Ruprecht-Karls Universität Heidelberg
Fachschaft MathPhys
Vorkurs

Übungsbetrieb

Aufgabenvorschläge

Anmerkung:
Bereits bewiesene Sätze (auch aus den Vorträgen) dürfen benutzt werden. Bitte rechnet die Aufgaben mit einer entsprechenden Anmerkung vor. Solange hier keine besondere Anmerkung steht, ist es Euch überlassen, was und wie ihr rechnen lasst. Ihr solltet die Aufgaben aber vorher einmal selbst gerechnet haben.

Beweise mit Hilfe des direkten Beweisverfahrens:

1. Sei $n \in \mathbb{Z}$, dann ist n gerade oder $n+1$ ist gerade. (Es darf verwendet werden: Eine ganze Zahl ist entweder gerade oder ungerade.)
2. Die Summe zweier gerader ganzer Zahlen ist gerade.
3. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Gilt a teilt b und b teilt c, so gilt a teilt c.
4. Die Summe dreier aufeinander folgender ganzer Zahlen ist durch 3 teilbar.
5. Ist $a, s, t \in \mathbb{N}$, dann gilt $a^t - 1$ teilt $a^{st} - 1$ (Tipp: Polynomdivision).
6. Ist $p \in \mathbb{N}, p > 2$ eine Primzahl, so hat sie die Gestalt $p = 4k \pm 1$.
7. Ist $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl so erfüllt sie folgende Eigenschaft: Aus p teilt ab folgt p teilt a oder p teilt b für belieblige $a, b \in \mathbb{N}$ (Eine eindeutige Primfaktorzerlegung darf angenommen werden).
8. Ist n eine natürliche Zahl, dann ist $(2n+1)^2 - 1$ durch 8 teilbar. (Tipp: Denke an Aufgabe 1)
9. Sei $n, m \in \mathbb{N}, n \geq 2, n! + 2 \leq m \leq n! + n$. Dann ist m keine Primzahl.

Widerspruchsbeweise

1. In 7. der direkten Beweise gilt auch die Umkehrung (dh: Erfülle $p \in \mathbb{N}$ folgende Eigenschaft: Aus p teilt ab folgt p teilt a oder p teilt b für belieblige $a, b \in \mathbb{N}$. Dann ist p eine Primzahl).
2. Es gibt unendlich viele Primzahlen (Eine eindeutige Primfaktorzerlegung darf angenommen werden).
3. $\sqrt{2}$ ist irrational *(wird ggf schon im vortrag gezeigt)*

Beweise mit Hilfe des indirekten Beweisverfahrens:

1. Sei a eine ganze Zahl. Ist a^2 ungerade, so ist auch a ungerade.
2. Das Produkt zweier ungerader ganzer Zahlen ist ungerade.
3. Wenn die letzte Ziffer einer Zahl eine 3 ist, dann ist sie keine Quadratzahl. *(vorrechnen)*
4. Seien $a, m \in \mathbb{N}, m > 1$. Ist $a^m - 1$ eine Primzahl, so ist m eine Primzahl und $a = 2$.