Kapitel 5

Abbildungen

§01 Abbildungen

Im letzten Kapitel haben wir den Begriff der *Relation* eingeführt, sind aber schnell zum Studium der spezielleren Äquivalenzrelationen übergegangen. Wir wollen uns in diesem Kapitel mit Abbildungen (oder Funktionen) beschäftigen. Um diese jedoch mathematisch korrekt formulieren zu können, brauchen wir einen allgemeineren Begriff der *Relation*, denn eine Abbildung setzt Elemente *verschiedener* Mengen in Beziehung.

§01.01 **Definition**. Seien X, Y Mengen und $R \subseteq X \times Y$. Dann nennen wir R eine *Relation zwischen X und Y*. □

Auch hier schreiben wir für $(x, y) \in R$ einfach $x \sim y$, falls keine Verwechlungsgefahr besteht. Inbesondere sprechen wir nun von allgemeinen Relationen und nicht von Äquivalenzrelationen. Die hier betrachteten Relationen müssen nicht länger reflexiv, symmetrisch oder transitiv sein und können diese Eigenschaften meist auch nich haben.

§01.02 **Definition**. Seien X, Y Mengen und $R \subseteq X \times Y$ eine Relation zwischen X und Y. Wir nennen $R \ldots$

(a) *rechtstotal*, falls für jedes Element $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, sodass $x \sim y$.

(b) *linkstotal*, falls für jedes Element $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert, sodass $x \sim y$.

□

§01.03 **Definition**. Seien X, Y Mengen und $R \subseteq X \times Y$ eine Relation zwischen X und Y. Wir nennen $R \ldots$

(a) *rechtseindeutig* falls zu jedem $x \in X$ höchstens ein $y \in Y$ existiert, sodass $x \sim y$.

(b) *linkseindeutig* falls zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ existiert, sodass $x \sim y$

□

1. Die „richtige“ Definition

Aus der Schule kennen wir den folgenden Begriff einer Abbildung

§01.04 **Definition**. Seien X, Y Mengen. Eine *Abbildung* f ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element aus X genau ein Element aus Y zuordnet. □

Schrecklich, nicht wahr? Was soll denn eine Zuordnungsvorschrift sein? Diese Definition ist total schwammig. Zum Glück können wir bereits mit unseren Mitteln einen exakten Abbildungsbegriff definieren.

§01.05 **Definition**. Seien X, Y Mengen und $G \subseteq X \times Y$ eine Relation zwischen X und Y. Ist G linkstotal und rechtseindeutig, so nennen wir das Tripel $f := (X, Y, G)$ eine *Abbildung von X nach Y* und schreiben

$$f : X \Longrightarrow Y.$$

Es gilt also:

(a) zu jedem $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ mit $x \sim y$

(b) und dieses y ist das einzige Element in Y mit $x \sim y$.

Dieses zu x eindeutige y mit $x \sim y$ bezeichnen wir mit $f(x)$ und schreiben

$$f(x) = y \text{ oder } f : x \longmapsto y.$$

Gegebenfalls nennen wir X den *Definitionsbereich*, Y die *Zielmenge* und G den *Graph* der Abbildung f. □

§01.06 **Definition**. Seien X, Y, A, B Mengen, sowie $f : X \Longrightarrow Y$, $g : A \Longrightarrow B$ Abbildungen. Dann definieren wir die *Gleichheit* von f und g via

$$f = g \quad :\Longrightarrow \begin{cases} & X = A \\ \text{und} & Y = B \\ \text{und} & f(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in X = A \end{cases}$$

□

§01.07 **Definition**. Seien X, Y Mengen und $f : X \Longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann induziert f zwei weitere Abbildungen zwischen den Potenzmengen $\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y)$:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(X) &\Longrightarrow \mathcal{P}(Y) \\ A &\longmapsto \{f(a) \in Y \mid a \in A\} \end{aligned}$$

die *Bildabbildung* zu f und

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathcal{P}(Y) &\Longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ B &\longmapsto \{x \in X \mid f(x) \in B\} \end{aligned}$$

die *Urbildabbildung* zu f. Wir nennen $f(X)$ das *Bild von f* und schreiben auch $im(f)$. □

§01.08 **Definition**. Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \Longrightarrow Y$, sowie $g : Y \Longrightarrow Z$ Abbildungen. Dann definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\Longrightarrow Z \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

(gelesen: „g nach f“) als die *Komposition* oder *Verkettung* von f und g. □

2. Eigenschaften von Abbildungen

§01.09 **Definition.** Seien X, Y Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.

(a) Wir nennen f *injektiv* (oder eineindeutig), falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt.

(b) Wir nennen f *surjektiv*, falls für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, mit $f(x) = y$.

(c) Wir nennen f *bijektiv*, falls f injektiv und surjektiv ist.

□

§01.10 **Definition.** Seien A, X Mengen mit $A \subseteq X$. Dann nennen wir

$$\begin{aligned} \iota : A &\longrightarrow X \\ a &\longmapsto a \end{aligned}$$

die *natürliche Inklusion* von A in X □

§01.11 **Anmerkung.** ι ist eine injektive Abbildung. □

§01.12 **Definition.** Sei X eine Menge und $\sim$ ein Äquivalenzrelation auf X. Dann nennen wir

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X/_{\sim} \\ x &\overset{x}{\longmapsto} \end{aligned}$$

die *natürliche Projektion* bzgl. $\sim$. □

§01.13 **Anmerkung.** π ist eine surjektive Abbildung. □

§01.14 **Definition.** Sei X eine Menge. Dann nennen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_n X : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

die *Identität* auf X. □

§01.15 **Anmerkung.** $\mathrm{id}_n X$ ist eine bijektive Abbildung. □

§01.16 **Bemerkung.** Seien X, Y Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent

(i) f ist injektiv, d.h. für alle $x_1 \neq x_2 \in X$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(ii) Für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ gilt bereits $x_1 = x_2$.

(iii) Für alle $y \in Y$ ist $f^{-1}(\{y\})$ höchstens einelementig.

(iv) Der Graph G von f ist eine linkseindeutige Relation.

□

§01.17 **Beweis.**

(i) ⇒ (ii) Dies folgt direkt durch Kontradiktion.

(ii) ⇒ (iii) Sei $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ und $x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y\})$. Dann gilt $f(x_1) = y = f(x_2)$, also wegen (ii) bereits $x_1 = x_2$. Also ist $f^{-1}(\{y\}) = \{x_1\}$.

(iii) ⇒ (iv) Seien $y \in Y$ und $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \sim_G y$ und $x_2 \sim_G y$. Dies bedeutet gerade, dass $y = f(x_1) = f(x_2)$. Also gilt $x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y\})$. Wegen (iii) gilt dann $x_1 = x_2$. Es ist demnach $\sim_G$ linkseindeutig.

(iv) ⇒ (i) Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$. Angenommen es gilt $f(x_1) = f(x_2) =: y$. Dann gilt aber $x_1 \sim_G y$ und $x_2 \sim y$. Dies ist ein Widerspruch zur Linkseindeutigkeit von $\sim_G$.

□

§01.18 **Bemerkung**. Seien X, Y Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent

(i) f ist surjektiv, d.h. für alle $y \in Y$ existiert ein $x \in X$, sodass $f(x) = y$.

(ii) Für alle $y \in Y$ ist $f^{-1}(\{y\})$ mindestens einelementig.

(iii) Es gilt $f(X) = Y$.

(iv) Der Graph G von f ist rechtstotal.

□

§01.19 **Beweis**.

(i) ⇒ (ii) Sei $y \in Y$, dann existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Also ist $x \in f^{-1}(\{y\})$, also $f^{-1}(\{y\})$ mindestens einelementig.

(ii) ⇒ (iii) Sei $y \in Y$, dann ist $f^{-1}(\{y\})$ mindestens einelementig. Also existiert ein $x \in X$ mit $x \in f^{-1}(\{y\})$, d.h. $f(x) = y$. Also ist $y \in f(X)$, was „$\supseteq$" zeigt. Die Inklusion „$\subseteq$" gilt nach Definition der Bildabbildung.

(iii) ⇒ (iv) Sei $y \in Y$. Wir zeigen die Existens von einem Element $x \in X$, mit $x \sim_G y$. Da $f(X) = Y$ gilt $y \in f(X)$, also existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Mit anderen Worten $x \sim_G y$.

(iii) ⇒ (i) Sei $y \in Y$. Da $\sim_G$ rechtstotal ist, existiert ein $x \in X$ mit $x \sim_G y$. Anders formuliert: $f(x) = y$.

□

§01.20 **Bemerkung**. Seien X, Y Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann definiert

$$x_1 \sim x_2 \quad :\Leftrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

eine Äquivalenzrelation auf X. □

§01.21 **Beweis**. Dies folgt sehr einfach aus den Eigenschaften der „="-Relation. □

§01.22 **Satz**. *Seien X, Y Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Wir betrachten das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/_{\sim} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

wobei $\pi : x \mapsto [x]$ die Projektion bzgl. der Relation aus [01.20] ist und ι die natürliche Inklusion von $f(X) \subseteq Y$ ist. Weiter sei

$$\begin{aligned} \varphi : X/_{\sim} &\longrightarrow \mathrm{Im}(f) \\ [x] &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Dann gilt

(i) *φ ist wohldefiniert.*

(ii) *φ ist bijektiv.*

(iii) *Das Diagramm kommutiert in dem Sinne, dass $f = \iota \circ \varphi \circ \pi$ gilt.*

□

§01.23 **Beweis**.

(i) Seien $x_1, x_2 \in X$, mit $x_1 \sim x_2$. Dann gilt nach Definition von $\sim$, dass $f(x_1) = f(x_2)$. Also

$$\varphi\big([x_1]\big) = f(x_1) = f(x_2) = \varphi\big([x_2]\big)$$

(ii) Wir zeigen die Injektivität und die Surjektivität von φ.

(inj.) Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $\varphi\big([x_1]\big) = \varphi\big([x_2]\big)$. Dies bedeutet $f(x_1) = f(x_2)$ und damit ist $x_1 \sim x_2$. Nach [01.06] ist dann $[x_1] = [x_2]$.

(surj.) Sei $y \in f(X)$. Dann existiert nach Definition von $f(X)$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Betrachten wir die Äquivalenzklasse von x, dann sehen wir $\varphi\big([x]\big) = f(x) = y$.

(iii) Wir zeigen die Gleichheit der Abbildungen

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ \iota \circ \varphi \circ \pi : X &\longrightarrow Y \end{aligned}$$

Diese Abbildungen haben offensichtlich die selben Definitionsbereiche und Zielmengen. Bleibt noch zu zeigen, dass sie punktweise übereinstimmen. Sei also $x \in X$. Wir berechnen

$$(\iota \circ \varphi \circ \pi)(x) = (\iota \circ \varphi)(\pi(x)) = (\iota \circ \varphi)\big([x]\big) = \iota\Big(\varphi\big([x]\big)\Big) = \iota(f(x)) = f(x).$$

Damit ist alles gezeigt. □

§02 Aufgabenvorschlaege

1. Aufgabe 1

Betrachte $A := \{1, 2, 3, 4\}$ und $B := \{a, b, c, d\}$. Welche der folgenden Relationen $G_i \subseteq (A \times B)$ sind Abbildungen? Welche sind links- oder rechtstotal? Welche sind links- oder rechtseindeutig?

1. $G_1 := \{(1, b), (2, c), (3, d), (1, a), (4, b)\}$
2. $G_2 := \{(1, c), (2, c), (3, c), (4, c)\}$
3. $G_3 := \{(4, b), (2, a), (1, a)\}$
4. $G_4 := \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$

2. Aufgabe 2

Gegeben sei die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\Leftrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

Werte die Bildabbidung von f aus und zwar an…

1. $\{1, 2, 3\}$
2. $\{-3, -5, 4\}$
3. $\{-6, 6, \sqrt{36}\}$
4. $\mathbb{Z}$

Werte die Urbildabbildung von f aus und zwar an…

1. $\{1, 2, 3\}$
2. $\{-1, -2\}$
3. $\{-1, 0, 1\}$
4. $\{36\}$
5. $\emptyset$

3. Aufgabe 3

Welche der folgenden Abbildungen f_i sind injektiv, surjektiv, bijektiv?

1. $f_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad x \longmapsto 2x + 1$
2. $f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad x \longmapsto |x|$
3. $f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0; \quad x \longmapsto |x|$
4. $f_4 : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad (x, y) \longmapsto x + y$
5. $f_5 : (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad (x, y) \longmapsto x + y$

4. Aufgabe 3

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Zeige:

1. Sind f und g injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.
2. Sind f und g surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.
3. Ist $g \circ f$ injektiv, dann ist auch f injektiv. Gilt das auch für g?
4. Ist $g \circ f$ surjektiv, dann ist auch g surjektiv. Gilt das auch für f?