a) $a \circ a = a \circ b \Rightarrow a = b$

(b) $a \circ a = b \circ b \Rightarrow a = b$.

(c) $a^5 = a \Rightarrow a^4 = e$

(d) $a^5 = e$ und $a^4 = e \Rightarrow a = e$

(e) Gilt für jedes Element a einer Gruppe (G, e, \circ) , mit dem neutralen Element e und $a^2 = e$, so ist (G, e, \circ) eine abelsche Gruppe.

(f) Gilt auch die Umkehrung der Aussage (e)?

Aufgabe 3: Begründe anhand der Schulkenntnisse, warum folgende Beispiele aus dem Gruppenvortrag tatsächlich Gruppen sind:

(a) $(\mathbb{Z}, 0, +)$

(b) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, 1, \cdot)$

Aufgabe 4: Es sei M eine endliche Menge, $G = P(M)$, wobei $P(M)$ die Potenzmenge bezeichne. Unter welcher Bedingung für \star ist (G, \star, e) eine Gruppe? Begründe.

(a) $\star = \cap$

(b) $\star = \cup$

(c) $\star = \Delta$ (symmetrische Differenz, vgl. Mengenvortrag)

Die Verknüpfung \star verhält sich wie folgt: $A \times B \rightarrow A \star B$, wobei die Elemente A, B Teilmengen der Menge M sind und anhand der üblichen Mengenoperationen (Durchschnitt, Vereinigung und symmetrische Differenz) ausgewertet werden können.

Aufgabe 5: Sei (G, \star, e) eine Gruppe und H_1, H_2 zwei Untergruppen von G .

(a) Zeige, dass $H_1 \cap H_2$ auch eine Untergruppe von G ist.

(b) Gilt es auch, dass $H_1 \cup H_2$ eine Untergruppe von G ist?

Hinweis: Betrachte das Beispiel zu den Untergruppen aus dem Vortrag