Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
Fachschaft MathPhysInfo

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

*Skript zum*

# Mathematischen Vorkurs

*Wintersemester 2020/21*

*Fassung Stand 12. April 2020*

Habt ihr Fragen, Wünsche, Anregungen? Schreibt uns einfach eine Mail: fachschaft@mathphys.stura.uni-heidelberg.de mit.

MΛTHEMΛTIKON, Im Neuenheimer Feld 205, 69120 Heidelberg
Telefon: +49 6221 54.14.999 – Fax: +49 6221 54.161.14.999
eMail: fachschaft@mathphys.stura.uni-heidelberg.de
Webseite: https://mathphys.stura.uni-heidelberg.de

# Inhaltsverzeichnis

Hier soll die Einleitung stehen.

# Kapitel 1

# Logik

*Dieser Vortrag hat das Ziel, die elementaren Begriffe der klassischen Logik einzuführen und die wesentlichen Regeln im Arbeiten mit mathematischen Aussagen darzulegen. Aufgrund der beschränkten Zeit und des Ziels maximaler Verständlichkeit, können und werden wir keine formal exakte Herleitung geben. Dies ist auch deswegen nicht möglich, weil andere dafür benötigte Begriffe erst in späteren Vorträgen dieses Vorkurses erklärt werden.*

## §01 Motivation

In der Mathematik wollen wir unsere Gedanken für andere möglichst verständlich formulieren und auch die Gedanken anderer möglichst einfach verstehen. Die Klassische Aussagenlogik dient hierbei gewissermaßen als Kommunikationsmittel, um Gedanken oder Sprache fehlerfrei zu formalisieren. Da in der Sprache häufig Fehler oder Missverständlichkeiten auftreten, setzen wir in der Mathematik feste Regeln, um dies zu verhindern.
Außerdem wollen wir die Struktur mathematischer Literatur oder Vorlesungen verstehen, die weitestgehend standardisiert. Diese Struktur hält sich meist an folgendes Muster:

$$\begin{array}{c}\text{Axiom}\\ \Downarrow \\ \text{Definition}\\ \Downarrow \\ \text{Satz}\\ \Downarrow \\ \text{Beweis}\end{array}$$

Damit ist nicht gemeint, dass in Literatur und Vorlesungen Axiom, Definition, Satz und Beweis immer in genau dieser Reihenfolge aufeinander folgen. Die Mathematik basiert auf Axiomen, die wir als wahr und widerspruchsfrei annehmen. Gegenstand der Mathematik sind Objekte, die wir mittels Definitionen präzise beschreiben. Deren Eigenschaften formulieren wir dann in Sätzen und beweisen die Gültigkeit dieser Eigenschaften mittels des bisher geltenden (also z.B. den Axiomen, den Definitionen selbst und bereits gezeigten Sätzen).

§01.01 **Axiom**. *Zu jedem Prädikat $P$ gibt es eine Menge aller Objekte, die dieses Prädikat erfüllen.*

§01.02 **Definition**. $\mathbb{Z} := \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

§01.03 **Satz**. $\forall n \in \mathbb{Z} : n$ *gerade* $\Rightarrow n^2$ *gerade.*

§01.04 **Beweis.** Aus der Voraussetzung wissen wir, dass $n = 2m$, also können wir umformen:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m)^2 \\ &= 4m^2 \\ &= 2(2m^2) \\ &\overset{2m^2=k}{=} 2k \end{aligned}$$

□

Nicht nur in der Mathematik findet das Gebiet der Klassischen Logik Gebrauch, sondern auch in der Informatik. In der Technischen Informatik beispielsweise benötigt man diese Logik für Schaltkreise, beim Programmieren entspricht die Bedingung einer if-Abfrage manchmal einer Operator-Verknüpfung zweier Aussagen (und/oder/Negation).

## §02 Klassische Aussagenlogik

In der Mathematik wollen wir Sätze formulieren, die immer wahr sein sollen. Aus solchen Sätzen wollen wir auch neue Sätze herleiten. Damit bei diesen Herleitungen keine Fehler passieren, gibt uns die Klassische Logik ein Konzept, mit dem wir die Formulierung und die Beweise von Sätzen auf ein sicheres Fundament stellen können. Das wichtigste Element der Klassischen Logik ist die Aussage.

### 1. Aussagen und Wahrheitswerte

§02.01 **Definition** *(Aussage)*. Eine *(logische) Aussage* ist ein sprachliches Gebilde, von dem es sinnvoll ist zu fragen, ob es wahr oder falsch ist.
Notation: Wir bezeichnen Aussagen mit Großbuchstaben $(A, B, C, ...)$

Die Klassische Logik ist durch genau zwei Eigenschaften gekennzeichnet. Die erste besagt:

§02.02 **Axiom** *(Prinzip der Zweiwertigkeit). Jede Aussage hat einen von genau zwei Wahrheitswerten,* wahr *oder* falsch*.*
*Notation: Wir bezeichnen die beiden Wahrheitswerte kurz mit* w *für wahr und* f *für falsch.*

§02.03 **Beispiel.** Aussagen sind:

- A = “Der Döner wurde in Deutschland erfunden.“
- B = “Nutella hat einen Lichtschutzfaktor von 9,6.“
- C = “Elefanten können hüpfen.“
- D = “Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von vier Quadratzahlen schreiben.“
- E = “Jede gerade Zahl größer als 2 ist die Summe zweier Primzahlen. (Goldbachsche Vermutung)“

Der Wahrheitswert von Aussage A ist nicht bekannt, aber entweder stimmt die Aussage oder nicht. Aussagen B,C und D sind durch Überprüfung bestimmbar.
Keine Aussagen sind:

- F = “Hoffentlich gewinne ich im Lotto.“
- G = “Willst du Kaffee oder Tee trinken?“
- H = “Cauchy ist der beste Mathematiker.“

Bei E ist es nicht sinnvoll, nach wahr oder falsch zu fragen. F ist eine Frage und Fragen besitzen keinen Wahrheitswert. G ist eine subjektive Aussage, um diese allgemein zu einer Aussage machen, müsste man erst definieren, wann jemand “der beste Mathematiker“ ist.

## 2. Operatoren

Aus bestehenden Aussagen können mit Hilfe von so genannten Operatoren neue Aussagen gewonnen werden. Ein Operator nimmt eine bestimmte Anzahl von Aussagen (sog. “Operanden“) entgegen und ordnet diesen - abhängig von ihrem Wahrheitswert - einen neuen Wahrheitswert (w oder f) zu. Ein Operator macht also aus einer oder mehreren Aussagen eine neue Aussagen.

§02.04 **Definition** *(Operator).* Ein *Operator* $\bigstar$ ordnet einer bestimmten Anzahl von Aussagen $A_1, ..., A_n$ eine neue Aussage $\bigstar(A_1, ..., A_n)$ zu. □

Das folgende zweite Axiom der Klassischen Logik sorgt dafür, dass die Definition eines Operator sinnvoll (“wohldefiniert“) ist:

§02.05 **Axiom** *(Prinzip der Extensionalität). Der Wahrheitswert jeder durch Operatoren gebildeten Aussage ist eindeutig durch die Wahrheitswerte ihrer Teilaussagen bestimmt.*

Nun ist uns klar, wie wir einen Operator zu definieren haben. Für jede mögliche Kombination von Wahrheitswerten müssen wir angeben, welchen Wahrheitswert die neue Aussage $\bigstar(A_1, ..., A_n)$ hat. Die Operatoren definieren wir mit dem Werkzeug der Wahrheitstafeln. Das sind Tabellen, in denen jede Spalte eine Aussage repräsentiert und jede Zeile eine mögliche Kombination von Wahrheitswerten. Bei Wahrheitstafeln schreibt man in die linken Spalten alle möglichen Wahrheitswerte der auftretenden Ausgangsaussagen (z.B. A und B); in den Spalten rechts davon schreibt man die Wahrheitswerte der aus den Ausgangsaussagen kombinierten Aussagen.

Wir führen nun nach und nach die bekanntesten Operatoren ein und jeder davon ist durch eine anschauliche Interpretation motiviert.

§02.06 **Definition** *(Operation: Negation).* Für eine Aussage $A$ definieren wir die **Negation** $\neg(A) = \neg A$ durch:

| A | ¬A |
|---|---|
| w | f |
| f | w |

Interpretation: $\neg A$ nimmt immer genau den umgekehrten Wahrheitswert von $A$ an. □

§02.07 **Beispiel.** $\neg A$: “Der Döner wurde nicht in Deutschland erfunden.“
$\neg F$ ist nicht sinnvoll: “Willst du weder Kaffee noch Tee trinken?“

An einer Wahrheitstafel kann man auch erkennen, was weitere mögliche Operatoren wären:

§02.08 **Bemerkung**. Alle möglichen Operatoren für eine Aussage $A$ lauten:

| A | | | | |
|---|---|---|---|---|
| w | w | f | f | w |
| f | w | f | w | f |

Man sieht, dass nicht die Notwendigkeit besteht, einen weiteren Operator zu definieren, der nur auf eine Aussage wirkt. Die erste Spalte entspricht $w$, die zweite Spalte entspricht $f$, die dritte Spalte entspricht $\neg A$ und die vierte Spalte entspricht der Identität, also $A$ selbst.

§02.09 **Definition** *(Operator: Und-Verknüpfung)*. Für zwei Aussagen $A, B$ definieren wir die **und-Verknüpfung** $\wedge(A, B) = A \wedge B$ durch:

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | f |

Interpretation: $A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn $A$ und $B$ wahr sind. □

§02.10 **Beispiel**. $A \wedge C$: “Der Döner wurde in Deutschland erfunden und Elefanten können hüpfen.“
Nicht sinnvoll ist: $E \wedge F$: “Hoffentlich gewinne ich im Lotto und willst du Kaffee oder Tee trinken?“

§02.11 **Definition** *(Operator: Oder-Verknüpfung)*. Für zwei Aussagen $A, B$ definieren wir die **oder-Verknüpfung** $\vee(A, B) = A \vee B$ durch:

| A | B | $A \vee B$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | w |
| f | w | w |
| f | f | f |

Interpration: $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn $A$ wahr ist oder $B$ wahr ist oder sowohl $A$ als auch $B$ wahr sind. □

Im alltäglichen Sprachgebrauch ist das “oder“ nicht eindeutig festgelegt, es kann sowohl exklusiv als auch inklusiv sein. In der Mathematik benennt man das exklusive “oder“ explizit, also ist im Allgemeinen das inklusive gemeint, wenn es nicht weiter spezifiziert wird.

§02.12 **Beispiel**. $D \vee C$: “Jede natürliche Zahl lässt sich als Summe von vier Quadratzahlen schreiben oder Elefanten können hüpfen.“

§02.13 **Definition** *(Operator: Implikation)*. Für zwei Aussagen $A, B$ definieren wir die **Implikation** $\Rightarrow (A, B) = A \Rightarrow B$ durch:

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | w |
| f | f | w |

Interpretation: Wenn $A$ wahr ist, dann auch $B$. Man sagt auch: $A$ ist hinreichend für $B$. □

§02.14 **Beispiel**. $B \Rightarrow C$: “Wenn Nutella einen Lichtschutzfaktor von 9,6 hat, dann können Elefanten hüpfen.“
Nicht sinnvoll ist: $E \Rightarrow F$: “Wenn ich hoffentlich im Lotto gewinne, willst du dann Kaffee oder Tee trinken?“

Die Wahrheitswerte der Implikation in den beiden unteren Zeilen der Wahrheitstabelle sind in der Mathematik nicht unumstritten. Argumente für diese Setzung sind:

- Die Implikation wird vor allem genutzt, wenn man bereits weiß, dass A wahr ist. In dem Sinne hat man eine gewisse Definitionsfreiheit für den Wahrheitswert von A ) B, wenn A falsch ist.

- Durch die obige Definition entsteht eine “einfache Logik“, d.h. wir können bestimmte Sachverhalte, die wir als immer erfüllt ansehen, auch einfach ausdrücken. Beispielsweise ist mit obiger Setzung für alle $x \in \mathbb{N}$ die Aussage

  $$x > 3 \Rightarrow x > 1$$

  immer wahr.

Für ein besseres Verständnis ziehen wir den “modus ponens“ vor, den wir in einem späteren Kapitel beweisen.

§02.15 **Satz** *(modus ponens)*. *Für alle Aussagen $A, B$ gilt:*

$$(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$$

*Interpretation: Wenn $A$ gilt und $B$ aus $A$ folgt, dann gilt auch $B$.*

Zwei beliebte falsche Schlüsse der Struktur $A \Rightarrow B$ sind:

- Aus der Gültigkeit der Folgerung $B$ wird geschlossen, dass die Voraussetzungen $A$ erfüllt sein müssen.
  Bsp.: $-2 = 2 \overset{()^2}{\Rightarrow} 4 = 4$
  Hierbei würde gefolgert, dass $-2 = 2$ gelten sollte, da ja $4 = 4$ wahr ist. Das ist aber falsch und entspräche der Aussage $(B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow A$, von der man (bspw. als Übung) beweisen kann, dass diese falsch ist.

- Daraus, dass $A$ nicht gilt, wird gefolgert, dass die Folgerung $B$ auch nicht wahr ist. Auch hier sehen wir am obigen Beispiel, dass die Voraussetzung $-2 = 2$ falsch ist, aber dennoch die Folgerung $4 = 4$ wahr ist. Formal entspräche dieser Irrglaube $(\neg A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow (\neg B)$, von dem man auch beweisen kann, dass dieser falsch ist.

§02.16 **Definition** *(Operator: Äquivalenz)*. Für zwei Aussagen $A, B$ definieren wir die **Äquivalenz** $\Leftrightarrow (A, B) = A \Leftrightarrow B$ durch:

| A | B | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | f | f |
| f | w | f |
| f | f | w |

Interpretation: $A \Leftrightarrow B$ ist wahr, wenn $A$ und $B$ die gleichen Wahrheitswerte haben. □

§02.17 **Beispiel**. $C \Leftrightarrow A$: “Elefanten können genau dann hüpfen, wenn der Döner in Deutschland erfunden wurde.“
Nicht sinnvoll ist: $E \Leftrightarrow G$: “Ich gewinne genau dann hoffentlich im Lotto, wenn Cauchy der beste Mathematiker ist.“

Im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass das Äquivalenzzeichen insbesondere beim Vereinfachen oder Vergleichen von Aussagen eine wesentliche Rolle spielt.

## §03 Sätze und Beweise

§03.01 **Definition** *(Satz/Beweis)*. Ein *Satz* ist eine Aussage, die überprüfbar immer wahr ist. Ein *Beweis* eines Satzes ist eine logische Herleitung dieser Wahrheits-Aussage aus Axiomen und Sätzen. □

Andere Bezeichnungen für einen Satz sind auch (je nach Kontext): Lemma, Korollar, Proposition, etc.
Anstatt “Die Aussage ist immer wahr“ verwenden wir auch “Die Aussage gilt.“ Als Beispiel wollen wir nun den “Satz vom Widerspruch“ beweisen. Dies machen wir mit Hilfe von Wahrheitstafeln, d.h. wir gehen alle logischen Möglichkeiten durch und zeigen in jedem Fall, dass die Aussage des Satzes wahr ist.

§03.02 **Satz** *(Satz vom Widerspruch)*. *Für eine beliebige Aussage $A$ gilt:*

$$\Leftrightarrow (\wedge(A, \neg(A)), f) = (A \wedge \neg A) \Leftrightarrow f$$

*Alternative Formulierung: Es gilt* $\neg(A \wedge \neg A)$.

§03.03 **Beweis**. Wir leiten spaltenweise die Wahrheitswerte der in der Kopfzeile der Tafel stehenden Aussagen her:

| $A$ | $\neg A$ | $A \wedge \neg A$ | $(A \wedge \neg A) \Leftrightarrow f$ |
|---|---|---|---|
| w | f | f | w |
| f | w | f | w |

□ □

Aussgen mit Äquivalenzzeichen (“$\Leftrightarrow$“), die immer wahr sind, können dazu genutzt werden, andere Aussagen umzuformen, was einer vereinfachten Kommunikation dient. Kommt beispielsweise in einer anderen Aussage $A \wedge \neg A$ vor, so können wir stattdessen einfach $f$ schreiben.
Zum Beispiel gilt für Aussagen $A, B$:

$$B \vee (A \wedge \neg A) \Leftrightarrow B \vee f$$

Nun können wir auch den “modus ponens“ beweisen:

§03.04 **Beweis** zu “modus ponens“.

| A | B | $A \Rightarrow B$ | $A \wedge (A \Rightarrow B)$ | $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w |
| w | f | f | f | w |
| f | w | w | f | w |
| f | f | w | f | w |

□ □

Auf ähnliche Weise kann der "Satz vom ausgeschlossenen Dritten" bewiesen werden, dies bleibt den Studierenden allerdings als Übungsaufgabe überlassen.

§03.05 **Satz** *(Satz vom ausgeschlossenen Dritten). Für eine beliebige Aussage $A$ gilt:*

$$A \vee \neg A$$

*Alternative Formulierung: Es gilt $(A \vee \neg A) \Leftrightarrow w$.*

## §04 Prädikatenlogik erster Stufe

### 1. Quantoren

Im Gegensatz zur Aussagenlogik, welche die Zerlegung von Aussagen in nicht weiter teilbare Aussagen (sog. Elementaraussagen) untersucht, beschäftigt sich die Prädikatenlogik mit der Struktur dieser Elementaraussagen.
Das Problem in der oben formulierten Aussagenlogik liegt darin, dass wir nur Sätze über Aussagen formulieren können, die uns vollständig bekannt sind.

§04.01 **Beispiel**. Wir betrachten die Aussagen $A$ = "Steffen darf Alkohol kaufen" und $B$ = "Steffen ist älter als 10 Jahre".

Nehmen wir an, dass wir zeigen konnten, dass wenn $A$ wahr ist, auch $B$ wahr ist. Dann haben wir aber nur eine Aussage über die spezifische Person Steffen. Vielleicht können wir zeigen, dass die Implikation für die Person Claudia auch gilt. Aber das müssten wir dann für jede einzelne Person erneut überprüfen. Unser Ziel ist also, diese Implikation möglichst abstrakt zu formulieren. Vielleicht könnten wir die Implikation für alle Personen in Deutschland zeigen und sie auf diese Menschenmenge verallgemeinern. Also stellt sich die Frage, was die größte Menge an Menschen ist, auf die sich diese Aussage erweitern ließe. Wir wollen so etwas beweisen können wie

Alle Leute, die Alkohol kaufen dürfen, sind älter als 10 Jahre.

Die Situation von Beispiel 3.1 tritt auch direkt in der Mathematik auf: Oft kommt es vor, dass mathematische Sätze mit Unbekannten formuliert werden, deren Wert erst später (zum Beispiel bei Anwendung des Satzes) bekannt ist. Wir werden nun Aussagen einführen, die auch Variablen erlauben, so genannte Prädikate.

§04.02 **Definition** *(Prädikat)*. Ein *Prädikat* $A(X_1, ..., X_n)$ ist ein sprachliches Gebilde mit Variablen $X_1, ..., X_n$, das zu einer Aussage wird, wenn für jede Variable $X_1, ..., X_n$ ein konkreter Wert eingesetzt wird. □

§04.03 **Bemerkung**. Auf Prädikaten können dieselben Operatoren angewandt werden wie auf Aussagen. Beachte aber, dass das Ergebnis dann immernoch ein Prädikat ist und keine Aussage!

§04.04 **Beispiel**. Definiere

$$A(X) := \text{"}X\text{ darf Alkohol kaufen"},$$

und

$$B(X) := \text{“}X \text{ ist älter als 10 Jahre“}.$$

Die Interpretation des Prädikats $A(\text{Steffen}) \Rightarrow B(\text{Steffen})$ lautet: “Wenn Steffen Alkohol kaufen darf, dann ist Steffen älter als 10 Jahre.“

§04.05 **Definition** *(Prädikat Elementrelation)*. Für $X$ ein Objekt und $M$ eine beliebige Menge können wir das Prädikat

$$E(X, M) := X \in M$$

definieren.
Interpretation: “$X$ ist Element von $M$“. □

§04.06 **Beispiel**. Die Aussage $E(2, \{1, 2, 3\})$ =“2 ist Element von {1,2,3}“ ist wahr. Also gilt $2 \in \{1, 2, 3\}$ (Infix-Notation).
Die Aussage $E(4, \{1, 2, 3\})$ ist falsch, also gilt $\neg(4 \in \{1, 2, 3\})$.

Wie können wir aus Prädikaten wieder Aussagen gewinnen? Eine Möglichkeit ist, konkrete Werte für die Variablen einzusetzen. Die resultierenden Aussagen für sich genommen sind aber sehr schwach, damit erreichen wir keine Aussage wie in Bsp.3.1. In der Prädikatenlogik wurden daher “Quantoren“ eingeführt. Diese geben formal richtig an, für wie viele Objekte $C$ ein bestimmtes Prädikat gilt und erleichtern somit auch die Formalisierung von Gedanken.

§04.07 **Definition** *(Quantoren: All-Quantor und Existenz-Quantor)*. Die Aussage

$$\forall X : A(X)$$

ist wahr, wenn für alle Objekte $X$ die Aussage $A(X)$ wahr ist. $\forall$ heißt *All-Quantor*.
Die Aussage

$$\exists X : A(X)$$

ist wahr, wenn es (mindestens) ein Objekt $X$ gibt, sodass die Aussage $A(X)$ wahr ist. $\exists$ heißt *Existenz-Quantor*. □

Zum Erreichen einer Aussage wie in Bsp.1.3 können wir also auch Quantoren als Werkzeug verwenden.
Die Quantoren alleine reden von allen möglichen Objekten/Variablen $X$, d.h. mit $X$ können alle möglichen Zahlen, Mengen, etc. gemeint sein. Wollen wir unsere Aussagen auf bestimmte Teilmengen einschränken, brauchen wir dazu zusätzliche Prädikate.

§04.08 **Beispiel**. Für zwei Prädikate $A(X), B(X)$ ist

$$\forall X : (A(X) \Rightarrow B(X))$$

eine Aussage.
Interpretation: “Für alle $X$ gilt: Wenn $A(X)$ wahr ist, dann ist auch $B(X)$ wahr“.
Für eine feste Menge $M$ und ein Prädikat $A(X)$ sind

$$\forall X : (E(X, M) \Rightarrow A(X)) \tag{04.1}$$
$$\exists X : (E(X, M) \wedge A(X)) \tag{04.2}$$

Aussagen.
Interpretation: (1): “Für alle $X$ aus der Menge $M$ ist $A(X)$ wahr“, bzw. (2): “Es gibt ein $X$ aus der Menge $M$, für welches $A(X)$ wahr ist“.
Für Aussagen der Form (1) und (2) können wir auch die Infix-Notation als Abkürzungen, bzw. einfachere und übersichtlichere Schreibweise, verwenden, die in der Mathematik allgemein gebräuchlich ist:

$$\forall X \in M : A(X)$$
$$\exists X \in M : A(X)$$

## 2. Negation von Quantoren

§04.09 **Bemerkung** *(Negation von Quantoren)*. Für ein Prädikat $A(X)$ gilt:

$$\neg(\exists X : A(X)) \Leftrightarrow \forall X : \neg A(X),$$

die Negation von “Es existiert ein $X$, sodass $A(X)$ wahr“ ist also “Für alle $X$, ist $A(X)$ falsch“. Es gilt weiter:

$$\neg(\forall X : A(X)) \Leftrightarrow \exists X : \neg A(X),$$

die Negation von “Für alle $X$ ist $A(X)$ wahr“ ist also “Es existiert ein $X$, für das $A(X)$ falsch ist“.

(Achtung: Die Negation der Aussage $(\forall X : A(X))$ lautet also nicht etwa “Für alle $X$ ist $A(X)$ falsch“! Denn offensichtlich würde dann die Aussage und ihre Negation nicht alle Möglichkeiten abdecken: Der Fall, dass $A(X)$ für genau zwei $X$ falsch ist, wäre weder in der Aussage noch ihrer Negation enthalten.)

§04.10 **Lemma**. *Für zwei Aussagen $A, B$ gilt:*

$$\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

§04.11 **Beweis**.

| A | B | $A \Rightarrow B$ | $\neg(A \Rightarrow B)$ | $\neg B$ | $(A \wedge \neg B$ | $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \wedge \neg B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | f | f | f | w |
| w | f | f | w | w | w | w |
| f | w | w | f | f | f | w |
| f | f | w | f | w | f | w |

□ □

§04.12 **Korollar**. *Für eine Menge $M$ und ein Prädikat $A(X)$ gilt:*

$$\neg(\forall X \in M : A(X)) \Leftrightarrow \exists X \in M : \neg A(X)$$
$$\neg(\exists X \in M : A(X)) \Leftrightarrow \forall X \in M : \neg A(X)$$

§04.13 **Beweis**. Es gilt

$$\begin{aligned}\neg(\forall X \in M : A(X)) &\Leftrightarrow \neg(\forall X : (E(X, M) \Rightarrow A(X))) \\ &\Leftrightarrow \exists X : \neg(E(X, M) \Rightarrow A(X)) \\ &\overset{3.10}{\Leftrightarrow} \exists X : E(X, M) \wedge \neg A(X) \\ &\Leftrightarrow \exists X \in M : \neg A(X)\end{aligned}$$

Der zweite Teil kann mit einer ähnlichen Rechnung bewiesen werden. □ □

## §05 Rückblick

Mit den Kenntnissen dieses Vortrags haben wir das nötige Grundwerkzeug, um Mathematik zu betreiben. Wir wissen nun, was Aussagen sind und wie wir diese “weiterverarbeiten“ können. Außerdem haben wir die wichtigsten Operatoren kennengelernt, mit denen wir einen Großteil der mathematischen Sätze strukturell nachvollziehen können. Wir haben das Prinzip kennengelernt, einen Satz zu formulieren, diesen zu beweisen und aus alten Sätzen neue zu gewinnen. Beweise können wir schon mittels Wahrheitstafel führen. Andere Beweismethoden werden im folgenden Vortrag vorgestellt. Zusätzlich können wir nun Aussagen für eine bestimmte Menge von Objekten spezifizieren und somit versuchen, sie so allgemein wie möglich zu fassen. Dafür haben wir die zwei wichtigsten Quantoren kennengelernt.

Also können wir die Struktur mathematischer Literatur nachvollziehen und unsere mathematischen Gedanken formal korrekt verfassen. Nun fehlen uns nur noch mathematische Inhalte und auch dazu werden wir Grundlagen in den folgenden Vorlesungen kennenlernen.

## §06 Übungsaufgaben

### 1. Aufgabe

Seine A,B,C Aussagen. Beweise mittels Wahrheitstafeln und bekannter Sätze:

1. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
2. $(A \wedge w) \Leftrightarrow A$, $(A \wedge f) \Leftrightarrow f$
3. $(A \vee w) \Leftrightarrow w$, $(A \vee f) \Leftrightarrow A$
4. Kommutativität: $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ (analog $\vee$)
5. Assoziativität: $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ (analog $\vee$)

### 2. Aufgabe

Seine A,B,C Aussagen. Beweise mittels Wahrheitstafeln und bekannter Sätze:

1. DeMorgan’sche Regeln:
   a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
   b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
2. Distributivgesetze:
   a) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

### 3. Aufgabe

1. Formalisiere die folgende Aussage: (In einzelne Aussagen unterteilen und daraus ein Aussagengebilde mit Operatoren erstellen)
   "Wenn ein hartgekochtes Ei nicht mit kaltem Wasser abgeschreckt wird, dann klebt die Schale am Eiweiß und das Ei lasst sich nicht gut schälen."

2. Andreas, Benedikt, Carolin und Dora sind auf eine Party eingeladen. Folgendes ist bekannt:
   a) Wenn Andreas geht, dann geht auch Benedikt
   b) Carolin und Dora gehen nicht beide
   c) Von Andreas und Dora geht mindestens einer
   d) Wenn Benedikt oder Dora geht, dann geht auch Carolin

   Wer geht auf die Party?

### 4. Aufgabe

1. Negiere die folgenden Aussagen A:
   a) A = $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : \ x < y^2$
   b) A = $\forall x, y \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : (|x - y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon)$
   c) Es gibt eine Universität, an der es keinen Studenten gibt, der Spaß am Negieren von Aussagen hat.
2. Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind oder ob weitere Informationen benötigt werden:
   a) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x < y$
   b) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x < y$
   c) $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 - x = 0 \Rightarrow (x = 1 \vee x = 0))$
   d) $\exists x \in \mathbb{N} : (x \neq 0 \wedge (\forall y \in \mathbb{N} : (x \cdot y < x + y)))$

## §07 Lösungen

### 1. Aufgabe

1.

| A | ¬(¬ A) | ¬(¬ A) ⇔ A |
|---|---|---|
| w | w | w |
| f | f | w |

2.

| A | A∧ w | (A∧w)⇔ A | A∧f | (A∧ f) ⇔ f |
|---|---|---|---|---|
| w | w | w | f | w |
| f | f | w | w | w |

3.

| A | A∨ w | (A∨w)⇔ w | A∨f | (A∨ f) ⇔ A |
|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w |
| f | w | w | f | w |

4.

| A | B | A∧B | B∧A | (A∧B)⇔(B∧A) |
|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w |
| w | f | f | f | w |
| f | w | f | f | w |
| f | f | f | f | w |

5.

| A | B | C | B∧C | A∧(B∧C) | A∧B | (A∧B)∧C | A∧(B∧C) ⇔ (A∧B)∧C |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w | w | w | w |
| w | w | f | f | f | w | f | w |
| w | f | w | f | f | f | f | w |
| w | f | f | f | f | f | f | w |
| f | w | w | w | f | f | f | w |
| f | w | f | f | f | f | f | w |
| f | f | w | f | f | f | f | w |
| f | f | f | f | f | f | f | w |

## 2. Aufgabe

1. a)

| A | B | A∧B | ¬A∨¬B | ¬(A∧B) ⇔ (¬A∨¬B) |
|---|---|---|---|---|
| w | w | w | f | w |
| w | f | f | w | w |
| f | w | f | w | w |
| f | f | f | w | w |

b)

| A | B | A∨B | ¬A∧¬B | ¬(A∨B) ⇔ (¬A∧¬B) |
|---|---|---|---|---|
| w | w | w | f | w |
| w | f | w | f | w |
| f | w | w | f | w |
| f | f | f | w | w |

2.

| A | B | C | B∨C | A∧(B∨C) | A∧B | A∧C | (A∧B)∨(A∧C) | (A∧(B∨C))⇔((A∧B)∨(A∧C)) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w | w | w | w | w |
| w | w | f | w | w | w | f | w | w |
| w | f | w | w | w | f | w | w | w |
| w | f | f | f | f | f | f | f | w |
| f | w | w | w | f | f | f | f | w |
| f | w | f | w | f | f | f | f | w |
| f | f | w | w | f | f | f | f | w |
| f | f | f | f | f | f | f | f | w |

## 3. Aufgabe

1. Definiere die Aussagen:
   - A = “Ein hartgekochtes Ei wird mit kaltem Wasser abgeschreckt.”,
   - B = “Die Schale klebt am Eiweiß.”,
   - C = “Das Ei laßt sich gut schälen.”

   Erhalte die Formalisierung: $(\neg A) \Rightarrow (B \wedge (\neg C))$

2. In Grundaussagen einteilen: A: Andreas geht; B: Benedikt geht; C: Carolin geht; D: Dora geht.
   Laut Aufgabe muss gelten:
   a) $A \Rightarrow B$ muss wahr sein.

b) $C \wedge D$ muss falsch sein.

c) $A \vee D$ muss wahr sein.

d) $B \vee D \Rightarrow C$ muss wahr sein.

**Fall 1:** Andreas geht, d.h. A wahr $\overset{a)}{\Rightarrow}$ B wahr $\overset{d)}{\Rightarrow}$ C wahr $\overset{b)}{\Rightarrow}$ D falsch
D.h. wenn Andreas geht, gehen insgesamt Andreas, Benedikt und Carolin, nur Dora geht dann nicht.
**Fall 2:** Andreas geht nicht, führt zu Widerspruch: A falsch $\overset{c)}{\Rightarrow}$ D wahr $\overset{b)}{\Rightarrow}$ C falsch, aus D wahr ergibt sich aber mit (d) auch C wahr, d.h. Widerspruch, d.h. erste Annahme ergibt einzige Lösung.
Insgesamt also: Andreas, Benedikt und Carolin gehen zur Party. Dora geht nicht.

## 4. Aufgabe

1. a) ¬A = $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x \geqslant y^2$

   b) Sei B(x,y) = $|x - y| < \delta$, C(x,y) = $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Verneine nun Schritt für Schritt:

$$\begin{aligned} &\neg(\forall x, y \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : (A(x,y) \Rightarrow B(x,y)) \\ \Leftrightarrow\ &\exists x, y \in \mathbb{R} : \neg(\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : (A(x,y) \Rightarrow B(x,y)) \\ \Leftrightarrow\ &\exists x, y \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0 : \neg(\exists \delta > 0 : (A(x,y) \Rightarrow B(x,y)) \\ \Leftrightarrow\ &\exists x, y \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \neg((A(x,y) \Rightarrow B(x,y)) \end{aligned}$$

   Nun müssen wir noch $\neg(A(x,y) \Rightarrow B(x,y))$ umformulieren:
   $\neg(A(x,y) \Rightarrow B(x,y) \Leftrightarrow A(x,y) \wedge \neg B(x,y)$ (Mit Wahrheitstafel beweisen).
   $\neg B(x,y) \Leftrightarrow |g(x) - g(y)| \geqslant \varepsilon$
   Also:

$$\neg A = \exists x, y \in \mathbb{R} : \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : (|x - y| < \delta \wedge |g(x) - g(y)| \geqslant \varepsilon$$

   c) An allen Universitäten gibt es einen Studenten, der keinen Spaß am Negieren von Aussagen hat.

2. a) wahr.

   b) falsch, denn a) gilt.

   c) wahr, denn: $x^2 - x = x \cdot (x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$

   d) wahr, $x = 1$ erfüllt die Aussage.

# Kapitel 2

# Beweismethoden

## §01 Sätze und Beweise

Zur Wiederholung machen wir uns noch einmal klar, wie die allgemeine Struktur eines Satzes aussieht:

Für gewöhnlich hat ein mathematischer Satz die grobe Struktur

$$P \to K$$

Es soll also gelten, dass aus einer (meistens zusammengesetzten) Aussage $P$ (die „Prämisse“, oder „Voraussetzung“) eine andere (manchmal zusammengesetzte) Aussage $K$ (die „Konklusion“, oder „Folgerung“) folgt, dass also wenn $P$ wahr ist, auch $K$ wahr sein muss.

Ein Beweis ist ein Gedankengang, der uns klarmacht, wieso ein Satz richtig sein muss. Um seine Gedanken zu ordnen bzw. beim Aufschreiben des Beweises nicht den ganzen Regenwald zu verschleißen, bietet es sich an, Abkürzungen zu verwenden. Eine solche Abkürzung nennt man Definition, wie zum Beispiel:

§01.01 **Definition.** Wir nennen eine ganze Zahl $n$ *gerade*, wenn es eine ganze Zahl $m$ gibt, sodass $n = 2m$. □

Ein weiteres Hilfsmittel, um einen Beweis übersichtlicher zu machen, ist das sogenannte Lemma. Ein Lemma ist ein Hilfssatz, den man im Zuge eines Beweises braucht und den man separat beweist. Ein Beispiel gibt es später.

Die Voraussetzungen und Folgerungen eines Satzes zu identifizieren ist ein wichtiger Schritt zu einem sauberen Beweis. Gerade in den ersten Semestern führt ein genaues Aufführen der Vorraussetzungen eines Satzes, gemeinsam mit ein paar einfachen Definitionen und alten Sätzen ziemlich direkt zur Folgerung. Deswegen ist es zu Beginn des Studiums noch empfehlenswert, die Voraussetzungen getrennt aufzuführen.

## §02 Beweistechniken

Es gibt drei grundlegende Beweistechniken, die sich darin unterscheiden, ob und welche besondere Schlussfigur verwendet wird, um den Beweis zu vollziehen:

- Direkter Beweis ohne besondere Schlussfigur.
- Indirekter Beweis mit $(A \to B) \Leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$
- Widerspruchsbeweis mit $(\neg A \to f) \to A$

Da wir wissen, dass $f \Leftrightarrow (B \wedge \neg B)$ für eine beliebige Ausage $B$ gilt, können wir die letzte Schlussfigur auch durch $(\neg A \to (B \wedge \neg B)) \to A$ ersetzen.

## §03 Der direkte Beweis

Die erste Beweistechnik haben wir bereits erschlossen: Der direkte Beweis. Beim direkten Beweis wird direkt (oder über wenige Umwege) von der Prämisse auf die Konklusion geschlossen, wir zeigen also *direkt*, dass $P \to K$ wahr ist.

Für ein Beispiel eines direkten Beweises nehmen wir an, dass einige grundsätzliche Tatsachen über das Rechnen mit ganzen Zahlen bekannt sind, unter anderem verwenden wir unsere Definition **??** über gerade Zahlen und wollen damit folgenden Satz direkt beweisen:

§03.01 **Satz.** *Ist $n$ eine gerade Zahl, so ist auch $n^2$ gerade.*

oder auch (kompakter):

$$\forall n \in \mathbb{Z} : n \text{ gerade } \to n^2 \text{ gerade}$$

Wir wollen nun die Voraussetzungen und die Folgerungen identifizieren:
**Voraussetzung:** $n \in \mathbb{Z}, n$ gerade, also gibt es ein $m$, sodass $n = 2m$.
**Zu zeigen:** $n^2$ gerade, gesucht ist also eine ganze Zahl $k$, sodass $n^2 = 2k$.

§03.02 **Beweis.** Aus der Voraussetzung wissen wir, dass $n = 2m$, also können wir umformen:

$$\begin{aligned} n^2 &= (2m)^2 \\ &= 4m^2 \\ &= 2\underbrace{(2m^2)}_{=:k} \\ &= 2k \end{aligned}$$

Wir sehen hier, dass wir nicht viel machen mussten; wir haben im Wesentlichen die Voraussetzung in den untersuchten Term eingesetzt und damit den Satz direkt bewiesen. □

Es ist noch etwas anzumerken: Wir sollten eine Existenzaussage („Es existiert ein $k$, sodass…) beweisen und haben dies getan, indem wir eine Zahl mit den geforderten Eigenschaften angegeben oder *konstruiert* haben. Solche Beweise nennt man aus naheliegenden Gründen „konstruktive Beweise“ und sie sind die einfachere (aber nicht immer mögliche) Form, Existenzaussagen zu beweisen.

## §04 Indirekter Beweis

Wir betrachten folgende Wahrheitstafel:

| $A$ | $B$ | $A \to B$ | $\neg B \to \neg A$ |
|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $w$ | $w$ |
| $w$ | $f$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $w$ | $w$ | $w$ |
| $f$ | $f$ | $w$ | $w$ |

Diese Schlussfigur

$$(A \to B) \Leftrightarrow (\neg B \to \neg A)$$

heißt *Kontraposition* und ist die Grundlage für den so genannten *Indirekten Beweis*.

Wir sehen also, dass wir statt $P \to K$ auch $\neg K \to \neg P$ zeigen können. Intuitiv ist das klar: Wenn ich weiß, dass die Straße nass ist, wenn es regnet, dann kann ich aus der Tatsache, dass die Straße trocken ist, schließen, dass es wohl nicht regnet. Wir betrachten ein Beispiel für einen indirekten Beweis und machen mit einigen Definitionen klar, worüber wir reden möchten:

§04.01 **Definition** *(Echter Teiler)*. Seien $n$ und $k$ natürliche Zahlen. $k$ heißt *echter Teiler* von $n$, falls $k$ ein Teiler von $n$ ist und $n \neq k$ gilt.

§04.02 **Definition** *(Primzahl)*. Eine natürliche Zahl $n \neq 1$ heißt *Primzahl*, wenn ihr einziger echter Teiler 1 ist.

§04.03 **Definition** *(Perfekte Zahl)*. Eine natürliche Zahl $n$ heißt *vollkommen*, oder *perfekt*, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist.

§04.04 **Beispiel**. Beispiele für perfekte Zahlen sind 6 und 28.

§04.05 **Satz**. *Sei $n \in \mathbb{N}$ eine vollkommene Zahl. Dann ist $n$ keine Primzahl.*

§04.06 **Beweis**. Wir zeigen stattdessen die indirekte Aussage:

$$n \text{ Primzahl } \to n \text{ nicht perfekt}$$

Sei $n$ also eine Primzahl. Dann ist ihr einziger echter Teiler 1. Damit ist auch die Summe ihrer echten Teiler 1. Da $n \neq 1$ ist, ist sie nicht vollkommen.

## §05 Widerspruchsbeweis

Widerspruchsbeweise sind ein mächtiges Werkzeug für eine_n Mathematiker_in. Sie beruhen auf der logischen Schlussfigur:

| $A$ | $\neg A$ | $B \wedge \neg B$ | $\neg A \to (B \wedge \neg B)$ |
|---|---|---|---|
| $w$ | $f$ | $f$ | $w$ |
| $f$ | $w$ | $f$ | $f$ |

Wir sehen, dass, wenn wir gezeigt haben, dass $\neg A \to (B \wedge \neg B)$ wahr ist, dass dann $\neg A$ falsch sein muss, also $A$ wahr.

Wir zeigen also $A$, indem wir das Gegenteil annehmen und zeigen, dass wir daraus einen Widerspruch beweisen können. Da wir wissen, dass Widersprüche nie wahr sind, muss unsere Annahme falsch sein.

Wir betrachten wieder ein Beispiel:

§05.01 **Definition**. Eine *rationale Zahl* ist eine Zahl, die sich als $\frac{p}{q}$ darstellen lässt, wobei $p$ eine ganze Zahl und $q$ eine ganze Zahl ungleich 0 ist. □

§05.02 **Satz**. *Es existiert keine rationale Zahl $x$ mit $x^2 = 2$.*

Der Beweis dieses Satzes ist vergleichsweise lang. Daher werden wir ein Lemma, also einen Hilfssatz verwenden. Dafür brauchen wir wieder eine Definition.

§05.03 **Definition**. Eine ganze Zahl $n$ heißt *ungerade*, wenn eine ganze Zahl $m$ existiert, sodass $n = 2m + 1$. □

Außerdem müssen wir ohne Beweis glauben (Ein Beweis bräuchte eine genaue Definition der ganzen Zahlen):

§05.04 **Satz**. *Eine ganze Zahl ist entweder gerade, oder ungerade.*

Damit können wir nun unser Lemma formulieren, dass uns helfen soll, Satz **??** zu beweisen.

§05.05 **Lemma**. *Ist das Quadrat einer ganzen Zahl gerade, dann auch die Zahl selbst. Oder kürzer:* $\forall n \in \mathbb{Z}$:$n^2$ *gerade* $\rightarrow n$ *gerade.*

§05.06 **Beweis**. Das zeigen wir indirekt. Wir zeigen also: $n$ ungerade $\rightarrow n^2$ ungerade. Sei $n$ ungerade und $m \in \mathbb{Z}$, sodass $n = 2m + 1$. Dann ist

$$n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$$

Dies ist eine ungerade Zahl. □

Jetzt kommen wir zum Beweis von Satz 5.2:

§05.07 **Beweis** Satz 5.2. Angenommen, es existiert eine solche rationale Zahl. Dann existieren $m, n \in \mathbb{Z}$ mit

$$x = \frac{m}{n}$$

Wir können, indem wir kürzen, annehmen, dass $m$ und $n$ teilerfremd sind.

$$\rightarrow 2 = x^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\rightarrow 2n^2 = m^2$$

D.h. $m^2$ ist eine gerade Zahl. Wegen Lemma **??** ist dann aber auch $m$ gerade und es existiert ein $k$, sodass

$$m = 2k$$

$$\rightarrow 2n^2 = m^2 = 4k^2$$

$$\rightarrow n^2 = 2k^2$$

Damit ist nun auch $n^2$ gerade und damit $n$. Dass aber $m$ und $n$ beide gerade sind, widerspricht der Annahme der Teilerfremdheit.

Damit haben wir für die drei großen Beweismethoden jeweils ein Beispiel gesehen. Nun gehen wir noch auf Spielarten von Beweisen ein, die an sich nichts Neues bringen, die aber selbst so häufig vorkommen, dass sie besondere Aufmerksamkeit verdienen.

## §06 Eindeutigkeitsbeweis

Häufig kommt es vor, dass man zeigen will, dass es nur ein einziges Objekt gibt, welches bestimmte Eigenschaften aufweist, dass also dieses Objekt *eindeutig* durch diese Eigenschaften identifiziert wird. Die Aussage spaltet sich in zwei Teile: Einerseits soll es überhaupt ein Objekt geben (Existenz), andererseits auch höchstens eins (Eindeutigkeit). Die Existenz zeigt man von Fall zu Fall verschieden. Die Eindeutigkeit kann man aber häufig zeigen, indem man annimmt, man hätte ein zweites Objekt mit den gleichen Eigenschaften, von welchem man dann zeigt, dass es mit dem bereits vorhandenen übereinstimmt.

§06.01 **Definition.** Eine ganze Zahl $e$ heißt *neutrales Element der Addition*, wenn für alle ganzen Zahlen $x$ gilt:

$$x + e = x$$

□

Wir wollen nun zeigen, dass es genau ein solches neutrales Element gibt.

§06.02 **Beweis.** Zunächst einmal hat die Zahl 0 die geforderte Eigenschaft, also ist die Existenz gegeben. Angenommen also, wir haben zwei neutrale Elemente, die wir $e$ und $e'$ nennen. Dann gilt per Definition:

$$e + e' = e \wedge e' + e = e'$$

Wegen der Kommutativität der Addition gilt:

$$e + e' = e' + e$$

$$\rightarrow e' = e$$

□

## §07 Äquivalenzbeweis

In einem Äquivalenzbeweis möchte man zeigen, dass eine Aussage A genau dann wahr ist, wenn B wahr ist, also $A \Leftrightarrow B$. Dabei hilft uns die folgende Schlussfigur:

| $A$ | $B$ | $A \rightarrow B$ | $B \rightarrow A$ | $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $w$ | $w$ | $w$ | $w$ |
| $w$ | $f$ | $f$ | $w$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $w$ | $w$ | $f$ | $f$ | $f$ |
| $f$ | $f$ | $w$ | $w$ | $w$ | $w$ |

D.h. um $A \Leftrightarrow B$ zu zeigen, zeigen wir $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$. Tatsächlich haben wir sowas bereits getan. Nehmen wir nämlich den Satz:

§07.01 **Satz.** *Eine ganze Zahl $n$ ist genau dann gerade, wenn $n^2$ gerade ist*

so ist der Beweis für uns schnell gemacht:

§07.02 **Beweis.** $\rightarrow$ Ist bereits in Satz **??** gezeigt.

$\leftarrow$ Ist bereits in Lemma **??** gezeigt.

## §08 Ringschluss

Man kann das Prinzip des Äquivalenzbeweises ausweiten auf beliebig (aber endlich) viele weitere Aussagen durch den Schluss:

$$A_1 \to A_2 \to ... \to A_n \to A_1$$

Durch den Schluss $A_n \to A_1$ schließt man einen „Ring“ von Aussagen. Man kommt nun von jeder Aussage zu jeder anderen, indem man den Implikationspfeilen folgt, d.h. alle Aussagen sind äquivalent. Dies ist häufig (Achtung! Nicht immer!) ein eleganter Weg, eine Mehrfachäquivalenz zu zeigen.

---

Bis hierhin zu kommen, wäre das Ziel des Vortrages.

## §09 Fallunterscheidungen

Eine besondere Beweisform ist der Beweis per Fallunterscheidung. Sie kann dann verwendet werden, wenn die Prämisse in die Form einer Disjunktion gebracht werden kann, also $P \Leftrightarrow P_1 \vee P_2 \vee ... \vee P_n$. In diesem Fall kann man sich die Aussagen $P_1$ bis $P_n$ der Reihe nach als Prämissen nehmen und jeweils die Folgerung zeigen. Insgesamt ergibt sich dann $P \to K$ (Das liegt daran, dass $([(A_1 \vee A_2) \to B)] \Leftrightarrow [(A_1 \to B) \wedge (A_2 \to B)]$, wie man per Wahrheitstafel beweisen kann).

Ein Beispiel ist die Voraussetzung “Sei $n$ eine ganze Zahl”. Sie kann umgeschrieben werden in “Sei $n$ eine gerade ganze Zahl oder eine ungerade ganze Zahl”. Dann kann man im Beweis die Fälle $n$ gerade und $n$ ungerade gesondert betrachten. So auch in folgendem Satz:

§09.01 **Satz.** *Sei $n$ eine ganze Zahl. Dann ist* $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

§09.02 **Beweis.**

1. $n$ gerade. Dann ist

$$\begin{aligned} 1 + 2 + ... + n &= \underbrace{[1 + n] + [2 + (n-1)] + ... + \left[\frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} + 1\right)\right]}_{\frac{n}{2}\text{ Summanden}} \\ &= (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) \\ &= (n+1)\frac{n}{2} \end{aligned}$$

Dies ging nur, da $\frac{n}{2}$ eine ganze Zahl war. Kommen wir nun also zum zweiten Fall:

2. $n$ ungerade. Dann ist $n - 1$ gerade (Das müsst ihr in den Übungen beweisen). Also gilt wegen dem eben gezeigten: $1 + 2 + ... + n - 1 = \frac{(n-1)n}{2}$. Damit erhalten wir:

$$1 + 2 + ... + n = [1 + 2 + ... + (n-1)] + n \quad = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} \quad = \frac{n(n+1)}{2}$$

□

Es ist besonders wichtig (und nicht immer einfach), dass **alle** möglichen auftretenden Fälle betrachtet werden. Ein häufiger Anfängerfehler ist, eine Fallunterscheidung zu machen, und dann einzelne Fälle zu vergessen (zum Beispiel unterscheidet man $x > 0$ und $x < 0$ und vergisst $x = 0$).

# §10 Abschließende Bemerkungen

## 1. Stil

Manche_r Anfänger_in versuchen, seitenlange Rechnungen voller möglichst komplizierter Symbole als Beweise abzugeben. Das ist so falsch, wie es nur geht. Ein guter Beweis ist so kurz wie möglich, sauber und einfach zu lesen und verstehen. Es geht bei Beweisen darum, anderen (und sich selbst) das enthaltene Wissen klar zu machen, es ist also ein Akt der Kommunikation und dazu gehört eben auch, verstanden zu werden.

Dabei ist es wichtig, klare Bezeichnungen zu benutzen. Gängig sind zum Beispiel folgende Konventionen:

$m, n \in \mathbb{N}$

$i, j, k, l \in \mathbb{Z}$ (oder ebenfalls $\mathbb{N}$)

$p, q \in \mathbb{Q}$

$x, y, z \in \mathbb{R}$

## 2. Probleme des Widerspruchsbeweises

Der Widerspruchsbeweis ist tatsächlich nicht ganz so klar, wie hier dargestellt. Als Beispiel betrachten wir die Aussage, mit der ein Barbier seine Dienste bewirbt:

„Ich rasiere genau die, die sich nicht selbst rasieren“

Und fragen uns, wer ihn rasiert.

Nehmen wir an, dass er sich selbst rasiert. Da er Leute, die sich selbst rasieren nicht rasiert, rasiert er sich dann **nicht** selbst. Widerspruch.

Nehmen wir allerdings an, dass er sich nicht selbst rasiert. Nach eigener Aussage rasiert er aber ja jeden, der sich nicht selbst rasiert - also auch sich selbst. Ebenfalls ein Widerspruch.

Dies ist eine Variante der bekannten **Russelschen Antinomie**. Sie lässt sich auflösen, aber dazu muss man schon deutlich tiefer in die formale Logik und Mengentheorie einsteigen und die sogenannte naive Mengenlehre endgültig hinter sich lassen.

## 3. Folgerung aus Widerspruch

Hier soll noch ein Punkt genannt werden, der einen anfangs oft verwirrt - er wird häufig ausgedrückt als „Aus Widersprüchen lassen sich beliebige Aussagen folgern“. Der Grund dafür ist aus folgender Wahrheitstafel ersichtlich:

| $A$ | $B$ | $A \wedge \neg A$ | $(A \wedge \neg A) \to B$ |
|---|---|---|---|
| $w$ | $w$ | $f$ | $w$ |
| $w$ | $f$ | $f$ | $w$ |
| $f$ | $w$ | $f$ | $w$ |
| $f$ | $f$ | $f$ | $w$ |

Wir sehen hier, dass, obwohl $A \wedge \neg A$ immer falsch ist, dass die Implikation immer wahr ist. Daraus ist aber nicht zu folgern, dass $B$ wahr ist, im Gegenteil. Der Wahrheitsert von $B$ hat überhaupt keinen Einfluss auf die Wahrheitstafel, $B$ kann sowohl wahr als auch falsch sein. Was gemeint ist, wenn gesagt wird, aus Widersprüchen lassen sich beliebige Aussagen folgern, ist, dass die Folgerung korrekt ist, dass also die Implikation wahr ist.

### 4. Zirkelschluss

Häufig kommt es unbewusst vor, dass man, im Versuch, einen Satz zu zeigen, diesen bereits voraussetzt. Meistens ist ein solcher Zirkelschluss gut versteckt und nicht offensichtlich. Um Zirkelschlüsse zu vermeiden, hilft nur sauberes Vorgehen und leider vor allem Übung.

## §11 Übungsaufgaben

## §12 Lösungen zu den Übungsaufgaben

# Kapitel 3

# Mengen, natürliche Zahlen, Induktion

## §01 Motivation

Wir haben im Beweismethode-Vortrag die Struktur eines Satzes kennengelernt. Hier können wir aus einer Prämisse eine Konklusion folgern. Damit das sinnvoll gelingt, muss die Prämisse wahr sein. Weil wahre Aussagen nicht einfach vom Himmel fallen, müssen wir uns auf etwas einigen, was wir als wahr annehmen. Darauf basiert letztlich die gesamte Mathematik.
Diese als wahr angenommenen Aussagen nennen wir **Axiome**. Da wir heute in die Mathematik einsteigen wollen, beschäftigen wir uns mit eben diesen. Der Ansatz liegt in der Mengenlehre, da wir, wenn wir über Mathematik sprechen, intuitiv anfangen, über **Mengen** von Zahlen oder anderen Objekten zu sprechen (z.B. wenn wir lernen, mit den Grundrechenarten umzugehen). Es ist also sinnvoll, einen festen Mengenbegriff zu definieren.
Diese Definition fällt jedoch sehr kompliziert aus, wenn man alles formal korrekt machen möchte. Deswegen gibt es in der Mathematik dazu ein ganzes Teilgebiet, die **Mengenlehre**. Für unsere Zwecke reicht uns jedoch ein naiver Mengenbegriff, mit dem wir uns in diesem Vortrag auseinandersetzen werden.
Außerdem betrachten wir das konkrete Beispiel der Menge der **natürlichen Zahlen** und untersuchen die eine Besonderheit dieser Menge, die uns das Prinzip der **vollständigen Induktion** liefert.

## §02 Mengen

### 1. Definition eines Mengenbegriffes

§02.01 **Definition** *(nach Georg Cantor, 19. Jhd.).* Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Eine Menge ist nicht angeordnet. □

§02.02 **Notation.** Sei $M$ eine Menge. Wir haben folgende Möglichkeiten, $M$ zu notieren:

- Aufzaehlung von Elementen, z.B. $M = \{\text{Donuts}, \text{ Kuchen}, 5\}$ oder $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Definition ueber charakterisierende Eigenschaft: $M = \{x | x \text{ erfuellt Eigenschaft } E\}$

Ist $m$ ein Element von $M$, d.h. tritt $m$ in einer solchen Aufzaehlung auf oder erfuellt die charakterisierende Eigenschaft einer Menge, so schreiben wir:

$$m \in M.$$

Ist $m$ kein Element von $M$, so schreiben wir:

$$m \notin M$$

□

§02.03 **Beispiel**. $M = \{x \in \mathbb{N} | 3 < x < 7\} = \{4, 5, 6\}$
Ausserdem gilt $M = \{6, 5, 4, 4\}$ (das versteckt sich hinter den Begriffen "wohlunterschiedenünd nicht angeordnet".) □

§02.04 **Bemerkung**. Man kann einer Menge eine *Kardinalitaet* zuordnen. Formal definiert ist das etwas komplizierter, aber fuer die Zwecke reicht erstmal, sie als die Anzahl der Elemente einer Menge zu definieren. □

§02.05 **Notation**. $\#M$ oder $|M|$. □

§02.06 **Definition**. Es gibt genau eine Menge mit Kardinalitaet 0. Wir nennen sie die *leere Menge*. □

§02.07 **Notation**. $\emptyset$ □

§02.08 **Definition**.

(a) Seien $M$ und $N$ Menge. Es ist $N$ eine *Teilmenge* von $M$, falls gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \in M$$

§02.09 **Notation**. $N \subseteq M$ bzw. $M \subseteq N$) □

(b) Wir nennen $N$ eine *echte Teilmenge* von $M$, falls gilt:

$$N \subseteq M \wedge \exists m \in M : m \notin N$$

§02.10 **Notation**. $N \subsetneq M$ bzw. $N \subsetneqq M$ □

(c) $M$ und $N$ heissen *gleich*, falls gilt

$$M \subseteq N \wedge N \subseteq M$$

§02.11 **Notation**. $N = M$ □

□

§02.12 **Satz** *(Transitivitaet der Mengeninklusion)*. *Seien $L, N, M$ Mengen mit $L \subseteq N,\ N \subseteq M$. Dann gilt $L \subseteq M$* □

§02.13 **Beweis**. Sei $x \in L$ beliebig. Da $L \subseteq N$, gilt $x \in N$ und da $N \subseteq M$, gilt $x \in M$. □

## 2. Mengen-Bastelstunde

Wir beschaeftigen uns jetzt mit Operationen, die wir auf Mengen anwenden koennen, um aus mehreren Mengen neue Mengen zu generieren.

§02.14 **Definition**. Sei $M$ eine Menge mit $A, B \subseteq M$ Teilmengen von $M$. Wir definieren:

(a) den *Schnitt* von $A$ und $B$: $A \cap B := \{x \in M | x \in A \wedge x \in B\}$

(b) die *Vereinigung* von $A$ und $B$: $A \cup B := \{x \in M | x \in A \wedge x \in B\}$

(c) das *kartesische Produkt* von $A$ und $B$: $A \times B := \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$

(d) das *Komplement* von $A$ in $M$: $M \setminus A := \{x \in M | x \notin A\}$

□

§02.15 **Beispiel.** Sei $M = \{1, 2, \ldots, 10\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 4, 7\}$. Dann gilt:

(a) $A \cap B = \{1, 4\}$

(b) $A \cup B = \{1, 2, 4, 7\}$

(c) $A \times B = \{(1, 1), (1, 4), (1, 7), (2, 1), (2, 4), (2, 7), (4, 1), (4, 4), (4, 7)\}$

(d) $M \setminus A = \{5, 6, \ldots, 10\}$

□

§02.16 **Definition.** Die *Potenzmenge* einer Menge $M$ ist die Menge aller Teilmengen von $M$:

$$\mathcal{P}(M) := \{N | N \subseteq M\}$$

Es gilt stets $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$ und $M \in \mathcal{P}(M)$, da $\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$ immer wahr ist. □

§02.17 **Satz.** *Sei $M$ eine endliche Menge, d.h. $|M| = n < \infty$. Dann gilt:*

$$|\mathcal{P}(M)| > |M|$$

□

§02.18 **Beweis.** Schreibe $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dann gilt fuer alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ :

$$\{x_i\} \in \mathcal{P}(M)$$

Es gilt aber auch $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$, also:

$$|\mathcal{P}(M)| \geqslant n + 1 > n = |M|$$

□

## §03 Natürliche Zahlen

Die erste menge, die den meisten Leuten einfaellt, wenn sie an Mathematik denken, sind die **natuerlichen Zahlen**. Wir wollen uns in diesem Vortrag auch nach dieser Intuition richten und uns die natuerlichen Zahlen als mathematisches Konstrukt anschauen. Dazu betrachten wir, wie sich diese Menge formal definieren und konstruieren laesst.
Der uebliche Nutzen der natuerlichen Zahlen in der Mathematik ist, dass wir zaehlen und nummerieren wollen, wie auch im alltaeglichen Leben. Nur dass wir in der Mathematik mehr die Tatsache nutzen, dass es unendlich viele natuerliche Zahlen gibt.

### 1. Peano-Axiome

§03.01 **Definition** *(Peano-Axiome).* Erfuellt eine Menge die *Peano-Axiome*, so nennen wir sie die Menge der *natuerlichen Zahlen*.

P1) $1 \in \mathbb{N}$

P1) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N}$, wobei $n'$ den Nachfolger von $n$ bezeichnet

P1) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 1$

P1) $m, n \in \mathbb{N}$ und $m' = n' \Rightarrow m = n$

P1) Ist $M$ eine Menge, sodass $1 \in M$ und $\forall n \in \mathbb{N} : (n \in M \Rightarrow n' \in M)$, so gilt $M = \mathbb{N}$

§03.02 **Notation.** $\mathbb{N}$ □

□

Um dieses Axiomsystem zu ueberpruefen, sind zwei Fragen zu klaeren:

1) Existiert ein Objekt mit den geforderten Eigenschaften?

1) Ist das Objekt durch die gegebenen Eigenschaften eindeutig bestimmt?

In diesem Vortrag werden wir nur auf die erste Frage eingehen, da die meisten Zuhoerenden/Lesenden noch nicht genuegend Wissen haben, um die mathematische Begruendung nachzuvollziehen.

## 2. Formale Konstruktion

§03.03 **Definition.** Wir setzen:

$$1 := \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$$
$$2 := \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$3 := \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

usw.

Dann ist $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ □

Nun koennen wir auf $\mathbb{N}$ eine Addition und eine Multiplikation definieren:

§03.04 **Definition.** Seien $n, m \in \mathbb{N}$

(a) Setze $n + 1 := n'$ und $n + m' = (n + m)'$

(b) Analog: $n \cdot 1 := n$ und $n \cdot m' = (n \cdot m) + n$

□

§03.05 **Beispiel.**

(a) $n + 3 = n + 2' = (n + 2)' = ((n + 1)')' = ((n')')'$

(b) $n \cdot 3 = n \cdot 2' = (n \cdot 2) + n = (n \cdot 1') + n = ((n \cdot 1) + n) + n = n + n + n$

□

§03.06 **Satz** *(Kardinalitaet der natuerlichen Zahlen). Es ist* $|\mathbb{N}| = \infty$ □

§03.07 **Beweis.** Beweis durch Widerspruch.
Angenommen es ex. ein $m < \infty$, sodass $|\mathbb{N}| = m$.
Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $n_0$ maximal in $\mathbb{N}$ ist. Nach Konstruktion in ? ist dann auch $\mathcal{P}(n_0) \in \mathbb{N}$. Aber nach Satz ? gilt $|\mathcal{P}(n_0)| > n_0$. Das steht im Widerspruch zur Maximalitaet von $|n_0|$. □

## §04 Vollständige Induktion

Aus dem fuenften Peano-Axiom kann man ein Beweisprinzip ableiten , welches sich *vollstaendige Induktion* nennt. Die Voraussetzung hierfuer ist, dass wir eine Aussage fuer alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen wollen. Man geht nach der folgenden Anleitung vor:

1) *Induktionsanfang:* Zeige die Aussage fuer $n = 1$.

1) *Induktionsvoraussetzung:* Die Aussage gelte fuer ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

1) *Indukionsschritt:* Folgere aus der Induktionsvoraussetzung, dass die Aussage auch fuer $n+1$ gilt.

§04.1 **Anmerkung**. Weshalb gilt die Aussage nun fuer alle $n \in \mathbb{N}$?
Sei $\mathcal{A}$ eine Aussage und gelte:

- $\mathcal{A}$ gilt fuer 1
- $\mathcal{A}$ gilt fuer $n \Rightarrow \mathcal{A}$ gilt fuer $n+1$

Setze $M = \{n \in \mathbb{N} | \mathcal{A}$ ist wahr fuer $n\}$. Nach P5) gilt: $M = N$. □

§04.02 **Satz**. *Fuer alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ □

§04.03 **Beweis**. **Induktionsanfang (IA):** Sei $n = 1$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$$

**Induktionsvoraussetzung (IV):** Es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

fuer ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.
**Induktionsschritt (IS):** Wir muessen nun zeigen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+1)$$

Dies tun wir folgendermassen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} + n + 1 \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) + (n+1) \\ &= (n+1) \cdot (\frac{1}{2} \cdot n + 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2)\end{aligned}$$

□

§04.04 **Satz**. *Fuer alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:* $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$ □

§04.05 **Beweis**. **Induktionsanfang (IA):** Sei $n = 1$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 2 - 1 = 1 = 1^2$$

**Induktionsvoraussetzung (IV):** Es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

fuer ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.
**Induktionsschritt (IS):** Nun ist zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (2k+1) = (n+1)^2.$$

Dies tun wir folgendermassen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (2k+1) &= \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2 \cdot (n+1) - 1 \\ &\overset{\text{IV}}{=} n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2\end{aligned}$$

□

## §05 Aufgabenvorschlaege

Bereits bewiesene Saetze (auch aus den vorherigen Vortraegen) duerfen benutzt werden. Es ist euch ueberlassen, welche Aufgaben ihr die Uebungsgruppe rechnen laesst. Ihr solltet die Aufgaben aber vorher einmal selbst gerechnet haben.

### 1. Elementare Beweise zu Mengenoperationen

Seien $A$ und $B$ Mengen. Zeige:

1. $A \cap B \subseteq A$
   $A \cap B \subseteq B$

1. $A \subseteq A \cup B$
   $B \subseteq A \cup B$

1. $A \cap B \subseteq A \cup B$

### 2. Komplexere Beweise zu Mengenoperationen

Sei $M$ eine Menge, $A, B \subseteq M$ seien Teilmengen. Zeige:

1. $M \setminus (M \setminus A) = A$

1. $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$

1. $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$

### 3. Schnitte und Vereinigungen: anschaulich

Zeichne folgende Mengen als Bilder an die Tafel und lass die Studis markierten Bereiche mithilfe der Mengen $A, B$ sowie der bekannten Mengenoperationen angeben:

1. $A \cap B$

1. $A \setminus B$

1. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

1. $A \cup B$

**Alternativ** kannst du sie die Mengen selber zeichnen lassen. Dazu gibst du vorher am besten ein Beispiel, z.B. die erste Menge.

### 4. Schnitte und Vereinigungen vereinfachen

Seien $A, B, C$ Mengen mit $A \subseteq B \subseteq C$. Wie lassen sich folgende Ausdruecke vereinfachen?

1. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

1. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

1. $(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B \cap C)$

### 5. Schnitte und Vereinigungen: Falsche Freunde

Seien $A, B, C$ beliebige Mengen. Unter welchen Bedingungen gilt folgende Aussage:

$$A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$$

### 6. Kardinalitaet

*Hier hilft der zweite Aufgabenblock.*
Sei $M$ eine Menge, $A, B \subseteq M$ seien Teilmengen. Es gelte $|M| = 100, |A| = 20, |B| = 10$ sowie $|(M \setminus A) \cap (M \setminus B)| = 75$. Was ist $|A \cap B|$?

### 7. Vollstaendige Induktion

Beweise folgende Aussagen mittels vollstaendiger Induktion:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$ : 3 teilt $n^3 n$
1. $\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
1. $2^n > n$
1. $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ gilt $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$
1. Definiere $a_1 = 2, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$. Dann gilt $a_n = \frac{n+1}{n}$
1. Definiere $a_1 = 2, a_{n+1} = a_{n-1} + n \cdot 2^n$. Dann gilt $a_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$.
1. Definiere $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{a_n})$. Dann gilt $\frac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant 2$.

## §06 Lösungen zu den Übungsaufgaben

# Kapitel 4

# Relationen

## §01 Partitionen und Äquivalenzrelationen

### 1. „Wohngemeinschaften und die GEZ“

Wir blicken zurück auf den Beginn des Wintersemesters 2012. Viele viele Studienanfänger_innen lauschen gespannt dem mathematischen Vorkurs, lernen sich und die Stadt kennen und ziehen vielleicht in die ein oder andere Wohngemeinschaft. Ein paar Tage nach dem Einzug erhalten sie auf einmal Post von der Gebühreneinzugszentrale der öffentlich-rechtlichen Rundfunkanstalten (kurz GEZ). Seit langer Zeit verlangt sie von jedem Menschen in Deutschland Rundfunkgebühren. Das Gebührenmodell betrachtet dazu die Menge

$$D := \{x \mid x \text{ ist Mensch in Deutschland}\}$$

Dieses Jahr sieht die Welt aber anders aus. Die GEZ heißt dann ARD ZDF Deutschlandradio Beitragsservice, die Rundfunkgebühren heißen Rundfunkbeiträge, und das Gebührenmodell sieht eine Haushaltspauschale vor. Wir betrachten also

$$H := \{h \mid h \text{ ist ein Haushalt in Deutschland}\}$$

Die Haushalte $h$ enthalten Menschen aus Deutschland[1]. Wir können nur spekulieren, was sich die Zuständigen dabei gedacht haben, aber vermutlich hatten sie folgende Hoffnungen

- Der Verwaltungsaufwand wird kleiner. „$H$ ist kleiner als $D$“.
- Jeder Mensch ist Mitglied in einem Haushalt. Alle werden erfasst.
- Niemand ist Mitglied in zwei Haushalten. Keiner muss doppelt zahlen.

Die GEZ hofft also, dass $H$ eine *Partition* von $D$ ist.

§01.01 **Definition.** Sei $X$ eine Menge und $P := \{P_1, P_2, P_3, \dots\} \subseteq \mathcal{P}(M)$ eine Menge von nichtleeren Teilmengen von $X$. Wir nennen $P$ eine *Partition von $X$*, falls

$$X = \bigcup_i P_i$$

und für alle $P_i, P_j \in P$ genau eine der folgenden Aussagen wahr ist:

1. $P_i = P_j$
2. $P_j \cap P_j = \emptyset$

□

[1] Die Haushalte $h$ sind also Mengen, auch wenn wir hier kleine Buchstaben verwenden.

## 2. Äquivalenzrelationen

Die Denkweise des Gebührenmodells der GEZ entspricht nicht unserem Denkmuster im Alltag. Wir nehmen unser Leben in Wohngemeinschaften selten als eine Partition aller Menschen wahr und denken wesentlich lokaler. Für uns ist das Zusammenwohnen eher eine *Beziehung* von einem Menschen zu einem anderen. Fragen wir Alice, wo Bob denn wohnt, hören wir „Bob? Mit dem wohne ich zusammen.“ und nicht „Bob und ich sind im selben Haushalt.“

Welche (intuitiven) Anforderungen stellen wir an eine solche Beziehung?

- Alice wohnt zusammen mit Alice. Klingt komisch, ist aber so.
- Alice wohnt zusammen mit Bob. Also wohnt Bob auch zusammen mit Alice.
- Alice wohnt zusammen mit Bob. Bob wohnt zusammen mit mit Charlie. Also wohnt Alice auch zusammen mit Charlie.

§01.02 **Definition**. Sei $X$ eine Menge und $R \subseteq X \times X$. Dann nennen wir $R$ eine *Relation* auf $X$. Ist $(x, y) \in R$, so schreiben wir auch

$$xRy \text{ oder } x \sim_R y$$

und sagen $x$ *steht in Relation* $R$ *zu* $y$. □

Für den Relationenbegriff kodieren wir die Elemente, die in Beziehung stehen sollen in einem Paar, also ein Element des kartesischen Produkts. Beziehungen, die die obigen gewünschten Eigenschften besitzen, nennen wir Äquivalenzrelationen.

§01.03 **Definition**. Sei $X$ eine Menge und $R$ eine Relation auf $X$. Dann nennen wir $R$ eine *Äquivalenzrelation*, falls für alle $x, y, z \in R$ folgendes gilt

(a) $(x, x) \in R$. (Reflexivität)

(b) Aus $(x, y) \in R$ folgt $(y, x) \in R$. (Symmetrie)

(c) Aus $(x, y), (y, z) \in R$ folgt $(x, z) \in R$. (Transitivität)

□

§01.04 **Definition**. Sei $X$ eine Menge, $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation und $x \in X$ ein Element in $X$. Dann nennen wir

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim_R x\}$$

die *Äquivalenzklasse von* $x$. Sie besteht aus allen Elementen, die mit $x$ in Beziehung stehen. □

Im Folgenden schreiben wir $x \sim y$, falls keine Verwechslungsgefahr mit anderen Relationen besteht. Ausserdem bezeichnen wir (by abuse of notation) die Relation mit $\sim$.

§01.05 **Beispiel**. In unserem Beispiel der „... wohnt zusammen mit ...“-Relation ist [Bob] die Menge aller Mitbewohner von Bob (und auch Bob). Diese Menge ist aber identisch mit [Alice], da Alice und Bob natürlich die selben Mitbewohner haben. □

§01.06 **Bemerkung**. Sei $X$ eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$ und $x \in X$. Dann gilt für alle $y \in [x]$:

$$[x] = [y].$$

□

§01.07 **Beweis**. Sei $y \in [x]$, das heißt $y \sim x$. Da $\sim$ symmetrisch ist, gilt auch $x \sim y$. Wir zeigen die Gleichheit von Mengen:

„$\subseteq$“ Sei $z \in [x]$, also $z \sim x$. Wegen der Transitivität von $\sim$ gilt dann $z \sim y$. Also $z \in [y]$.

„$\supseteq$“ Sei $z \in [y]$, also $z \sim y$. Wir nutzen wider die Transitivität von $\sim$ und erhalten $z \sim x$, d.h. $z \in [x]$.

Also gilt $[x] \subseteq [y]$ und $[x] \supseteq [y]$ und somit $[x] = [y]$. □

§01.08 **Bemerkung**. Seien $X$ eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$ und $x, y \in X$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

(i) $[x] = [y]$

(ii) $[x] \cap [y] = \emptyset$

□

§01.09 **Beweis**. Wir unterscheiden die Fälle $x \in [y]$ und $x \notin [y]$.

($x \in [y]$) Gelte $x \in [y]$, dann folgt wegen Bemerkung [01.06] $[x] = [y]$. Also $x \in [x] \cap [y] \neq \emptyset$.

($x \notin [y]$) Gelte $x \notin [y]$, also $[x] \neq [y]$. Angenommen es existiert ein $z \in [x] \cap [y]$, d.h. $z \sim x$ und $z \sim y$. Da $\sim$ symmetrisch ist, folgt $x \sim z$ und wegen der Transitivität von $\sim$ auch $x \sim y$. Dann gilt aber $x \in [y]$, ein Widerspruch. Die Annahme war falsch und es gilt $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

□

§01.10 **Definition**. Sei $X$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Dann bezeichnen wir mit

$$X/_{\sim} := \{[x] \mid x \in X\}$$

die *Menge der Äquivalenzklassen von $X$ bzgl. $\sim$*. □

§01.11 **Satz**. *Sei $X$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $X$. Dann ist $X/_{\sim}$ eine Partition von $M$.* □

§01.12 **Beweis**. Seien $[x_1], [x_2], [x_3], \ldots$ die verschiedenen Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$. Wir müssen zeigen

(i) $M = \bigcup_i [x_i]$

(ii) Für alle $x, y \in X$ mit $[x] \neq [y]$ gilt $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Die zweite Aussage (ii) folgt direkt aus Bemerkung [01.08]. Wir zeigen noch (i) und müssen die Gleichheit dieser Mengen nachweisen. Sei $x \in X$, dann ist sicher $x \in [x]$. Die Äquivalenzklasse $[x]$ stimmt wegen Bemerkung [01.08] mit einer der Äquivalenzklassen $[x_j]$ überein. Damit ist

$$x \in [x_j] \subseteq \bigcup_i [x_i].$$

Ausserdem ist klar, dass $\bigcup_i [x_i] \subseteq X$, da $[x_i] \subseteq X$. □

§01.13 **Satz.** *Sei $X$ eine Menge und $P \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Partition von $X$, dann existiert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $X$, sodass*

$$X/_{\sim} = P.$$

□

§01.14 **Beweis.** Diesen Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe. □

## §02 Aufgabenvorschlaege

### 1. Aufgabe 1

Seien $X, Y, Z$ Mengen. Beweise, dass folgenden Identitäten gelten.

1. $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$
2. $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$
3. $X \cup Y = Y \cup X$
4. $X \cap Y = Y \cap X$

(Diese Aufgabe ist zur Wiederholung des Stoffes des Mengenvortrages und optional.)

### 2. Aufgabe 2

Wir betrachten die Mengen $T := \{\text{Dr.}\}$, $A := \{\text{Herr, Frau}\}$, $V := \{\text{Alice, Bob}\}$ und $N := \{\text{Hathaway, Sinclair, Wayne}\}$. Bilde die folgenden Mengen.

1. $A \times N$
2. $A \times (V \times N)$
3. $(A \times T) \times (V \times N)$
4. $(T \times V) \cup (A \times V)$

## 3. Aufgabe 3

Betrachte die Menge $M := \{\text{Alice, Bob, Charlie, Dave}\}$. Welche der folgenden Mengen $P_i$ sind Partitionen von $M$?

1. $P_5 := \big\{\{\text{Alice , Bob}\}, \{\text{Dave}\}\big\}$
2. $P_2 := \big\{\text{Dave, Alice, Bob, Charlie}\big\}$
3. $P_3 := \big\{\{\text{Dave, Alice, Bob, Charlie}\}\big\}$
4. $P_4 := \big\{\{\text{Dave}\}, \{\text{Alice}\}, \{\text{Charlie}\}, \{\text{Bob}\}\big\}$
5. $P_1 := \big\{\{\text{Dave}\}, \{\text{Bob}, \text{Charlie}\}, \{\text{Alice}, \text{Dave}\}\big\}$

Bilde zwei weitere Partitionen von $M$.

## 4. Aufgabe 4

Betrachte $M := \{a, b, c, d\}$. Sind die folgenden Relationen auf $M$ reflexiv, symmetrisch, transitiv, Äquivalenzrelationen?

1. $R_1 := \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$
2. $R_1 := \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$
3. $R_2 := \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$
4. $R_3 := \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a), (c, c), (d, d)\}$
5. $R_4 := \{(a, b), (b, c), (c, d), (a, c), (a, d), (b, d)\}$

Bilde zwei weitere Äquivalenzrelationen auf $M$.

## 5. Aufgabe 5

Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen? Gib gegebenenfalls die Äquivalenzklassen an.

1. Betrachte die Relation $\sim$ auf $\mathbb{Q}$, definiert via $a \sim b :\Leftrightarrow ab \geqslant 0$
2. Betrachte die Relation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$, definiert via $a \sim b :\Leftrightarrow a + b$ ist gerade.
3. Betrachte die Relation $\sim$ auf $\mathbb{Q}$, definiert via $a \sim b :\Leftrightarrow ab > 0$
4. Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Betrachte die Relation $\sim_n$ auf $\mathbb{Z}$, definiert via
   $a \sim_n b :\Leftrightarrow n$ ist ein Teiler von $a - b$.
5. Betrachte die Relation $\sim$ auf der Menge aller Menschen, definiert via „. . . ist Geschwister von . . . “.

## 6. Aufgabe 6

Sei $X$ eine Menge, $n \in \mathbb{N}$ und $P := \{P_1, \dots, P_n\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Partition von $X$. Zeige, dass eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $X$ existiert, sodass

$$X/_{\sim} = P.$$

*Beweis.* (Anleitung) Konstruiert eine Relation $\sim$, indem ihr eine Bedingung angebt, wann zwei Elemente aus $X$ in Relation stehen. Für $x, y \in X$ definiere

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; ???.$$

Dabei muss diese Relation so definiert sein, dass sie eine Äquivalenzrelation ist. Dies ist nachzuweisen. Außerdem muss die Äquivalenzrelation so konstruiert werden, dass die Äquivalenzklasse eines Elements $x \in X$ mit einer der Teilmengen $P_i$ übereinstimmt, also $[x] = P_i$ für ein geeignetes $i$ gilt. $\square$

# Kapitel 5

# Abbildungen

## §01 Abbildungen

Im letzten Kapitel haben wir den Begriff der *Relation* eingeführt, sind aber schnell zum Studium der spezielleren Äquivalenzrelationen übergegangen. Wir wollen uns in diesem Kapitel mit Abbildungen (oder Funktionen) beschäftigen. Um diese jedoch mathematisch korrekt formulieren zu können, brauchen wir einen allgemeineren Begriff der *Relation*, denn eine Abbildung setzt Elemente *verschiedener* Mengen in Beziehung.

§01.01 **Definition.** Seien $X, Y$ Mengen und $R \subseteq X \times Y$. Dann nennen wir $R$ eine *Relation zwischen $X$ und $Y$*. □

Auch hier schreiben wir für $(x, y) \in R$ einfach $x \sim y$, falls keine Verwechlungsgefahr besteht. Inbesondere sprechen wir nun von allgemeinen Relationen und nicht von Äquivalenzrelationen. Die hier betrachteten Relationen müssen nicht länger reflexiv, symmetrisch oder transitiv sein und können diese Eigenschaften meist auch nich haben.

§01.02 **Definition.** Seien $X, Y$ Mengen und $R \subseteq X \times Y$ eine Relation zwischen $X$ und $Y$. Wir nennen $R \ldots$

(a) *rechtstotal*, falls für jedes Element $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, sodass $x \sim y$.

(b) *linkstotal*, falls für jedes Element $x \in X$ ein $y \in Y$ existiert, sodass $x \sim y$.

□

§01.03 **Definition.** Seien $X, Y$ Mengen und $R \subseteq X \times Y$ eine Relation zwischen $X$ und $Y$. Wir nennen $R \ldots$

(a) *rechtseindeutig* falls zu jedem $x \in X$ höchstens ein $y \in Y$ existiert, sodass $x \sim y$.

(b) *linkseindeutig* falls zu jedem $y \in Y$ höchstens ein $x \in X$ existiert, sodass $x \sim y$

□

### 1. Die „richtige" Definition

Aus der Schule kennen wir den folgenden Begriff einer Abbildung

§01.04 **Definition.** Seien $X, Y$ Mengen. Eine *Abbildung* $f$ ist eine Zuordnungsvorschrift, die jedem Element aus $X$ genau ein Element aus $Y$ zuordnet. □

Schrecklich, nicht wahr? Was soll denn eine Zuordnungsvorschrift sein? Diese Definition ist total schwammig. Zum Glück können wir bereits mit unseren Mitteln einen exakten Abbildungsbegriff definieren.

§01.05 **Definition**. Seien $X, Y$ Mengen und $G \subseteq X \times Y$ eine Relation zwischen $X$ und $Y$. Ist $G$ linkstotal und rechtseindeutig, so nennen wir das Tripel $f := (X, Y, G)$ eine *Abbildung von $X$ nach $Y$* und schreiben

$$f : X \Longrightarrow Y.$$

Es gilt also:

(a) zu jedem $x \in X$ existiert ein $y \in Y$ mit $x \sim y$

(b) und dieses $y$ ist das einzige Element in $Y$ mit $x \sim y$.

Dieses zu $x$ eindeutige $y$ mit $x \sim y$ bezeichnen wir mit $f(x)$ und schreiben

$$f(x) = y \text{ oder } f : x \longmapsto y.$$

Gegebenfalls nennen wir $X$ den *Definitionsbereich*, $Y$ die *Zielmenge* und $G$ den *Graph* der Abbildung $f$. □

§01.06 **Definition**. Seien $X, Y, A, B$ Mengen, sowie $f : X \Longrightarrow Y$, $g : A \Longrightarrow B$ Abbildungen. Dann definieren wir die *Gleichheit* von $f$ und $g$ via

$$f = g \quad :\Longrightarrow \begin{cases} & X = A \\ \text{und} & Y = B \\ \text{und} & f(x) = g(x) \quad \text{für alle } x \in X = A \end{cases}$$

□

§01.07 **Definition**. Seien $X, Y$ Mengen und $f : X \Longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann induziert $f$ zwei weitere Abbildungen zwischen den Potenzmengen $\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y)$:

$$\begin{aligned} f : \mathcal{P}(X) &\Longrightarrow \mathcal{P}(Y) \\ A &\longmapsto \{f(a) \in Y \mid a \in A\} \end{aligned}$$

die *Bildabbildung* zu $f$ und

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathcal{P}(Y) &\Longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ B &\longmapsto \{x \in X \mid f(x) \in B\} \end{aligned}$$

die *Urbildabbildung* zu $f$. Wir nennen $f(X)$ das *Bild von $f$* und schreiben auch $im(f)$. □

§01.08 **Definition**. Seien $X, Y, Z$ Mengen und $f : X \Longrightarrow Y$, sowie $g : Y \Longrightarrow Z$ Abbildungen. Dann definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} g \circ f : X &\Longrightarrow Z \\ x &\longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

(gelesen: „$g$ nach $f$“) als die *Komposition* oder *Verkettung* von $f$ und $g$. □

## 2. Eigenschaften von Abbildungen

§01.09 **Definition.** Seien $X, Y$ Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung.

(a) Wir nennen $f$ *injektiv* (oder eineindeutig), falls für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ auch $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt.

(b) Wir nennen $f$ *surjektiv*, falls für alle $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert, mit $f(x) = y$.

(c) Wir nennen $f$ *bijektiv*, falls $f$ injektiv und surjektiv ist.

$\square$

§01.10 **Definition.** Seien $A, X$ Mengen mit $A \subseteq X$. Dann nennen wir

$$\begin{aligned} \iota : A &\longrightarrow X \\ a &\longmapsto a \end{aligned}$$

die *natürliche Inklusion* von $A$ in $X$ $\square$

§01.11 **Anmerkung.** $\iota$ ist eine injektive Abbildung. $\square$

§01.12 **Definition.** Sei $X$ eine Menge und $\sim$ ein Äquivalenzrelation auf $X$. Dann nennen wir

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X/_{\sim} \\ x &\xmapsto{x} \end{aligned}$$

die *natürliche Projektion* bzgl. $\sim$. $\square$

§01.13 **Anmerkung.** $\pi$ ist eine surjektive Abbildung. $\square$

§01.14 **Definition.** Sei $X$ eine Menge. Dann nennen wir

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_n X : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

die *Identität* auf $X$. $\square$

§01.15 **Anmerkung.** $\mathrm{id}_n X$ ist eine bijektive Abbildung. $\square$

§01.16 **Bemerkung.** Seien $X, Y$ Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent

(i) $f$ ist injektiv, d.h. für alle $x_1 \neq x_2 \in X$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(ii) Für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ gilt bereits $x_1 = x_2$.

(iii) Für alle $y \in Y$ ist $f^{-1}(\{y\})$ höchstens einelementig.

(iv) Der Graph $G$ von $f$ ist eine linkseindeutige Relation.

$\square$

§01.17 **Beweis.**

(i) $\Rightarrow$ (ii) Dies folgt direkt durch Kontradiktion.

(ii) ⇒ (iii) Sei $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ und $x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y\})$. Dann gilt $f(x_1) = y = f(x_2)$, also wegen $(ii)$ bereits $x_1 = x_2$. Also ist $f^{-1}(\{y\}) = \{x_1\}$.

(iii) ⇒ (iv) Seien $y \in Y$ und $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \sim_G y$ und $x_2 \sim_G y$. Dies bedeutet gerade, dass $y = f(x_1) = f(x_2)$. Also gilt $x_1, x_2 \in f^{-1}(\{y\})$. Wegen $(iii)$ gilt dann $x_1 = x_2$. Es ist demnach $\sim_G$ linkseindeutig.

(iv) ⇒ (i) Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$. Angenommen es gilt $f(x_1) = f(x_2) =: y$. Dann gilt aber $x_1 \sim_G y$ und $x_2 \sim y$. Dies ist ein Widerspruch zur Linkseindeutigkeit von $\sim_G$.

□

§01.18 **Bemerkung**. Seien $X, Y$ Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent

(i) $f$ ist surjektiv, d.h. für alle $y \in Y$ existiert ein $x \in X$, sodass $f(x) = y$.

(ii) Für alle $y \in Y$ ist $f^{-1}(\{y\})$ mindestens einelementig.

(iii) Es gilt $f(X) = Y$.

(iv) Der Graph $G$ von $f$ ist rechtstotal.

□

§01.19 **Beweis**.

(i) ⇒ (ii) Sei $y \in Y$, dann existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Also ist $x \in f^{-1}(\{y\})$, also $f^{-1}(\{y\})$ mindestens einelementig.

(ii) ⇒ (iii) Sei $y \in Y$, dann ist $f^{-1}(\{y\})$ mindestens einelementig. Also existiert ein $x \in X$ mit $x \in f^{-1}(\{y\})$, d.h. $f(x) = y$. Also ist $y \in f(X)$, was „$\supseteq$" zeigt. Die Inklusion „$\subseteq$" gilt nach Definition der Bildabbildung.

(iii) ⇒ (iv) Sei $y \in Y$. Wir zeigen die Existens von einem Element $x \in X$, mit $x \sim_G y$. Da $f(X) = Y$ gilt $y \in f(X)$, also existiert ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Mit anderen Worten $x \sim_G y$.

(iii) ⇒ (i) Sei $y \in Y$. Da $\sim_G$ rechtstotal ist, existiert ein $x \in X$ mit $x \sim_G y$. Anders formuliert: $f(x) = y$.

□

§01.20 **Bemerkung**. Seien $X, Y$ Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann definiert

$$x_1 \sim x_2 \quad :\Leftrightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$$

eine Äquivalenzrelation auf $X$. □

§01.21 **Beweis**. Dies folgt sehr einfach aus den Eigenschaften der „="-Relation. □

§01.22 **Satz**. *Seien $X, Y$ Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Wir betrachten das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/_{\sim} \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{Im}(f) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

*wobei $\pi : x \mapsto [x]$ die Projektion bzgl. der Relation aus [01.20] ist und $\iota$ die natürliche Inklusion von $f(X) \subseteq Y$ ist. Weiter sei*

$$\begin{aligned} \varphi : X/_{\sim} &\longrightarrow \mathrm{Im}(f) \\ [x] &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

*Dann gilt*

(i) *$\varphi$ ist wohldefiniert.*

(ii) *$\varphi$ ist bijektiv.*

(iii) *Das Diagramm kommutiert in dem Sinne, dass $f = \iota \circ \varphi \circ \pi$ gilt.*

□

§01.23 **Beweis.**

(i) Seien $x_1, x_2 \in X$, mit $x_1 \sim x_2$. Dann gilt nach Definition von $\sim$, dass $f(x_1) = f(x_2)$. Also

$$\varphi\big([x_1]\big) = f(x_1) = f(x_2) = \varphi\big([x_2]\big)$$

(ii) Wir zeigen die Injektivität und die Surjektivität von $\varphi$.

(inj.) Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $\varphi\big([x_1]\big) = \varphi\big([x_2]\big)$. Dies bedeutet $f(x_1) = f(x_2)$ und damit ist $x_1 \sim x_2$. Nach [01.06] ist dann $[x_1] = [x_2]$.

(surj.) Sei $y \in f(X)$. Dann existiert nach Definition von $f(X)$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Betrachten wir die Äquivalenzklasse von $x$, dann sehen wir $\varphi\big([x]\big) = f(x) = y$.

(iii) Wir zeigen die Gleichheit der Abbildungen

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ \iota \circ \varphi \circ \pi : X &\longrightarrow Y \end{aligned}$$

Diese Abbildungen haben offensichtlich die selben Definitionsbereiche und Zielmengen. Bleibt noch zu zeigen, dass sie punktweise übereinstimmen. Sei also $x \in X$. Wir berechnen

$$(\iota \circ \varphi \circ \pi)(x) = (\iota \circ \varphi)(\pi(x)) = (\iota \circ \varphi)\big([x]\big) = \iota\Big(\varphi\big([x]\big)\Big) = \iota(f(x)) = f(x).$$

Damit ist alles gezeigt. □

# §02 Aufgabenvorschlaege

## 1. Aufgabe 1

Betrachte $A := \{1,2,3,4\}$ und $B := \{a,b,c,d\}$. Welche der folgenden Relationen $G_i \subseteq (A \times B)$ sind Abbildungen? Welche sind links- oder rechtstotal? Welche sind links- oder rechtseindeutig?

1. $G_1 := \{(1,b),(2,c),(3,d),(1,a),(4,b)\}$
2. $G_2 := \{(1,c),(2,c),(3,c),(4,c)\}$
3. $G_3 := \{(4,b),(2,a),(1,a)\}$
4. $G_4 := \{(1,a),(2,b),(3,c),(4,d)\}$

## 2. Aufgabe 2

Gegeben sei die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\Leftrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2. \end{aligned}$$

Werte die Bildabbidung von $f$ aus und zwar an…

1. $\{1,2,3\}$
2. $\{-3,-5,4\}$
3. $\{-6,6,\sqrt{36}\}$
4. $\mathbb{Z}$

Werte die Urbildabbildung von $f$ aus und zwar an…

1. $\{1,2,3\}$
2. $\{-1,-2\}$
3. $\{-1,0,1\}$
4. $\{36\}$
5. $\emptyset$

## 3. Aufgabe 3

Welche der folgenden Abbildungen $f_i$ sind injektiv, surjektiv, bijektiv?

1. $f_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad x \longmapsto 2x+1$
2. $f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad x \longmapsto |x|$
3. $f_3 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0; \quad x \longmapsto |x|$
4. $f_4 : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad (x,y) \longmapsto x+y$
5. $f_5 : (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{Z}; \quad (x,y) \longmapsto x+y$

## 4. Aufgabe 3

Seien $X, Y, Z$ Mengen und $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ Abbildungen. Zeige:

1. Sind $f$ und $g$ injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.
2. Sind $f$ und $g$ surjektiv, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv.
3. Ist $g \circ f$ injektiv, dann ist auch $f$ injektiv. Gilt das auch für $g$?
4. Ist $g \circ f$ surjektiv, dann ist auch $g$ surjektiv. Gilt das auch für $f$?

# Kapitel 6

# Folgen

*Folgen finden sich in der Mathematik immer wieder und gehören zum Grundwerkzeug eines jeden Mathematikers. Eben aus jenem Grund sollte man sich die Zeit nehmen sie zu verstehen.*

## §01 Motivation

Wir werden uns in diesem Vortrag an einem kleinen sehr einfachen Bespiel entlang hangeln und und so Stück für Stück an das Themengebiet der Folgen heranwagen.

§01.01 **Beispiel.** Wir werfen einen normalen W6 n mal. Wie hoch ist die Chance, dass wir mindestens eine 6 würfeln? Das ist meistens eine der ersten Standardaufgaben wenn man mit Wahrscheinlichkeitsrechnung beginnt. Wenn man sich das auf einem kleinen Stück Papier mal kurz anschaut bekommt man schnell raus was für die ersten Würfe gilt. Über den Vortrag hinweg sei $P(n) \in [0,1]$ die Chance, dass wir mindestens eine 6 in n Würfen würfeln.

| $n$ | $P$ |
|---|---|
| 1 | $\frac{1}{6}$ |
| 2 | $\frac{11}{36}$ |
| 3 | $\frac{91}{216}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

Nun stellt man sich die Frage, ob man dieses Verhalten irgendwie mathematisch formulieren kann? -> JA!

Um das ganze etwas schöner zu haben schauen wir folgendes Problem an: „Wie hoch ist die Chance nie eine 6 würfeln? “Die liegt bei (nachdenken ;) ) $5/6$ pro Wurf, also bei n Würfen $(5/6)^n$. Damit kommen wir also zu folgendem kompaktem Ergebnis:

$$P(n) = 1 - \binom{5}{6}^n$$

Was wir hier haben nennt der gebildete Mathematiker eine Folge (Definition kommt später). Wenn wir unser Beispiel betrachten sieht man auch schnell wofür sich Mathematiker oft bei der Betrachtung von Folgen interessieren: was passiert wenn n immer größer wird? Oder bei uns:

Was passiert mit unserer Chance, wenn wir immer öfter würfeln?

Intuitiv sieht man denke ich leicht, dass $(5/6)^n$ immer kleiner wird und unser $P(n)$ damit immer näher an die 1 ran rutscht. Genau dieses Verhalten werden wir in diesem Vortrag mathematisch formalisieren und untersuchen. Viel Spaß!

## §02 Der Betrag

Ich habe gesagt, dass $P(n)$ immer weiter an die 1 „rutscht ". Aber was genau bedeutet das? Im Grunde genommen sage ich hier, dass der Abstand bzw die Größe des Abstandes von $P(n)$ zur 1 immer kleiner wird. Wir müssen uns also erst klar machen, was wir under einem „Abstand"oder eine Länge/Größe verstehen. Die meisten werden dabei an den Betrag $|a|$ einer Zahl $a$ denken. Genau dieses Konzept wollen wir uns anschauen.

§02.01 **Definition.** Der *Betrag auf* $\mathbb{R}$ ist definiert durch

$$|a| = \begin{cases} a & a \geqslant 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

□

Der Betrag ordnet einer Zahl anschaulich eine Länge zu. Man kann damit aber auch einfach den Abstand zwischen 2 Zahlen ausdrücken: $dist(x, y) = |x - y|$. Damit wir sinnvoll mit dieser Definition arbeiten können sollten wir ein paar Eigenschaften zeigen:

§02.02 **Satz.** *Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

(i) $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$

(ii) $x \leqslant |x|$

(iii) $|xy| = |x||y|$

(iv) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

§02.03 **Beweis.**

(i) folgt direkt aus der Definition

(ii) für $x \geqslant 0$ gilt $x = |x|$. Im anderen Fall folgt $x < 0 < -x = |x|$

(iii) Für $x = 0 \vee y = 0$ ist die Aussage trivial. Seien also $x, y \neq 0$.

$x, y > 0$: damit ist auch $xy > 0$. Also: $|xy| = xy = |x||y|$

$x, y < 0$: auch hier ist $xy > 0$. Das heißt $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$

$x < 0, y > 0$: hier ist $xy < 0$ und damit $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$.

$x > 0, y < 0$: analog

(iv) Da beide Seiten positiv sind, ist das Quadrieren eine Äquivalenzumformung. Dann folgt mit ii)

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \leqslant x^2 + 2|xy| + y^2 \Leftrightarrow 2xy \leqslant 2|xy|$$

□

## §03 Folgen

Jetzt, da wir unser Handwerkszeug haben können wir uns den Folgen widmen und diese untersuchen.

§03.01 **Definition**. Unter einer Folge $(a_n)_n$ verstehen wir eine Abbildung

$$a:\ \mathbb{N} \to \mathbb{R};\ n \longmapsto a_n$$

$a_n$ heißt dabei das n-te Folgenglied der Folge. □

Mit dieser Definition können wir unsere Folge $P(n)$ auch formal ausdrücken:

$$P:\mathbb{N} \to [0,1];\ n \longmapsto P(n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

§03.02 **Beispiel**.

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad\qquad b_n = \cos(n\pi)$$

Jetzt haben wir unser Problem schon fast formalisiert. Fehlt noch die Sache „$P(n)$ rutscht immer weiter auf die 1“. Das heißt ja im Grunde genommen nichts anderes als dass der Abstand von $P(n)$ zur 1 immer kleiner...sogar beliebig klein wird. Das motiviert folgende Definition:

§03.03 **Definition**. Sei $(a_n)_n$ eine Folge. Wir sagen die Folge konvergiert genau dann wenn

$$\exists a \in \mathbb{R}:\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}:\ \forall n > N:\ |a_n - a| < \varepsilon$$

Andernfalls heißt die Folge divergent. Im Falle der Existenz nennen wir a den Grenzwert der Folge und schreiben auch $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n = a$.

Wenn eine Folge konvergiert liegen also fast alle meine Folgenglieder irgendwann nahe genug an diesem Grenzwert.

Zurück zu unserem Würfel. Wir wollen also eigentlich zeigen, dass $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} P(n) = 1$ gilt. Das können wir jetzt einfach nachrechnen!

§03.04 **Beweis**. Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen N groß genug, so dass $(5/6)^N < \varepsilon$. Dann gilt

$$|P(n) - 1| = \left|1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - 1\right| = \left|\frac{5^n}{6^n}\right|$$

Damit erhalten wir:

$$|P(n) - 1| = \left|\frac{5^n}{6^n}\right| = \left|\frac{5}{6}\right|^n < \left|\frac{5}{6}\right|^N < \varepsilon$$

Letztes gilt dabei wohlgemerkt nur für $n > N$.

Das heißt ja jetzt nicht anderes als: je öfter wir würfeln desto höher ist die Chance eine 6 zu würfeln!

Weitere einfache Beispiele sind:

§03.05 **Beispiel**.

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{2n^3 + n^2 - 5n}{n^3 - 20n} = 2 \qquad e_n = \cos(n\pi) \qquad f_n = 5^n$$

Die vorletzte wackelt immer zwischen $-1$ und $1$ und die letzte wird einfach immer größer.

Mathematiker achten immer darauf, dass ihre Definitionen sinnvoll sind. Wir fragen uns also, ob es passieren kann, dass eine Folge 2 Grenzwerte hat? Zum Glück nicht!

§03.06 **Satz**. *Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n$. Dann gilt a = b.*

§03.07 **Beweis**. Sei $\varepsilon > 0$. Da die Folge konvergiert existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n > N$ gilt:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad |b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Damit folgt dann

$$|a - b| = |a - b + a_n - a_n| \leqslant |a - a_n| + |a_n - b| = |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Da $\varepsilon$ beliebig war folgt $|a - b| = 0$ und damit $a = b$.

§03.08 **Bemerkung**. Es gibt auch Räume die, mit der richtigen Struktur versehen, es erlauben, dass eine Folge 2 Grenzwerte hat. Das werdet ihr vielleicht irgendwann kennen lernen.

Jetzt können wir uns noch fragen: wie sind wir eigentlich daraus gekommen, dass $P(n)$ auf die 1 läuft? Die naheliegenste Idee ist doch, dass der Bruch hinten immer kleiner wird, also gegen 0 konvergiert und damit diese Differenz verschwindet. Um diese Idee zu untermauern schauen wir uns einmal an wie man mit Folgen rechnet und ob wir diese Intuition auch formal beweisen können.

§03.09 **Definition**. Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ Folgen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. $(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n$ und $\lambda(a_n)_n = (\lambda a_n)_n$
2. $(a_n)_n$ heißt beschränkt $\Leftrightarrow \; \exists C \in \mathbb{R} : \; |a_n| \leqslant C \; \forall n \in \mathbb{N}$

□

Folgen werden also Komponentenweise addiert und mit Skalaren multipliziert. Wenn wir das jetzt wissen können wir unsere Folge ja ein bisschen aufteilen:

$$P(n) = K(n) - L(n); \; K(n) = 1, \; L(n) = \binom{5}{6}^n$$

Wenn wir unsere Intuition jetzt mal formalisieren haben wir ja so etwas gemacht:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} P(n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} (K(n) - L(n)) = \lim_{n \longrightarrow \infty} K(n) - \lim_{n \longrightarrow \infty} L(n) = 1 - 0 = 1$$

Wieso klappt dieser Schritt? Wann darf ich denn Grenzwerte auseinander ziehen?

§03.10 **Satz**. *Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergente Folgen mit $a = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} b_n$. Dann gilt:*

1. $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} (\lambda a_n) = \lambda a$ *für* $\lambda \in \mathbb{R}$

§03.11 **Beweis.** Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n > N$ $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt.

(i) hier gilt dann:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(ii) hier reicht es $\lambda \neq 0$ zu betrachten. Für $\lambda = 0$ ist der Beweis trivial.
Wir beachten hier: aus der Konvergenz folgt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}: \ \forall n > N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$, denn $\varepsilon/|\lambda| > 0$. Damit gilt dann:

$$|\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda(a_n - a)| = |\lambda|\,|a_n - a| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

□

§03.12 **Bemerkung.** Das auch für Produkte: $(a_n)_n \dot{(} b_n)_n \longrightarrow a \cdot b$

Wichtig ist hierbei dass wirklich <u>beide</u> Folgen konvergieren. Folgende Beispiele zeigen wieso:

§03.13 **Beispiel.**

(a) Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n = 0 = n - n$. Dann gilt nicht:

$$0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} 0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} (n - n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} n - \lim_{n \longrightarrow \infty} n$$

Die Folge $n \mapsto n$ divergiert. Insbesondere können wir hier nicht von einem Grenzwert sprechen. $\lim_{n \longrightarrow \infty} n$ ist daher undefiniert und insbesondere NICHT Null!

(b) Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n = 1 = n/n$. Dann gilt nicht:

$$1 = \lim_{n \longrightarrow \infty} 1 = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n}{n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \longrightarrow \infty} n = 0 \cdot \infty$$

Hier gilt die selbe Argumentation wie oben. Der Ausdruck $0 \cdot \infty$ ist nicht definiert.

□

## §04 Cauchyfolgen

Oftmals ist es nicht nötig, dass man den Grenzwert explizit kennt. Wichtig ist nur, dass er existiert. Können wir also irgendwie auf die Existenz des Grenzwertes schließen ohne ihn zu kennen? Diese Frage hat Mathematiker schon sehr früh beschäftigt. Ihre Idee: wenn meine Folgenglieder sich einer Zahl nähern dann müssen ja irgendwann auch beliebige Folgenglieder sehr nah bei einander liegen. Das brachte sie zu folgender Definition:

§04.01 **Definition.** Eine Cauchyfolge ist eine Folge $(a_n)_n$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Wie man hier sieht ist das eine Eigenschaft die nicht von eventuell vorhandenen Grenzwerten abhängt. Die obige Idee der Mathematiker kam aus folgender Eigenschaft:

§04.02 **Satz.** *Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann ist sie auch eine Cauchyfolge.*

§04.03 **Beweis.** Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > N$ gilt. Es folgt für $n, m > N$

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Das heißt Konvergenz und die Cauchy-Eigenschaft hängen irgendwie miteinander zusammen. Wir haben allerdings nur Konvergenz → Cauchy gezeigt. Eigentlich möchte man auch die andere Richtung haben um Konvergenzaussagen ohne Grenzwerte treffen zu können. Leider ist das im allgemeinen falsch wie wir gleich sehen werden.

§04.04 **Bemerkung.** Man kann Folgen auch rekursiv definieren. Zum Beispiel kann ich die Folge mit $a_n = 2^{-n} = 1/2^n$ auch so definieren:

$$a_1 = 1; \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n$$

Das praktische an dieser Darstellung ist: wenn $(a_n)_n$ eine konvergente Folge ist konvergiert sowohl $a_n$ als auch $a_{n+1}$ gegen den Grenzwert a. In dem Beispiel könnten wir den Grenzwert also bestimmen indem wir folgende Gleichung lösen:

$$a = \frac{a}{2} \to 2a = a \to a = 0$$

§04.05 **Bemerkung.** Sei A eine rationale Folge ($\in \mathbb{Q}$) definiert durch

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}$$

Diese Folge konvergiert in $\mathbb{R}$. Um den Grenzwert zu bestimmen lösen wir:

$$\begin{aligned} a = \frac{a + \frac{2}{a}}{2} &\Leftrightarrow 2a = a + \frac{2}{a} \\ &\Leftrightarrow a^2 = 2 \end{aligned}$$

Wir erhalten also als Lösung $a = \sqrt{2}$ da unsere Folge immer positiv war. Wie aber gesagt liegt dieser Grenzwert in $\mathbb{R}$ und nicht in $\mathbb{Q}$. Damit konvergiert die Folge nicht in $\mathbb{Q}$!

Damit konvergieren also nicht immer alle Cauchyfolgen. Es gibt jedoch eine große Menge an Vektorräumen wie z.B.: $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ in denen alle Cauchyfolgen konvergieren. Diese nennt man dann vollständig.

## §05 Übungsaufgaben

Das hier sind die Übungsaufgaben zum Folgen-Vortrag im Vorkurs WS 2014.

### 1. Aufgabe

Beweist die umgekehrte Dreiecks-Ungleichung

$$|\|\cdot\|x - \|\cdot\|y| \leqslant \|\cdot\|x - y$$

### 2. Aufgabe

Wir wollen uns die Konvergenz der rationalen Folge

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}$$

herleiten. Wir zeigen dazu:

1. Sei $A = (a_n)_n$ eine positive streng monoton fallende, d.h. $0 < a_{n+1} < a_n \forall n$, und beschränkte Folge. Dann konvergiert sie.
2. es gilt $1 < a_n < 2 \; \forall n \geqslant 2$
3. die Folge ist streng monoton fallend für $n \geqslant 2$. Ihr dürft benutzen, dass sogar $a_n > \sqrt{2}$ gilt.

### 3. Aufgabe

Zeigt oder widerlegt die Konvergenz der Folgen:

1. $a_n = \frac{n^2+4}{2n^2}$
2. $b_n = \cos(\pi n)$

### 4. Aufgabe

Unter Annahme ihrer Konvergenz, berechnet die Grenzwerte der Folgen:

$$a_n = \frac{4^{(2^n)}}{2^{(4^n)}} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{3^n + (-2)^n} \qquad c_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

### 5. Aufgabe

**Der goldene Schnitt:** Wir betrachten die sogenannte Fibonacci-Folge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Eine interessante Feststellung ist, dass das Verhältnisje zwei aufeinanderfolgender Zahlen gegen einen festen Wert konvergiert. Diesen nennt man den goldenen Schnitt

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Interessant ist ausserdem, dass dies für viele verschiedene Folgen gilt. Zeigt also:

Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ beliebig sind und

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Dann gilt für die Folge $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$: $b_n \to \Phi$

## §06 Lösungen zu den Übungsaufgaben

# Kapitel 7

# Gruppen

*Dieser Vortrag basiert auf den vorangegangenen Vorträgen von Jonas Müller bzw. Saskia Klaus.*

## §01 Einführung

§01.01 **Definition** *((abelsche) Gruppe).* Sei $G$ eine nicht-leere Menge, $e \in G$ ein (ausgezeichnetes) Element und

$$*\colon G \times G \to G$$

eine Abbildung. Wir nennen das Tripel $(G, *, e)$ eine *Gruppe*, falls für beliebige $a, b, c \in G$ gilt

(i) $(a * b) * c = a * (b * c)$ (Assoziativität)

(ii) $a * e = a$ (Ex. rechtsneutrales El.)

(iii) Es gibt $d \in G$ mit $a * d = e$ (Ex. rechtsinverses El.)

wir nennen die Gruppe zusätzlich *abelsch*, falls gilt

(iv) $a * b = b * a$ (Kommutativität)

§01.02 **Beispiel.** (a) $(\mathbb{Z}, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe

(b) $(\mathbb{Q}\backslash\{0\}, \cdot, 1)$ ist eine abelsche Gruppe

(c) $(\{-1, 1\}, \cdot, 1)$ ist eine abelsche Gruppe

(d) $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ ist keine Gruppe

§01.03 **Beispiel.** Wir betrachten die Menge der bijektiven Abbildungen $M = \{1, 2, 3\} \to M$

$$S_3 = \{e = \mathrm{id}_3,\ d_1 = (1\,2\,3),\ d_2 = (1\,3\,2),\ \tau_1 = (2\,3),\ \tau_2 = (1\,3),\ \tau_3 = (1\,2)\}$$

Als erstes fällt uns auf, dass für $f, g \in S_3\colon f \circ g \in S_3$. Z. B.: $d_1 \circ \tau_1 = (1\,2) = \tau_3 \in S_3$ oder $\tau_1 \circ d_1 = (1\,3) \in S_3$. Insbesondere gilt hier also nicht die Kommutativität.
Außerdem gilt für $f, g, h \in S_3\colon (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ f)$, denn es gilt für $x \in M$ beliebig:

$$((f \circ g) \circ h)(x) \overset{\text{Def}}{=} (f \circ h)(h(x)) \overset{\text{Def}}{=} f(g(h(x)))$$
$$(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$$

Also gilt die behauptete Gleichheit.
Da $e \in S_3$ jedes Element wieder auf sich selber abbildet, gilt für $f \in S_3\colon f \circ e = f$.
Außerdem können jede dieser Abbildungen wieder umkehren:

$$e \circ e = e,\ d_1 \circ d_2 = e,\ d_2 \circ d_1 = e\ \tau_1 \circ \tau_1 = e,\ \tau_2 \circ \tau_2 = e\ \tau_3 \circ \tau_3 = e$$

Insgesamt handelt es sich bei $S_3$ also um eine Gruppe.
Wenn wir nun die bijektiven Abbildungen $S_n$ von $M_n = \{1, \dots, n\}$ für $n \geqslant 3$ betrachten, fällt uns auf, dass diese auch nicht-abelsche Gruppen sind. Deshalb betrachten wir jetzt Gruppen, als Verallgemeinerung dieses Konzeptes, um Aussagen über all diese Mengen zu treffen.

## §02 Elementare Eigenschaften

§02.01 **Lemma**. *Sei $G$ eine Gruppe, $a, b \in G$, s. d., $a * b = e$. Dann gilt auch $b * a = e$, $b$ ist also auch ein linksinverses El. von $a$.*

§02.02 **Beweis**. Sei $c \in G$ rechtsinvers von $b$, also $b * c = e$. Dann gilt:

$$b * a \stackrel{1\text{ii}}{=} (b * a) * e \stackrel{b*c=e}{=} (b * a) * (b * c) \stackrel{1\text{i}}{=} b * (a * b) * c \stackrel{a*b=e}{=} b * e * c \stackrel{1\text{ii}}{=} b * c \stackrel{n.V}{=} e.$$

□

§02.03 **Lemma**. *Sei $G$ eine Gruppe, dann ist $e \in G$ auch linksneutral, also für $a \in G\colon e * a = a$.*

§02.04 **Beweis**. Sei $a \in G$ bel. und $b \in G$, s. d., $a * b = e$. Dann gilt:

$$e * a \stackrel{\text{n.V.}}{=} (a * b) * a \stackrel{1\text{i}}{=} a * (b * a) \stackrel{4}{=} a * e \stackrel{1\text{ii}}{=} a$$

□

§02.05 **Lemma**. *Sei $G$ eine Gruppe. Dann ist $e$ das einzige neutrale Element, d. h., für $\tilde{e} \in G$ ein neutrales Element gilt bereits $e = \tilde{e}$.*

§02.06 **Beweis**. Es gilt $e = e * \tilde{e} = \tilde{e}$ □

§02.07 **Lemma**. *Sei $G$ eine Gruppe, $a \in G$. Dann gilt es nur ein zu $a$ inverses Element. D. h., für $b, c \in G$ mit $a * b = e = a * c$ gilt bereits $b = c$*

§02.08 **Beweis**. Es ergibt sich

$$b \stackrel{5}{=} e * b \stackrel{\text{n.V.}}{=} (c * a) * b \stackrel{1\text{i}}{=} c * (a * b) \stackrel{\text{n.V.}}{=} c * e \stackrel{1\text{ii}}{=} c$$

□

§02.09 **Bemerkung**. Wir haben bis jetzt gesehen, dass ein rechtsneutrales Element auch ein linksneutrales Element ist und es nur ein Element mir dieser Eigenschaft gibt. Dieses Element nennen wir das *neutrale Element*.

Außerdem ist ein rechtsinverses Element auch ein linksinverses Element und zu jedem $a \in G$ gibt es genau ein $b \in G$ mit dieser Eigenschaft. Wir nennen dieses Element das *inverse Element von $a$* und wir schreiben $a^{-1} := b$. Insbesondere gilt $(a^{-1})^{-1} = a$. □

§02.10 **Lemma** *(Kürzungsregel)*. *Sei $G$ eine Gruppe. $a, b, c \in G$ mit $a * b = a * c$. Dann gilt $b = c$*

§02.11 **Beweis**. Seien $a, b, c \in G$ wie oben, dann gilt:

$$b \stackrel{5}{=} e * b \stackrel{1\text{iii}}{=} (a^{-1} * a) * b \stackrel{1\text{ii}}{=} a^{-1} * (a * b) \stackrel{\text{n.V.}}{=} a^{-1} * (a * c) \stackrel{1\text{i}}{=} (a^{-1} * a) * c \stackrel{1\text{i/iii}}{=} c$$

□

## §03 Untergruppen und Nebengruppen

§03.01 **Definition**. Sei $G$ eine Gruppe und $H \subseteq G$ nicht-leer. Wir nennen $H$ eine *Untergruppe* von $G$, falls für alle $a, b \in H$ gilt

(i) $a * b \in H$

(ii) $a^{-1} \in H$

□

§03.02 **Beispiel**. (a) $2\mathbb{Z} = \{2a \mid a \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$ ist eine Untergruppe

(b) $\{\pm 1\} \subseteq \mathbb{Q}$ ist eine Untergruppe

(c) Für $G$ eine Gruppe, ist $\{e\} \subseteq G$ eine Untergruppe

(d) $A_3 = \{e, d_1, d_2\} \subseteq S_3$ ist eine Untergruppe (sogar abelsch)

§03.03 **Lemma**. *Seien $G$ Gruppe, $H \subseteq G$ Untergruppe. Dann gilt $e \in H$ und $(H, *_{|H}, e)$ mit der auf $H$ eingeschränkten Verknüpfung selbst eine Gruppe. Gilt zusätzlich $G$ abelsch, dann ist $H$ abelsch.*

§03.04 **Beweis**. $H$ ist nicht-leer, also gibt es $a \in H$. Damit ist $a^{-1} \in H$ nach 10ii. Dann gilt $e = a * a^{-1} \in H$ nach 10i.

(0) Wohldefiniertheit: es muss gelten $\forall a, b \in H : a * b \in H$, dies gilt nach 10i

1. Assoziativ: Seien $a, b, c \in H$, dann gilt $a, b, c \in G$, also gilt

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

2. Rechtsneutrale Element: Es ist $e \in H$ und für $a \in H$: $a * e = a$

3. Inverses Element: folgt aus 10ii

4. Kommutativität: falls G abelsch ist, gilt für $a, b \in H$: $a * b = b * a$ in $G$, also auch in $H$

□

§03.05 **Lemma**. *Sei $G$ Gruppe, $H \subseteq G$, $e \in H$, $(H, *, e)$ Gruppe. Dann gilt $H \subseteq G$ Untergruppe.*

§03.06 **Beweis**.

(i) gilt, da $H$ wohldefiniert

(ii) folgt aus 1(iii)

□

§03.07 **Bemerkung**. $G$ eine Gruppe, $a \in G$. Für $n \in \mathbb{Z}$ definieren wir:

$$a^n := \begin{cases} \underbrace{a * a * \cdots * a}_{n\text{-mal}} & n > 0 \\ e & n = 0 \\ \underbrace{a^{-1} * a^{-1} * \cdots * a^{-1}}_{(-n)\text{-mal}} & n < 0, \end{cases}$$

es gilt

$$\langle a \rangle := \{a^n | n \in \mathbb{Z}\} \subseteq G$$

ist eine Untergruppe. Wir nennen diese, die *von $a$ erzeugte Untergruppe*.

§03.08 **Beweis**. Übungsaufgabe □

§03.09 **Definition**. $G$ Gruppe, $H \subseteq G$ Untergruppe. Wir definieren eine Relation auf $G$ via

$$a \sim_H b :\iff a^{-1}b \in H$$

□

§03.10 **Beispiel**. Wir betrachten $G = \mathbb{Z}$ und $H = 2\mathbb{Z}$. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ erhalten wir also

$$a \sim b \iff b - a \in 2\mathbb{Z}$$

Also muss die Differenz von $a$ und $b$ gerade sein. Das ist genau dann der Fall, wenn $a$ und $b$ beide gerade sind oder beide ungerade sind. □

§03.11 **Lemma**. *Die Relation aus* **??** *ist eine Äquivalenzrelation.*

§03.12 **Beweis**. Seien $a, b, c \in G$ beliebig

1. Reflexiv: $a^{-1}a = e \in H$, also $a \sim_H a$
2. Symmetrie: Gelte $a \sim_H b$, also $a^{-1}b \in H$
   Es gilt $(b^{-1}a) = (a^{-1}b)^{-1}$, denn:

   $$(a^{-1}b)(b^{-1}a) = a^{-1} * (bb^{-1}) * a = a^{-1}a = e$$

   Also $b^{-1}a = (a^{-1}b)^{-1} \in H$, folgt aus **??**ii, also $b \sim_H a$
3. Transitiv: Gelte $a \sim_H b$ und $b \sim_H c$. Dann gilt

   $$a^{-1}c = a^{-1}(bb^{-1})c = \underbrace{(a^{-1}b)}_{\in H}\underbrace{(b^{-1}c)}_{\in H} \in H$$

   also $a \sim_H c$

§03.13 **Lemma**. *$G$ Gruppe $H \subseteq G$ UG, $a \in G$. Dann ist die Äquivalenzklasse von $a$ bzgl $\sim_H$ gegeben durch*

$$[a] = aH := \{ah \mid h \in H\}$$

§03.14 **Beweis**. „$\subseteq$“ Sei $b \in [a]$, also $a \sim b$, also $a^{-1} * b = h \in H$. Damit erhalten wir

$$b = (aa^{-1})b = a(\underbrace{a^{-1}b}_{=h}) = ah$$

Also $b \in aH$.

„$\supseteq$“ Sei $b \in aH$, also $b = ah$ für $h \in H$. Wir erhalten

$$a^{-1}b = a^{-1}ah = h \in H$$

Also $a \sim b$ und $b \in [a]$.

§03.15 **Schreibweise**. Wir schreiben

$$G/H := G/\sim_H = \{[a] \mid a \in G\}$$

§03.16 **Beispiel**. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}, \{\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}\}$

## §04 Der Satz von Lagrange

§04.01 **Definition**. Sei $G$ eine Gruppe. Wir nennen $G$ *endlich*, falls die Menge $G$ nur endlich viele Elemente besitzt. Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Ist $G/H$ eine endliche Menge, so nennen wir

$$(G : H) := \#(G/H)$$

den *Index von $H$ in $G$*.

Sei $a \in G$. Wir definieren die *Ordnung* von $a$ durch

$$\operatorname{ord}(a) := \min\{n \in \mid a^n = e\} \qquad \text{wobei } \min \emptyset := \infty$$

□

§04.02 **Bemerkung**. Sei $G$ eine Gruppe, $a \in G$. Dann gilt

$$\operatorname{ord}(a) = \#\langle a \rangle$$

§04.03 **Beweis**. Übungsaufgabe □

§04.04 **Lemma**. *Sei $G$ eine Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann gilt*

1. *Je zwei Äquivalenzklassen sind gleichmächtig*
2. *Je zwei Äquivalenzklassen sind disjunkt oder gleich*
3. *$G$ ist die disjunkte Vereinigung der Äquivalenzklassen*

§04.05 **Beweis**. 1. Es genügt für $a \in G$ bel zu zeigen, dass $\#[a] = \#[e]$. Dafür betrachten wir $f\colon H \to aH, h \mapsto ah$. $f$ ist injektiv, denn seien $h_1, h_2 \in H$ mit $f(h_1) = f(h_2)$ dann gilt

$$ah_1 = f(h_1) = f(h_2) = ah_2 \overset{9}{\Longrightarrow} h_1 = h_2$$

Da $f$ injektiv ist, gilt nun $\#[a] \geqslant \#[e]$.

Außerdem ist $f$ surjektiv, denn sei $b = ah \in aH$. Dann gilt

$$b = f(h)$$

Damit ist $\#[a] \leqslant \#[e]$.

Also muss bereits $\#[a] = \#[e]$ gelten. Damit folgt nun für $a, b \in G$ beliebig

$$\#[a] = \#[e] = \#[b]$$

2. folgt da $\sim$-Äquivalenzrelation

3. folgt da $\sim$-Äquivalenzrelation

§04.06 **Satz** *(Lagrange)*. *Sei $G$ eine endliche Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann gilt:*

$$\#G = \#H \cdot (G : H)$$

§04.07 **Beweis**. Wir schreiben zunächst

$$G/H = \{[a_1], \dots, [a_n]\}$$

mit disjunkten $[a_1], \dots, [a_n]$ (Lemma 23ii) und $n = \#G/H = (G : H)$ (Definition 21). Wir haben

$$G = \dot{\bigcup_{i=1,\dots,n}} [a_i] \qquad \text{Lemma 23iii}$$

und damit folgt

$$\#G = \#\left(\dot{\bigcup_{i=1,\dots,n}} [a_i]\right) = \sum_{i=1}^{n} \#[a_i] \overset{23}{=} \sum_{i=1}^{n} \#[e] = n \cdot \#[e] = (G : H) \cdot \#H$$

□

§04.08 **Korollar**. *Sei $G$ eine endliche Gruppe, $a \in G$. Dann gilt* $\mathrm{ord}(a) | ord(G)$ *bzw.*

$$a^{\#G} = e$$

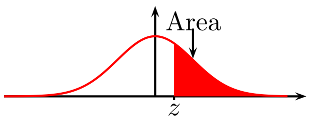
## §05 Übungsaufgaben

## §06 Lösungen zu den Übungsaufgaben

# Anhang

## A.1 Normalverteilung

Figure 1: Normal Curve Areas. Standard normal probability in right-hand tail. For negative values of $z$, areas are found by symmetry.




| | Second decimal place of $z$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 0 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
| 0.0 | .5000 | .4960 | .4920 | .4880 | .4840 | .4801 | .4761 | .4721 | .4681 | .4641 |
| 0.1 | .4602 | .4562 | .4522 | .4483 | .4443 | .4404 | .4364 | .4325 | .4286 | .4247 |
| 0.2 | .4207 | .4168 | .4129 | .4090 | .4052 | .4013 | .3974 | .3936 | .3897 | .3859 |
| 0.3 | .3821 | .3783 | .3745 | .3707 | .3669 | .3632 | .3594 | .3557 | .3520 | .3483 |
| 0.4 | .3446 | .3409 | .3372 | .3336 | .3300 | .3264 | .3228 | .3192 | .3156 | .3121 |
| 0.5 | .3085 | .3050 | .3015 | .2981 | .2946 | .2912 | .2877 | .2843 | .2810 | .2776 |
| 0.6 | .2743 | .2709 | .2676 | .2643 | .2611 | .2578 | .2546 | .2514 | .2483 | .2451 |
| 0.7 | .2420 | .2389 | .2358 | .2327 | .2296 | .2266 | .2236 | .2206 | .2177 | .2148 |
| 0.8 | .2119 | .2090 | .2061 | .2033 | .2005 | .1977 | .1949 | .1922 | .1894 | .1867 |
| 0.9 | .1841 | .1814 | .1788 | .1762 | .1736 | .1711 | .1685 | .1660 | .1635 | .1611 |
| 1.0 | .1587 | .1562 | .1539 | .1515 | .1492 | .1469 | .1446 | .1423 | .1401 | .1379 |
| 1.1 | .1357 | .1335 | .1314 | .1292 | .1271 | .1251 | .1230 | .1210 | .1190 | .1170 |
| 1.2 | .1151 | .1131 | .1112 | .1093 | .1075 | .1056 | .1038 | .1020 | .1003 | .0985 |
| 1.3 | .0968 | .0951 | .0934 | .0918 | .0901 | .0885 | .0869 | .0853 | .0838 | .0823 |
| 1.4 | .0808 | .0793 | .0778 | .0764 | .0749 | .0735 | .0721 | .0708 | .0694 | .0681 |
| 1.5 | .0668 | .0655 | .0643 | .0630 | .0618 | .0606 | .0594 | .0582 | .0571 | .0559 |
| 1.6 | .0548 | .0537 | .0526 | .0516 | .0505 | .0495 | .0485 | .0475 | .0465 | .0455 |
| 1.7 | .0446 | .0436 | .0427 | .0418 | .0409 | .0401 | .0392 | .0384 | .0375 | .0367 |
| 1.8 | .0359 | .0351 | .0344 | .0336 | .0329 | .0322 | .0314 | .0307 | .0301 | .0294 |
| 1.9 | .0287 | .0281 | .0274 | .0268 | .0262 | .0256 | .0250 | .0244 | .0239 | .0233 |
| 2.0 | .0228 | .0222 | .0217 | .0212 | .0207 | .0202 | .0197 | .0192 | .0188 | .0183 |
| 2.1 | .0179 | .0174 | .0170 | .0166 | .0162 | .0158 | .0154 | .0150 | .0146 | .0143 |
| 2.2 | .0139 | .0136 | .0132 | .0129 | .0125 | .0122 | .0119 | .0116 | .0113 | .0110 |
| 2.3 | .0107 | .0104 | .0102 | .0099 | .0096 | .0094 | .0091 | .0089 | .0087 | .0084 |
| 2.4 | .0082 | .0080 | .0078 | .0075 | .0073 | .0071 | .0069 | .0068 | .0066 | .0064 |
| 2.5 | .0062 | .0060 | .0059 | .0057 | .0055 | .0054 | .0052 | .0051 | .0049 | .0048 |
| 2.6 | .0047 | .0045 | .0044 | .0043 | .0041 | .0040 | .0039 | .0038 | .0037 | .0036 |
| 2.7 | .0035 | .0034 | .0033 | .0032 | .0031 | .0030 | .0029 | .0028 | .0027 | .0026 |
| 2.8 | .0026 | .0025 | .0024 | .0023 | .0023 | .0022 | .0021 | .0021 | .0020 | .0019 |
| 2.9 | .0019 | .0018 | .0018 | .0017 | .0016 | .0016 | .0015 | .0015 | .0014 | .0014 |
| 3.0 | .00135 | | | | | | | | | |
| 3.5 | .000 233 | | | | | | | | | |
| 4.0 | .000 031 7 | | | | | | | | | |
| 4.5 | .000 003 40 | | | | | | | | | |
| 5.0 | .000 000 287 | | | | | | | | | |