Skript zum

MATHEMATISCHEN VORKURS

Wintersemester 2021/22

Fassung Stand 20. September 2021

Habt ihr Fragen, Wünsche, Anregungen? Schreibt uns einfach eine
Mail: fachschaft@mathphys.stura.uni-heidelberg.de mit.

MATHEMATIKON, Im Neuenheimer Feld 205, 69120 Heidelberg
Telefon: +49 6221 54.14.999 – Fax: +49 6221 54.161.14.999
eMail: fachschaft@mathphys.stura.uni-heidelberg.de
Webseite: https://mathphys.stura.uni-heidelberg.de

Inhaltsverzeichnis

Das Skript zum mathematischen Vorkurs wurde zum Wintersemester 2021/2022 von Luka Thomé, Matthis Scholz, Nikolaus Betker, Maximilian Bur und Luna Cielibak grundlegend überarbeitet. Autoren der einzelnen Kapitel sind:

- Kapitel 1 Logik – Luka Thomé
- Kapitel 2 Beweise – Luka Thomé
- Kapitel 3 Mengen und Familien – Matthis Scholz
- Kapitel 4 Abbildungen – Nikolaus Betker, Luka Thomé
- Kapitel 5 Relationen – Matthis Scholz
- Kapitel 6 Folgen, Abstand und Grenzwerte – Maximilian Bur, Luka Thomé
- Kapitel 7 Verknüpfungen – Luka Thomé

Wir wünschen euch zwei schöne Vorkurswochen, einen guten Start ins Studentenleben und hoffen, euch mit diesem Skript einen ersten Einblick in die Uni-Mathematik bieten zu können, der neugierig auf mehr macht.

Nikolaus, Max, Luna, Matthis, Luka

Kapitel 1

Logik

In diesem Vortrag werden diejenigen sprachlichen Strukturen vorgestellt, die in der Mathematik verwendet werden, um Definitionen, Sätze und Beweise zu formulieren.

§1.1 Buchstaben in mathematischen Formeln

§1.1.01 **Definition** *(Zeichen mit einer konkreten Bedeutung versehen).* Gelegentlich ist es bequem ein konkretes, kompliziert definiertes Objekt mit einem Zeichen zu bezeichnen. Beispielsweise lässt sich mit Methoden der Analysis zeigen, dass die Gleichung $x^5 = x + 1$ genau eine Lösung in den reellen Zahlen besitzt[1] wohingegen sich mit Methoden der Algebra zeigen lässt, dass sich diese Lösung nicht mit den Operationen $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\sqrt{}$ konstruieren lässt[2]. Möchte man nun mit dieser Lösung arbeiten, so ist es umständlich, immer wieder „die eindeutige reelle Lösung der Gleichung $x^5 = x + 1$“ zu schreiben und es ist bequemer, einen Buchstaben zu verwenden. Dafür benutzen Mathematiker einen Imperativ:

„Sei ξ die eindeutige reelle Lösung der Gleichung $x^5 = x + 1$.“

Nun lassen sich komfortabel Sätze wie etwa „Es gilt $\xi^2 \cdot (\xi^8 - 1) = 2\xi + 1$“ formulieren.
Um formal ein Zeichen mit einer konkreten Bedeutung zu versehen, kann man das Symbol

$:=$ (lies: „ist definiert als“ oder „ist per Definition gleich“)

verwenden. Beispielsweise wird im Ausdruck

$$d := \mathrm{ggT}(108, 2048)$$

festgelegt, dass der Buchstabe d den größten gemeinsamen Teiler von 108 und 2048 bezeichnet.
Manchmal ist es deutlich lesbarer, Umgangssprache zu verwenden, als auf Teufel komm raus eine Formel mit dem Zeichen „$:=$“ hinzuschreiben. Z.B. ist

Sei x die kleinste positive Nullstelle der Kosinusfunktion.

sicherlich für viele Leute eine schneller verständlichere Definition als

$$x := \min\{y \in \mathbb{R}_{>0} \mid \cos(y) = 0\}$$

Dies ist auch eine Geschmacksfrage.

[1] Die Werkzeuge dafür werden in der Analysis 1-Vorlesung (oder vielleicht auch schon in der Schule) vermittelt.
[2] Die Werkzeuge dafür werden in der Drittsemestervorlesung „Algebra 1“ vermittelt.

§1.1.02 **Definition** *(Variable).* Eine **Variable** ist ein Zeichen, das als Platzhalter dient, an dessen Stelle Objekte von einer gewissen Sorte eingesetzt werden können. Die Sorte von Objekten, die für eine Variable eingesetzt werden kann, heißt der **Typ** dieser Variable. In modernen Mathebüchern werden Variablen meistens als kursive Buchstaben gedruckt. Ansonsten ist aber alles erlaubt: Großbuchstaben, Kleinbuchstaben, griechische Buchstaben, Hiraganazeichen usw. Beispielsweise können die folgenden Zeichen alle als Variablen verwendet werden:

$$A, B, m, n, \delta, \mu, x, y, \ldots$$

Prinzipiell darfst du jedes Zeichen als Variable verwenden, solange du festlegst, für welche Sorte von Objekten es als Platzhalter dient (z.B. „Sei n eine ungerade natürliche Zahl“). Allerdings haben sich in der Mathematik diverse Variablen-Konventionen eingebürgert, die du befolgen solltest, um deinen Text für andere Mathematiker leichter lesbar zu machen. Zum Beispiel:

- Natürliche Zahlen werden meist mit den Buchstaben $n, m, k, \ldots$ bezeichnet.
- Reelle Zahlen mit den Buchstaben $x, y, \ldots$.
- Komplexe Zahlen mit den Buchstaben $z, w, \ldots$.
- Funktionen werden meist mit den Buchstaben $f, g, \ldots$ bezeichnet.
- Vektoren mit den Buchstaben $v, w, \ldots$.
- In der mathematischen Logik kommt es sogar vor, dass „Metavariablen“ vom Typ „Variable“ auftauchen („Seien x, y zwei Variablen“).

Das alles sind aber keine strikten Regeln und du solltest, wann immer du Variablen verwendest, klarstellen, von welchem Typ sie sind. Um die Festlegung eines Variablentyps sprachlich hervorzuheben, verwenden Mathematiker dafür den Imperativ. Wie beispielsweise in „Seien x, y zwei reelle Zahlen“ oder „Es bezeichne n eine beliebige natürliche Zahl“.

§1.1.03 **Bemerkung** *(Variablen nie vom Himmel fallen lassen!).* Erstsemester vergessen nicht selten, ihre Variablen sachgemäß einzuführen. Wann immer du eine Variable wie „x“ oder „A“ verwendest, solltest du, z.B. mit einem „Sei…“-Imperativ, klarstellen, auf welche Sorte von Objekten sie sich bezieht. Es ist *sehr* nervig und verwirrend, wenn in Texten plötzlich Buchstaben auftreten, für die nie klargestellt wurde, was sie zu bedeuten haben.

§1.2 Ein bisschen Aussagenlogik

§1.2.01 **Definition** *(Aussage).* Eine **Aussage** ist ein feststellender Satz, dem ein Wahrheitswert wie „wahr“ oder „falsch“ zugeordnet werden kann und der vermittels der in diesem Paragraphen besprochenen *Junktoren* mit anderen Aussagen verknüpft werden kann.

§1.2.02 **Beispiel.** Parallel zur abstrakten Theorie werden uns in diesem Paragraphen die folgenden Beispielaussagen begleiten:

- $B_1 :=$ „Der Döner wurde in Deutschland erfunden.“
- $B_2 :=$ „Heute ist Mittwoch.“

- $B_3 :=$ „Es gibt außerirdisches Leben.“
- $B_4 :=$ „Der FC Bayern spielte eine schlechte Hinrunde.“
- $B_5 :=$ „Die Relativitätstheorie ist fehlerhaft.“

Nicht jeder deutsche Satz ist eine Aussage. Sätze, die eher nicht als Aussagen durchgehen würden, sind zum Beispiel:

- „Hoffentlich kommt der Kellner bald.“
- „Was möchten Sie trinken?“
- „Ein großes Bier, bitte!“

Eine systematische Operation, die aus einer Handvoll Aussagen eine neue Aussage hervorbringt (ähnlich wie etwa die Operation „$+$“ aus zwei Zahlen ihre Summe macht) heißt **Junktor** oder auch **logischer Operator**. In diesem Abschnitt werden die wichtigsten Junktoren vorgestellt.

§1.2.03 **Definition** *(Negation)*. Für eine Aussage A wird mit

$$\neg A \qquad\qquad \text{(lies: „nicht } A\text{“)}$$

die *Negation* von A notiert. $\neg A$ ist die Verneinung von A, d.h. $\neg A$ besagt, dass A nicht zutrifft. Beispielsweise sind die Negationen der Beispielaussagen von vorhin gegeben durch:

- $\neg B_1 =$ „Der Döner wurde nicht in Deutschland erfunden.“
- $\neg B_2 =$ „Heute ist nicht Mittwoch.“
- $\neg B_3 =$ „Es gibt kein außerirdisches Leben.“
- $\neg B_4 =$ „Der FC Bayern spielte keine schlechte Hinrunde.“
- $\neg B_5 =$ „Die Relativitätstheorie ist fehlerfrei.“

An den Beispielen wird deutlich, dass die Negation einer Aussage nicht immer durch das Signalwort „nicht“ erfolgen muss. Manchmal wird die Negation einer Aussage A auch mit einem Oberstrich notiert: $\overline{A}$.

§1.2.04 **Definition** *(Und-Verknüpfung)*. Zwei Aussagen A, B können zu ihrer **Konjunktion**

$$A \wedge B \qquad\qquad \text{(lies: „} A \text{ und } B\text{“)}$$

verknüpft werden, deren Bedeutung ist, dass sowohl A als auch B zutreffen. Beispiele für Konjunktionen sind etwa:

- $B_2 \wedge B_4 =$ „Heute ist Mittwoch und der FC Bayern spielte eine schlechte Hinrunde.“
- $B_3 \wedge B_5 =$ „Es gibt außerirdisches Leben, aber die Relativitätstheorie ist fehlerhaft.“
- $B_5 \wedge B_1 =$ „Nicht nur ist die Relativitätstheorie fehlerhaft – auch der Döner wurde in Deutschland erfunden.“

§1.2.05 **Bemerkung** *(Fachbegriffe).* Du brauchst dir im Vorkurs nicht gleich alle Fachbegriffe zu merken. Sofern du weißt, dass es eine Und- und eine Oder-Verknüpfung gibt, brauchst du dir nicht merken, dass sie auch „Konjunktion“ und „Disjunktion“ genannt werden. In diesem und den folgenden Vorträgen werden wir dennoch oft mehrere Wörter für dasselbe Konzept nennen, um dir zu erleichtern, die Begriffe im Internet nachzuschlagen.

§1.2.06 **Definition** *(Oder-Verknüpfung).* Zwei Aussagen A, B können zu ihrer **Disjunktion**

$$A \vee B \qquad \text{(lies: „}A\text{ oder }B\text{“)}$$

verknüpft werden, deren Bedeutung ist, dass von A, B mindestens eine Aussage zutrifft. Beispiele für Disjunktionen sind:

- $B_1 \vee B_3 =$ „Der Döner wurde in Deutschland erfunden oder es gibt außerirdisches Leben.“
- $B_2 \vee B_5 =$ „Wahlweise ist heute Mittwoch oder die Relativitätstheorie fehlerhaft.“
- $B_4 \vee B_4 =$ „Der FC Bayern spielte eine schlechte Hinrunde oder der FC Bayern spielte eine schlechte Hinrunde.“

§1.2.07 **Bemerkung** *(Ausschließendes Oder).* Die Disjunktion bezeichnet ein *einschließendes Oder* (lateinisch: „vel“), d.h. $A \vee B$ schließt auch den Fall ein, dass A und B beide gelten. In einer Mathematiker-Beziehung würde das Ultimatum „Unsere Beziehung – oder deine dummen Fernsehserien!“ keine Besorgnis erregen. Das „oder“ lässt ja auch zu, dass beides vorliegen kann. Möchte man ein ausschließendes Oder (Informatiker sprechen vom XOR, im Lateinischen wird das Wort „aut“ benutzt) verwenden, kann man dies durch

$$A \dot{\vee} B \qquad \text{(lies: „Entweder }A\text{ oder }B\text{“)}$$

notieren. Das „Entweder A oder B“ soll soviel wie „A oder B aber nicht beides“ bedeuten. Das Ultimatum „*Entweder* unsere Beziehung oder deine dummen Fernsehserien“ könnte selbst bei einem Mathematiker-Pärchen eine handfeste Beziehungskrise auslösen.
Beispielsweise ist

- „Eine natürliche Zahl ist entweder eine gerade oder eine ungerade Zahl” eine korrekte Aussage, während
- „Jeder Vorkursteilnehmer ist entweder MathestudentIn oder InformatikstudentIn“ falsch ist, da es ja VorkursteilnehmerInnen gibt, die beides studieren.

§1.2.08 **Definition** *(Implikationspfeil).* Zwei Aussagen A, B können zur („materiellen“) **Implikation**

$$A \to B$$

verknüpft werden: Deren Bedeutung ist, dass B von A impliziert wird. Dafür gibt es verschiedene Lesarten:

- „A impliziert B“.
- „Wenn A so auch B“.
- „Falls A, dann B“.

- „B folgt aus A“.
- „A ist eine hinreichende Bedingung für B“.
- „B ist eine Konsequenz von A“.
- usw.

Man nennt den Pfeil „$\to$“ auch den **Implikationspfeil** und die Aussage $A \to B$ auch ein *Konditional*. Beispiele für $\to$-Aussagen sind:

- $B_1 \to B_5$: „Wenn der Döner in Deutschland erfunden wurde, ist die Relativitätstheorie fehlerhaft“.
- $B_2 \to B_4$: „Sofern der FC Bayern eine schlechte Hinrunde gespielt hat, ist heute Mittwoch.
- $B_3 \to B_5$: „Unter der Annahme, dass es außerirdisches Leben gibt, ist die Relativitätstheorie fehlerhaft.“

Beachte, dass es beim Implikationspfeil „$\to$“ wesentlich auf die Reihenfolge ankommt. Während sich etwa die Aussagen $A \wedge B$ und $B \wedge A$ nicht in ihrer Bedeutung unterscheiden, sind $A \to B$ und $B \to A$ zwei grundlegend verschiedene Aussagen. Beispielsweise sind

(1) „Wenn heute Freitag ist, ist morgen Wochenende“.

(2) „Falls morgen Wochenende ist, ist heute Freitag“.

zwei erheblich verschiedene Aussagen. Aussage (1) ist korrekt aber Aussage (2) ist falsch, da ja auch Samstag sein könnte.

§1.2.09 **Definition** *(Äquivalenz).* Zwei Aussagen A und B lassen sich zur **Äquivalenz**

$$A \leftrightarrow B$$

verknüpfen, dessen Bedeutung ist, dass sowohl B von A impliziert wird als auch A von B impliziert wird. Lesarten dafür sind:

- „A ist äquivalent zu B“.
- „A genau dann wenn B“. Ist wenig Platz vorhanden, schreibt man abkürzend „A gdw. B“. In der englischen Literatur schreibt man “A iff B”.
- „A gilt dann und nur dann, wenn B“.

Man nennt den Doppelpfeil „$\leftrightarrow$“ **Äquivalenzzeichen** und die Aussage $A \leftrightarrow B$ auch ein *Bikonditional*. Beispiele für Äquivalenzaussagen sind:

- „Genau dann ist heute Mittwoch, wenn morgen Donnerstag ist“.
- $B_1 \leftrightarrow B_3$: „Dass der Döner in Deutschland erfunden wurde, ist äquivalent dazu, dass es außerirdisches Leben gibt“.

- Eine reelle Zahl x ist dann und nur dann eine negative reelle Zahl, wenn $-x$ eine positive reelle Zahl ist.

§1.2.10 **Bemerkung** *(* Die Pfeile → und ⇒).* In der Analysis formuliert man Aussagen, die von Funktionen und Folgen handeln; in der Algebra geht es um Aussagen, die von Vektoren, Polynomen, etc. handeln. – In der mathematischen Logik formuliert man Aussagen, die von Aussagen handeln. Daher liegen dort oft zwei Sprachebenen vor, die *Objektsprache*, in der diejenigen mathematischen Aussagen formuliert sind, die vom Logiker untersucht werden, sowie die *Metasprache*, der sich der Logiker bedient, um die objektsprachlichen Aussagen zu untersuchen. Ein Beispiel:

$$\underbrace{\text{Die Aussage „}}_{\text{Metasprache}}\underbrace{\text{5 ist eine gerade Zahl}}_{\text{Objektsprache}}\underbrace{\text{“ ist falsch.}}_{\text{Metasprache}}$$

Die objektsprachliche Implikation bzw. Äquivalenz wird mit einem einfachen Pfeil „$\rightarrow$“ bzw. „$\leftrightarrow$“ notiert, während die metasprachliche Implikation bzw. Äquivalenz mit einem doppelten Pfeil „$\Rightarrow$“ bzw. „$\Leftrightarrow$“ notiert wird.

Abseits der mathematischen Logik ist diese Unterscheidung aber überflüssig und die meisten Mathematiker verwenden die Implikationspfeile „$\rightarrow$“ und „$\Rightarrow$“ synonym. Benutze einfach den, der dir besser gefällt.

§1.2.11 **Bemerkung** *(Klammern setzen).* Mithilfe der Junktoren lassen sich bereits beliebig kompliziert verschachtelte Aussagen bilden wie z.B. $(B_1 \vee \neg B_2) \rightarrow (B_3 \wedge \neg B_5)$:

> „Sofern der Döner in Deutschland erfunden wurde oder heute nicht Mittwoch ist, gibt es außerirdisches Leben und die Relativitätstheorie ist fehlerfrei.“

oder $B_1 \vee (\neg B_2 \rightarrow (B_3 \wedge \neg B_5))$:

> „Der Döner wurde in Deutschland erfunden oder aber es gilt: wenn heute nicht Mittwoch ist, gibt es außerirdisches Leben und die Relativitätstheorie ist fehlerfrei.“

Bei verschachtelten Aussagen sollte man Klammern verwenden, um deutlich zu machen, welche Junktoren „weiter innen liegen“ und welche „als letztes angewendet“ werden. Möchte man Klammern vermeiden, kann man dies alternativ auch durch verschieden große Leerstellen zwischen den Zeichen deutlich machen oder ein Hybrid aus beidem verwenden:

$$B_1 \vee \neg B_2 \quad \rightarrow \quad B_3 \wedge \neg B_5$$

$$B_1 \quad \vee \quad \neg B_2 \rightarrow (B_3 \wedge \neg B_5)$$

Es gibt auch Konventionen, die die „Erstausführung“ gewisser Junktoren vor anderen Junktoren regeln, ähnlich der Regel „Punkt- vor Strichrechnung“. Die solltest du aber nur dann stillschweigend verwenden, wenn du dir sicher bist, dass dein Leser dieselbe Konvention auch kennt und benutzt.

§1.2.12 **Bemerkung** *(* weitere Junktoren).* Es gibt noch weitere Junktoren wie etwa:

- Der Sheffer-Strich „$A \mid B$“ (lies: „Nicht sowohl A als auch B“). In der Informatik spricht man auch von der NAND-Verknüpfung.
- Die Peirce-Funktion „$A \downarrow B$“ (lies: „Weder A noch B“). In der Informatik spricht man auch von der NOR-Verknüpfung.

§1.3 Ein bisschen Prädikatenlogik

1. Prädikate

§1.3.01 **Definition** *(Prädikat)*. Es sei n eine natürliche Zahl. Ein **n-stelliges Prädikat**[3] ist ein sprachliches Gebilde, in dem n-viele Variablen vorkommen und das zu einer Aussage wird, wenn für jede dieser Variablen ein konkretes Objekt eingesetzt wird.
1-stellige Prädikate nennt man auch **Eigenschaften**. Sprechen Mathematiker nur von „Prädikaten", so meinen sie damit in der Regel einstellige Prädikate.
Ist $n \geqslant 2$, so spricht man auch von **n-stelligen Relationen**. Sprechen Mathematiker einfach nur von „Relationen", so meinen sie damit in der Regel zweistellige Relationen. Drei- oder höherstellige Relationen tauchen in der Mathematik selten auf.

§1.3.02 **Bemerkung**. In der Notation werden die Variablen eines Prädikats manchmal mitgeschrieben: ist E ein n-stelliges Prädikat, das die Variablen $x_1, \dots, x_n$ enthält, so schreibt man auch „$E(x_1, \dots, x_n)$" um zu betonen, dass die Variablen von E genau $x_1, \dots, x_n$ sind. Dies ist ähnlich zur Funktionen-Notation in der Schule: ist f eine Funktion in der Variablen x, so notiert man diese Funktion in der Schule auch als „$f(x)$".

§1.3.03 **Beispiel**. Beispiele für einstellige Prädikate, also für Eigenschaften, sind etwa:

a) $E(m) :\Leftrightarrow$ „m ist eine gerade Zahl", wobei m eine Variable vom Typ „natürliche Zahl" sei. Setzt man hier für die Variable m beispielsweise die konkreten Zahlen 4 und 5 ein, erhält man die Aussagen „4 ist eine gerade Zahl" bzw. „5 ist eine gerade Zahl".

b) $D(X) :\Leftrightarrow$ „X wurde in Deutschland erfunden", wobei sich die Variable X auf kulinarische Errungenschaften beziehen soll. Setzt man hier für die Variable X das Objekt „Der Döner" ein, erhält man gerade die Aussage „Der Döner wurde in Deutschland erfunden". Setzt man dagegen das Objekt „Die Pizza" ein, erhielte man die Aussage „Die Pizza wurde in Deutschland erfunden".

c) $M(x) :\Leftrightarrow$ „x ist der größte Mathematiker", wobei die Variable x vom Typ „MathematikerIn" sei. Setzt man hier für die Variable x z.B. das Objekt „Alexander Grothendieck" ein, erhält man die Aussage „Alexander Grothendieck ist der größte Mathematiker". Dagegen ergäbe es keinen Sinn, für x das Objekt „Der Döner" einzusetzen.

Wir haben hier, um eine Eigenschaft mit einem Buchstaben zu bezeichnen, nicht das Symbol „$:=$" sondern das Symbol „$:\Leftrightarrow$" (lies: „ist per Definition äquivalent zu" oder „soll per Definition bedeuten, dass") verwendet. Bei der Definition von Aussagen und Prädikaten kommt das schonmal vor, man könnte aber genausogut auch immer „$:=$" verwenden. Ist Geschmackssache.

§1.3.04 **Beispiel**. Zweistellige Prädikate sind zum Beispiel:

a) „x ist kleiner als y", wobei x, y zwei Variablen vom Typ „reelle Zahl" seien. Diese Relation lässt sich auch kompakt als Formel „$x < y$" notieren.

b) $A(X, Y) =$ „X ist älter als Y", wobei für die Variablen konkrete Menschen eingesetzt werden sollen.

[3] Beachte, dass das Wort „Prädikat" in der Logik eine andere Bedeutung als in der Grammatik, wo es das Verb in einem Satz bezeichnet, trägt. Es handelt sich also um ein Homonym, d.h. ein Wort, das mehrere Bedeutungen, die nichts miteinander zu tun haben, hat.

c) $L(X, Y) =$ „X liebt Y“, wobei die Variablen vom Typ „Figur aus Jane Austens ‘Stolz und Vorurteil’“ seien.

d) „n lässt bei der Division durch 3 denselben Rest wie m übrig“, wobei für n und m jeweils ganze Zahlen eingesetzt werden sollen. Mathematiker schreiben auch kurz

$$n \equiv m \mod 3$$

und sagen „n ist kongruent zu m modulo 3“.

2. Quantoren

Mengen werden das zentrale Thema im dritten Vortrag sein. Daher wird an dieser Stelle nur das Allernötigste eingeführt, um den Umgang mit Quantoren bequem zu machen.

§1.3.05 **Definition**. Eine **Menge**[4] ist eine Gesamtheit von Dingen und als solche selbst wiederum ein Gegenstand des Denkens. Sie ist allein dadurch bestimmt, welche Dinge ihr angehören und welche nicht. Diejenigen Objekte, die einer Menge angehören, werden ihre **Elemente** genannt. Für ein Objekt a und eine Menge M ergibt es nur Sinn, zu fragen ob a ein Element von M ist oder nicht – dagegen ergäbe es keinen Sinn, danach zu fragen, „auf welche Weise“ oder „wie oft“ a ein Element von M wäre.

§1.3.06 **Definition** *(Extension einer Eigenschaft)*. Sei E ein einstelliges Prädikat. Dann wird mit

$$\{x \mid E(x)\} \qquad \text{(lies: „Menge aller } x \text{, für die gilt: } E(x)\text{“)}$$

die Menge all derjenigen Objekte, die die Eigenschaft E besitzen, bezeichnet. Sie heißt die **Extension** (oder auch „Umfang“ oder „Ausdehnung“) des Prädikats E. Manche Autoren schreiben anstelle des Querstrichs | auch einen Doppelpunkt:

$$\{x : \ E(x)\}$$

§1.3.07 **Beispiel**. Beispielsweise sind

- $\{M \mid M \text{ ist ein Mensch}\}$ die Menge aller Menschen.
- $\mathbb{Z} := \{n \mid n \text{ ist eine ganze Zahl}\}$ die Menge der ganzen Zahlen.

§1.3.08 **Definition** *(Elementzeichen)*. Sind M eine Menge und a ein Objekt, so schreibt man

$$\begin{aligned} a \in M \quad &:\Leftrightarrow \quad a \text{ ist ein Element von } M \\ a \notin M \quad &:\Leftrightarrow \quad a \text{ ist kein Element von } M \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für jedes Objekt a und jedes Prädikat E:

$$E(a) \qquad \leftrightarrow \qquad a \in \{x \mid E(x)\}$$

[4] Was in diesem Vortrag „Menge“ genannt wird, würde in der formalen Mengelehre eher als „Klasse“ bezeichnet werden.

§1.3.09 **Bemerkung** *(Eigenschaften vs. Mengen).* Vermöge ihrer Extension bestimmt jede Eigenschaft eine Menge. Umgekehrt bestimmt auch jede Menge eine Eigenschaft, nämlich die Eigenschaft, ein Element von ihr zu sein. Auf diese Weise hat man eine wechselseitige Beziehung zwischen Eigenschaften und Mengen.

§1.3.10 **Definition** *(Diskursuniversum).* Um Quantoren sinnvoll verwenden zu können, muss vorher ein **Diskursuniversum** festgelegt werden. Dies ist eine Menge, auf deren Elemente sich die Quantoren beziehen sollen. Jede beliebige Menge kann als Diskursuniversum gewählt werden. Auch die Gesamtheit *aller* Objekte kann als Diskursuniversum gewählt werden.

§1.3.11 **Definition** *(Allaussage).* Es sei $E(x)$ eine Eigenschaft. Dann lässt sich die **Allaussage**

$$\forall x : \; E(x) \qquad \text{(lies: „Für jedes } x \text{ gilt } E(x)\text{“)}$$

bilden, deren Bedeutung ist, dass *jedes* Objekt aus dem Diskursuniversum die Eigenschaft E besitzt. Beispiele:

- Sind das Diskursuniversum die Menge der Bewohner meiner WG und $A(m) :\Leftrightarrow$ „m ist heute früh aufgestanden“, so besagt $\forall m : \; A(m)$, dass jeder in meiner WG heute früh aufgestanden ist.

- Sind das Diskursuniversum die Menge der Primzahlen und $U(p) :\Leftrightarrow$ „p ist eine ungerade Zahl“, so bezeichnet $\forall p : \; U(p)$ die (falsche) Aussage, dass jede Primzahl eine ungerade Zahl ist.

Das Zeichen $\forall$ heißt **Allquantor**.

§1.3.12 **Definition** *(Existenzaussage).* Es sei $E(x)$ eine Eigenschaft. Dann lässt sich die **Existenzaussage**

$$\exists x : \; E(x) \qquad \text{(lies: „Es gibt ein } x\text{, für das } E(x) \text{ gilt“)}$$

bilden, deren Bedeutung ist, dass *mindestens ein* Objekt aus dem Diskursuniversum die Eigenschaft E besitzt. Beispiele:

- Sind das Diskursuniversum die Menge der Bewohner meiner WG und $A(m) :\Leftrightarrow$ „m ist heute früh aufgestanden“, so besagt $\exists m : \; A(m)$, dass mindestens einer in meiner WG heute früh aufgestanden ist.

- Sind das Diskursuniversum die Menge der Primzahlen und $U(p) :\Leftrightarrow$ „p ist eine ungerade Zahl“, so bezeichnet $\exists p : \; U(p)$ die (wahre) Aussage, dass es mindestens eine Primzahl gibt, die ungerade ist.

Das Zeichen $\forall$ heißt **Existenzquantor**.

Die Negation einer Existenzaussage notiert man mit dem Zeichen $\nexists$. D.h. anstelle von „$\neg(\exists x : E(x))$“ schreibt man

$$\nexists x : \; E(x) \qquad \text{(lies: „Es existiert kein } x\text{, für das } E(x) \text{ gilt“)}$$

Im Beispiel von gerade eben hieße „$\nexists m : \; A(m)$“, dass in meiner WG heute niemand früh aufgestanden ist.

Für den Allquantor gibt es keine dazu analoge Notation. So etwas wie „$\not\forall$“ ist meiner Erfahrung nach nicht gebräuchlich.

§1.3.13 **Bemerkung** *(Diskursuniversen sind prinzipiell obsolet).* Sofern nicht anders angegeben, wird als Diskursuniversum zumeist die Gesamtheit *aller* mathematischen Objekte gewählt. Der Bereich von Dingen, der in der momentanen Situation gerade relevant ist, wird dann direkt in die Aussagen integriert. Beispielsweise kann die Aussage „Es gibt eine natürliche Zahl, die kleiner als 3 ist“ auch durch

$$\exists x: \quad (x \text{ ist eine natürliche Zahl}) \wedge (x < 3)$$

formalisiert werden und die Aussage „Jede natürliche Zahl ist kleiner als 3“ kann durch

$$\forall x: \quad (x \text{ ist eine natürliche Zahl}) \rightarrow (x < 3)$$

formalisiert werden. Hierbei wird dann implizit vorausgesetzt, dass sich die Quantoren auf die Gesamtheit *aller* Objekte beziehen.
Sind M irgendeine Menge und E eine Eigenschaft, so schreibt man abkürzend

$$\begin{array}{lll} \forall x \in M: \ E(x) & :\Leftrightarrow \quad \forall x: \ (x \in M) \rightarrow E(x) & \text{(lies: „Für jedes } x \text{ aus } M \text{ gilt } E(x)\text{“)} \\ \exists x \in M: \ E(x) & :\Leftrightarrow \quad \exists x: \ (x \in M) \wedge E(x) & \text{(lies: „Es gibt ein } x \text{ aus } M\text{, für das } E(x) \text{ gilt“)} \end{array}$$

Auf diese Weise lässt sich kompakt notieren, dass alle Elemente von M die Eigenschaft E besitzen bzw. dass es mindestens ein Element von M gibt, das die Eigenschaft E besitzt.

§1.3.14 **Beispiel** *(Syllogistik).* Die Prädikatenlogik ist in der Lage, die Satzformen der mittelalterlichen Syllogistik zu formalisieren. Für ein Beispiel seien

$$\begin{aligned} M &:= \{x \mid x \text{ ist ein Mensch}\} \\ G &:= \{g \mid g \text{ ist ein Gott}\} \\ H(x) &:\Leftrightarrow \text{„}x \text{ ist ein Grieche“} \\ S(x) &:\Leftrightarrow \text{„}x \text{ ist sterblich“} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{array}{ll} \forall x \in M: \ S(x) & \text{„Alle Menschen sind sterblich“} \\ \exists x \in M: \ H(x) & \text{„Einige Menschen sind Griechen“} \\ \exists x \in M: \ \neg H(x) & \text{„Einige Menschen sind keine Griechen“} \\ \nexists x \in G: \ S(x) & \text{„Keine Götter sind sterblich“} \end{array}$$

§1.3.15 **Bemerkung** *(* freie Variablen vs. gebundene Variablen).* Im Ausdruck „x ist eine negative Zahl“ kann für die Variable x eine beliebige reelle Zahl eingesetzt werden. Ebenso z.B. in der Gleichung „$x(x+1) = 2$“. Um die Freiheit in der Belegung einer Variable zu betonen, spricht man auch von einer **freien Variable**. Dagegen ist der Buchstabe „n“ im Ausdruck „Für jede gerade natürliche Zahl n ist auch n^2 eine gerade Zahl“ oder der Buchstabe „x“ in „$\forall x: \ x(x+1) = 2$“ keine Variable mehr, da es keinen Sinn ergäbe, für sie ein konkretes Objekt einzusetzen, wie etwa

$$\forall 5: \ 5(5+1) = 2 \qquad \text{(dieser Ausdruck ergibt keinen Sinn)}$$

Man sagt, „die Variable wird durch den Quantor gebunden“ und nennt das Zeichen „x“ in „$\forall x: \; x(x+1) = 2$“ eine **gebundene Variable**. Es handelt sich nicht mehr um eine Variable im Sinn von Definition §1.1.02, sondern nur noch um ein „Dummy-Zeichen“, das in der Umgangssprache sogar meistens vermieden werden kann. So würde man den Ausdruck

$$\forall x: \; (x \text{ ist ein Mensch}) \to (x \text{ ist sterblich})$$

umgangssprachlich als „Alle Menschen sind sterblich“ lesen und nicht etwa als „Für jedes x gilt: sofern x ein Mensch ist, ist x sterblich“.
Gebundene Variablen kennst du auch schon aus der Schule: Beispielsweise sind die Variablen „a, b, c, x“ im Ausdruck „$ax^2 + bx + c$“ jeweils freie Variablen etwa vom Typ „reelle Zahl“, für die jede beliebige reelle Zahl eingesetzt werden kann. Im Ausdruck

$$\int_0^1 (ax^2 + bx + c) \, dx$$

ist das Zeichen „x“ dagegen eine gebundene Variable, ein „Dummy-Zeichen“ das nur noch deutlich machen soll, über welche Variable integriert wird (man spricht von der „Integrationsvariable“). Es ergäbe keinen Sinn, eine konkrete Zahl einzusetzen wie etwa

$$\int_0^1 (a4^2 + b4 + c) \, d4 \qquad \text{(dieser Ausdruck ergibt keinen Sinn)}$$

Dagegen sind hier die Zeichen a, b, c nachwievor freie Variablen, in die Zahlen eingesetzt werden können wie zum Beispiel

$$\int_0^1 (2x^2 + 3x + 1) \, dx$$

§1.3.16 **Bemerkung**. Bisher wurden die beiden Quantoren „$\forall$“ und „$\exists$“ verwendet, um aus Eigenschaften Aussagen zu erhalten. Allgemein können sie n-stellige Prädikate zu $(n-1)$-stelligen Prädikaten machen. Beispielsweise wird das zweistellige Prädikat

$$x < y$$

durch Binden der Variable x zum einstelligen Prädikat

$$\forall x: \; x < y$$

Hierbei ist nun x eine gebundene Variable und y eine freie Variable, es liegt also ein einstelliges Prädikat vor. Das kann nun zu einer Aussage gemacht werden, indem man wahlweise für y ein konkretes Objekt einsetzt wie z.B. „$\forall x: \; x < 3$“ oder aber auch y mit einem Quantor bindet wie z.B.

$$\exists y: \; \forall x: \; x < y$$

Ist n eine natürliche Zahl, so kann jedes n-stellige Prädikat zu einer Aussage gemacht werden, indem jede der Variablen wahlweise durch ein konkretes Objekt ersetzt oder aber durch einen Quantor gebunden wird.

§1.3.17 **Bemerkung** *(Schreibkonventionen bei mehreren Quantoren).* Verwendet man mehrere Quantoren unmittelbar hintereinander, schreibt man den Doppelpunkt oft nur hinter den letzten Quantor:

$\exists y\, \forall x:\ x < y$ (lies: „Es gibt ein y, sodass für alle x gilt, dass $x < y$“)
$\forall x\, \exists y:\ x < y$ (lies: „Für jedes x gibt es ein y, für das $x < y$ gilt“)

Manche Autoren lassen die Doppelpunkte hinter Quantoren auch ganz weg.

§1.3.18 **Bemerkung.** Beachte, dass es bei Quantoren verschiedener Art auf die Reihenfolge ankommt. Seien etwa das Diskursuniversum die Menge aller Menschen und $M(x, y) :\Leftrightarrow$ „y ist Mutter von x“. Dann sind

- $\forall x\, \exists y:\ M(x, y)$: „Für jeden Menschen x gilt: es gibt einen Menschen y, der Mutter von x ist“.
- $\exists y\, \forall y:\ M(x, y)$: „Es gibt einen Menschen y, sodass für jeden Menschen x gilt: y ist Mutter von x“.

zwei grundlegend verschiedene Aussagen. Die erste Aussage ist wahr, da jeder Mensch eine Mutter hat. Die zweite Aussage aber ist falsch, weil ja nicht alle Menschen Geschwister sind.

§1.3.19 **Definition** *(Eindeutigkeitsquantor).* Das Zeichen $\exists!$ heißt **Eindeutigkeitsquantor**. Ist $E(x)$ eine Eigenschaft, so bezeichnet

$\exists! x:\ E(x)$ (lies: „Es gibt genau ein x, für das $E(x)$ gilt“)

die Aussage, dass es *genau ein* Objekt im Diskursuniversum gibt, dass die Eigenschaft E besitzt. Ist M eine Menge, so besagt die Formel

$\exists! x \in M:\ E(x)$ (lies: „Es gibt genau ein x aus M, für das $E(x)$ gilt“)

dass es genau ein Element von M gibt, das die Eigenschaft E besitzt (außerhalb von M darf es aber auch andere Elemente geben, die die Eigenschaft E besitzen). Beispiele:

- Ist B die Menge der Bewohner meiner WG und $A(m) :\Leftrightarrow$ „m ist heute früh aufgestanden“, so besagt $\exists! m \in B:\ A(m)$, dass genau ein Bewohner meiner WG heute früh aufgestanden ist.
- Die Formel „$\exists! n \in \mathbb{N}:\ 32 + n = 101$“ bezeichnet die Aussage: „Es gibt genau eine natürliche Zahl n, für die $32 + n = 101$ ist.“
- Die Formel „$\exists! x \in \mathbb{R}:\ x^2 = 3$“ bezeichnet die (falsche) Aussage „Es gibt genau eine reelle Zahl x, für die $x^2 = 3$ gilt“.

§1.3.20 **Bemerkung** *(Zurückführung von $\exists!$ auf die anderen beiden Quantoren).* Mithilfe der Gleichheitrelation „$=$“ kann der Eindeutigkeitsquantor aus den anderen beiden Quantoren zusammengesetzt werden:

$$\exists! x:\ E(x) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists x:\ E(x) \quad \wedge \quad \forall x\, \forall y:\ (E(x) \wedge E(y)) \to x = y$$

Dies besagt, dass es mindestens ein Objekt mit der Eigenschaft E gibt und dass je zwei Objekte, die beide die Eigenschaft E besitzen, bereits übereinstimmen müssen.
Für eine Menge M kann man definieren:

$$\exists! x \in M:\ E(x) \quad :\Leftrightarrow \quad (\exists x \in M:\ E(x)) \ \wedge\ (\forall x, y \in M:\ (E(x) \wedge E(y)) \to x = y)$$

§1.3.21 **Bemerkung** *(Mäßigung in der Verwendung von Formelsprache!).* Nach den ganzen Formeln aus diesem Abschnitt eine **Warnung**: Einige Mathe-Anfis gelangen zu der Meinung, in der Mathematik käme es darauf an, Aussagen möglichst formelhaft zu notieren und Quantoren und Junktoren möglichst nie in Umgangssprache, sondern so oft wie möglich als Formelzeichen aufzuschreiben. Manche schreiben auch furchtbare Hybride wie „Daher $\exists$ eine Zahl n, die ein Teiler von $a \wedge$ ein Teiler von b ist“ auf.
Widerstehe dieser Idee! Mathematische Texte und Beweise sind zuallererst mal ein Akt der Kommunikation, in dem der Autor / die Autorin dem Leser eine Information übermitteln möchte. Die Effizienz dieser Informationsübermittlung muss für dich immer an erster Stelle stehen. Lass dich nicht von (unter Mathematikern recht verbreiteten) Formel-Neurosen unterwerfen! Die Einführung der Symbole $\neg, \wedge, \rightarrow, \forall, \exists$ usw. geschieht **nicht**, damit wir ab sofort alles in diesen Zeichen aufschreiben. Sondern sie dient uns dazu, die Strukturen mathematischer Aussagen und Argumente analysieren und in aller Allgemeinheit besprechen und reflektieren zu können.

§1.4 Zweiwertige Interpretationen

1. Wahrheitswerte

§1.4.01 **Bemerkung** *(Bivalenzprinzip).* In der klassischen Aussagenlogik ist eine „natürliche“ Struktur, die die Menge der Wahrheitswerte trägt, die Struktur einer sogenannten „boolschen Algebra“. Im Vorkurs beschränken wir uns auf diejenige boolsche Algebra, die ausschließlich aus den beiden Wahrheitswerten „wahr“ und „falsch“ besteht. Diese Einschränkung nennt man auch das „Prinzip der Zweiwertigkeit“ oder „Bivalenzprinzip“[5].

§1.4.02 **Definition** *(Interpretation).* Eine (zweiwertige) **Interpretation** einer Aussage X ist die Zuweisung eines der beiden Wahrheitswerte „wahr“ oder „falsch“ zu X. Diese Zuweisung darf allerdings nicht vollkommen frei erfolgen, sondern muss den folgenden Regeln gehorchen:

- Ist X eine Aussage, die sich mittels der Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ aus anderen Aussagen A, B, denen ebenfalls ein Wahrheitswert zugewiesen wurde, zusammensetzt, so muss sich der Wahrheitswert von X nach den folgenden Regeln aus den Wahrheitswerten von A und B ergeben:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Diese sogenannte **Wahrheitstafel** ist folgendermaßen zu lesen: In den beiden linken Spalten sind alle möglichen Kombinationen aufgelistet, wie A und B mit Wahrheitswerten belegt sein können. Für jede solche Kombination muss dann der Wahrheitswert von $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$ etc. aus der jeweiligen Zeile übernommen werden. Beispielsweise darf die Aussage „$A \vee B$“ nur dann als falsch interpretiert werden, wenn sowohl A als auch B

[5] Philosophen sprechen auch vom „Satz vom ausgeschlossenen Dritten“. Dieser besitzt in der mathematischen Logik aber eine andere Bedeutung als das Bivalenzprinzip, siehe Axiom §2.8.01

als falsch interpretiert wurden; in den anderen drei Fällen, also falls mindestens eine der beiden Aussagen A, B als wahr verstanden wird, muss auch $A \vee B$ als wahr interpretiert werden.

- Ist E eine Eigenschaft, so ist die Allaussage $\forall x : \ E(x)$ als wahr zu interpretieren, falls für jedes Objekt a aus dem Diskursuniversum die Aussage $E(a)$ als wahr interpretiert ist. Wurde dagegen für ein Objekt a aus dem Diskursuniversum die Aussage $E(a)$ als falsch interpretiert, so ist auch „$\forall x : \ E(x)$" als falsch zu interpretieren.

- Ist E eine Eigenschaft, so ist die Existenzaussage $\exists x : \ E(x)$ als wahr zu interpretieren, falls es mindestens ein Objekt a aus dem Diskursuniversum gibt, bei dem die Aussage $E(a)$ als wahr interpretiert ist. Wurde dagegen für jedes Objekt a aus dem Diskursuniversum die Aussage $E(a)$ als falsch interpretiert, so ist auch „$\exists x : \ E(x)$" als falsch zu interpretieren.

§1.4.03 **Beispiel**. Seien A, B, C drei Aussagen. Um den Wahrheitswert von

$$D := \quad (A \vee \neg B) \to C \quad \wedge \quad \neg C$$

für alle möglichen Interpretationen von A, B, C zu ermitteln, stellt man eine Wahrheitstafel auf, die auf der linken Seite mit allen möglichen Wahrheitswerte-Kombinationen für A, B, C startet und in den rechten Spalten in wachsender Komplexität mit den relevanten Verschachtelungen von A, B und C fortfährt, bis in der Spalte ganz rechts die gesuchten Wahrheitswerte stehen:

A	B	C	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$(A \vee \neg B) \to C$	$\neg C$	$((A \vee \neg B) \to C) \wedge \neg C$
w	w	w	f	w	w	f	f
w	w	f	f	w	f	w	f
w	f	w	w	w	w	f	f
w	f	f	w	w	f	w	f
f	w	w	f	f	w	f	f
f	w	f	f	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	f	f
f	f	f	w	w	f	w	f

Also gibt es nur einen Fall, in dem D eine wahre Aussage ist; nämlich wenn B wahr ist und A, C falsch sind.
Schon an diesem Beispiel wird vielleicht deutlich, dass das Aufstellen von Wahrheitstafeln eine einfache, aber auch mechanische Tätigkeit ist, die anfällig für Flüchtigkeitsfehler ist und sehr gut einem Computer überlassen werden kann.

§1.4.04 **Bemerkung**. Die Wahrheitstafel des Implikationspfeils

A	B	$A \to B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

verwirrt manche Anfänger, da sie nicht das umgangssprachliche Verständnis von „B folgt aus A" wiedergibt. Setzt man beispielsweise

- $A :=$ „Der Döner wurde in Deutschland erfunden“
- $B :=$ „529 ist eine Quadratzahl.“

so ist B eine wahre Aussage. Egal, ob A nun wahr oder falsch ist, ergibt sich aus der Wahrheitstafel des Implikationspfeils, dass „Sofern der Döner in Deutschland erfunden wurde, ist 529 eine Quadratzahl“ eine wahre Aussage ist, obwohl B mit A ja gar nichts zu tun hat.
Der Implikationspfeil braucht in der Mathematik **nichts** mit einem kausalen Zusammenhang zu tun zu haben. „$A \to B$“ besagt eher soviel wie „Wenn ich A annehme, kann ich B beweisen“. Im nächsten Vortrag wird ausführlich darauf eingegangen, siehe Axiom §2.2.01 und Axiom §2.2.12.

2. Tautologien

§1.4.05 **Definition.** Eine Aussage heißt

- **Tautologie** oder auch **allgemeingültig**, falls sie unter jeder möglichen Interpretation eine wahre Aussage ist.
- **erfüllbar**, falls es mindestens eine Interpretation gibt, unter der sie eine wahre Aussage ist.
- **unerfüllbar**, falls sie unter keiner möglichen Interpretation eine wahre Aussage ist.

§1.4.06 **Beispiel.** Es gilt:

a) Die Aussage „Heute ist Mittwoch“ ist erfüllbar, aber keine Tautologie.

b) Die Aussage „Genau dann ist heute Mittwoch, wenn heute Mittwoch ist“ ist eine Tautologie.

c) Für beliebige Aussagen A, B sind die Aussagen

$$A \to (A \lor B) \qquad A \to \neg\neg A \qquad \neg(A \land \neg A)$$

jeweils Tautologien, was mithilfe von Wahrheitstafeln überprüft werden kann. Hier ist eine Wahrheitstafel für die Formel $\neg(A \land \neg A)$:

A	$\neg A$	$A \land \neg A$	$\neg(A \land \neg A)$
w	f	f	w
f	w	f	w

d) Für beliebige Aussagen A, B sind die Aussagen

$$\neg(A \to (A \lor B)) \qquad A \leftrightarrow \neg A \qquad A \land \neg A$$

unerfüllbar. Hier ist eine Wahrheitstafel für $A \leftrightarrow \neg A$:

A	$\neg A$	$A \leftrightarrow \neg A$
w	f	f
f	w	f

§1.4.07 **Satz** *(Nützliche Tatsachen für Tautologien). Seien A, B zwei beliebige Aussagen. Dann gilt:*

a) Genau dann ist A unerfüllbar, wenn $\neg A$ eine Tautologie ist.

b) Genau dann ist $A \leftrightarrow B$ eine Tautologie, wenn die Interpretationen, unter denen A wahr ist, genau dieselben sind, unter denen B wahr ist.

c) Genau dann ist $A \rightarrow B$ eine Tautologie, wenn unter jeder Interpretation, unter der A eine wahre Aussage ist, auch B eine wahre Aussage ist. Diejenigen Interpretationen, unter denen A falsch ist, spielen hierbei keine Rolle.

§1.4.08 **Beweis.** a) Betrachte die Wahrheitstafel der Negation:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Unter einer festen Interpretation ist $\neg A$ genau dann wahr, wenn A falsch ist. Dass $\neg A$ unter allen Interpretationen wahr ist, heißt dann genau, dass A unter allen Interpretationen falsch ist.

b) Aus der Wahrheitstafel der Äquivalenz

A	B	$A \leftrightarrow A$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

liest man ab, dass $A \leftrightarrow B$ genau dann wahr ist, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben. Also ist $A \leftrightarrow B$ genau dann eine Tautologie, wenn A und B unter jeder Interpretation denselben Wahrheitswert haben, was, da wir gemäß dem Bivalenzprinzip nur mit zwei verschiedenen Wahrheitswerten „w“ und „f“ arbeiten, gleichwertig dazu ist, dass A und B unter genau denselben Interpretationen wahr sind.

c) Betrachte die Wahrheitstafel der Implikation:

A	B	$A \rightarrow A$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Dass $A \rightarrow B$ eine Tautologie ist, heißt, dass $A \rightarrow B$ unter keiner möglichen Interpretation falsch sein kann. Dies ist äquivalent dazu, dass der Fall, dass A wahr und B falsch ist, niemals auftreten kann. Und das heißt gerade, dass, wann immer A wahr ist, auch B wahr sein muss. ■

§1.4.09 **Bemerkung** *(*).* Eine große Liste aussagenlogischer Tautologien findest du im Anhang dieses Skripts. Wenn du Lust hast, versuche mal, dir intuitiv für ein paar der Formeln klarzumachen, dass es sich um Tautologien handeln muss. So kannst du ein besseres Verständnis für die Junktoren erwerben.

§1.4.10 **Bemerkung** *(* Entscheidbarkeit der Aussagenlogik).* Ist A eine noch so kompliziert verschachtelte Aussage, die keine Prädikate und Quantoren enthält, sondern sich ausschließlich mittels der Junktoren aus anderen Aussagen zusammensetzt, so lässt sich mithilfe von Wahrheitstafeln stets überprüfen ob A eine Tautologie ist. Mit genügend Rechenkapazität kann mir mein Computer also einfach ausrechnen, ob eine Tautologie vorliegt oder nicht. Man sagt, die Aussagenlogik sei (algorithmisch) **entscheidbar**. Sobald Quantoren ins Spiel kommen, reichen Wahrheitstafeln aber nicht mehr aus: in der mathematischen Logik wird bewiesen, dass es keinen Algorithmus gibt, der für eine beliebige, sich mittels Junktoren und Quantoren aus Prädikaten und Aussagen zusammensetzende Aussage entscheiden kann, ob es sich um eine Tautologie handelt oder nicht. Man spricht von der **Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik**. Das wäre auch zu schön, denn ein solcher Algorithmus wäre ein „mathematisches Orakel", das für jede mathematische Aussage ausrechnen könnte, ob sie stets wahr ist oder nicht. Gäbe es so etwas, wären die meisten Mathematiker auf einen Schlag arbeitslos.
Für ein Beispiel seien das Diskursuniversum die natürlichen Zahlen und $E(n)$ das Prädikat „Wenn n eine gerade Zahl und größer als drei ist, dann lässt sich n als Summe zweier Primzahlen schreiben". Die Aussage $\forall n: \; E(n)$ heißt *Goldbachsche Vermutung* und konnte bislang weder bewiesen noch widerlegt werden. Sie lässt sich als eine Art „unendliche Konjunktion"

$$E(1) \wedge E(2) \wedge E(3) \wedge E(4) \wedge E(5) \wedge \dots$$

auffassen. Solche „unendlichen Konjunktionen" entziehen sich aber aussagenlogischen Methoden und sind nicht mehr mit Wahrheitstafeln beherrschbar. Würde man die Konjunktionenkette ab einer bestimmten Zahl abbrechen

$$E(1) \wedge E(2) \wedge \cdots \wedge E(10^{30})$$

so befände sich alles im Rahmen der Aussagenlogik und man müsste nur nacheinander prüfen, ob jede der Zahlen $1, \dots, 10^{30}$ die Eigenschaft E besitzt (was mithilfe von Hochleistungsrechnern tatsächlich verifiziert werden konnte). Aber das reicht ja nicht aus, um die Aussage für *alle* natürlichen Zahlen zu verifizieren. Dafür bräuchte der Rechner unendlich viel Zeit.
Da es kein Patenzrezept gibt, für eine allgemeine prädikatenlogisch aufgebaute Aussage zu entscheiden, ob sie eine Tautologie ist oder nicht, müssen andere Techniken verwendet werden, um zumindest für einige Aussagen beurteilen zu können, ob sie als „wahre" mathematische Aussagen gehandelt werden können. Dafür sind die Beweismethoden, die im nächsten Vortrag behandelt werden, da.

§1.5 Aufgabenvorschläge

§1.5.01 **Aufgabe** *(Umgangssprache in Formeln übersetzen).* Zerlegt die folgenden Aussagen mithilfe der im Vortrag behandelten Junktoren und Quantoren in möglichst einfache Grundbausteine.

a) Wenn ich entweder alle Prüfungen im ersten Versuch bestehe oder aber durch alle Prüfungen im ersten Versuch durchfalle, werde ich die ganze Nacht hindurch feiern.

b) Sofern er morgen Abend weder arbeiten muss noch Besuch von seiner Familie kriegt, würde er sich mit mir treffen.

c) Alle reellen Lösungen der Ungleichung $x^3 - 3x < 3$ sind kleiner als 10.

d) Nobody's perfect.

e) Wenn es irgendjemand schafft, dann Henrik.

f) Wenn Henrik es schafft, dann schafft es jeder.

g) Eine natürliche Zahl $p \neq 1$ ist genau dann eine Primzahl, falls gilt: für alle natürlichen Zahlen a, b mit $p = ab$ ist $a = 1$ oder $b = 1$.

§1.5.02 **Aufgabe** *(Formeln in Umgangssprache übersetzen).* Übersetzt die folgenden Aussagenformeln in Umgangssprache und beurteilt, ob es sich um wahre oder falsche Aussagen handelt:

a) $\exists x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{Z} : \; x < y$

b) $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{Z} : \; x < y$

c) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{Z} : \; x < y$

d) $\exists y \in \mathbb{Z}\, \forall x \in \mathbb{R} : \; x < y$

e) $\forall x \in \mathbb{R} : \; (x^2 - x = 0 \leftrightarrow (x = 1 \vee x = 0))$

f) $\exists! x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R} : \; (y \neq 0 \;\wedge\; x \cdot y = 0)$

§1.5.03 **Aufgabe** *(Wahrheitstafeln).* Seien A, B, C drei beliebige Aussagen. Entscheidet mithilfe von Wahrheitstafeln, unter welchen Umständen die folgenden Aussagen wahr sind:

a) $$A \to B \quad \leftrightarrow \quad A \wedge \neg B$$

b) $$A \to (B \to C) \quad \leftrightarrow \quad (A \wedge B) \to C$$

c) $$A \to B \quad \leftrightarrow \quad \neg A \to \neg B$$

§1.5.04 **Aufgabe** *(Seltsame Formeln).* An der Tafel von Captain Chaos stehen die folgenden Ausdrücke:

(i) $A \neg\!\!\to \neg A$

(ii) $\exists x \in x : \; x(x)$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N} : \; 1 < 3$

(iv) $\forall E : \; E(x)$

(v) $\forall x \in \mathbb{R} : \; x$

(vi) $\forall x_1\, \exists x_2\, \forall x_3\, \exists x_4\, \forall x_5 \; \ldots : \; E(x_1, x_2, x_3, \ldots)$

Was haltet ihr davon?

Kapitel 2

Beweise

In diesem Vortrag werden die grundlegenden logischen Schlussregeln und Beweistechniken erklärt und anhand von Beispielbeweisen vorgestellt. Außerdem werden vorherrschende Normen für das Schreiben schöner und gut lesbarer Beweise besprochen.

§2.1 Logisches Schließen

§2.1.01 **Definition.** Eine **logische Schlussregel** ist ein Prinzip der Gestalt „Aus den Aussagen X kann auf die Aussage Y geschlossen werden“. Die Aussagen X heißen dabei die **Prämissen** der Schlussregel und die Aussage Y heißt ihre **Konklusion**. Die Anwendung einer Schlussregel heißt **logische Schlussfolgerung** oder auch *deduktiver Schluss*.

§2.1.02 **Beispiel.** Seien A, B irgend zwei Aussagen. Die Schlussregel „Modus tollens“ (die später in Axiom §2.6.02 auftauchen wird) geht folgendermaßen:

$$\begin{array}{r} A \to B \\ \neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$

Sie besagt: „Aus $A \to B$ und $\neg B$ kann auf $\neg A$ geschlossen werden“. Die Prämissen dieser Schlussregel sind $A \to B$ und $\neg B$ und die Konklusion ist $\neg A$.

Sind beispielsweise $A :=$ „Ich bin reich“ und $B :=$ „Ich gehe jeden Tag ins Restaurant“, so erhielte man

Wäre ich reich, würde ich jeden Tag ins Restaurant gehen.
Ich gehe nicht jeden Tag ins Restaurant.
———
Also gilt: Ich bin nicht reich.

welches ein Beispiel für eine logische Schlussfolgerung ist.

§2.1.03 **Definition** *(Axiom)*. In der Regel liegen einer mathematischen Theorie einige Aussagen zugrunde, die nicht bewiesen, sondern ohne Begründung als „gegeben“ vorausgesetzt werden. Sie heißen **Axiome** und kodieren oftmals Eigenschaften derjenigen Objekte, von denen die Theorie handelt.

§2.1.04 **Definition** *(„Es gilt…“)*. Sei A eine Aussage. Wir schreiben „A ist gültig“ oder „Es gilt A“ oder „A ist wahr“, falls es möglich ist, die Aussage A mit einer Abfolge logischer Schlussfolgerungen aus den im Kontext angenommenen Axiomen herzuleiten.

§2.1.05 **Bemerkung** *(* Beweisbarkeit vs. Wahrheit)*. Beachte, dass dies erst einmal nichts mit den Wahrheitswerten aus Definition §1.4.02 zu tun haben muss. Wahrheit und Herleitbarkeit sind zwei verschiedene Dinge: Falls die Axiome fehlerhaft sind, brauchen nicht alle aus ihnen ableitbaren Aussagen wahr sein; und falls man mit zu wenigen Axiomen arbeitet, kann es wahre Aussagen geben, die sich nicht aus den Axiomen herleiten lassen.[1]

§2.1.06 **Definition** *(Satz und Beweis).* Ein **mathematischer Satz** ist die Feststellung in einem mathematischen Text, dass eine Aussage A „gilt“, d.h. dass sie vermöge der in der Mathematik üblichen logischen Schlussregeln aus denjenigen Aussagen, die im Umfeld des Satzes axiomatisch angenommen werden, hergeleitet werden kann.

Ein **mathematischer Beweis** für A ist eine (mehr oder weiger ausführliche) Beschreibung einer solchen Herleitung, die dich von der Gültigkeit von A überzeugt.

§2.1.07 **Beispiel** *(*).* In der synthetischen Geometrie sind die beiden Aussagen

(A1) Auf jeder Geraden liegen mindestens zwei Punkte.

(A2) Durch je zwei verschiedene Punkte verläuft genau eine Gerade.

Axiome, die nicht hergeleitet werden, sondern Teile unseres Verständnisses von „Punkten“ und „Geraden“ kodieren. Allein aus diesen beiden Axiomen kann nun schon die folgende Aussage hergeleitet werden:

§2.1.08 **Satz** *(*).* *Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in höchstens einem gemeinsamen Punkt.*

§2.1.09 **Beweis.** Seien g, h zwei Geraden, die mindestens zwei verschiedene Schnittpunkte P, Q haben. Nach (A2) gibt es *genau eine* Gerade, die durch die beiden Punkte P, Q verläuft. Da g, h beide durch P, Q verlaufen, folgt also aus (A2), dass $g = h$ gelten muss. Also sind zwei Geraden, die mindestens zwei Schnittpunkte miteinander haben, einander gleich, woraus folgt, dass verschiedene Geraden höchstens einen Schnittpunkt miteinander haben können. ■

§2.1.10 **Bemerkung** *(* Ausführlichkeit eines Beweises).* Komplizierte Beweise involvieren dutzende logische Schlussfolgerungen und ein Mathe-Lehrbuch würde, schriebe man alle Beweise in größter Ausführlichkeit auf, den halben Regenwald verschlingen. Daher listen mathematische Beweise selten jede einzelne logische Schlussfolgerung auf, sondern beschreiben mehrere logische Schlüsse auf einmal und führen „Routine-Argumente“, von denen erwartet werden kann, dass sie der Leser mit Leichtigkeit selbst ergänzen kann, gar nicht erst aus. Aus der Schule bist du es ja auch gewohnt, in einer langen Rechnung nicht jeden einzelnen Rechenschritt separat aufzuschreiben. Der Grad an Ausführlichkeit der Beweise eines Lehrbuchs oder einer Vorlesung bestimmt, wie anspruchsvoll sie ist. Im extremsten Fall wird in einem Beweis gar nicht argumentiert, sondern es wird lediglich behauptet, die Aussage gelte „offensichtlicherweise“ oder „sei klar“. In den meisten Fällen sind solche Aussagen tatsächlich „offensichtlich“; manchmal kommt es aber auch vor, dass der Prof. selbst nicht weiß, dass die Zwischenschritte, die er gerade überspringt, weil er sie für „trivial“ hält, einer komplizierten Begründung bedürfen. Dann kann es passieren, dass er/sie bei einer Zwischenfrage minutenlang auf dem Schlauch steht. Mit Floskeln wie „gilt offensichtlich“ oder „ist trivial“ solltest du äußerst vorsichtig umgehen. In den meisten Fällen ist ihre Verwendung schlechter Stil.

[1] Dass es kein überschaubares Axiomensystem geben kann, aus dem sich jede wahre und keine falsche Aussage herleiten lässt, besagt der Erste Gödelsche Unvollständigkeitssatz.

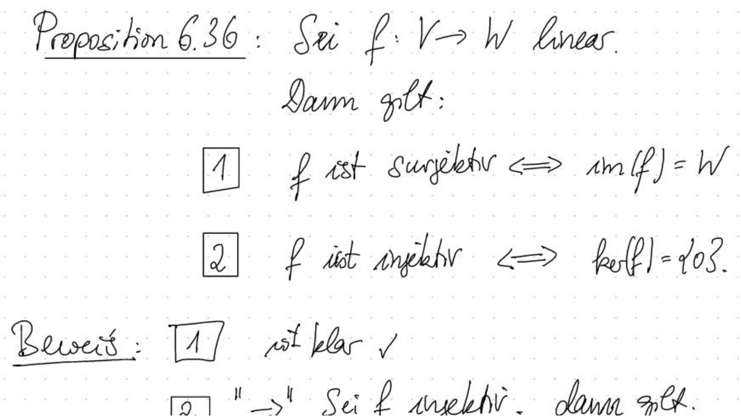


Abbildung 2.1: Beispiel aus der LA1 vom Wintersemester 2020/21 für einen „Beweis“, in dem gar nichts argumentiert wurde.

§2.1.11 **Bemerkung** *(* Subjektivität des Beweisbegriffs).* Das Wort „überzeugt“ in unserer Beweisdefinition deutet eine subjektive Komponente an. Wenn dich ein Vorlesungs-„Beweis“ nicht überzeugen kann, dann ist er für dich eben auch kein Beweis. Ein Beweistext kann für den Einen ein befriedigender Beweis sein, während er für den Anderen völlig unverständlich und praktisch wertlos ist. Wenn dir unmittelbar klar ist, dass eine Aussage gilt, kann sogar ein „Ist-klar-Beweis“ überzeugend sein.

Nichtsdestotrotz gibt es gewisse Regeln und Techniken, über deren Zulässigkeit ein Konsens besteht. Beweise, die diesen Regeln unterliegen, muss ein Mathematiker anerkennen. Dass Beweise nicht überzeugend sind, kommt so gut wie nie von Verstößen gegen die Logik her; sondern eher von der Verwendung obskurer Begriffe, dem Mangel an Erläuterung komplizierter Beweisschritte, Schreibfehlern, dem Verschleiern von Beweislücken oder einem zu hohen Beweisniveau, dem die LeserInnen nicht folgen können.

Bereits in diesem Vortrag werden wir Beweise führen, nämlich um zu demonstrieren, wie sich gewisse logische Schlussregeln und Beweistechniken aus anderen ableiten lassen. Setz dich aber nicht unter Druck, die Herleitungen der Beweistechniken lückenlos nachvollziehen zu müssen, sondern begreife sie als Erklärungen, die plausibel machen sollen, warum die Beweistechniken Sinn ergeben. Letztendlich musst du dich selbst davon überzeugen, wie genau ist gar nicht so wichtig. In den Mathevorlesungen (mal abgesehen von Vorlesungen über Logik, wo es genau darum geht) werden die üblichen Beweistechniken größtenteils ohne weitere Begründung verwendet und ab der zweiten Semesterwoche erwartet auch niemand mehr, dass du die Logik, die deinen Beweisen zugrundeliegt, rechtfertigst (solange sie halt nicht „unlogisch“ ist).

Dieser Vorkurs-Vortrag bietet nur einen Crashkurs. Eine schöne und weit ausführlichere (aber auch sehr seitenstarke) Darstellung bietet das Buch Velleman [2006], vor allem dessen Kapitel 3.

§2.2 Implikationen

In diesem Abschnitt seien A, B stets zwei beliebige Aussagen.

§2.2.01 **Axiom** *(Der direkte Beweis).* *Um die Aussage „$A \to B$“ zu beweisen, kannst du die Technik des* ***direkten Beweises*** *benutzen:*
Nimmt an, dass die Aussage A gilt und zeige nun mithilfe dieser Annahme (und aller weiteren Aussagen, die dir zur Verfügung stehen), dass auch B gilt.

§2.2.02 **Beispiel.** Sofern der FC Bayern München nach dem vorletzten Spieltag bereits vier Punkte vor dem Tabellenzweiten steht, wird er Deutscher Meister.

§2.2.03 **Beweis.** Es sei einmal angenommen, der vorletzte Spieltag sei zuende gespielt worden und der FC Bayern liege vier Punkte vor dem Tabellenzweiten. Weil nur noch ein Spieltag verbleibt, kann der Zweite (und jeder weiter unten stehende Verein) nur noch höchstens drei Punkte im letzten Spieltag gewinnen. Also sind dann die Bayern (schon wieder) uneinholbar und werden Deutscher Meister. ■

§2.2.04 **Bemerkung** *(* Zusammenhang zur Interpretation von „$\to$“).* Im Logik-Vortrag in Satz §1.4.07 wurde die folgende Aussage T gezeigt:

> (T): Die Implikation $A \to B$ ist genau dann eine Tautologie, wenn unter jeder (zweiwertigen) Interpretation, unter der A eine wahre Aussage ist, auch B eine wahre Aussage ist.

Dies resultierte aus der Beschaffenheit der Wahrheitstafel für den Implikationspfeil:

A	B	$A \to B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Vermittels der Aussage (T) kann diese Wahrheitstafel zur Rechtfertigung der Technik des direkten Beweises verwendet werden. Umgekehrt kannst du aber auch die Technik des direkten Beweises als „natürlicher“ ansehen und die Aussage (T) als Rechtfertigung für die Wahrheitstafel des Implikationspfeils verstehen.

§2.2.05 **Bemerkung** *(Signalwörter).* Wenn du die Implikation $A \to B$ direkt beweist, kannst du dies deutlich machen, indem du den Beweis mit „Es gelte A“, „Es sei angenommen, dass A gilt“ oder Ähnlichem beginnst.

§2.2.06 **Satz** *(Jede Aussage impliziert sich selbst).* *Es gilt*[2]

$$A \to A$$

§2.2.07 **Beweis.** Für einen direkten Beweis sei angenommen, dass A gilt. Weil unter dieser Annahme ja A gilt, ist schon alles bewiesen. ■

§2.2.08 **Satz** *(Wahres folgt aus Beliebigem).* *Es gilt*

$$A \to (B \to A)$$

Mit anderen Worten: Sofern A gilt, wird A auch von B impliziert.

[2] vgl. Satz §3.1.08a)

§2.2.09 **Beweis.** Für einen direkten Beweis sei angenommen, dass A gilt. Nun ist zu zeigen, dass auch $B \to A$ gilt. Dazu sei zusätzlich angenommen, dass B gilt. Nun gilt auch A, weil dies ja schon ganz zu Beginn des Beweises angenommen wurde. ∎

§2.2.10 **Bemerkung** *($\to$ bedeutet keine Kausalität!).* Die Aussage, dass Wahres aus Beliebigem folgt, mag seltsam erscheinen (und wird unter die Paradoxien der materialen Implikation gezählt), da dann ja auch Wahres aus solchen Aussagen folgt, die gar nichts damit zu tun haben. Beispielsweise ist „Sofern der Döner in Deutschland erfunden wurde, ist 4 eine Quadratzahl" eine wahre Aussage. Dass dies „paradox" erscheint, kommt von einer inadäquaten Interpretation des Implikationspfeils „$\to$":
Die Aussage $A \to B$ besagt in keinster Weise, dass es einen kausalen Zusammenhang zwischen A und B geben muss; sondern nur, dass B unter Annahme von A gilt. Ein Beispiel: Da es, sofern sich das Rad einer Windmühle dreht, windig ist, ist „Wenn sich das Windrad dreht, ist es windig" eine korrekte Aussage. Aber dies besagt natürlich nicht, dass es windig ist, *weil* sich das Windrad dreht, geschweige denn, dass der Wind von der Windmühle erzeugt würde.

§2.2.11 **Bemerkung** *(* Relevanzlogiken).* Logiken, die sich darum bemühen, dass „$\to$" wirklich die Bedeutung einer kausalen Implikation trägt, nennt man „Relevanzlogiken", da dort für eine Implikation $A \to B$ gefordert wird, dass A in irgendeiner Hinsicht „relevant" für B ist. In Relevanzlogiken ist die Technik des direkten Beweises nicht mehr uneingeschränkt zulässig.

§2.2.12 **Axiom** *(Modus ponens). Die logische Schlussregel*

$$\begin{array}{r} A \to B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

heißt „Modus ponens". Sie besagt: Wann immer dir gegeben ist, dass sowohl $A \to B$ als auch A gültig sind, kannst du daraus B schlussfolgern.

§2.2.13 **Beispiel.** Ich habe angekündigt, dass ich, sofern ich zum Bürgermeister gewählt werde, Freibier für alle stiften werde. Sofern ich nun tatsächlich zum Bürgermeister gewählt werde, folgt, dass jedem Freibier ausgeschenkt wird.

§2.2.14 **Bemerkung** *(Logik-Latein).* Du brauchst dir nicht merken, dass diese Schlussregel „Modus ponens" heißt. Ebensowenig brauchst du dir die anderen lateinischen Bezeichnungen in diesem Vortrag zu merken. Wir geben die Wörter nur an, um dir das Nachschlagen im Internet zu erleichtern.

§2.2.15 **Bemerkung. Vorsicht**: Anfänger machen gelegentlich den Fehler, aus $A \to B$ und B auf die Aussage A zu schließen. Hier ist ein Beispiel für diesen Fehlschluss:

> Sei x eine reelle Zahl. Bekanntlich gilt $(x = 3) \to (x^2 = 9)$. Wenn also tatsächlich $x^2 = 9$ ist, so muss $x = 3$ sein.

Mach dir klar, warum diese Argumentation unzulässig ist.

§2.2.16 **Satz** *(Direkter Beweis mit Zwischenschritten). Seien n eine natürliche Zahl und $Z_1, \ldots, Z_n$ eine Handvoll Aussagen. Um die Implikation $A \to B$ zu beweisen, kannst du die Implikationen*

$$A \to Z_1, \quad Z_1 \to Z_2, \quad \ldots, \quad Z_{n-1} \to Z_n \quad \text{und} \quad Z_n \to B$$

beweisen.[3] *In diesem Fall verwendest du die Aussagen $Z_1, \ldots, Z_n$ als* ***Zwischenschritte****.*

§2.2.17 **Beweis**. Es sei angenommen, dass ich alle Implikationen $A \to Z_1$, $Z_1 \to Z_2$, …, $Z_n \to B$ bewiesen habe. Um zu zeigen, dass dann auch $A \to B$ gilt, sei angenommen, dass A gilt. Wegen $A \to Z_1$ folgt, dass dann auch Z_1 gilt. Wegen $Z_1 \to Z_2$ folgt, dass auch Z_2 gilt. Auf diese Weise können wir schrittweise die Z's durchgehen, sodass am Ende auch Z_n bewiesen ist. Und wegen $Z_n \to B$ gilt dann auch B. ■

§2.2.18 **Beispiel**. Falls es nächsten Sommer (schon wieder) zu wenig regnet, wird der Fichtenwald in meiner Heimatstadt gerodet werden.

§2.2.19 **Beweis**. Wenn es nächstes Jahr wieder zu wenig regnet, fehlt es den Fichten an Flüssigkeit, um ausreichend Harz für eine widerstandsfähige Rinde auszubilden. Dies erleichtert es Borkenkäfern, innerhalb der Rinde zu nisten, sodass sich die Borkenkäferpopulation im Wald stark vergrößert und Bäume teilweise absterben werden. Unter diesem Umstand wird die örtliche Forstbehörde beschließen, den Wald zum Schutz vor umstürzenden Bäumen und einer weiteren Ausbreitung der Borkenkäfer zu roden.

§2.2.20 **Bemerkung** *(*)*. Sind n eine natürliche Zahl und $Z_1, \ldots, Z_n$ ein paar Aussagen, für die $Z_1 \to Z_2, Z_2 \to Z_3, \ldots, Z_{n-1} \to Z_n$ gilt, so schreibt man auch kurz

$$Z_1 \to Z_2 \to \ \ldots \ \to Z_n$$

Beispielsweise könnte die Argumentation von gerade eben folgendermaßen dargestellt werden:

Nächstes Jahr regnet es zu wenig.

$\to$ Den Fichten fehlt es an Flüssigkeit, um ausreichend Harz für eine widerstandsfähige Rinde auszubilden.

$\to$ Borkenkäfern wird es erleichtert, innerhalb der Rinde zu nisten.

$\to$ Die Borkenkäferpopulation im Wald wird stark vergrößert und Bäume sterben teilweise ab.

$\to$ Die örtliche Forstbehörde beschließt, den Wald zum Schutz vor umstürzenden Bäumen und einer weiteren Ausbreitung der Borkenkäfer zu roden.

§2.3 Äquivalenzen

In diesem Abschnitt seien A, B stets zwei beliebige Aussagen.

§2.3.01 **Axiom**. *Aus dem Vorliegen der beiden Implikationen $A \to B$ und $B \to A$ kann auf die Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ geschlossen werden.*[4]

$$\begin{array}{c} A \to B \\ B \to A \\ \hline A \leftrightarrow B \end{array}$$

[3] vgl. Satz §3.1.08c)
[4] vgl. Satz §3.1.08b)

§2.3.02 **Bemerkung** *(Hin- und Rückrichtung)*. Wenn du die Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ beweisen willst, kannst du deinen Beweis also in zwei Teile aufteilen: In der sogenannten **Hinrichtung** beweist du die Implikation $A \to B$. In der **Rückrichtung** beweist du die Implikation $B \to A$.

§2.3.03 **Beispiel**. Sei n eine natürliche Zahl. Genau dann ist n ein Vielfaches von 6, wenn es zugleich ein Vielfaches von 2 und ein Vielfaches von 3 ist.

§2.3.04 **Beweis**. „$\to$": Sei n ein Vielfaches von 6. Dies besagt, dass es eine natürliche Zahl k mit $n = 6 \cdot k$ gibt. Es folgt

$$n = 2 \cdot (3k) \qquad \text{und} \qquad n = 3 \cdot (2k)$$

also ist n sowohl ein Vielfaches von 2 als auch von 3.

„$\leftarrow$": Es sei n sowohl ein Vielfaches von 2 als auch von 3. Demzufolge gibt es natürliche Zahlen k, l mit

$$n = 2k \qquad \text{und} \qquad n = 3l$$

Es folgt

$$\begin{aligned} n &= 1 \cdot n \\ &= (3-2) \cdot n \\ &= 3n - 2n \\ &= 3 \cdot 2k - 2 \cdot 3l && \text{(wegen } n = 2k \text{ und } n = 3l\text{)} \\ &= 6k - 6l \\ &= 6 \cdot (k - l) \end{aligned}$$

Also ist n auch ein Vielfaches von 6. ■

§2.3.05 **Bemerkung**. Die Methoden, die in diesen Beweis eingingen, gehören zur „Teilbarkeitstheorie". Mehr darüber wirst du im zweiten Semester in der Vorlesung „Lineare Algebra 2" lernen.

§2.3.06 **Bemerkung** *(Signalwörter)*. Wenn du eine Äquivalenz per Hin- und Rückrichtung beweist, solltest du die jeweiligen Beweisteile mit „$\to$" und „$\leftarrow$" beginnen (so wie im Beispiel gerade eben) oder so etwas wie „Ich beweise zuerst die Hinrichtung" und „Für den Beweis der Rückrichtung sei nun. . . " schreiben, damit deinem Leser jederzeit klar ist, um welche der beiden Richtungen es gerade geht.

§2.3.07 **Axiom**. *Aus der Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ kann sowohl auf $A \to B$ als auch auf $B \to A$ geschlossen werden.*

$$\frac{A \leftrightarrow B}{A \to B} \qquad \textit{und} \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{B \to A}$$

§2.3.08 **Beispiel**. Es wurde angekündigt, dass man die Prüfung genau dann besteht, wenn man mehr als 50 Punkte erreicht hat. Dann weiß ich einerseits, dass, wenn ich die Prüfung bestanden habe, ich mehr als 50 Punkte erreicht haben muss; andererseits weiß ich, dass ich, sofern ich mindestens 50 Punkte erreicht habe, auf jeden Fall bestanden habe.

§2.3.09 **Satz** *(Äquivalenzbeweis mit Zwischenschritten).* *Seien n eine natürliche Zahl und $Z_1, \ldots, Z_n$ ein paar Aussagen. Dann kannst du die Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ beweisen, indem du die Äquivalenzen*

$$A \leftrightarrow Z_1, \quad Z_1 \leftrightarrow Z_2, \quad \ldots, \quad Z_{n-1} \leftrightarrow Z_n \quad \text{und} \quad Z_n \leftrightarrow B$$

beweist. In diesem Fall agieren die Aussagen $Z_1, \ldots, Z_n$ in deinem Beweis als ***Zwischenschritte****.*

§2.3.10 **Beweis**. „$\rightarrow$“: Aus den Äquivalenzen $A \leftrightarrow Z_1$, $Z_1 \leftrightarrow Z_2$, …, $Z_n \leftrightarrow B$ folgen die Implikationen $A \rightarrow Z_1$, $Z_1 \rightarrow Z_2$, …, $Z_n \rightarrow B$, woraus sich mittels Satz §2.2.16 ergibt, dass $A \rightarrow B$ gilt.
„$\leftarrow$“: Aus den Äquivalenzen $A \leftrightarrow Z_1$, $Z_1 \leftrightarrow Z_2$, …, $Z_n \leftrightarrow B$ folgen auch die Implikationen $B \rightarrow Z_n$, $Z_n \rightarrow Z_{n-1}$, …, $Z_1 \rightarrow A$, woraus sich mittels Satz §2.2.16 auch $B \rightarrow A$ ergibt. ■

§2.3.11 **Bemerkung**. Sind n eine natürliche Zahl und $Z_1, \ldots, Z_n$ ein paar Aussagen, für die $Z_1 \leftrightarrow Z_2, \ldots, Z_{n-1} \leftrightarrow Z_n$ gilt, so schreibt man auch kurz

$$Z_1 \leftrightarrow Z_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow Z_n$$

§2.3.12 **Beispiel**. Sei x eine positive reelle Zahl. Genau dann ist x eine Lösung der Gleichung $x^2 - x = 1$, wenn $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.[5]

§2.3.13 **Beweis**. Es gilt:

$$\begin{aligned} x^2 - x = 1 \quad &\leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 1 \\ &\leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \\ &\leftrightarrow \quad x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} \\ &\leftrightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ &\leftrightarrow \quad x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \left(\text{da } x \text{ positiv ist und } \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ wäre}\right) \end{aligned}$$ ■

§2.3.14 **Satz** *(Jede Aussage ist äquivalent zu sich selbst).* *Es gilt*

$$A \leftrightarrow A$$

§2.3.15 **Beweis**. Mit Satz §2.2.06 ist zugleich die Hinrichtung und die Rückrichtung bewiesen. ■

§2.3.16 **Satz** *(Kommutativgesetz für $\leftrightarrow$).* *Es gilt*

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$$

§2.3.17 **Beweis** (*). „$\rightarrow$“: Es gelte $A \leftrightarrow B$. Daraus folgt, dass sowohl $A \rightarrow B$ als auch $B \rightarrow A$ gelten. Das kann man natürlich auch andersrum lesen: es gelten sowohl $B \rightarrow A$ als auch $A \rightarrow B$. Hieraus folgt $B \leftrightarrow A$.
Die Rückrichtung „$\leftarrow$“ beweist man ganz analog zur Hinrichtung, dabei müssen lediglich die Rollen von A und B vertauscht werden. ■

[5] Die Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ heißt Goldener Schnitt.

§2.3.18 **Bemerkung** *(Substitutionsprinzip).* Seien A, B zwei äquivalente Aussagen. Dann kannst du in Beweisen die Aussagen A und B beliebig miteinander vertauschen. Möchtest du beispielsweise A beweisen, kannst du genausogut B beweisen. Oder ist dir eine Aussage der Gestalt $(A \wedge C) \rightarrow D$ gegeben, so kannst du genausogut auch mit der Aussage $(B \wedge C) \rightarrow D$ arbeiten.
Aus diesem Grund sind Äquivalenzaussagen wertvoll und nützlich. Sie erlauben es, Aussagen von mehreren Blickwinkeln zu beleuchten und dadurch ein „tieferes“ Verständnis für sie zu gewinnen.

§2.3.19 **Satz** *(* Curry-Paradoxon). Es gilt*

$$(A \leftrightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

Mit anderen Worten: Ist A bereits äquivalent dazu, dass B von A impliziert wird, so gilt B.

§2.3.20 **Beweis.** Für einen direkten Beweis sei angenommen, dass $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ gilt. Nun ist zu beweisen, dass B gilt.

(1) Es gilt $A \rightarrow B$, denn: Für einen direkten Beweis sei angenommen, dass A gilt. Wegen $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ gilt dann auch $A \rightarrow B$. Und weil A als gültig angenommen wurde, folgt daraus, dass B gilt.

(2) Es gilt B, denn: Nach Schritt (1) gilt $A \rightarrow B$. Wegen $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ gilt dann auch A. Weil nach Schritt (1) auch $A \rightarrow B$ gilt, folgt nun, dass auch B gilt. ■

§2.3.21 **Bemerkung** *(*).* Das Curry-Paradoxon wird deshalb als „Paradoxon“ gehandelt, da es zumindest in der Umgangssprache ziemlich leicht ist, Aussagen A zu konstruieren, für die $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$ gilt. Z.B. mit

- $A :=$ „Wenn diese Aussage wahr ist, lerne ich morgen die große Liebe meines Lebens kennen.“
- $B :=$ „Morgen lerne ich die große Liebe meines Lebens kennen.“

Dann gilt tatsächlich $A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$, sodass aus dem Curry-Paradoxon folgt, dass ich morgen die Wahre Liebe finden werde.
Damit sich mit diesem Trick nicht einfach *jede* mathematische Aussage beweisen lassen kann, muss sichergestellt werden, dass sich die Selbstreferenzialität „Wenn *diese Aussage* wahr ist, dann ...“, die umgangssprachlich problemlos erzeugbar ist, nicht in formaler mathematischer Sprache nachbilden lässt.

1. * Drei häufige Anfängerfehler im Umgang mit Äquivalenzumformungen

§2.3.22 **Bemerkung** *(„Gleichungs-U's“).* Aus der Schule sind es manche Studienanfänger gewohnt, Gleichungen dadurch zu beweisen, dass sie sie sovielen Äquivalenzumformungen unterziehen, bis am Ende eine „offensichtliche“ Gleichung rauskommt. Hier ein Beispiel für diese Vorgehensweise:

§2.3.23 **Beispiel.** Seien x, y zwei reelle Zahlen. Dann gilt:

$$x \cdot (y + 1) = y \cdot (x + 1) - (y - x)$$

§2.3.24 **Beweis** (Schlechter Beweis). Es gilt:

$$\begin{aligned}
& & x \cdot (y+1) &= y \cdot (x+1) - (y-x) \\
&\leftrightarrow & xy + x &= yx + y - y + x \\
&\leftrightarrow & xy + x &= yx + x \\
&\leftrightarrow & xy + x &= xy + x
\end{aligned}$$

Diesen „Beweisstil" solltest du dir auf keinen Fall aneignen bzw. so bald es geht abgewöhnen! Denn bei so einer Äquivalenzenkette geschieht bei jeder Äquivalenzumformung auf jeder der beiden Seiten eine arithmetische Umformung, die der Leser nachvollziehen muss. Und diese arithmetischen Umformungen bilden den eigentlichen Kern des Beweises, letztendlich hat der Leser die Gleichungskette also in einer „U-Form", deren beide Stränge erst ganz am Schluss zusammenfinden, zu lesen:

$$\begin{array}{cccc}
 & x \cdot (y+1) & = & y \cdot (x+1) - (y-x) \\
\leftrightarrow & xy + x & = & yx + y - y + x \\
\leftrightarrow & xy + x & = & yx + x \\
\leftrightarrow & xy + x & = & xy + x
\end{array}$$

Schöner ist, es diese Kette arithmetischer Umformungen, gar nicht erst als „U", sondern als die Kette, als die sie letztendlich auch zu lesen ist, hinzuschreiben:

§2.3.25 **Beweis** (Schönerer Beweis). Es gilt:

$$\begin{aligned}
x \cdot (y+1) &= xy + x \\
&= yx + x \\
&= yx + y - y + x \\
&= y \cdot (x+1) - y + x \\
&= y \cdot (x+1) - (y-x) \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Unterscheide dabei sorgfältig von der Art und Weise, wie du den Beweis *findest* und der Art und Weise, wie du ihn am Ende *aufschreibst*: Während des Beweisfindungsprozesses ist alles erlaubt und du darfst auf dem Schmierblatt soviele Äquivalenzumformungen aufschreiben, wie du willst. Aber am Ende, wenn es darum geht, den Beweis für deinen Tutor aufzuschreiben, solltest du alle Unsauberkeiten tilgen und den Beweis in eine gut lesbare Form bringen. Ein mathematischer Beweis, wie du ihn in einem Lehrbuch findest oder wie ihn ein Dozent in der Vorlesung vorführt, gibt nur selten den Denkprozess, der seiner Entstehung zugrundelag, wieder. (Was in didaktischer Hinsicht manchmal bedauerlich und einer der Hauptgründe dafür ist, dass sich Erstsemester mit dem Verfassen von Beweisen schwertun.)

§2.3.26 **Bemerkung** *(Unterschied zwischen = und $\leftrightarrow$).* Bringe auf keinen Fall $=$ und $\leftrightarrow$ durcheinander. Die Gleichheit „=“ ist eine Beziehung, die zwischen beliebigen Objekten Sinn ergibt. Bspw. ergibt es Sinn zu fragen, ob zwei Zahlen gleich sind, zwei Punkte im Raum gleich sind, zwei Funktionen dieselbe Ableitung haben usw. Dagegen ist „$\leftrightarrow$“ eine Beziehung zwischen *Aussagen*. Manche Studienanfänger sind es aus der Schule gewohnt, jegliche Art mathematischen Folgerns durch ein Gleichheitszeichen zu notieren. Die (korrekte) Gleichungsumformung

$$\begin{aligned} & x = y - 3 \\ \leftrightarrow \quad & x + 3 = y \end{aligned}$$

würden sie inkorrekterweise als

$$\begin{aligned} & x = y - 3 \\ = \quad & x + 3 = y \end{aligned}$$

notieren, was Leser arg verwirren kann (vor allem, wenn es nicht so schön eingerückt ist wie hier, sondern einfach nur $x = y - 3 = x + 3 = y$ dastünde) und auch schlicht mathematisch falsch ist.
Auch hier gilt wieder: In der kreativen Phase, in der du nach einem Beweis suchst und Schmierblatt um Schmierblatt mit Ideen vollschreibst, darfst du Gleichheitszeichen nach Belieben spammen und sogar falsch verwenden. Aber bei der Erstellung des Endprodukts, des Beweises, wie ihn dein Tutor / deine Tutorin lesen und bewerten soll, solltest du penibel auf die korrekte Verwendung von „=“’s und „$\leftrightarrow$“’s achten.

§2.3.27 **Bemerkung** *(Beweise „rückwärts“ führen).* Mal angenommen, ich möchte beweisen, dass die Kubikwurzel von 3 größer als die Quadratwurzel von 2 ist. Auf der Suche nach einem Beweis beginne ich einfach mal mit der zu zeigenden Ungleichung $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ und forme ein bisschen um:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{3} > \sqrt{2} \\ \rightarrow \quad & \sqrt[3]{3}^{3\cdot 2} > \sqrt{2}^{2\cdot 3} && \text{(beide Seiten mit 6 potenzieren)} \\ \rightarrow \quad & (\sqrt[3]{3}^{3})^2 > (\sqrt{2}^{2})^3 && \text{(Potenzgesetz anwenden)} \\ \rightarrow \quad & 3^2 > 2^3 \\ \rightarrow \quad & 9 > 8 \end{aligned}$$

Das sieht schonmal gut aus! Durch ein paar Umformungen bin ich auf eine wahre Aussage gelangt. Mancher Anfänger würde nun denken, dass das Problem damit erledigt ist und die obige Ungleichungskette als Beweis taugt.
Das ist aber falsch. Denn die Ungleichungskette beginnt ja mit der zu beweisenden Aussage. Hier wurde also nur die Aussage „Wenn $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ gilt, dann ist $9 > 8$“ bewiesen, die aber leider nichts darüber aussagt, ob nun tatsächlich $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$ gilt. Glücklicherweise handelt es sich bei allen Umformungen sogar um Äquivalenzumformungen, sodass die Ungleichungskette

auch in umgekehrter Richtung gültig ist:

$$
\begin{array}{lcr}
 & 9 > 8 & \\
\to & 3^2 > 2^3 & \\
\to & (\sqrt[3]{3}^3)^2 > (\sqrt{2}^2)^3 & \\
\to & \sqrt[3]{3}^{3\cdot 2} > \sqrt{2}^{2\cdot 3} & \text{(Potenzgesetz anwenden)} \\
\to & \sqrt[3]{3} > \sqrt{2} & \text{(sechste Wurzel ziehen)}
\end{array}
$$

Nun ist die Argumentation zumindest mal nicht mehr mathematisch falsch. Wenn ich jetzt noch das hässliche „Ungleichungs-U“ loswerde, kann sich der Beweis sehen lassen. Hier ist der finale Beweis, über den sich mein Tutor / meine Tutorin freuen wird:

§2.3.28 **Beweis**. Es gilt

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{3} &= \sqrt[3]{\sqrt{9}} \\
&= \sqrt[6]{9} \\
&> \sqrt[6]{8} && \text{(da } \sqrt[6]{-} \text{ eine ordnungserhaltende Operation und } 9 > 8 \text{ ist)} \\
&= \sqrt{\sqrt[3]{8}} \\
&= \sqrt{2} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Beachte, dass die Struktur dieses Beweises nicht meinen Denkprozess bei der Beweissuche wiederspiegelt. Das ist aber völlig normal und ok. Sollte dein Beweis sehr kompliziert sein, wäre es natürlich trotzdem nett, wenn du, sofern es deinem Leser hilft, ein paar Meta-Bemerkungen darüber, welche Idee hinter dem aktuellen Beweisschritt steckt, einstreust.
Auch Profis stoßen manchmal auf einen Beweis, indem sie die Argumentation „rückwärts“ ausprobieren, also mit der zu beweisenden Aussage starten und schauen, was sich damit anfangen lässt. Während diese Strategie völlig legitim zur Beweis*findung* ist, ist sie es aber nicht zur Beweis*niederschrift*. Dein zum Schluss aufgeschriebener Beweis muss das Problem sauber von den zu zeigenden Aussagen auf die zu beweisenden Aussagen durchgehen.
Der Versuch, einen Beweis rückwärts zu führen, kann auch Fehler erzeugen, die du, sofern du den Rückwärts-Gedankengang am Ende nicht kritisch reflektierst, übersiehst. Z.B. könnte man meinen, dass für jede reelle Zahl x gilt, dass $\sin(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)}$. Denn man kann ja umformen

$$
\begin{array}{lcr}
 & \sin(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)} & \\
\to & \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) & \text{(beide Seiten quadrieren)} \\
\to & \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 &
\end{array}
$$

und letzteres ist eine wohlbekannte wahre Aussage (die manchmal als „Satz des Pythagoras“ bezeichnet wird). Jedoch ist

$$\sin(-\pi/2) = -1 \neq 1 = \sqrt{1} = \sqrt{1-0^2} = \sqrt{1-\cos^2(\pi/2)}$$

sodass irgendetwas nicht stimmen kann. Kannst du ausmachen, wie und wo genau sich der Fehler eingeschlichen hat?

2. * Mehrfach-Äquivalenzen

§2.3.29 **Definition** *(„Die folgenden Aussagen sind äquivalent“).* Einige mathematische Sätze haben die Gestalt einer größeren Äquivalenzaussage und sehen etwa folgendermaßen aus:

> Es seien ... und es gelte .... Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:
>
> (i) ...
>
> (ii) ...
>
> (iii) ...
>
> (iv) ...
>
> ...

Diese Satzstruktur kommt so häufig vor, dass man sie im Englischen manchmal durch “tfae” abkürzt (für “the following are equivalent”). Sie besagt, dass je zwei der Aussagen (i), (ii), (iii), usw. zueinander äquivalent sind, also dass alle Äquivalenzen

$$\text{(i)}\leftrightarrow\text{(ii)},\quad \text{(i)}\leftrightarrow\text{(iii)},\quad \text{(ii)}\leftrightarrow\text{(iii)},\quad \text{(i)}\leftrightarrow\text{(iv)},\quad \text{(ii)}\leftrightarrow\text{(iv)},\quad \text{(iii)}\leftrightarrow\text{(iv)},\quad \ldots$$

gelten. Man sagt auch, die Aussagen seien „paarweise äquivalent“.

§2.3.30 **Beispiel**. Sei D ein Dreieck in der euklidischen Ebene. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) D ist ein gleichseitiges Dreieck, d.h. alle Seiten von D haben dieselbe Länge.

(ii) Alle Innenwinkel von D haben dieselbe Größe.

(iii) Der Schwerpunkt von D stimmt mit seinem Umkreismittelpunkt überein.

(iv) Der Schwerpunkt von D stimmt mit seinem Inkreismittelpunkt überein.

Würde man in diesem Beispiel die Äquivalenz jedes Aussagenpaars per Hin- und Rückrichtung beweisen, müsste man insgesamt zwölf Implikationen beweisen. Mit der folgenden Beweistechnik lässt sich in solchen Fällen erheblich Arbeit einsparen:

§2.3.31 **Satz** *(Ringschluss). Seien n eine natürliche Zahl und $A_1, \ldots, A_n$ eine Handvoll Aussagen, von denen du beweisen möchtest, dass sie paarweise äquivalent sind. Dann kannst du dies mit der Technik des **Ringschlusses** tun, indem du lediglich die Implikationen*

$$A_1 \to A_2, \quad A_2 \to A_3, \quad \ldots, \quad A_{n-1} \to A_n, \quad A_n \to A_1$$

beweist. Auf diese Weise „schließt du einen Ring“ zwischen den Aussagen $A_1, \ldots, A_n$.

§2.3.32 **Beweis**. Durch den Ringschluss wurden alle Implikationen im folgenden Diagramm bewiesen:

$$\begin{tikzcd}
& A_1 \arrow[dr] & \\
A_n \arrow[ur] & & A_2 \arrow[d] \\
\ldots \arrow[u] & & A_3 \arrow[ll]
\end{tikzcd}$$

Man sieht, dass sich nun von jeder Aussage mittels Zwischenschritten zu jeder anderen Aussage gelangen lässt, solange man nur lang genug „im Uhrzeigersinn läuft“. Wegen Satz §2.2.16 gilt somit für alle natürlichen Zahlen k, l zwischen Eins und n, dass $A_k \to A_l$ und $A_l \to A_k$, also insgesamt $A_k \leftrightarrow A_l$. Demzufolge sind je zwei beliebige Aussagen von $A_1, \ldots, A_n$ zueinander äquivalent. ∎

§2.3.33 **Beispiel**. Sei n eine ganze Zahl. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $n \geqslant 1$.

(ii) Für jede ganze Zahl m ist $m + n > m$.

(iii) Es gibt mindestens eine ganze Zahl m, für die $m + n > m$ gilt.

§2.3.34 **Beweis**. (i)→(ii): Es gelte (i) und es sei m eine beliebige ganze Zahl. Dann ist

$$\begin{aligned} m + n &\geqslant m + 1 && \text{(wegen (i))} \\ &> m \end{aligned}$$

(ii)→(iii) ist trivial, da ganze Zahlen existieren.

(iii)→(i): Es gelte (iii). Dann gibt es eine ganze Zahl m mit $m + n > m$. Subtraktion von m liefert die Ungleichung $n > 0$. Und da n eine ganze Zahl ist, muss dann schon $n \geqslant 1$ gelten. ∎

Für ein weiteres Beispiel siehe Satz §5.3.06.

§2.3.35 **Bemerkung**. **Achtung**: Ein gelegentlicher Anfängerirrtum besteht darin, zu denken, der Ringschluss müsse *immer* in der Form (i)→(ii), (ii)→(iii), (iii)→(i) durchgeführt werden. Das ist Unsinn und führt dazu, dass sich manche Anfänger einen Haufen unnötige Mehrarbeit aufhalsen.
Genausogut kann man etwa auch einen Ringschluss über die Implikationen (ii)→(i), (iii)→(ii) und (i)→(iii) durchführen.
Manchmal ist die Ringschluss-Methode auch unangebracht, wenn etwa die beiden Aussagen (ii) und (iii) so widerspenstig gegeneinander sind, dass keine Beweise für (ii)→(iii) und (iii)→(ii) in Sicht sind. In diesem Fall ist es vielleicht einfacher, den scheinbar längeren Weg zu gehen und (i)→(ii), (ii)→(i), (i)→(iii) und (iii)→(i) zu beweisen.

$$\begin{tikzcd} & (ii) \arrow[dr] & \\ (iii) \arrow[ur] & & (i) \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

anstelle von

$$\begin{tikzcd} & (i) \arrow[dr] & \\ (iii) \arrow[ur] & & (ii) \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

geht auch.

Manchmal funktioniert aber nur

$$\begin{tikzcd} & (i) \arrow[dl, bend right] \arrow[dr, bend left] & \\ (iii) \arrow[ur, bend right] & & (ii) \arrow[ul, bend left] \end{tikzcd}$$

Entscheidend ist, dass du am Ende so viele Implikationen bewiesen hat, dass man mittels Zwischenschritten von jeder Aussage zu jeder anderen Aussage gelangen kann.

Wenn du eine längere Äquivalenzaussage beweisen möchtest, solltest du immer Ausschau nach Implikationen halten, die „geschenkt" sind, d.h. deren Beweis besonders naheliegend und einfach ist (im Beispiel gerade eben war das die Implikation (ii)→(iii)). Daran kannst du dann deine Beweisstrategie orientieren. Ein berüchtigter Äquivalenzbeweis in der LA1-Vorlesung vom Wintersemester 2016/17 verlief so kompliziert, dass der Dozent zu Beginn seines Beweises einen „Plan" aufgeschrieben hat, um den Studis die Orientierung zu erleichtern.

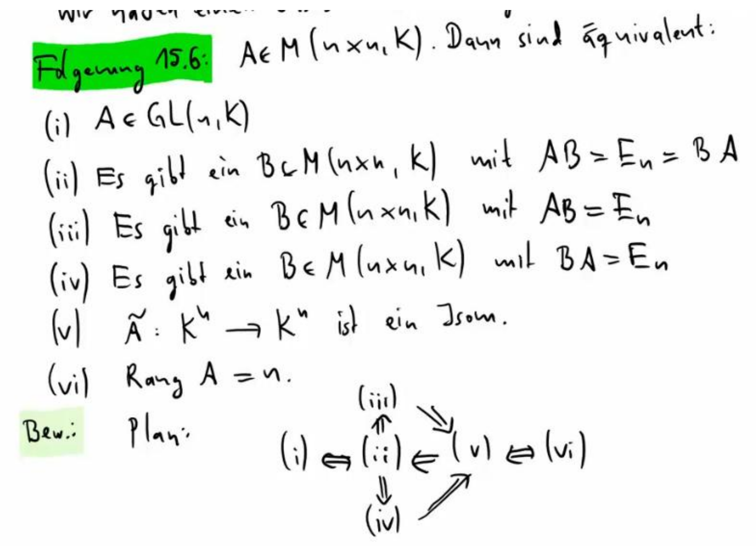


Abbildung 2.2: Eine Äquivalenzaussage aus der LA1 vom WS16/17. Hier sind die Implikationen (ii)→(iii) und (ii)→(iv) „geschenkt".

§2.3.36 **Bemerkung** *(Signalwörter)*. Wenn du eine Aussage der Gestalt „Folgende Aussagen sind äquivalent..." beweist, solltest du den Beweis jeder einzelnen Implikation mit „(i)→(ii)", „(iii)→(i)" oder Ähnlichem betiteln, damit deinem Leser jederzeit klar ist, welche Implikation gerade Thema ist.

§2.4 Und und Oder

In diesem Abschnitt seien A, B stets zwei beliebige Aussagen

§2.4.01 **Axiom**. *Für je zwei Aussagen A, B gelten:*

$$(A \land B) \to A \qquad\qquad A \to (A \lor B)$$
$$(A \land B) \to B \qquad\qquad B \to (A \lor B)$$

Mit anderen Worten: Aus $A \land B$ folgt sowohl A als auch B; und A und B sind wiederum hinreichende Bedingungen für $A \lor B$.

§2.4.02 **Bemerkung**. Wenn dir die Aussage $A \land B$ gegeben ist, kannst du das also so behandeln, als hättest du zwei gegebene Aussagen, nämlich A und B.
Und wenn du $A \lor B$ beweisen möchtest, würde es schon reichen, wenn du A beweist oder wenn du B beweist. In der Realität passiert das aber selten, denn wenn schon A beweisbar ist,

würde man das Theorem ja in der verschärften Version „Es gilt A“ und nicht in der unnötigen Abschwächung „Es gilt A oder es gilt B“ formulieren.

§2.4.03 **Axiom** *(Und-Aussagen beweisen)*. *Um die Aussage $A \wedge B$ zu beweisen, genügt es, sowohl A als auch B zu beweisen:*

$$\frac{\begin{array}{r} A \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$

Mit anderen Worten: Wenn „$A \wedge B$“ auf deiner „zu zeigen“-Liste steht, kannst du das als zwei separate Ziele behandeln, nämlich musst du einerseits A und andererseits B beweisen.

§2.4.04 **Beispiel**. Die 25 ist eine Quadratzahl, die sich als Summe zweier echt kleinerer Quadratzahlen schreiben lässt. Außerdem ist sie die kleinste Quadratzahl mit dieser Eigenschaft.

§2.4.05 **Beweis**. (1) Aus

$$25 = 5^2 \qquad \text{und} \qquad 25 = 9 + 16 = 3^2 + 4^2$$

folgt, dass 25 eine Quadratzahl ist, die sich als Summe zweier echt kleinerer Quadratzahlen schreiben lässt.
(2) Die einzigen Quadratzahlen $\neq 0$, die noch kleiner als 25 sind, sind

$$1 \qquad 4 \qquad 9 \qquad 16$$

Wäre eine dieser vier Zahlen eine Summe zweier echt kleinerer Quadratzahlen, so müssten auch diese beiden Summanden in der Liste dieser vier Zahlen vorkommen. Aber alle möglichen Summationen

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= 2 & 1 + 4 &= 5 \\ 1 + 9 &= 10 & 1 + 16 &= 17 \\ 4 + 4 &= 8 & 4 + 9 &= 13 \\ 4 + 16 &= 20 & 9 + 9 &= 18 \end{aligned}$$

ergeben keine Quadratzahl. ■

§2.4.06 **Bemerkung**. Drei natürliche Zahlen a, b, c, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, nennt man ein **pythagoräisches Tripel**. Also wurde gerade bewiesen, dass $(2, 3, 5)$ das kleinste pythagoräische Tripel ist.

§2.4.07 **Bemerkung**. Wenn du eine Aussage der Form $A \wedge B$ beweist, müssen der Beweis von A und der von B nicht streng isoliert voneinander sein. Du kannst den Fortschritt, den du auf dem Weg zu A gemacht hast, in den Beweis von B einfließen lassen und umgekehrt.

§2.4.08 **Axiom**. *Seien X, A, B drei Aussagen. Um zu beweisen, dass $(A \vee B) \to X$ gilt, genügt es, zu zeigen, dass X sowohl aus A als auch aus B folgt:*

$$\frac{\begin{array}{r} A \to X \\ B \to X \end{array}}{(A \vee B) \to X}$$

§2.4.09 **Satz** *(Fallunterscheidungen). Sei X eine Aussage, die du beweisen möchtest. Außerdem sei gegeben, dass $A \vee B$ gilt*[6]*. Dann kannst du X mittels einer **Fallunterscheidung** beweisen, indem du sowohl zeigst, dass X unter Annahme von A gilt, als auch, dass X unter Annahme von B gilt.*

§2.4.10 **Beweis.** Dass X sowohl unter Annahme von A als auch unter Annahme von B gilt, heißt, dass die beiden Implikationen $A \to X$ und $B \to X$ gelten, insgesamt also $(A \to X) \wedge (B \to X)$. Daraus folgt mit Axiom §2.4.08, dass sogar $(A \vee B) \to X$ gilt. Und da $A \vee B$ gegeben ist, kann nun auf X geschlossen werden. ■

§2.4.11 **Beispiel.** Ich werde diesen Sommer ständig vorm Fernseher sitzen.

§2.4.12 **Beweis.** Ich unterscheide vier Fälle:

1. Die aktuelle Jahreszahl ist durch vier teilbar (z.B. 2008, 2012, 2016, ...). In diesem Fall findet dieses Jahr die Fußball-Europameisterschaft der Männer statt, die ich unbedingt gucken muss.

2. Die aktuelle Jahreszahl lässt bei der Division durch 4 den Rest 1 übrig. In diesem Fall findet dieses Jahr die Fußball-Europameisterschaft der Frauen statt, die ich unbedingt gucken muss.

3. Die aktuelle Jahreszahl lässt bei der Division durch 4 den Rest 2 übrig (z.B. 2010, 2014, 2018, ...). In diesem Fall findet dieses Jahr die Fußball-Weltmeisterschaft der Männer statt. Dieses eminent wichtige sportliche Großereignis darf ich auf keinen Fall verpassen.

4. Die aktuelle Jahreszahl lässt bei der Division durch 4 den Rest 3 übrig. In diesem Fall findet dieses Jahr die Fußball-Weltmeisterschaft der Frauen statt. Um immer auf dem neuesten Stand darüber zu sein, muss ich sie live verfolgen.

Da die Jahreszahl bei der Division durch 4 stets einen der Reste $0, 1, 2$ oder 3 annimmt, muss und werde ich also in jedem Fall den Sommer vorm Fernseher verbringen, um mir die Fußballspiele anzuschauen. ■

§2.5 Quantoren

In diesem Abschnitt sei $E(x)$ stets ein einstelliges Prädikat.

1. Allaussagen

§2.5.01 **Axiom.** *Sei a irgendein Objekt. Dann gilt*

$$\forall x : E(x) \quad \to \quad E(a)$$

Mit anderen Worten: wenn jedes Objekt die Eigenschaft E besitzt, dann auch a.

§2.5.02 **Beispiel.** Da jede positive reelle Zahl eine Qudaratwurzel besitzt, existiert in den reellen Zahlen auch eine Quadratwurzel der 2.

[6] Im Englischen sagt man: “the two cases A and B are *exhausting*”, was soviel wie „ausschöpfend“ heißt.

§2.5.03 **Axiom** *(Allaussagen an einem „beliebigen“ Objekt nachweisen).* *Um die Allaussage $\forall x : E(x)$ zu beweisen, kannst du folgendermaßen vorgehen:*
Führe eine Variable a, die bislang noch nicht im Beweis verwendet wurde und ein beliebiges *Objekt bezeichnen soll, ein und beweise nun, dass a die Eigenschaft E besitzt.*

§2.5.04 **Beispiel**. Für jede reelle Zahl $x \neq 1$ existiert eine reelle Zahl y mit $x = \frac{y+1}{y-2}$.

§2.5.05 **Beweis**. Sei x eine beliebige reelle Zahl $\neq 1$. Wegen $x \neq 1$ ist $x - 1 \neq 0$, sodass durch $y := \frac{1+2x}{x-1}$ eine wohldefinierte reelle Zahl gegeben ist. Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{y+1}{y-2} &= \frac{\frac{1+2x}{x-1}+1}{\frac{1+2x}{x-1}-2} \\ &= \frac{\frac{1+2x+x-1}{x-1}}{\frac{1+2x-2(x-1)}{x-1}} \\ &= \frac{\frac{3x}{x-1}}{\frac{3}{x-1}} \\ &= \frac{3x\cdot(x-1)}{3\cdot(x-1)} \\ &= x \quad \blacksquare\end{aligned}$$

§2.5.06 **Bemerkung** *(Signalwörter).* Ein Beweis einer Allaussage beginnt meist mit Floskeln wie „Sei x ein beliebiges…“ oder „Die Zahl n sei beliebig aber fest“. Viele Texte lassen das Signalwort „beliebig“ auch oft weg und beginnen schlicht mit „Sei x ein…“. Sie setzen dann vom Leser voraus, dass er erkennt, dass hier gerade der Beweis einer Allaussage beginnt.

§2.5.07 **Bemerkung** *(*).* Achte darauf, dass die von dir eingeführte Variable, die das „beliebige“ Objekt bezeichnen soll, auch wirklich nirgendwo sonst im bisherigen Beweis aufgetaucht ist. Ansonsten könnte dir ein Fehler wie der folgende passieren:

§2.5.08 **Beispiel** *(*).* Es gibt eine natürliche Zahl n, die größergleich jede andere natürliche Zahl ist.

§2.5.09 **Beweis**. Setze $n = 0$. Es bleibt zu zeigen, dass jede natürliche Zahl kleinergleich n ist. Dazu sei n eine beliebige natürliche Zahl. Weil bekanntlich stets $n \leq n$ gilt, ist also jede beliebige Zahl kleinergleich n.

Ganz so offensichtliche Fehler passieren natürlich eher selten. Subtilere Fehler dieser Art kommen aber durchaus vor.

§2.5.10 **Satz** *(* Vertauschbarkeit von Allquantoren).* *Sei R ein zweistelliges Prädikat. Dann gilt:*

$$\forall x\, \forall y : R(x,y) \quad \leftrightarrow \quad \forall y\, \forall x : R(x,y)$$

§2.5.11 **Beweis**. „$\rightarrow$“: Seien a, b zwei beliebige Objekte. Nach Annahme gilt $\forall y : R(a,y)$ und daraus folgt wiederum, dass $R(a,b)$ gilt. Da a beliebig gewählt war, gilt somit sogar $\forall x : R(x,b)$. Und da auch b beliebig gewählt war, folgt hieraus, dass $\forall y\, \forall x : R(x,y)$.
Die Rückrichtung „$\leftarrow$“ wird ganz ähnlich zur Hinrichtung bewiesen, wobei nur die Rollen von x und y vertauscht werden müssen. $\blacksquare$

§2.5.12 **Bemerkung**. Anstelle von „$\forall x\ \forall y :\ R(x,y)$ schreibt man oft nur

$$\forall x, y :\ R(x,y) \qquad\qquad \text{(lies: „für alle } x, y \text{ gilt, dass } R(x,y)\text{“)}$$

Nach dem letzten Satz ist es egal, in welcher Reihenfolge man die gebundenen Variablen notiert. Anstelle von „$\forall x, y$“ kann man genausogut „$\forall y, x$“ schreiben.

2. Existenzaussagen

§2.5.13 **Axiom** *(Beweis per Beispiel). Um eine Existenzaussage der Gestalt $\exists x : E(x)$ zu beweisen, kannst du ein konkretes Objekt zu finden, das die Eigenschaft E besitzt. Man nennt dann a ein **Beispiel** für die Existenzaussage $\exists x : E(x)$.*

§2.5.14 **Beispiel**. Es gibt eine natürliche Zahl $n \geqslant 1$, die gleich der Summe ihrer echten Teiler ist.[7]

§2.5.15 **Beweis**. Ein Beispiel ist die Zahl 28. Denn die echten Teiler der 28 sind genau

$$1 \qquad 2 \qquad 4 \qquad 7 \qquad 14$$

und es ist

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 \quad \blacksquare$$

Der folgende Satz ist eine Allaussage, in die eine Existenzaussage eingewoben ist:

§2.5.16 **Beispiel** *(* Satz von Euklid)*. Für jede natürliche Zahl n gibt es eine Primzahl, die größer als n ist.

§2.5.17 **Bemerkung**. Die logische Struktur dieses Satzes ist

$$\forall\ (\text{natürliche Zahl})\ \exists\ (\text{Primzahl}) :\ \ldots$$

Da es sich insgesamt um eine Allaussage handelt, muss der Beweis mit „Sei n eine beliebige natürliche Zahl“ beginnen. Da daraufhin die Existenzaussage

$$\exists P \in \mathbb{N} :\ P \text{ ist eine Primzahl und größer als } n$$

übrig bleibt, fährt der Beweis danach mit der geschickten Konstruktion eines Beispiels fort:

§2.5.18 **Beweis**. Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Da es nur endlich viele natürliche Zahlen gibt, die $\leqslant n$ sind, gibt es auch nur endlich viele Primzahlen, die $\leqslant n$ sind. Seien k deren Anzahl und $p_1, \ldots, p_k$ diese Primzahlen. Betrachte die Zahl

$$N := p_1 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$$

(wobei $N = 2$ im Fall $k = 0$ sei). Dann lässt N bei der Division durch $p_1, \ldots, p_k$ jedes Mal den Rest Eins übrig, ist also nicht durch $p_1, \ldots, p_k$ teilbar. Wegen $N \geqslant 2$ muss N gemäß dem Fundamentalsatz der Arithmetik aber mindestens einen Primteiler P besitzen. Da P keines der $p_1, \ldots, p_k$ sein kann aber die $p_1, \ldots, p_k$ alle Primzahlen sind, die $\leqslant n$ sind, muss P größer als n sein. $\blacksquare$

[7] Zahlen, die gleich der Summe ihrer echten Teiler sind, heißen auch vollkommene Zahlen.

§2.5.19 **Bemerkung**. Lässt sich eine Existenzaussage mit einem Beispiel beweisen, so ist es eigentlich schlechter Stil, in einem Buch oder einem Vortrag nur die Existenzaussage anzugeben. Beispielsweise ist ja die Information „Die 24 ist gleich der Summe ihrer echten Teiler" umfangreicher als die Information „Es gibt eine natürliche Zahl, die gleich der Summe ihrer echten Teiler ist". Du solltest dir möglichst nie einfach nur die Existenzaussagen merken, sondern, sofern es welche gibt, immer auch ein oder mehrere Beispiele im Hinterkopf behalten. Auch die essenzielle Aussage des Satzes von Euklid besteht ja weniger in der Aussage „Es gibt eine Primzahl, die größer als n ist" als vielmehr in der trickreichen Art und Weise, wie eine solche Primzahl aufgespürt wird.
Es gibt allerdings auch Situationen, in denen eine Existenzaussage beweisbar ist, obwohl es unmöglich ist, konkrete Beispiele zu geben. Falls in einer Vorlesung keine Beispiele gegeben werden (was bedauerlicherweise recht häufig vorkommt und dem Zeitdruck unter der modularisierten Studienordnung zu verdanken ist), solltest du beim Prof. immer nachhaken, ob er/sie vielleicht deshalb keine Beispiele bringt, weil es gar keine gibt oder die wenigen bekannten Beispiele zu kompliziert und zeitaufwendig sind. Gute Bücher und Vorlesungen erkennt man daran, dass sie, wenn sie keine Beispiele geben, auch erklären, warum.

§2.5.20 **Axiom** *(Verwenden von Existenzaussagen). Sofern dir in einem Beweis eine Aussage der Gestalt $\exists x : E(x)$ gegeben ist, kannst du eine Variable a, die bisher noch nirgends im Beweis aufgetaucht ist, einführen, und die Aussage $E(a)$ als gegeben annehmen.*

§2.5.21 **Beispiel**. Die Gleichung $x = 1 - x^5$ besitzt eine reelle Lösung.

§2.5.22 **Beweis**. Betrachte die reelle Funktion

$$f(x) = x^5 + x - 1$$

Dann gilt $f(0) = -1$ und $f(1) = 1$. Somit folgt aus dem Zwischenwertsatz der Analysis, dass f eine Nullstelle irgendwo zwischen 0 und 1 haben muss. Sei ξ eine solche Nullstelle (hier wird Axiom §2.5.20 genutzt). Dann gilt $\xi^5 + \xi - 1 = 0$, also $\xi = 1 - \xi^5$. ■

§2.5.23 **Satz** *(* Vertauschbarkeit von Existenzquantoren). Sei R ein zweistelliges Prädikat. Dann gilt:*

$$\exists x\, \exists y : R(x,y) \quad \leftrightarrow \quad \exists y\, \exists x : R(x,y)$$

§2.5.24 **Beweis**. Ich beweise nur die Hinrichtung „$\rightarrow$". Die Rückrichtung geht analog unter Vertauschung der Rollen von x und y.
Es sei angenommen, dass $\exists x\, \exists y : R(x,y)$ gilt. Dann gibt es ein Objekt a, für das $\exists y : R(a,y)$ gilt. Damit gibt es auch ein Objekt b, für das $R(a,b)$ gilt. Wegen $R(a,b)$ gilt insbesondere $\exists x : R(x,b)$ und daraus folgt wiederum $\exists y\, \exists x : R(x,y)$. ■

§2.5.25 **Bemerkung**. Anstelle von $\exists x\, \exists y : R(x,y)$ schreibt man auch nur

$\exists x, y : R(x,y)$ (lies: „Es existieren x und y, für die $R(x,y)$ gilt)

Nach dem letzten Satz ist es egal, in welcher Reihenfolge man die gebundenen Variablen notiert. Anstelle von „$\exists x, y$" kann man genausogut „$\exists y, x$" schreiben.

3. Eindeutigkeitsbeweise

Im letzten Vortrag wurde thematisiert, wie sich der Eindeutgikeitsquantor „$\exists!$“ aus dem Allquantor und dem Existenzquantor zusammensetzt:

$$\underbrace{\exists x:\ E(x)}_{\text{Es gibt mindestens ein...}} \quad \wedge \quad \underbrace{\forall y,z:\ (E(y)\wedge E(z)) \to y=z}_{\text{Es gibt höchstens ein...}}$$

Diese Und-Aussage kann als zwei separate Aussagen behandelt werden:

§2.5.26 **Satz** *(Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise). Wenn du eine Aussage der Form $\exists! x:\ E(x)$ beweisen möchtest, kannst du deinen Beweis in einen Existenz-Teil und einen Eindeutigkeit-Teil aufteilen:*

- *Im Existenz-Teil beweist du, dass es mindestens ein Objekt gibt, das die Eigenschaft E besitzt (z.B. durch Angabe eines Beispiels).*
- *Im Eindeutigkeit-Teil beweist du, dass je zwei Objekte, die die Eigenschaft E besitzen, identisch sind.*

Dabei spielt es keine Rolle, ob du erst den Existenz- und dann den Eindeutigkeit-Teil aufschreibst oder umgekehrt.

§2.5.27 **Beweis.** Dies folgt direkt aus Axiom §2.4.03 und der Zerlegung von $\exists!$ aus Bemerkung §1.3.20. ■

§2.5.28 **Beispiel.** Es gibt genau eine reelle Zahl x, die für jede reelle Zahl y die Gleichung $x \cdot y = x$ erfüllt.

§2.5.29 **Beweis.** (Eindeutigkeit): Seien x, x' zwei reelle Zahlen, sodass für jede reelle Zahl y gilt, dass $xy = x$ und $x'y = x'$. Nun ist

$$\begin{aligned} x &= x \cdot x' && \text{(wegen der besonderen Eigenschaft von } x) \\ &= x' \cdot x \\ &= x' && \text{(wegen der besonderen Eigenschaft von } x') \end{aligned}$$

(Existenz): Da für jede reelle Zahl y gilt, dass $0 \cdot y = 0$, erfüllt die Zahl 0 die gewünschte Eigenschaft. ■

§2.5.30 **Bemerkung** *(Signalwörter).* Du solltest den Existenz-Teil und den Eindeutigkeit-Teil deines Beweises immer auch als solchen betiteln, so wie es gerade im Beispiel geschah.

§2.5.31 **Bemerkung** *(Wechselspiel zwischen Formeln und Umgangssprache).* Anfänger neigen dazu, in ihren Beweisen möglichst alle Sachverhalte in Formelsprache auszudrücken und logische Schritte möglichst rechnerisch, als symbolische Manipulation gewisser Formelterme, durchzuführen. Dies ist wohl der Schulmathematik zu verdanken, die vor allem in der gymnasialen Oberstufe weitgehend aus Wiederholungen einiger weniger immer gleicher Algorithmen besteht.
Versuche, in deinen Beweisen ein Gleichgewicht aus Formeln und Umgangssprache herzustellen. Wo ein kurzer deutscher Satz dasselbe sagt wie eine Formel, ziehe in Erwägung, den deutschen Satz hinzuschreiben. Gedruckte Beweise (wie etwa in diesem Skript) enthalten oft mehr Umgangssprache als handschriftliche Beweise (wie sie etwa dein Prof. an die Tafel schreibt).

§2.6 Widerlegen

In diesem Abschnitt seien A, B stets zwei Aussagen.
Alle bisher besprochenen Beweistechniken zielten darauf ab, die „Wahrheit“ von Aussagen zu etablieren. Nun soll es darum gehen, wie man von einer Aussage nachweisen kann, dass sie „falsch“ ist.

§2.6.01 **Definition** *(Widerlegung)*. Einen Beweis der Aussage $\neg A$ nennt man eine **Widerlegung** der Aussage A.

Anstelle von „Es gilt $\neg A$“ schreiben wir auch „A ist falsch“[8].

1. Indirekt Argumentieren

§2.6.02 **Axiom** *(Indirekte Widerlegung)*. *Es gilt:*

$$\begin{array}{r} A \to B \\ \neg B \\ \hline \neg A \end{array}$$

Mit anderen Worten: Wenn aus A etwas Falsches folgt, muss A selbst falsch sein.
Du kannst die Aussage A dadurch widerlegen, dass du eine falsche Aussage B findest, die aus A folgen würde. Man nennt diese Technik eine ***indirekte Widerlegung*** *oder auch* ***Reductio ad absurdum*** *(latein für „Rückführung auf das Widersinnige“).*

§2.6.03 **Beispiel**. 198 ist nicht durch 17 teilbar.

§2.6.04 **Beweis**. Mithilfe des Quersummen-Tricks sieht man, dass 198 durch 9 teilbar ist. Um genau zu sein:

$$198 = 9 \cdot 22$$

Wäre 198 durch 17 teilbar, so müsste, da 17 eine Primzahl ist, mindestens eine der beiden Zahlen 9 und 22 durch 17 teilbar sein. Aber dies ist bekanntlich nicht der Fall. Also kann 198 nicht durch 17 teilbar sein. ■

§2.6.05 **Satz** *(Widerlegung einer Allaussage per Gegenbeispiel)*. *Wenn du eine Aussage der Gestalt $\forall x : E(x)$ widerlegen möchtest, genügt es, irgendein Objekt a zu finden, für das du $\neg E(a)$ beweisen kannst. Man nennt das Objekt a ein* ***Gegenbeispiel*** *zur Allaussage $\forall x : E(x)$.*

§2.6.06 **Beweis**. Angenommen, du hast $\neg E(a)$ bewiesen. Wegen $(\forall x : E(x)) \to E(a)$ würde dann aus $\forall x : E(x)$ eine falsche Aussage folgen, sodass $\forall x : E(x)$ falsch sein muss. ■

§2.6.07 **Beispiel**. Nicht alle YouTuber produzieren nur Schrott.

§2.6.08 **Beweis**. Ein Gegenbeispiel ist der YouTuber 3Blue1Brown. Manche seiner mathematischen Lehrvideos sind wirklich gut! ■

§2.6.09 **Satz** *(Implikationen widerlegen)*. *Du kannst die Implikation $A \to B$ dadurch widerlegen, dass du beweist, dass A und $\neg B$ gelten.*

[8] Beachte, dass dies erst einmal nichts mit den Wahrheitswerten aus Definition §1.4.02 zu tun haben muss, vgl. Definition §2.1.04

§2.6.10 **Beweis**. Angenommen, es wurden A und $\neg B$ bewiesen. Da A gilt, würde dann aus $A \to B$ die falsche Aussage B folgen. Gemäß Axiom §2.6.02 ist dadurch $A \to B$ widerlegt. ■

Die indirekte Widerlegung basiert darauf, dass eine Aussage, aus der etwas Falsches folgt, nicht stimmen kann. Dass aus einer Aussage etwas Wahres folgt, hat dagegen keinerlei Auswirkung, da ja Wahres aus Beliebigem folgt.

§2.6.11 **Beispiel**. Sei A eine Aussage. Es stimmt im Allgemeinen nicht, dass, wenn aus A etwas Wahres folgt, auch A wahr sein muss.

§2.6.12 **Beweis**. Betrachte z.B. die (falsche) Aussage A = „Jedes Kind weiß, dass die Summe der Zahlen 1 bis 100 gleich 5050 ist“. Dann folgt aus A, dass auch der neunjährige Gauß[9] dies wusste, was der Anekdote zufolge sogar eine wahre Aussage ist. Das ändert allerdings nichts daran, dass A trotzdem falsch ist. ■

§2.6.13 **Satz** *(* Quantoren verschiedener Art sind nicht miteinander vertauschbar!). Sei R ein zweistelliges Prädikat. Dann gilt zwar*

$$\exists x\, \forall y : R(x,y) \quad \to \quad \forall y\, \exists x : R(x,y)$$

Die umgekehrte Implikation „$\leftarrow$“ ist im Allgemeinen aber falsch![10]

§2.6.14 **Beweis**. Sei z ein beliebiges Objekt und es gelte $\exists x\, \forall y : \; R(x,y)$. Dann gibt es ein Objekt a, für das $\forall y : \; R(a,y)$ gilt. Also gilt insbesondere $R(a,z)$. Daraus folgt $\exists x : \; R(x,z)$ und da das Objekt z beliebig gewählt war, impliziert dies, dass $\forall y\, \exists x : \; R(x,y)$.
Dass die umgekehrte Implikation „$\leftarrow$“ nicht allgemeingültig ist, zeige ich anhand eines Gegenbeispiels: Es sei das Diskursuniversum die Menge der natürlichen Zahlen. Die folgende Aussage über natürliche Zahlen

$$\forall x\, \exists y : \; x < y$$

ist korrekt, da für jede beliebige natürliche Zahl x gilt, dass $x < x+1$. Die Aussage

$$\exists y\, \forall x : \; x < y$$

ist aber falsch, denn: Angenommen es gäbe eine Zahl a, sodass $\forall x : \; x < a$ gälte. Dann wäre insbesondere $a+1 < a$, aber dies ist eine falsche Aussage. ■

§2.6.15 **Definition**. Die Implikation $\neg B \to \neg A$ heißt die **Kontraposition** der Implikation $A \to B$.

§2.6.16 **Beispiel**. Die Kontraposition der Aussage „Wenn ich krank bin, bleibe ich zuhause“ ist „Wenn ich nicht zuhause bleibe, bin ich nicht krank“.

§2.6.17 **Satz** *(Der indirekte Beweis). Um die Implikation „$A \to B$“ zu beweisen, kannst du die Technik des **indirekten Beweises** (man sagt auch: „**Beweis per Kontraposition**“) benutzen:
Formuliere die Aussagen A und B zu negativen Aussagen um*[11]*, d.h. finde Aussagen A' und B', für die $A \leftrightarrow \neg A'$ und $B \leftrightarrow \neg B'$ gilt. Beweise nun die Implikation $B' \to A'$ (z.B. mit einem direkten Beweis).*

[9] Carl Friedrich Gauß (1777-1855)
[10] vgl. Bemerkung §1.3.18
[11] Gemäß der Regel der doppelten Verneinung (siehe Satz §2.8.08) gilt stets $A \leftrightarrow \neg\neg A$ und $B \leftrightarrow \neg\neg B$. Demnach kannst du $A' := \neg A$ und $B' := \neg B$ setzen und musst beim indirekten Beweis von $A \to B$ dann die Implikation $\neg B \to \neg A$ beweisen.

§2.6.18 **Beweis.** Angenommen, es wurde $B' \to A'$ bewiesen. Dass nun $A \to B$ gilt, zeige ich per direktem Beweis. Dazu sei angenommen, dass A gilt. Wegen $A \leftrightarrow \neg A'$ gilt dann auch $\neg A'$. Da ja $B' \to A'$ bewiesen wurde, würde nun aus B' die falsche Aussage A' folgen. Gemäß Axiom §2.6.02 muss also B' falsch sein. Wegen $B \leftrightarrow \neg B'$ gilt somit B. ■

§2.6.19 **Beispiel.** Wenn ich am Samstag verkatert bin, lebt mein Hund noch.

§2.6.20 **Beweis.** Der Beweis geschieht indirekt. Es gelte also, dass mein Hund gestorben ist. Unter diesem Umstand bin ich am Boden zerstört, werde die Feier mit meinen Freunden am Freitagabend absagen und stattdessen den Abend allein verbringen. Und somit würde ich am Samstag keinen Kater haben. ■

§2.6.21 **Bemerkung** *(Signalwörter)*. Wenn du für die Aussage $A \to B$ einen indirekten Beweis führst, solltest du dies ankündigen, beispielsweise mit „Ich führe einen indirekten Beweis“, „Der Beweis geschieht indirekt“ oder „Beweis per Kontraposition:“. In fortgeschrittenen Büchern wird manchmal auch sofort mit „Es gelte $\neg B$“ begonnen, was dem erfahrenen Leser mitteilt, dass ein indirekter Beweis geführt wird.

2. Widersprüche

§2.6.22 **Definition.** Ein **Widerspruch** ist eine Aussage der Gestalt $A \wedge \neg A$.

§2.6.23 **Beispiel.** Falls A die Aussage „Heute ist Mittwoch“ ist, so besagt $A \wedge \neg A$, dass sowohl heute Mittwoch als auch heute nicht Mittwoch ist.

§2.6.24 **Axiom** *(Satz vom Widerspruch)*. *Für jede Aussage A gilt*

$$\neg(A \wedge \neg A)$$

Mit anderen Worten: Jeder Widerspruch ist eine falsche Aussage.

§2.6.25 **Satz** *(Der Widerspruchsbeweis)*. *Du kannst die Aussage A dadurch wiederlegen, dass du aus ihr einen Widerspruch herleitest.*
Man nennt diese Beweistechnik ***Widerspruchsbeweis****.*

§2.6.26 **Beweis.** Es sei angenommen, dass aus A ein Widerspruch der Gestalt $B \wedge \neg B$ folgt. Nach dem Satz vom Widerspruch gilt $\neg(B \wedge \neg B)$, sodass aus A eine falsche Aussage folgt. Wegen Axiom §2.6.02 ist A somit falsch. ■

§2.6.27 **Beispiel.** Unter den positiven reellen Zahlen gibt es keine kleinste.

§2.6.28 **Beweis.** Für einen Widerspruchsbeweis sei angenommen, es gäbe eine kleinste positive reelle Zahl x. Da x positiv ist, wäre auch $\frac{x}{2}$ eine positive reelle Zahl. Ferner wäre $\frac{x}{2} < x$. Aber dies widerspräche der Annahme, dass x die kleinste positive reelle Zahl sei. ■

§2.6.29 **Bemerkung.** Meist wird auch die indirekte Widerlegung einer Aussage „Widerspruchsbeweis“ genannt. Aufgrund des Satzes vom Widerspruch ist tatsächlich jeder Widerspruchsbeweis auch eine indirekte Widerlegung (siehe Herleitung von Satz §2.6.25); andererseits ist jede indirekte Widerlegung auch ein Widerspruchsbeweis, denn aus $A \to B$ und $\neg B$ folgt, da Wahres aus Beliebigem folgt, auch $A \to \neg B$ und somit insgesamt $A \to (B \wedge \neg B)$.

§2.6.30 **Bemerkung** *(Signalwörter)*. Wenn du dich in einem Widerspruchsbeweis befindest, kannst du, um deinem Leser zu signalisieren, dass du gerade mit *falschen* Aussagen arbeitest, den Konjunktiv II verwenden („dann wäre“, „nun gälte“). Außerdem solltest du die Annahme einer falschen Aussage stets mit „Angenommen, dass…“ oder Ähnlichem beginnen. Für den Leser ist es äußerst wichtig zu wissen, zu welchem Zeitpunkt im Beweis es gerade um die Herleitung wahrer Aussagen geht und zu welchem es (um eines Widerspruchsbeweises willen) um die Herleitung falscher Aussagen geht.
Die Stelle im Beweis, an der ein Widerspruch erreicht wird, wird handschriftlich oft mit einem Blitz „$\lightning$“ markiert. In gedruckten Texten steht meist sowas wie „…aber dies ist ein Widerspruch“ oder „… – Widerspruch!“. Egal wie du es handhabst: du solltest den Moment, an dem du bei einem Widerspruch angelangt bist, stets sprachlich hervorheben.

§2.6.31 **Satz** *(*)*. *Es gilt*

$$\neg(A \leftrightarrow \neg A)$$

§2.6.32 **Beweis**. Für einen Widerspruchsbeweis sei angenommen, dass $A \leftrightarrow \neg A$ gilt. Daraus folgte $A \to \neg A$ und wegen $A \to A$ gälte dann insgesamt $A \to (A \wedge \neg A)$. Demnach müsste A falsch sein, d.h. es müsste $\neg A$ gelten. Wegen $A \leftrightarrow \neg A$ folgte aus $\neg A$, dass auch A gälte. Insgesamt läge nun der Widerspruch $A \wedge \neg A$ vor. ■

§2.6.33 **Bemerkung** *(*)*. Aus diesem Grund werden auch Aussagen der Gestalt $A \leftrightarrow \neg A$ gelegentlich als „Widerspruch“ bezeichnet. Ein berühmtes Beispiel für eine Aussage, die äquivalent zu ihrer Negation ist, ist das (selbstreferenzielle) **Lügner-Paradoxon**:

$A :=$ „Diese Aussage ist falsch.“

Hier gilt tatsächlich $A \leftrightarrow \neg A$. Eine weitere berühmte Situation, in der eine Aussage äquivalent zu ihrer Negation ist, ist das „Barbier-Paradoxon“, das wiederum ein Spezialfall der sogenannten *Russellschen Antinomie*[12] ist:

§2.6.34 **Beispiel** *(* Barbier-Paradoxon)*. In Sevilla lebt kein Mann, der genau denjenigen Männern Sevillas den Bart rasiert, die sich nicht selbst den Bart rasieren.

§2.6.35 **Beweis**. Für einen Widerspruchsbeweis sei einmal angenommen, dass es doch einen solchen Mann gäbe. Aus der Beschreibung leitet man ab, dass sich dieser Mann genau dann selbst den Bart rasierte, wenn er ihn sich nicht selbst rasierte. Aber das ist unmöglich. ■

§2.6.36 **Satz** *(Existenzaussagen widerlegen)*. *Sei E eine Eigenschaft. Dann kannst du $\nexists x : E(x)$ dadurch beweisen, dass du $\forall x : \neg E(x)$ beweist.*

§2.6.37 **Beweis**. Es sei bewiesen, dass $\forall x : \neg E(x)$ gilt. Für einen Widerspruchsbeweis sei nun angenommen, dass dennoch $\exists x : E(x)$ gälte. Dann gäbe es ein Objekt a, für das $E(a)$ gälte. Aber wegen $\forall x : \neg E(x)$ gälte auch $\neg E(a)$ und dies ist ein Widerspruch. ■

§2.6.38 **Satz** *(* Russellsche Antinomie)*. *Sei R ein beliebiges zweistelliges Prädikat. Dann gilt:*

$$\nexists x\, \forall y : \ (R(x,y) \leftrightarrow \neg R(y,y))$$

Mit anderen Worten: Es gibt kein Objekt x, sodass jedes Objekt y genau dann in Relation zu x stünde, wenn es nicht in Relation zu sich selbst stünde.

[12] siehe Satz §2.6.38

§2.6.39 **Beweis.** Für einen Widerspruchsbeweis sei einmal angenommen, es gäbe ein Objekt a, für das

$$\forall y : \; R(a, y) \leftrightarrow \neg R(y, y)$$

gälte. Weil es sich hierbei um eine Allaussage handelt, könnten wir für y das Objekt a einsetzen und erhielten die Äquivalenz

$$R(a, a) \leftrightarrow \neg R(a, a)$$

Aber dies ist ein Widerspruch. ∎

§2.6.40 **Bemerkung** *(*).* Definiert man hierbei $R(x, y) :\Leftrightarrow$ „x rasiert y den Bart", so erhält man genau das Barbier-Paradoxon aus Beispiel §2.6.34

§2.7 Aus Falschem folgt Beliebiges

In diesem Abschnitt seien A, B stets zwei Aussagen.

§2.7.01 **Axiom** *(Modus tollendo ponens). Aus $A \vee B$ und $\neg A$ kannst du schlussfolgern, dass B gilt:*

$$\begin{array}{r} A \vee B \\ \neg A \\ \hline B \end{array}$$

§2.7.02 **Bemerkung.** Diese Schlussregel wird umgangssprachlich auch als „Ausschlusskriterium" bezeichnet. Wenn ich weiß, dass von einer Handvoll Aussagen mindestens eine gelten muss, kann ich die wahre Aussage finden, falls ich alle anderen Fälle ausschließen kann.

§2.7.03 **Beispiel.** Ich habe bereits beschlossen, meiner Freundin einen Erdbeerkuchen oder einen Käsekuchen zum Geburtstag zu backen. Falls ich morgen keine Erdbeeren mehr auftreiben kann, werde ich ihr also einen Käsekuchen backen.

§2.7.04 **Satz** *(Aus Falschem folgt Beliebiges). Es gelten die folgenden beiden Implikationen:*

$$\begin{aligned} \neg A &\to (A \to B) \\ (A \wedge \neg A) &\to B \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Aus einer falschen Aussage oder einem Widerspruch lässt sich jede beliebige Aussage ableiten. Auf Latein heißt dieses Prinzip ***ex falso quodlibet****.*

§2.7.05 **Beweis.** Für einen direkten Beweis sei angenommen, dass $\neg A$ und A gelten. Aus A folgt, dass $A \vee B$ gilt, und wegen $\neg A$ muss gemäß Axiom §2.7.01 dann schon B gelten. ∎

§2.7.06 **Bemerkung** *("principle of explosion").* Da aus Widersprüchen Beliebiges folgt, ist in die Mathematik eine Art „Bombe" eingebaut (in der englischen Literatur spricht man sogar vom "principle of explosion"). Denn wenn es uns gelingen sollte, auch nur eine einzige Aussage sowohl zu beweisen als auch zu widerlegen, folgt daraus, dass *jede* beliebige mathematische Aussage beweisbar ist, so unsinnig sie auch sei. Unter diesen Umständen hätten mathematische Beweise keinerlei Wert und wären nicht dazu geeignet, die „Wahrheit" irgendwelcher Aussagen zu etablieren.

Logiken, in denen das ex falso quodlibet nicht gilt, nennt man „parakonsistente Logiken“. In solchen Logiken hält sich der von Widersprüchen verursachte Schaden in Grenzen und wird teils sogar absichtlich in Kauf genommen; dafür ist dort die Schlussregel aus Axiom §2.7.01 nicht uneingeschränkt anwendbar.

§2.8 Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten

In diesem Abschnitt seien A, B stets zwei Aussagen.
Unsere bisherigen Axiome bilden zusammen die sogenannte „intuitionistische“ oder auch „konstruktive“ Logik. Zur sogenannten „klassischen Logik“, die der Mainstream-Mathematik zugrundeliegt, fehlt nur noch das folgende Axiom:

§2.8.01 **Axiom** *(Satz vom ausgeschlossenen Dritten). Es gilt:*

$$A \vee \neg A$$

Man nennt dieses Prinzip auch ***tertium non datur****, was latein für „ein Drittes kommt nicht vor“ ist.*

§2.8.02 **Bemerkung.** Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten ist nicht zu verwechseln mit dem *Bivalenzprinzip* aus Bemerkung §1.4.01. Das tertium non datur schließt (entgegen seinem Namen) nicht aus, dass es mehr als nur zwei Wahrheitswerte gibt; es besagt lediglich, dass sich die beiden Wahrheitswerte von A und $\neg A$ „in der Summe immer zu ‘absolut wahr’ kombinieren“.

§2.8.03 **Beispiel.** Sei $A :=$ „Heute ist Mittwoch“. Dann ergibt sich aus dem tertium non datur die Aussage „Heute ist Mittwoch oder heute ist nicht Mittwoch“.

§2.8.04 **Bemerkung** *(Konsequenz für Fallunterscheidungsbeweise).* Mit dem tertium non datur stehen uns bedingungslos Oder-Aussagen der Gestalt $A \vee \neg A$ zur Verfügung, die wir für Fallunterscheidungsbeweise einsetzen können. Möchten wir eine Aussage X beweisen und ist A irgendeine beliebige weitere Aussage, so genügt es, X einmal unter der Annahme, dass A gilt, zu beweisen und andererseits unter der Annahme, dass A falsch ist.

§2.8.05 **Beispiel.** Es existieren zwei irrationale Zahlen a, b, für die a^b eine rationale Zahl ist.

§2.8.06 **Beweis.** Es ist bekannt, dass $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl ist. Betrachte nun die Aussage

$$A := \text{„}\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \text{ ist eine rationale Zahl.“}$$

Gemäß dem tertium non datur gilt entweder A oder $\neg A$, sodass eine Fallunterscheidung durchgeführt werden kann:

- Falls A gilt, setze einfach $a = b = \sqrt{2}$.
- Falls A falsch ist, setze $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und $b = \sqrt{2}$. Weil A falsch ist, ist a eine irrationale Zahl und es ist

  $$a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

  eine rationale Zahl. ■

§2.8.07 **Bemerkung** *(* Nichtkonstruktivität des tertium non daturs).* Der vorige Beweis ist ein berühmtes Beispiel für einen „nichtkonstruktiven Beweis". In ihm wird die Existenz zweier Zahlen a, b mit besonderen Eigenschaften bewiesen, ohne dass am Ende des Beweises irgendein konkretes Beispiel vorliegt. Selbst nach der Beweislektüre kannst du keine konkreten Irrationalzahlen a, b hinschreiben, von denen du dir sicher sein kannst, dass a^b rational ist.
Mit dem tertium non datur kommt eine weitere Pathologie auf: In der Mathematik gibt es Aussagen, die weder beweisbar noch widerlegbar sind. Die berühmteste dieser „unentscheidbaren" Aussagen ist vielleicht die Kontinuumshypothese. Ist nun A eine unentscheidbare Aussage, so ist weder A noch $\neg A$ beweisbar, obwohl dem tertium non datur gemäß $A \vee \neg A$ gilt. Es liegt also die Situation vor, dass eine Aussage der Gestalt „X oder Y" beweisbar ist, obwohl weder X noch Y beweisbar ist.
In der intuitionistischen Logik, die aus allen bisherigen Axiomen mit Ausnahme des tertium non datur besteht, kann dies nicht vorkommen. Mithilfe fortgeschrittener semantischer Methoden lässt sich beweisen, dass sich, sofern sich eine Aussage der Gestalt „X oder Y" ohne Rückgriff aufs tertium non datur beweisen lässt, stets auch schon eine der beiden Aussagen X oder Y beweisen lässt[13]. Allerdings lassen sich ohne Rückgriff aufs tertium non datur eben auch wesentlich weniger Aussagen überhaupt beweisen.

§2.8.08 **Satz** *(Regel der doppelten Verneinung). Es gilt*

$$A \leftrightarrow \neg\neg A$$

§2.8.09 **Beweis** (*). „$\rightarrow$" Es gelte A. Dann würde aus $\neg A$ sofort der Widerspruch $A \wedge \neg A$ folgen, sodass $\neg A$ falsch sein muss. Also gilt $\neg\neg A$.
„$\leftarrow$": Es gelte $\neg\neg A$. Gemäß tertium non datur gilt $A \vee \neg A$. Da $\neg A$ falsch ist, folgt vermöge Axiom §2.7.01, dass A gelten muss. ∎

§2.8.10 **Bemerkung**. Aufgrund der Regel der doppelten Verneinung kann jede Aussage A stets mit der verneinenden Aussage $\neg\neg A$ identifiziert werden. Die Aussage A zu beweisen, ist dann gleichwertig dazu, die Aussage $\neg A$ zu widerlegen. Dadurch können wir jede beliebige Aussage A dadurch beweisen, dass wir $\neg A$ zu einem Widerspruch führen.

§2.8.11 **Satz**. *Es gilt:*

$$A \rightarrow B \quad \leftrightarrow \quad \neg A \vee B$$

§2.8.12 **Beweis** (*). „$\rightarrow$": Es gelte $A \rightarrow B$. Um nun $(\neg A \vee B)$ zu beweisen, mache ich mir das tertium non datur zunutze, demzufolge A oder $\neg A$ gelten muss. Ich führe nun eine Fallunterscheidung durch:

1. Der Fall, dass A wahr ist. In diesem Fall folgt aus der Annahme $A \rightarrow B$, dass dann auch B gilt. Aber dann ist insbesondere auch $\neg A \vee B$ korrekt.

2. Der Fall, dass A falsch ist. In diesem Fall gilt $\neg A \vee B$ ebenfalls, da ja schon $\neg A$ gilt.

Also gilt in jedem Fall $\neg A \vee B$.

„$\leftarrow$": Es gelte $\neg A \vee B$. Ich werde $A \rightarrow B$ direkt beweisen, weshalb einmal angenommen sei, dass A gelte. Aber dann ist $\neg A$ falsch, sodass wegen $\neg A \vee B$ nur noch übrig bleibt, dass B gilt. ∎

[13] Auf Englisch nennt man dies die "Disjunction property" der konstruktiven Logik.

§2.8.13 **Satz.** *Möchtest du eine Aussage der Gestalt $A \lor B$ beweisen, so kannst du stattdessen auch $\neg A \to B$ beweisen.*

§2.8.14 **Beweis.** Es ist

$$\begin{aligned} \neg A \to B \quad &\leftrightarrow \quad \neg\neg A \lor B && \text{(wegen Satz §2.8.11)} \\ &\leftrightarrow \quad A \lor B && \text{(Regel der doppelten Verneinung)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

§2.8.15 **Beispiel.** In der Ebene sind zwei Geraden zueinander parallel oder sie schneiden sich in einem Punkt.

§2.8.16 **Beweis.** Wenn zwei Geraden nicht parallel sind, so laufen sie in einer Richtung aufeinander zu. Weil in dieser Richtung der Abstand beider Geraden mit konstanter Rate abnimmt, müssen sich die Geraden in dieser Richtung irgendwann schneiden. ■

§2.8.17 **Satz** *(Regeln von De Morgan). Es gilt:*

$$\begin{aligned} \neg(A \lor B) \quad &\leftrightarrow \quad \neg A \land \neg B \\ \neg(A \land B) \quad &\leftrightarrow \quad \neg A \lor \neg B \end{aligned}$$

§2.8.18 **Beweis** (*). Es müssen insgesamt vier Implikationen

$$\neg(A \lor B) \quad \to \quad \neg A \land \neg B \tag{1}$$
$$\neg A \land \neg B \quad \to \quad \neg(A \lor B) \tag{2}$$
$$\neg(A \land B) \quad \to \quad \neg A \lor \neg B \tag{3}$$
$$\neg A \lor \neg B \quad \to \quad \neg(A \land B) \tag{4}$$

bewiesen werden.

(1): Wegen $A \to (A \lor B)$ und $B \to (A \lor B)$ folgt per Kontraposition, dass $\neg(A \lor B) \to \neg A$ und $\neg(A \lor B) \to \neg B$ gelten muss. Insgesamt folgt nun $\neg(A \lor B) \to (\neg A \land \neg B)$.

(4): Wegen $(A \land B) \to A$ und $(A \land B) \to B$ folgt per Kontraposition, dass $\neg A \to \neg(A \land B)$ und $\neg B \to \neg(A \land B)$ gelten muss. Insgesamt folgt nun $(\neg A \lor \neg B) \to \neg(A \land B)$.

(2): Sowohl im Fall A als auch im Fall B würde aus $\neg A \land \neg B$ ein Widerspruch folgen. Somit gilt $(A \lor B) \to \neg(\neg A \land \neg B)$. Per Kontraposition folgt daraus $\neg\neg(\neg A \land \neg B) \to \neg(A \lor B)$ und mit der Regel der doppelten Verneinung lässt sich dies zu (2) vereinfachen.

(3): Für einen indirekten Beweis sei angenommen, dass $\neg(\neg A \lor \neg B)$ gilt. Mit der (bereits bewiesenen) Implikation (1) folgt daraus, dass $\neg\neg A \land \neg\neg B$ gilt, was mit der Regel der doppelten Verneinung zu $A \land B$ vereinfacht werden kann. ■

§2.8.19 **Satz** *(Implikationen per Widerspruch beweisen). Um die Implikation $A \to B$ zu beweisen, kannst du folgendermaßen vorgehen: Du nimmst an, dass sowohl A als auch $\neg B$ gelten und versuchst nun, einen Widerspruch herzuleiten.*

§2.8.20 **Beweis.** Folgt aus der Annahme $A \land \neg B$ ein Widerspruch, so ist damit $\neg(A \land \neg B)$ bewiesen. Wegen

$$\begin{aligned} \neg(A \land \neg B) \quad &\leftrightarrow \quad \neg A \lor \neg\neg B && \text{(Regel von De Morgan)} \\ &\leftrightarrow \quad \neg A \lor B && \text{(Regel der doppelten Verneinung)} \\ &\leftrightarrow \quad A \to B && \text{(nach Satz §2.8.11)} \end{aligned}$$

gilt dann auch $A \to B$. ■

§2.8.21 **Bemerkung** *(Tücken des Widerspruchsbeweises).* Im Vergleich zum direkten Beweis ist ein Widerspruchsbeweis für $A \to B$ oft leichter zu finden, weil man ja eine Annahme mehr als beim direkten Beweis zur Verfügung hat (nämlich $\neg B$). Andererseits sind Widerspruchsbeweise dort, wo auch ein direkter oder indirekter Beweis möglich ist, oft unnötig kompliziert, weshalb du, wenn du einen validen Widerspruchsbeweis gefunden hast, immer noch einmal überprüfen solltest, ob er sich nicht leicht in einen direkten Beweis umformulieren lässt.
Einige Anfänger machen den „Fehler", ihre Tutoren mit Widerspruchsbeweisen zu überhäufen, wo schon einfachste Modifikationen einen direkten Beweis lieferten (auch weil den Widerspruchsbeweis in ihren Augen die Aura des Mysteriösen und Coolen umgibt). Das ist auch eine Geschmacksfrage. Es gibt Situationen, in denen ein Widerspruchsbeweis unvermeidlich ist und sich mithilfe metamathematischer Methoden nachweisen lässt, dass ein direkter Beweis unmöglich ist.

§2.8.22 **Beispiel** *(*).* Ein weiterer Grund dafür, dass du direkte Beweise Widerspruchsbeweisen vorziehen solltest, besteht darin, dass sich Fehler in Widerspruchsbeweisen (wo ja ohnehin mit falschen Aussagen jongliert wird) oft schwieriger ausmachen lassen als in direkten Beweisen. Hier ein „Beweis" für die Aussage, dass $1 = 0$ gilt:

§2.8.23 **Beweis** (unnötig komplizierter Widerspruchs„beweis"). Ich führe einen Widerspruchsbeweis. Dazu nehme ich an, dass $1 \neq 0$ und leite daraus einen Widerspruch her.
Wegen $1 \neq 0$ ist auch

$$0 = 2 \cdot 0 \neq 2 \cdot 1 = 2$$

und aus $0 \neq 2$ folgt $-1 \neq 1$. Durch weiteres Umformen kommt man auf

$$\begin{aligned} -1 &\neq 1 \\ &= \sqrt{1} \\ &= \sqrt{(-1)\cdot(-1)} \\ &= \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} \\ &= \sqrt{-1}^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

also insgesamt $-1 \neq -1$. Aber dies ist eine falsche Aussage. Also muss die Annahme zu Beginn des Beweises, nämlich dass $0 \neq 1$ ist, falsch sein.

Kannst du den Fehler finden? Denk darüber eine Zeitlang nach und versuche daraufhin, den Fehler im folgenden direkten Beweis zu finden:

§2.8.24 **Beweis** (diesmal als direkter „Beweis"). Es gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{1} \\ &= \sqrt{(-1)\cdot(-1)} \\ &= \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} \\ &= \sqrt{-1}^2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

also insgesamt $1 = -1$. Durch weitere Äquivalenzumformungen folgt:

$$1 = -1 \quad \xrightarrow{+1} \quad 2 = 0 \quad \xrightarrow{:2} \quad 1 = 0$$

Erstsemestern passiert es öfters, dass sie ihre eigenen Denkfehler nur deshalb übersehen, weil ihr Beweis einer unnötig komplizierten Logik unterliegt, mit der sie sich am Ende selbst verwirren. Versuche deshalb, immer den Überblick über deine Beweisstruktur zu behalten und sie so simpel wie möglich zu halten.

§2.8.25 **Satz** *(Quantoren negieren). Es gilt:*

$$\begin{aligned} \nexists x : E(x) \quad &\leftrightarrow \quad \forall x : \neg E(x) \\ \neg(\forall x : E(x)) \quad &\leftrightarrow \quad \exists x : \neg E(x) \end{aligned}$$

§2.8.26 **Beweis** (*). Nach Aufteilung in Hin- und Rückrichtungen bleiben insgesamt vier Implikationen übrig, die bewiesen werden müssen:

$$\neg(\exists x : \ E(x)) \rightarrow (\forall x : \ \neg E(x)) \tag{1}$$
$$(\forall x : \ \neg E(x)) \rightarrow \neg(\exists x : \ E(x)) \tag{2}$$
$$\neg(\forall x : \ E(x)) \rightarrow (\exists x : \ \neg E(x)) \tag{3}$$
$$(\exists x : \ \neg E(x)) \rightarrow \neg(\forall x : \ E(x)) \tag{4}$$

(1): Es gelte $\nexists x : E(x)$. Sei nun t ein beliebiges Objekt. Wegen

$$E(t) \quad \rightarrow \quad \exists x : E(x)$$

folgt per Kontraposition, dass $\neg E(t)$ gelten muss. Weil das Objekt t beliebig gewählt wurde, ist damit bewiesen, dass $\forall x : \neg E(x)$ gilt.

(4) ergibt sich aus Satz §2.6.05.

(2) ergibt sich aus Satz §2.6.36

(3): Für einen indirekten Beweis sei angenommen, dass $\nexists x : \neg E(x)$ gilt. Mit der (bereits bewiesenen) Implikation (1) folgt daraus, dass $\forall x : \neg\neg E(x)$ gilt, was mit der Regel der doppelten Verneinung zu $\forall x : E(x)$ vereinfacht werden kann. ∎

§2.8.27 **Bemerkung** *(*).* Die Regeln von De Morgan aus Satz §2.8.17 können als Spezialfälle der Quantorennegationsregeln aufgefasst werden. Auch ihre Herleitungen verliefen ähnlich.

§2.8.28 **Bemerkung** *(* Vollständigkeit der Aussagenlogik und der Prädikatenlogik).* Jede Formel, die bisher als Axiom gewählt oder aber hergeleitet wurde, ist eine Tautologie, d.h. wahr unter jeder möglichen (zweiwertigen) Interpretation, siehe Definition §1.4.02. Der sogenannte **Gödelsche Vollständigkeitssatz** besagt auch das Umgekehrte: Jede (erststufige) Tautologie lässt sich mithilfe der Axiome und Beweistechniken aus diesem Vortrag herleiten.
Für eine allgemeine Aussage mit Junktoren und Quantoren ist das nicht allzu hilfreich, denn die Beweistechniken dienen uns ja dazu, herauszufinden, welche Aussagen wahr sind – und nicht etwa dient uns umgekehrt irgendein Wahrheitsorakel dazu, herauszufinden, welche Aussagen beweisbar sind.
Sofern wir es aber mit einer Aussage zu tun haben, die keine Prädikate und Quantoren enthält,

sieht die Sache anders aus. Denn für eine solche Aussage, die allein aus den aussagenlogischen Junktoren aufgebaut ist, können wir brute force überprüfen, ob es sich um eine Tautologie handelt, indem wir einen Computer eine Wahrheitstafel ausrechnen lassen und schauen, ob am Ende überall nur w's stehen, siehe Bemerkung §1.4.10. Bei komplizierten Aussagen steigt die dafür nötige Rechenkapazität allerdings ins Unermessliche.
Dass in der Mathematik dennoch nicht am laufenden Band Wahrheitstafeln ausgerechnet werden, kommt daher, dass die wenigsten mathematischen Aussagen keine Quantoren beinhalten. Und sobald Quantoren und Prädikate ins Spiel kommen, sind die Mittel der Wahrheitstafel erschöpft.

§2.8.29 **Bemerkung** *(*)*. Eine Liste mit vielen prädikatenlogischen Tautologien findest du im Anhang dieses Skripts. Wenn du möchtest, kannst du dir einmal zwei oder drei davon raussuchen und versuchen zu beweisen.

§2.9 Entstehungsprozess eines Beweises

Das Schreiben eines mathematischen Beweises gliedert sich grob in drei Phasen, die in diesem Abschnitt einmal durchgegangen werden sollen. Neben deren abstrakter Beschreibung wird in diesem Abschnitt ein ganz konkretes Beispiel aus der Linearen Algebra entwickelt:

§2.9.01 **Beispiel**. Gegeben seien die drei Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man beweise, dass (v_1, v_2, v_3) eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

Möglicherweise wirst du mit diesem Beispiel erst in einigen Wochen etwas anfangen können. Komm dann nochmal hierher zurück.

§2.9.02 **Definition** *(Phase 1: Recherche)*. In diesem Schritt stellt ihr sicher, euch auf dem Stand der Vorlesung zu befinden:

- Sofern ihr nicht die Bedeutung aller in der Aufgabenstellung vorkommenden Begriffe kennt, müsst ihr sie im Vorlesungsskript, in deinem Aufschrieb, in einem Lehrbuch oder im Internet nachschlagen. Solange ihr nicht genau wisst, was die Aufgabe besagt, könnt ihr sie nicht lösen.

- Mit den Definitionen allein kommt ihr meist aber noch nicht sehr weit. Denn in der Regel wurden in der Vorlesung bereits ein paar praktische Aussagen bewiesen, die ihr euch für eure Lösung zunutze machen könnt. Auf diese Weise bekommt ihr Werkzeuge in die Hand, die ihr in eurem Beweis einsetzen könnt, um euch die Arbeit zu erleichtern. Erstsemestern passiert es nicht selten, dass sie keinen genauen Überblick darüber, was genau in der Vorlesung bewiesen wurde und was nicht, haben, und deshalb unnötige Mehrarbeit verrichten, indem sie versuchen, bereits in der Vorlesung bewiesene Sätze noch einmal selbst zu beweisen.

- Ein Problem, das vor allem das erste Studiensemester betrifft, ist, dass gewisse „offensichtliche“ oder bereits aus der Schule bekannte Sätze für die Lösung der Übungszettel nicht verwendet werden sollen, weil sie noch nicht in der Vorlesung bewiesen wurden. Leider ist im ersten Semester manchmal nicht ganz klar, was man denn nun alles für bekannt voraussetzen darf und wobei es sich um „nichttriviale“ Aussagen, die eines Beweises bedürfen, handelt. Im Zweifelsfall solltet ihr bei eurem Tutor / eurer Tutorin nachfragen. Glücklicherweise hört diese Problematik spätestens im dritten Semester auf.

Zu dem Beispiel mit den Basisvektoren: Solange ich nicht genau weiß, was eine „Basis des $\mathbb{R}^3$“ ist, kann ich die Aufgabe nicht lösen. Ein Blick in den Vorlesungsaufschrieb verrät mir:

> Das Tripel (v_1, v_2, v_3) ist genau dann eine Basis des $\mathbb{R}^3$, wenn es für jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ eindeutig bestimmte reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gibt, für die $v = av_1 + bv_2 + cv_3$ gilt.

An dieser Definition könnte ich nun meinen Beweisansatz orientieren. Damit würde ich aber unnötige Beweisarbeit verrichten, die bereits in der Vorlesung erledigt wurde. Denn dort wurde die folgende Aussage bewiesen:

> In der Vorlesung wurde bewiesen: Da der $\mathbb{R}^3$ dreidimensional ist, ist (v_1, v_2, v_3) schon dann eine Basis, wenn es linear unabhängig ist.

Dies führt mich auf den Begriff „linear unabhängig“, dessen Bedeutung ich, sofern sie mir nicht absolut klar ist, ebenfalls nachschlagen muss:

> Die Vektoren (v_1, v_2, v_3) heißen *linear unabhängig*, falls für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ bereits gelten muss, dass $a = b = c = 0$.

Damit habe ich jetzt alle Definitionen beisammen und hoffe, dass ich keinen weiteren Satz aus der Vorlesung, der mir noch mehr Arbeit abnehmen könnte, übersehen habe[14]. Beachte auch, wie mir das Nachschlagen des Vorlesungssatzes Arbeit abgenommen hat. Anfangs hätte ich beweisen müssen, dass es für jeden beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ eindeutig bestimmte Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $v = av_1 + bv_2 + cv_3$ gibt. Nun muss ich nur noch beweisen, dass diese Zahlen im Fall $v = 0$ eindeutig bestimmt sind. Das ist eine erhebliche, unmittelbare Vereinfachung der Aufgabe!

§2.9.03 **Definition** *(Phase 2: Rumprobieren).* Der zweite Schritt ist die kreativste Phase. Nachdem ihr euch alle Hilfsmittel, die euch die Vorlesung zum Thema bereitstellt, vergegenwärtigt habt, müsst ihr nun irgendwie einen Beweis aus dem Hut zaubern. Oft werden eure Überlegungen auch dazu führen, dass ihr nochmal zu Phase 1 zurückgeht und weitere Definitionen und Sätze nachschlagt.

- Beleuchtet das Problem von mehreren Seiten. Wenn eine Implikation $A \to B$ zu beweisen ist: schaut euch die Kontraposition $\neg B \to \neg A$ an und seht, ob ihr dadurch eher auf eine Beweisidee kommt. Oder nehmt an, dass sowohl A als auch $\neg B$ gelten und schaut, ob dabei irgendetwas faul ist.

[14]Gegen Ende der LA1-Vorlesung wird ein „Determinantenkriterium“ bewiesen, mit dessen Hilfe die Aufgabe nochmal erheblich einfacher werden würde. Allerdings werden gegen Semesterende auch nicht mehr Übungsaufgaben wie diese gestellt werden.

- In dieser Phase ist wirklich *alles* erlaubt. Ihr könnt völlig ungerechtfertigt irgendwelche Vermutungen aufstellen und mit Hypothesen arbeiten, die euch zwar plausibel erschienen, von denen ihr euch aber gar nicht hundertprozentig sicher seid. Ihr braucht euch hier an keinerlei Logikregeln halten und könnt jeden noch so dummen Bullshit ausprobieren. In dieser Phase betreibt ihr „experimentelle Mathematik“, die nicht logisch fundiert sein muss.

- Manchmal kann der Beweis auch „von hinten nach vorne“ durchgeführt werden. D.h. ihr beginnt mit der zu zeigenden Aussage und sucht nach Zwischenschritten, unter deren Annahme ihr die Aussage beweisen könnt[15]. Jetzt versuchst du, diese Zwischenschritte zu beweisen, bis ihr irgendwann bei einer Aussage angekommen seid, die ihr schon an und für sich beweisen könnt. Ich markiere auf ihrem Schmierblatt solche Gleichungen, die ich als Hypothesen verwende und die noch „zu zeigen“ sind, mit einem Ausrufezeichen wie etwa

  $$a, b, c \overset{!}{=} 0 \qquad \text{(lies: „}a, b, c\text{ sollen gleich } 0 \text{ sein“)}$$

  Aber ihr dürft in euren Notizen natürlich auch jede andere Art von Kennzeichnung verwenden. Beachtet aber: Während ihr in Phase 2 von hinten nach vorne arbeiten dürft, müsst ihr in Phase 3, wenn es um das Aufschreiben des Beweises geht, „von vorne nach hinten“ arbeiten.

- Haltet im Vorlesungsmaterial nach Aussagen ähnlicher Art wie die Aufgabenstellung Ausschau. Möglicherweise könnt ihr Beweistechniken aus der Vorlesung imitieren.

- In dieser Phase werdet ihr möglicherweise mehrere Schmierblätter mit für andere Leute völlig unsinnigen, unlesbaren Skizzen vollschreiben. Das ist aber nicht schlimm; es geht hier um *eure* Ideenfindung und erst in der nächsten Phase werdet ihr eure Gedanken für euren Tutor / eure Tutorin verständlich machen müssen.

- Werd im ersten Semester *auf keinen Fall* zum Einzelkämpfer!!! Tausche dich mit deinen Zettelpartnern oder anderen StudentInnen aus! In dieser Phase geht es darum, einen möglichst großen Vorrat an Ideen anzuhäufen, aus dem sich früher oder später die Lösung formen muss. Manchmal hat dein Zettelpartner den entscheidenden Gedanken, der noch fehlt, um deine Strategie aufgehen zu lassen und es wäre dumm und schade, wenn er ihn dir nicht mitteilte. Außerdem kann sich die Gedankenwelt deiner Partner fundamental von deiner eigenen unterscheiden und nur durch Austausch mit Anderen (einschließlich Lehrbücher und Internetseiten) kannst du ein vielseitiges Verständnis für mathematische Objekte gewinnen.

Diese Phase endet, sobald ihr einen Ansatz gefunden und weiterentwickelt habt, der sich als erfolgreich herausstellt, d.h. von dem ihr euch sicher seid, dass er sich in einen wasserdichten Beweis formulieren lässt.

Zu dem Beispiel mit der Basis im $\mathbb{R}^3$: Die Recherche hat ergeben, dass ich nur noch beweisen muss: Sind $a, b, c \in \mathbb{R}$ drei beliebige reelle Zahlen mit

$$a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

[15] Für ein Beispiel siehe Bemerkung §2.3.27.

so muss bereits $a = b = c = 0$ gelten. Da es sich um eine Gleichung im $\mathbb{R}^3$ handelt, kann ich sie in ein Gleichungssystem dreier Gleichungen in $\mathbb{R}$ zerlegen:

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ a & + & b & + & c & = & 0 \\ 2a & + & & + & c & = & 0 \end{array}$$

Dieses lineare Gleichungssystem kann ich nun einerseits mit Schulwissen, andererseits mit dem in der LA-Vorlesung präsentierten „Gauß-Algorithmus“ lösen.

Damit ist eine vielversprechende Beweisstrategie gefunden. Auf dem Schmierblatt vergewissere ich mich nun durch ein paar Umformungen, die für nicht-eingeweihte Leser keinen Sinn ergeben müssen, dass das Gleichunssystem tatsächlich auf $a = b = c = 0$ führt:

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \qquad c &= -2a \\ \rightsquigarrow \qquad -a + b &= 0 \\ \rightsquigarrow \qquad b &= a \\ \rightsquigarrow \qquad a + 2a - 2a &= 0 \\ \rightsquigarrow \qquad a &= 0 \\ \rightsquigarrow \qquad c &= -2a = 0 \end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe im Prinzip gelöst. Jetzt muss die Lösung nur noch ordentlich aufgeschrieben werden.

§2.9.04 **Definition** *(Phase 3: Aufschreiben).* In dieser Phase geht es darum, einen gut lesbaren Beweistext zu formulieren, der allen Regeln der Kunst genügt. Oftmals werdet ihr in dieser Phase auf Schwächen im Beweis stoßen, die euch dazu zwingen, nochmal in Phase 2 zurückzugehen, um Reparaturen am Beweis durchzuführen.

- Macht euch die logische Struktur eures Beweises deutlich und überlegt euch eine Gliederung der Beweisschritte. Schreibt diese in der Reihenfolge der logischen Argumentationskette, und *nicht* in der Reihenfolge der kreativen Ideenkette, die euch auf den Beweis geführt hat, auf. Sollte der Beweis sehr kompliziert sein, dürft ihr aber, sofern es eurem Leser hilft, auch ein paar Meta-Bemerkungen darüber, welche Idee hinter dem aktuellen Beweisschritt steckt, einstreuen.

- Sorgt für ein ausgeglichenes Wechselspiel zwischen Formeln und Umgangssprache.

- Stellt sicher, dass ihr jede Aussage, die ihr im Beweis verwendest und die nicht völlig naheliegend ist, begründet.

- Wenn ihr euch spezielle Aussagen aus der Vorlesung zunutze macht, schreibe so etwas wie „Aus der Vorlesung ist bekannt“ oder „Nach Vorlesung gilt. . . “.

- Definitionen aus der Vorlesung braucht ihr nicht noch einmal ausformulieren, sondern ihr könnt voraussetzen, dass euer Tutor / eure Tutorin alle Definitionen, die bislang in der Vorlesung drankamen, kennt. Ebenso könnt ihr alle Variablen, die in der Aufgabenstellung bereits eingeführt wurden, im Beweis verwenden ohne noch einmal neu definieren zu müssen, was sie bedeuten.

- Besonders schreibfreudige StudentInnen schreiben auf ihren Lösungszettel nochmal die ganze Aufgabenstellung ab, bevor sie mit ihrer eigentlichen Lösung beginnen. Wenn euch das hilft, tut es; es ist aber nicht nötig.
- Zeige deinen Beweis deinen Zettelpartnern. Wenn sie ihn ohne Zusatzerklärungen nicht verstehen, muss er verbessert werden. Der Beweis muss am Ende selbsterklärend für deinen Tutor / deine Tutorin sein.
- Sollte sich herausstellen, dass der Beweis eine Lücke besitzt, für die euch einfach keine Lösung einfällt, seid ehrlich zu euch selbst und eurem Tutor / eurer Tutorin. Ihr werdet erheblich mehr Punkte und Respekt dafür bekommen, dass ihr in einer Anmerkung darauf aufmerksam macht, dass an dieser Stelle noch etwas fehlt und kurz erläutert, woran genau es scheitert, als wenn ihr versucht, eure Lücke mit wirren Formulierungen und komplizierten Formeln zu verschleiern.

Der letzte Punkt ist vielleicht der allerwichtigste: niemand erwartet, dass ihr von Anfang an perfekte Abgaben produziert! Es ist der Job eures Profs, eures Tutors und euer selbst, euch mathematisches Arbeiten beizubringen. Falls ihr methodisches oder inhaltliches Unverständnis habt, dürft ihr euch nicht dafür schämen! Vielmehr solltet ihr versuchen, dieses Unverständnis zu reflektieren und klar auszuformulieren. Das allein ist schon ein schwieriges Vorhaben, für dessen Gelingen ihr Stolz und Anerkennung verdient!

Zu dem Beispiel mit der Basis im $\mathbb{R}^3$: Hier ist ein Beweis, den ich am Ende aufschreiben würde.

§2.9.05 **Beweis**. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass, da der $\mathbb{R}^3$ ein dreidimensionaler Vektorraum ist, eine Familie dreier Vektoren im $\mathbb{R}^3$ genau dann eine Basis ist, wenn sie linear unabhängig ist. Demnach genügt es zu zeigen, dass v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind.

Dazu seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ drei beliebige reelle Zahlen mit

$$a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Man erhält ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccc} \mathrm{I} & a & + & 2b & + & c & = & 0 \\ \mathrm{II} & a & + & b & + & c & = & 0 \\ \mathrm{III} & 2a & + & & + & c & = & 0 \end{array}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} & & 2a + c = 0 \quad &\to \quad c = -2a \\ &\xrightarrow[\text{in II einsetzen}]{c=-2a} & -a + b = 0 \quad &\to \quad b = a \\ &\xrightarrow[\text{in I einsetzen}]{b=a,\ c=-2a} & a + 2a - 2a = 0 \quad &\to \quad a = 0 \\ &\xrightarrow{b=a} & b = 0 \quad & \\ &\xrightarrow[c=-2a]{a=0,} & c = 0 \quad & \end{aligned}$$

Also muss $a = b = c = 0$ gelten. Da $a, b, c \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt waren, ist somit gezeigt, dass v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind. ■

Zugegebenermaßen würde ich in einem handschriftlichen Beweisaufschrieb weniger lange Sätze schreiben und mehr mit der Einrückung einzelner Gedankenschritte arbeiten. Dies lässt sich aber nicht gut in einem gedruckten Text wiedergeben. Beweise in Büchern sehen meist anders als handschriftlich aufgeschriebene Beweise aus.

§2.10 Aufgabenvorschläge

§2.10.01 **Aufgabe** *((Un)Logische Schlussfolgerungen).* Seien A, B, C drei beliebige Aussagen und E, F, G drei Prädikate. Beurteilt die nachfolgenden Schlussfolgerungen danach, ob sie logisch haltbar sind:

a)
Entweder ist der Butler oder der Koch der Mörder.
Entweder ist der Koch oder der Gärtner der Mörder.
———
Also gilt: Entweder ist der Butler oder der Gärtner der Mörder.

b)
Im Sterben sagen alle Menschen die Wahrheit.
Im Sterben sagte Siddhartha: „Alles Geschaffene ist vergänglich.“
———
Also gilt: Alles Geschaffene ist vergänglich.

c)
Wenn sich niemand von uns ins Zeug legt, kriegen wir das Projekt nie im September fertig.
Wir haben das Projekt im September fertig gekriegt.
———
Also gilt: Jeder von uns hat sich ins Zeug gelegt.

d)
$$\begin{array}{c} A \to B \\ C \to \neg B \\ \hline A \leftrightarrow \neg C \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{c} \nexists x :\ F(x) \wedge G(x) \\ \forall x :\ E(x) \to F(x) \\ \hline \nexists x :\ E(x) \wedge G(x) \end{array}$$

f)
Wenn Sie erst den Nippel durch die Lasche ziehen
und mit der kleinen Kurbel ganz nach oben drehen,
dann erscheint sofort ein Pfeil.
Und drücken Sie dort drauf,
so geht die Sache auf.
———
Also gilt: Wenn Sie nicht die Kurbel ganz nach oben drehen,
so wird die Sache nie aufgehen.

§2.10.02 **Aufgabe** *(Fehlersuche I).* Betrachtet den folgenden falschen Satz samt fehlerhaftem Beweis:

§2.10.03 **Satz** *(Fehlerhafter Satz). Seien x, y zwei reelle Zahlen und $x \neq 3$. Gilt dann auch noch $x^2 y = 9y$, so ist $y = 0$*

§2.10.04 **Beweis**. Es gelte $x^2 y = 9y$. Dann folgt $(x^2 - 9)y = 0$. Wegen $x \neq 3$ ist $x^2 \neq 9$, sodass $x^2 - 9 \neq 0$. Daher können wir bei der Gleichung $(x^2 - 9)y = 0$ beide Seiten durch $x^2 - 9$ teilen und erhalten $y = 0$.

a) Findet den Fehler im Beweis.

b) Widerlegt den Satz mit einem Gegenbeispiel.

§2.10.05 **Aufgabe** *(Fehlersuche II).* Analysiert den folgenden Satz samt Beweis. Enthält der Beweis Fehler oder Lücken? Stimmt der Satz überhaupt?

§2.10.06 **Satz.** *Für jede natürliche Zahl n existiert eine natürliche Zahl m, sodass keine der Zahlen $m+1, m+2, \ldots, m+n$ eine Primzahl ist. Mit anderen Worten: Es gibt beliebig große Primzahllücken.*

§2.10.07 **Beweis.** Es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Setze

$$m := (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)) + 1$$

Dann ist $m+1$ durch 2 teilbar, $m+2$ durch 3 teilbar und allgemein $m+k$ durch $k+1$ teilbar für jedes $k \leq n$. Also ist keine der Zahlen $m+1, m+2, \ldots, m+n$ eine Primzahl. ■

§2.10.08 **Aufgabe** *(Das Dorf der Lügner).* Im beschaulichen Dörfchen Lügenscheid im Sauerland leben genau siebzig Menschen. Jeder dieser Einwohner

- sagt entweder immer die Wahrheit
- oder aber alles was er sagt ist immer gelogen.

Fasziniert von dieser Begebenheit reist Beate Weiß, eine Mathematik-Doktorandin aus Wahrschau, deren Dissertation im Bereich der angewandten Logik seit Monaten von ihrer Fakultät ausgebremst wird, um sie solange es geht mit prekären befristeten Anstellungen bei der Stange zu halten, in das Dorf, um endlich einen Aufhänger für ihre Arbeit zu finden. Nachdem sie sich im Gasthaus eingerichtet hat, lädt sie alle siebzig Einwohner nacheinander zu einer Befragung ein, bei der sie nur eine einzige Frage stellt: „Wieviele Einwohner dieses Dorfs lügen immer?“
Die erste Person, die zur Befragung erscheint, ein gutmütig aussehender, älterer Herr im Pullunder, sagt ihr, sie müsse sich keine Sorgen machen: im Dorf gebe es nur einen einzigen Lügner – alle anderen Einwohner sagten dagegen immer die Wahrheit.
Die zweite Person in der Befragung, eine großgewachsene, elegant gekleidete Dame mittleren Alters, sagt ihr, es gebe genau zwei Lügner im Ort.
So geht es immer weiter: Die dritte Person meint, es gebe genau drei Lügner im Dorf, die vierte Person sagt, es gebe genau vier Lügner usw.
Als bereits der Abend angebrochen ist, erscheint endlich auch Einwohner Nummer siebzig, eine greise, etwas orientierungslos wirkende Dame, zur Befragung und krächzt: „Der Teufel soll uns holen. In diesem Dorf gibt es keinen einzigen ehrlichen Menschen. Wir alle sind dazu verflucht, tagein, tagaus zu lügen!“
Frau Weiß ist zufrieden: innerhalb eines Tages ist es ihr gelungen, jeden einzelnen Einwohner des Dorfs zu befragen. Bei einem Bierchen in der Ortskneipe knobelt sie über dem Ergebnis ihrer Studie und versucht herauszufinden, wieviele Lügner es denn nun tatsächlich in Lügenscheid gibt.

a) Findet heraus, wieviele Lügner es in Lügenscheid gibt.

b) Formuliert einen vollständigen Beweis für eure Behauptung, der keine Bedenken mehr an eurer Lösung übrig lässt.

c) Analysiert euren Beweis. Welche Techniken (z.B. direkter Beweis, indirekter Beweis, Widerspruchsbeweis, Fallunterscheidung) kommen in eurem Beweis zum Einsatz? Ist der Beweis vielleicht unnötig kompliziert und kann noch vereinfacht werden?

Kapitel 3

Mengen und Familien

Die Menge ist der Grundbaustein so gut wie aller mathematischer Strukturen. Die aussagenlogischen Junktoren geben Anlass zu Mengenoperationen, die mithilfe des Begriffs der Familie verallgemeinert werden können.

§3.1 Mengen

In diesem Abschnitt erweitern wir unser mathematisches Vokabular um den zentralen Begriff der *Menge*, der im Vortrag über Logik bereits kurz eingeführt wurde (siehe Definition §1.3.05). Die Idee ist sehr anschaulich: Wir möchten mehrere einzelne Objekte mit einer gemeinsamen Eigenschaft zu einem Ganzen zusammenfassen. So können wir beispielsweise die Zahlen $1, 2, 3, \dots$ in der *Menge der natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ zusammenfassen und als Gesamtheit betrachten.

§3.1.01 **Definition** *(Cantorsche Mengendefinition[1])*. Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung bestimmter Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Diese Objekte nennen wir die **Elemente** der Menge M.

§3.1.02 **Notation**. Wir haben folgende Möglichkeiten, eine Menge M zu definieren:

- Aufzählung der Elemente, z.B. $M = \{\text{Antje, Bob, Charlie}\}$ oder $M = \{1, 2, 3, \dots\}$. Für unendliche Mengen wie der letzteren kann diese Notation zu Unklarheiten führen und sollte dann eher vermieden werden. Geeigneter wäre:

- Definition über charakterisierende Eigenschaft, z.B. $M = \{x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl}\}$ (lies: Alle x, für die gilt: x ist eine natürliche Zahl). (zuerst eingeführt in Definition §1.3.06)

Ist m ein Element von M, d.h. tritt m in einer solchen Aufzählung auf oder erfüllt die charakterisierende Eigenschaft einer Menge, so schreiben wir:

$$m \in M\,.$$

Ist m kein Element von M, so schreiben wir:

$$m \notin M\,.$$

§3.1.03 **Beispiel**. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} 23 &\in \{x \mid x \text{ ist eine Primzahl}\} \\ \text{Dora} &\notin \{\text{Antje, Bob, Charlie}\} \end{aligned}$$

[1] siehe Cantor [1895]

§3.1.04 **Notation.** Um bequem Aussagen über die Elemente von Mengen zu treffen, nutzen wir folgende Schreibweisen:

- Um auszudrücken „Für alle Elemente m von M gilt Eigenschaft E.“ schreiben wir

$$\forall m \in M : E(m) .$$

- Um auszudrücken „Es gibt ein Element m von M, das die Eigenschaft E erfüllt.“ schreiben wir

$$\exists m \in M : E(m) .$$

§3.1.05 **Beispiel.** Es gilt:

$$\forall m \in \mathbb{Z} : \ m^2 \geqslant 0$$
$$\exists m \in \mathbb{Z} : \ m^2 = 529$$

Soweit die Erinnerung an die Einführung im Logikkapitel.
Um Mengen zu vergleichen, führen wir die folgenden neuen Begriffe ein:

§3.1.06 **Definition.** Seien M und N zwei Mengen.

- Wir nennen N eine **Teilmenge** von M, falls jedes Element von N auch Element von M ist:

$$\forall n \in N : n \in M .$$

  Wir schreiben $N \subseteq M$.

  Wenn N keine Teilmenge von M ist, also wenn es ein Element von N, das kein Element von M ist, gibt

$$\exists n \in N : n \notin M ,$$

  so schreiben wir $N \nsubseteq M$. (Das ist gerade die Negation der obigen Aussage, siehe **??** zur Negation des Allquantors.)

- Wir nennen N eine **echte Teilmenge** von M, falls N eine Teilmenge von N ist, aber ein Element von M existiert, dass kein Element von N ist

$$N \subseteq M \wedge \exists m \in M : m \notin N .$$

  Wir schreiben $N \subsetneq M$.

- M und N heißen **gleich**, falls sie die gleichen Elemente haben

$$\forall x : (x \in M \Leftrightarrow x \in N) .$$

  Wir schreiben $M = N$.[2]

[2] In der formalen Mengenlehre muss diese Eigenschaft axiomatisch gefordert werden, siehe Extensionalitätsaxiom.

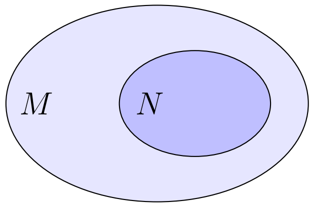


Abbildung 3.1: Die Menge N ist (echte) Teilmenge der Menge M.

Bisweilen werden in der Literatur auch abweichende Notationen benutzt: etwa $N \subseteq M$ für beliebige und $N \subset M$ für echte Teilmengen; oder aber $N \subset M$ für beliebige und $N \subsetneqq M$ für echte Teilemengen. Die Lehre ist, am besten verlässt man sich für die Angabe von echten Teilmengen nicht nur auf Symbole und gibt auch in Worten an, was gemeint ist.

Eine weitere Verwechslungsgefahr verbirgt sich jetzt in (sprachlichen) Ausdrücken wie „... ist in ... enthalten“. Per se ist nicht immer klar, ob enthalten sein als Teilmenge $A \subseteq M$ oder als Element $A \in M$ gemeint ist. Wenn die Unterscheidung aus dem Kontext nicht ersichtlich ist, sollte man daher explizit „als Teilmenge ... enthalten“ oder „ist Element von ...“ schreiben.

§3.1.07 **Beispiel.**

- Es ist $\{\text{Zarah, Torben}\} \subsetneq \{\text{Zarah, Torben, John}\}$.
- Es gilt $\mathbb{Z} \not\subseteq \mathbb{N}$, etwa ist $-1 \in \mathbb{Z}$, aber $-1 \notin \mathbb{N}$.

§3.1.08 **Satz** *(Eigenschaften der Mengeninklusion). Seien L, N, M Mengen. Dann gilt:*

a) $M \subseteq M$ (Reflexivität).

b) Aus $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ folgt $M = N$ (Antisymmetrie).

c) Aus $L \subseteq N$ und $N \subseteq M$ folgt $L \subseteq M$ (Transitivität).

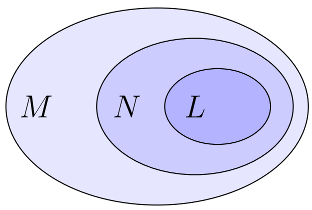


Abbildung 3.2: Illustration der Transitivität

§3.1.09 **Beweis.** a) Für alle Elemente $m \in M$ gilt per se schon $m \in M$, also ist M in M enthalten. (Siehe auch Satz §2.2.06: Jede Aussage impliziert sich selbst.)

b) Zu zeigen ist, dass M und N die selben Elemente haben, also die Äquivalenz aus Definition §3.1.06 (c). Wir tun dies, indem wir erst Hin- und dann Rückrichtung zeigen (vgl. Bemerkung §2.3.02). Sei x ein beliebiges Objekt. Ist x ein Element in M, so folgt wegen $M \subseteq N$ schon $x \in N$. Ist umgekehrt x ein Element in N, so folgt wegen $N \subseteq M$ schon $x \in M$. Damit sind beide Richtungen gezeigt und wir sind fertig.

c) Sei $x \in L$ ein Element. Wegen $L \subseteq N$ gilt dann $x \in N$. Aus $x \in N$ folgt wegen $N \subseteq M$ dann $x \in M$. (Das war ein direkter Beweis mit Zwischenschritten, vgl. Satz §2.2.16) ■

$$x \in L \xrightarrow{L \subseteq N} x \in N \xrightarrow{N \subseteq M} x \in M$$

§3.1.10 **Bemerkung.** Eigenschaft (ii) liefert uns den üblichen Weg, Gleichheit zweier Mengen zu zeigen; bestehend aus zwei Schritten:

$M \subseteq N$: Beginne mit einem beliebigen Element[3] $m \in M$ und folgere, dass m in N liegen muss (also die charakterisierende Eigenschaft erfüllt oder als Element gelistet ist).

$M \supseteq N$: Beginne mit einem beliebigen Element $n \in N$ und folgere, dass n in M liegen muss.

Sind diese Eigenschaften erfüllt, folgt aus unserem Satz $M = N$.

§3.1.11 **Beispiel.** Es gilt:

a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ist prim und gerade}\} = \{2\}$.

§3.1.12 **Beweis.** „ $\subseteq$ “ Sei x in der linken Seite enthalten, also eine gerade Primzahl. Dann ist x durch 2 teilbar, da x gerade ist. Da x Primzahl ist, kann x aber nur durch 1 und sich selbst teilbar sein und es folgt $x = 2$, also $x \in \{2\}$.

„ $\supseteq$ “ Ist umgekehrt $x \in \{2\}$, also $x = 2$, so ist x eine gerade ganze Zahl sowie eine Primzahl, also in der linken Seite enthalten.

b) $\{1, 2, 3\} = \{1, 1, 3, 2\}$.

§3.1.13 **Beweis.** „ $\subseteq$ “ Sei $x \in \{1, 2, 3\}$, also $x = 1$, $x = 2$ oder $x = 3$. In jedem dieser Fälle[4] gilt auch $x \in \{1, 1, 3, 2\}$.

„ $\supseteq$ “ Sei umgekehrt $x \in \{1, 1, 3, 2\}$, also $x = 1$, $x = 1$, $x = 3$ oder $x = 2$. In jedem dieser Fälle gilt auch $x \in \{1, 2, 3\}$.

§3.1.14 **Bemerkung.** Im letzten Beispiel sehen wir ganz deutlich, dass die Elemente einer Menge keiner Reihenfolge oder „Zählung“ unterliegen: Eine Menge trägt von sich aus bis auf die Angabe ihrer Elemente bzw. charakterisierenden Eigenschaft keine weitere Struktur; Fragen wie „Wie genau / Wie oft / An welcher Stelle ist m in M enthalten?“ kann sie also nicht beantworten, sondern nur „Ist m in M enthalten, oder ist m nicht in M enthalten?“.

§3.1.15 **Definition.** Die Menge, die keine Elemente enthält, bezeichnen wir als die **leere Menge**, geschrieben $\emptyset$. In Anlehnung an die Notation durch Aufzählung aller Elemente schreiben manche Autoren auch $\{\}$. Die leere Menge lässt sich auch als Extension einer Eigenschaft, die kein einziges Objekt besitzt, realisieren. Beispielsweise ist

$$\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$$

§3.1.16 **Bemerkung** ***(Die leere Menge).*** Wir können tatsächlich von *der* leeren Menge sprechen: Ist A eine weitere Menge ohne Elemente, so haben A und $\emptyset$ die gleichen Elemente (nämlich keine) und nach Definition der Mengengleichheit Definition §3.1.06 folgt $A = \emptyset$.

[3] Da es sich bei „$M \subseteq N$“ um eine Allaussage handelt (*jedes* Element von M ist ein Element von N), leitet sich diese Beweistechnik aus Axiom §2.5.03 ab.

[4] vgl. Satz §2.4.09

§3.1.17 **Beispiel.** Es gilt

$$\{x \mid x \text{ ist eine gerade Primzahl mit } x \neq 2\} = \emptyset\,.$$

Dazu müssen wir zeigen, dass für alle x die Aussage „x ist eine gerade Primzahl mit $x \neq 2$“ eine falsche Aussage ist.

Beweis per Widerspruch: Angenommen, x wäre ein Element der linken Menge. Dann wäre x eine gerade Primzahl. Wir haben oben gesehen, dass 2 die einzige gerade Primzahl ist, es müsste also $x = 2$ gelten. Aber $x \neq 2$ gilt nach Voraussetzung und wir erhalten einen Widerspruch. Daher kann die linke Menge keine Elemente enthalten und ist gleich der leeren Menge.

§3.1.18 **Bemerkung** *(Mengen von Mengen von Mengen von . . .).* Sei A eine Menge. Das Konzept der Menge ist iterativ. Eine Menge kann wiederum Element einer anderen Menge sein, die wiederum in einer Menge enthalten sein kann. Zum Beispiel ist A Element der Menge $\{A\}$, die wiederum ein Element von $\{\{A\}\}$ ist usw. Wichtig sich klar zu machen, ist der Unterschied zwischen A und $\{A\}$, also der Menge A und derjenigen Menge, die nur das Element A enthält. Betrachte etwa $\emptyset$ im Vergleich mit $\{\emptyset\}$. Auch wenn es zunächst scheinen mag, dass in beiden Objekten letztlich „nichts drin ist“, so liegen doch sehr verschiedene Objekte vor. Mit $\emptyset$ haben wir nämlich die Menge mit keinen Elementen, und mit $\{\emptyset\}$ eine einelementige Menge, deren einziges Element $\emptyset$ ist. Eine mögliche mengentheoretische Konstruktion der Natürlichen Zahlen macht sich genau diesen Unterschied zu Nutze.[5]

§3.1.19 **Bemerkung** *(Vacuous Truth).* Eine weitere Feinheit im Umgang mit leeren Mengen sind so genannte „Vacuous Truths“. Das sind Aussagen wie

- „Alle rosa Elefanten können fliegen.“
- „Alle meine Geschwister sind Gürteltiere“, gesprochen von einem Einzelkind.

Formal sind diese Aussagen von der Form

$$\forall x \in M : E(x)\,,$$

wobei E in unserem Fall die Eigenschaft „kann fliegen“ bzw. „ist ein Gürteltier“ war, und M die Menge der rosa Elefanten bzw. der Geschwister des Einzelkindes war. Diese Mengen haben keine Elemente, sind also gleich der leeren Menge:

$$\forall x \in \emptyset : E(x)\,.$$

Wenn wir uns nun erinnern, was diese Kurzschreibweise in Bemerkung §1.3.13 hieß, können wir auch schreiben

$$\forall x : (x \in \emptyset \implies E(x))\ .$$

Die Aussage $x \in \emptyset$ ist aber für alle Objekte x falsch, denn die leere Menge hat keine Elemente. Nach dem Prinzip *ex falso quod libet* aus Satz §2.7.04 ist die Aussage $x \in \emptyset \implies E(x)$ also für jedes x war, und somit auch $\forall x : (x \in \emptyset \implies E(x))$ eine wahre Aussage.

Wir lernen: Aussagen, die den Elementen einer leeren Menge (wie der Menge der rosa Elefanten oder den Geschwistern eines Einzelkindes) eine gewisse Eigenschaft zuordnen, sind immer wahr, egal was die Eigenschaft ist.

[5] Siehe von Neumann Konstruktion.

Ein weiteres Beispiel für eine vacuous truth ist der folgende Satz:

§3.1.20 **Satz.** *Die leere Menge $\emptyset$ ist Teilmenge jeder beliebigen Menge.*

§3.1.21 **Beweis.** Sei M eine beliebige Menge. Zu zeigen ist $\emptyset \subseteq M$, also

$$\forall x \in \emptyset : x \in M\,.$$

Ausgeschrieben ist das

$$\forall x : (x \in \emptyset \implies x \in M)\ ,$$

was nach *ex falso quod libet* eine wahre Aussage ist.

Anschaulich ergibt das auch Sinn: Die Forderung, dass jedes Element der Menge $\emptyset$ (die keine Elemente hat) in M enthalten ist, ist leicht zu erfüllen. ■

§3.1.22 **Definition.** Die **Potenzmenge** einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M:

$$\mathcal{P}(M) := \{N \mid N \subseteq M\}$$

Es gilt stets $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$ und $M \in \mathcal{P}(M)$, da $\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$ nach Satz §3.1.20 und Satz §3.1.08a) immer wahr ist.

§3.1.23 **Beispiel.** Sei $M = \{1, 2, 3\}$. Dann ist

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}\ .$$

In alten Büchern wird die Potenzmenge einer Menge X auch mit „2^X“ notiert, woher auch der Name „Potenzmenge“ stammt. Der folgende Satz erklärt, warum:

§3.1.24 **Satz** *(Name der Potenzmenge).* *Seien M eine Menge und $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Hat M genau n Elemente, so hat $\mathcal{P}(M)$ genau 2^n Elemente.*

§3.1.25 **Beweis.** Wir verallgemeinern, was wir eben im Beispiel gesehen haben: Wir können eine Teilmenge N von M konstruieren, indem wir für jedes Element $m \in M$ entscheiden, ob es in N enthalten sei oder nicht. Dies sind n Entscheidungen zwischen je zwei Möglichkeiten, nämlich eine Entscheidung für jedes Element $m \in M$. Jede Teilmenge von M kann auf diese Weise konstruiert werden, und unterschiedliche Wahlen schon bei einer einzigen der n Entscheidungen ergeben verschiedene Teilmengen N, also gibt es 2^n Teilmengen von M. ■

§3.2 Familien

Unser Begriff der Menge ist schon sehr mächtig, greift — wie vorhin gesehen – in manchen Fällen jedoch noch zu kurz.

Mit dem Begriff der Familie möchten wir nun einer Sammlung von Objekten eine zusätzliche Struktur verleihen: Statt uns nur zu merken, welche Objekte in unserer Sammlung enthalten sind, unterscheiden wir nun verschiedene „Stellen“, an denen Objekte in der Sammlung sitzen können. Realisiert wird das, indem wir die Elemente unserer Sammlung mit Indizes versehen und dann vom Objekt an Index/Stelle i sprechen:

§3.2.01 **Definition** *(Familien)*. Eine **Familie** $(a_i)_{i\in I}$ ist eine Sammlung von Objekten a_i indiziert über eine Menge I. Soll heißen: An jedem Index i sitzt ein Objekt a_i.

Die Menge I wird die **Indexmenge** der Familie genannt. (Dieser Name suggeriert häufig, dass die Menge I irgendeine besondere Eigenschaft haben müsste. Tatsächlich kann aber jede beliebige Menge als Indexmenge dienen und der Name bezeichnet eher die Rolle, die die Menge in der Konstruktion spielt.) Wenn wir sowas wie „Sei $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie" schreiben, so meinen wir damit „Sei I eine beliebige Menge und $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie mit Indexmenge I".

§3.2.02 **Definition**. Sei $(a_i)_{i\in I}$ eine Familie. Ist A irgendeine Menge, sodass jedes der a_i's ein Element von A ist, so nennt man die Familie $(a_i)_{i\in I}$ eine **(durch I indizierte) Familie mit Einträgen aus A** oder auch eine **A-wertige Familie**.
Die Menge aller Familien mit Indexmenge I und Einträgen aus A wird mit A^I notiert:

$$A^I := \{(a_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I :\ a_i \in I\}$$

Manchmal nennt man A^I die „I-te Potenz von A", was aber nicht mit der Potenzmenge aus Definition §3.1.22 verwechselt werden sollte.

§3.2.03 **Beispiel**. a) Nehmen wir als Indexmenge I die Menge der Stühle im Raum und als das Objekt a_i die Person, die auf Stuhl i sitzt, so erhalten wir eine Familie der hier im Raum sitzenden Leute $(a_i)_{i\in I}$. Sie unterscheidet sich von der *Menge* der hier im Raum sitzenden Leute dadurch, dass wir auch wissen, wer auf welchem Stuhl sitzt.

b) Es ist $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ die Menge all derjenigen Familien, deren Indexmenge $\mathbb{N}$ ist und deren Einträge allesamt rationale Zahlen sind. Eine solche Familie ist beispielsweise $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n}$. Familien, deren Indexmenge die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist, heißen *Folgen* und

n	1	2	3	…
a_n	1	1/2	1/3	…

sind ein zentrales Thema im sechsten Vortrag.[6]

c) $(*)$ Für Informatiker: Arrays sind vom Konzept her Familien. Indexmenge ist meist

$$\{0, 1, \ldots, k_1\} \times \cdots \times \{0, 1, \ldots, k_n\},$$

wobei n die Dimension des Arrays ist und k_i die Länge des Arrays in Dimension i.

§3.2.04 **Beispiel**. Das unendliche Produkt

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$$

besteht aus unendlichen Familien der Form

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots),$$

wobei die a_i reelle Zahlen sind. Man spricht von *reellen Zahlenfolgen*. Im Kapitel über Folgen werden uns diese Objekte namensgebend wieder begegnen.

[6] siehe Definition §6.1.01

§3.2.05 **Definition** *(Gleichheit von Familien)*. Zwei Familien $(a_i)_{i\in I}$ und $(b_i)_{i\in I}$ mit der selben Indexmenge I heißen **gleich**, wenn sie an jeder Stelle $i \in I$ den gleichen Eintrag haben:

$$\forall i \in I : a_i = b_i \,.$$

§3.2.06 **Beispiel**. Tauschen zwei Studierende ihre Sitzplätze i und j, so wird aus der Familie $(a_i)_{i\in I}$ der im Raum sitzende Leute eine neue Familie $(b_i)_{i\in I}$. Diese Familien sind nicht gleich, denn es gilt $a_i \neq b_i$ und $a_j \neq b_j$. Betrachten wir nur die simple *Menge* der im Raum sitzenden Leute, so verändert sie sich durch den Sitzplatzwechsel nicht, denn sie hat vorher wie nachher dieselben Elemente.

§3.2.07 **Bemerkung** *(Mengen vs. Familien)*. Das Beispiel macht den Unterschied zwischen den Begriffen der Familie und der Menge noch einmal sehr deutlich. Zwei Mengen, in denen die gleichen Elemente vorkommen, sind schon gleich; für eine Gleichheit von Familien müssen die Elemente aber gerade an den entsprechenden Indizes übereinstimmen. Im Gegensatz zu Mengen haben Familien also eine gewisse Struktur auf ihren Elementen, gegeben durch die Indizierung. Vergleiche Bemerkung §3.1.14.

§3.2.08 **Definition** *(Tupel)*. Sei $n \in \mathbb{N}$. Familien $(a_i)_{i\in I}$ mit Indexmengen der Form $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ nennt man auch n-**Tupel** und schreibt

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \,.$$

2-Tupel, also Objekte der Form (a, b), nennt man auch (geordnete) **Paare**, 3-Tupel nennt man auch **Tripel**.

Ist A eine Menge, so notiert man die Menge aller n-Tupel mit Einträgen aus A mit A^n:

$$A^n := \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_1, \ldots, a_n \in A\}$$

§3.2.09 **Beispiel**. Es ist $\mathbb{R}^3$ die Menge aller Tripel reeller Zahlen:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Diese Menge ist dir vielleicht schon aus der Schule als „dreidimensionaler Raum“ bekannt. In der Geometrie repräsentieren die Elemente des $\mathbb{R}^3$ Punkte im Raum und die drei Einträge eines solchen Tripels repräsentieren seine Koordinaten in einem Koordinatensystem.

§3.2.10 **Bemerkung** *(Gleichheit von Tupeln)*. Um die Gleichheit von Familien noch einmal zu konkretisieren: Nach Definition §3.2.05 sind zwei n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(b_1, \ldots, b_n)$ genau dann gleich, wenn $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$ und $a_n = b_n$ gilt.

§3.2.11 **Beispiel** *(Mengen vs. Familien)*. In Beispiel §3.1.11 hatten wir gesehen, dass die Mengengleichheit $\{1, 2, 3\} = \{1, 1, 3, 2\}$ gilt. Betrachten wir stattdessen die Tupel $(1, 2, 3)$ und $(1, 1, 3, 2)$, so liegen zwei sehr unterschiedliche Objekte vor, denn schon die Indexmengen der Familien sind verschieden (die eine Familie ist ein 3-Tupel, die andere ein 4-Tupel). Doch auch wenn wir die 3-Tupel $(1, 2, 3)$ und $(1, 3, 2)$ vergleichen würden, wären sie nicht gleich, denn sie unterscheiden sich an zweiter und dritter Stelle. Dagegen sind $\{1, 2, 3\}$ und $\{1, 3, 2\}$ dieselbe Menge. Bei einer bloßen Mengen gibt es keine „zweite Stelle“ oder dergleichen.

§3.2.12 **Bemerkung** *(Mengen aus Familien gewinnen).* Gegeben eine *Familie* $(a_i)_{i\in I}$ können wir stets die *Menge* der Einträge der Familie $\{a_i \mid i \in I\}$ aufstellen und „vergessen" dabei einfach die zusätzliche Struktur. Diese Objekte sollte man nicht verwechseln!

Betrachten wir noch einmal die Familie $(a_i)_{i\in I}$ der im Raum sitzenden Leute, so ist $\{a_i \mid i \in I\}$ nur noch die *Menge* der im Raum sitzenden Leute und wir vergessen, wer wo sitzt.

§3.3 Mengen-Bastelstunde

Wir beschäftigen uns jetzt mit Operationen, die wir auf Mengen anwenden können, um aus mehreren Mengen neue Mengen zu generieren.

§3.3.01 **Definition.** Seien A, B zwei Mengen. Wir definieren:

- den **Schnitt** von A und B:

  $$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\} \qquad \text{(lies: „}A\text{ geschnitten }B\text{")}$$

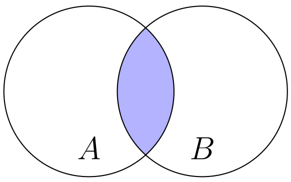


Abbildung 3.3: Schnitt zweier Mengen A und B

- die **Vereinigung** von A und B:

  $$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\} \qquad \text{(lies: „}A\text{ vereinigt }B\text{")}$$

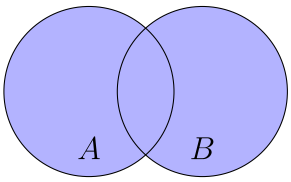


Abbildung 3.4: Vereinigung zweier Mengen A und B

- das **kartesische Produkt** von A und B:

  $$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \qquad \text{(lies: „}A\text{ kreuz }B\text{")}$$

  Dabei sind die Elemente (a, b) des kartesischen Produkts genau diejenigen Paare, deren erster Eintrag in A und deren zweiter Eintrag in B liegt.

- das **Komplement** von B in A oder auch die **Differenzmenge** von A und B:

  $$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\} \qquad \text{(lies: „}A\text{ ohne }B\text{")}$$

  Manche Autoren schreiben auch $A - B$.

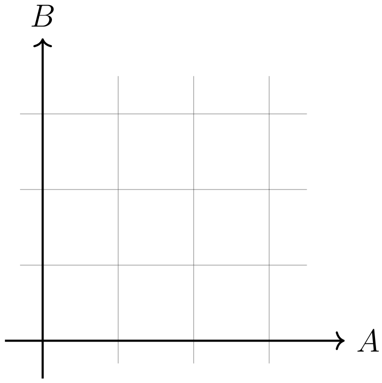


Abbildung 3.5: Das *kartesische* Produkt hat seinen Namen aus dieser Darstellung als Ebene mit kartesischen „Koordinatenachsen“ A und B.

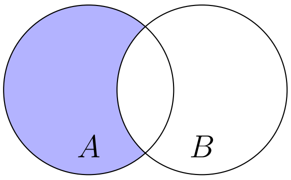


Abbildung 3.6: Komplement der Menge B in der Menge A

Ist allgemeiner eine Familie von Mengen $(M_i)_{i\in I}$ gegeben, so definiert man

$$\bigcap_{i\in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}\,,$$
$$\bigcup_{i\in I} M_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}\,,$$
$$\prod_{i\in I} M_i := \{\text{Familien } (x_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I : x_i \in M_i\}\,.$$

Ist die Indexmenge von der Form $I = \{1, 2, \ldots, n\}$, so setzt man meistens die für zwei Mengen eingeführte Notation mit kleinen Zeichen fort und schreibt

$$\bigcap_{i\in I} M_i =: \bigcap_{i=1}^{n} M_i =: M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_n$$
$$\bigcup_{i\in I} M_i =: \bigcup_{i=1}^{n} M_i =: M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n$$
$$\prod_{i\in I} M_i =: \prod_{i=1}^{n} M_i =: M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$$

Zwei Mengen A, B heißen **disjunkt**, wenn sie keine gemeinsamen Elemente haben, also $A \cap B = \emptyset$ gilt.

§3.3.02 **Bemerkung** *(Mengen-Operatoren und Aussagen-Operatoren).* Wie man vielleicht auch in den Definitionen erkennt, sind die Zeichen $\cap$ und $\cup$ an denen für die logischen Verknüpfungen $\wedge$ und $\vee$ angelehnt. Man sollte diese Zeichen trotzdem sauber unterscheiden: Die Formel $M \cap N$ ergibt nur Sinn, wenn M und N Mengen sind; die Formel $A \wedge B$ nur, wenn A und B Aussagen sind. $M \wedge N$ für zwei Mengen M, N ist kein sinnbehafteter Ausdruck!

Bis auf das Produkt kann man für jede Mengenoperation solche schönen Analogien zu den Logiksymbolen ziehen, um sie sich besser zu merken:

Mengenoperation	$M \cap N$	$M \cup N$	$M \setminus N$	$\bigcap_{i\in I} M_i$	$\bigcup_{i\in I} M_i$
Logiksymbol	$\wedge$	$\vee$	$\neg$	$\forall$	$\exists$

Abbildung 3.7: Mengen- und Logiksymbole im Vergleich

§3.3.03 **Beispiel**. Sei $A = \{1, 2, 4\},\ B = \{1, 4, 7\}$. Dann gilt:

- $A \cap B = \{1, 4\}$, insbesondere sind A und B nicht disjunkt.
- $A \cup B = \{1, 2, 4, 7\}$
- $A \times B = \{(1, 1), (1, 4), (1, 7), (2, 1), (2, 4), (2, 7), (4, 1), (4, 4), (4, 7)\}$.
- $A \setminus B = \{2\}$

§3.3.04 **Beispiel**. Sei $I = \mathbb{N}_0$ unsere Indexmenge. Zu $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$M_n := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ teilt } n\} .$$

Dabei soll x teilt n heißen, dass es eine ganze Zahl $c \in \mathbb{Z}$ gibt mit $c \cdot x = n$.

Dann gilt

a) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} M_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 : x \in M_n\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 : x \text{ teilt } n\}$.
Wir behaupten nun:

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : x \text{ teilt } n \quad \Longleftrightarrow \quad (x = 1) \vee (x = -1) .$$

§3.3.05 **Beweis**. „$\Rightarrow$" Aus $\forall n \in \mathbb{N}_0 : (x \text{ teilt } n)$ folgt insbesondere x teilt 1, wenn wir $n = 1$ setzen. Die einzigen Teiler von 1 in $\mathbb{Z}$ sind aber 1 und -1.

„$\Leftarrow$" Sei umgekehrt $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig und $x = 1$ bzw. $x = -1$. Dann ist $x \cdot n = n$ bzw. $x \cdot (-n) = n$ und x teilt daher n. ■

Daher gilt

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} M_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid \forall n \in \mathbb{N}_0 : x \text{ teilt } n\} = \{1, -1\} .$$

b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} M_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : x \in M_n\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : x \text{ teilt } n\}$.
Wir behaupten nun:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} M_n = \mathbb{Z}$$

§3.3.06 **Beweis**. „$\subseteq$": Da jedes der M_n's eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist, ist insgesamt auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} M_n$ eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$.

„$\supseteq$“: Sei $x \in \mathbb{Z}$ beliebig. Ist $0 \leqslant x$, so gilt $x \in \mathbb{N}_0$ und $1 \cdot x = x$, also teilt x eine natürliche Zahl (sich selbst). Ist $x \leqslant 0$, so gilt $-x \in \mathbb{N}_0$ und $-1 \cdot x = -x$, also teilt x eine natürliche Zahl (nämlich $-x$). In jedem Fall teilt x eine natürliche Zahl, sodass $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} M_n$. ■

§3.3.07 **Bemerkung** *(disjunkte Vereinigung).* Möchte man exakt zwei „Kopien“ einer Menge (etwa $\mathbb{N}$) erzeugen, so ist die Vereinigung zu klein, denn $\mathbb{N} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$, und das Produkt zu groß (vgl. die Abbildung: das Produkt $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ergibt unendlich viele Kopien von $\mathbb{N}$). Für diese Situation gibt es die Konstruktion der **disjunkten Vereinigung**, die zu einer Indexmenge I und einer Familie $(M_i)_{i \in I}$ von Mengen gegeben ist durch

$$\bigsqcup_{i \in I} M_i := \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times M_i) = \bigcup_{i \in I} \{(i, x) \mid x \in M_i\}\,.$$

In unserem Beispiel wäre

$$\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N} = \bigsqcup_{i \in \{1,2\}} \mathbb{N} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4) \ldots, (2,1), (2,2), (2,3), (2,4) \ldots\}$$

die gewünschte zweifache Kopie von $\mathbb{N}$. Der Name der Konstruktion stammt daher, dass wir die Mengen M_i „künstlich“ disjunkt machen, indem wir die Indizes i als „Marker“ in den Paaren unterbringen.

Sind die Mengen M_i bereits paarweise disjunkt (soll heißen: zu je zwei verschiedene Indizes $i \neq j$ sind die Mengen M_i und M_j disjunkt), so nennt man häufig auch die klassische Vereinigung $\bigcup_{i \in I} M_i$ eine „disjunkte Vereinigung“, auch wenn der formal korrekte Ausdruck eher „Vereinigung (paarweiser) disjunkter Mengen“ wäre. In diesem Fall wird gelegentlich auch die Schreibweise

$$\dot{\bigcup}_{i \in I} M_i$$

genutzt. Der Punkt ist dabei keine neue Konstruktion, sondern möchte nur signalisieren, dass die M_i paarweise disjunkte Mengen sind. Siehe auch den Wikipedia-Artikel zur disjunkten Vereinigung.

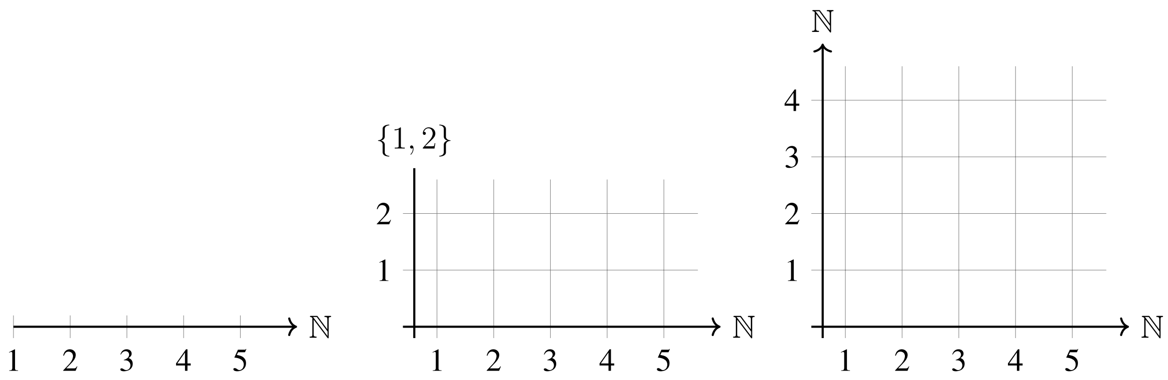


Abbildung 3.8: Vergleich von $\mathbb{N} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

§3.4 Aufgabenvorschläge

§3.4.01 **Aufgabe** *(Kennenlernen).* Es sei T die Menge aller Leute, die sich gerade in diesem Tutorium befinden. Welche der folgenden Mengen sind Teilmengen voneinander? Welche Mengen sind sogar gleich?

$$\begin{aligned} S &:= \{x \in T \mid x \text{ ist sportlich}\} & \emptyset \\ N &:= \{x \in T \mid x \text{ geht gern in die Natur}\} & T \\ W &:= \{x \in T \mid x \text{ kennt sich in einem Spezialgebiet richtig gut aus}\} & N \setminus S \\ M &:= \{x \in T \mid x \text{ spielt ein Musikinstrument}\} & W \cup S \\ L &:= \{x \in T \mid x \text{ ist Single}\} & M \cap L \end{aligned}$$

§3.4.02 **Aufgabe** *(Schnitte und Vereinigung konkret).* Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$M_n := \{x \in \mathbb{Z} \mid \exists c \in \mathbb{Z} : c \cdot n = x\}$$

Beweise die folgenden Mengengleichheiten:

a) $$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} M_n = \{0\}$$

b) $$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} M_n = \mathbb{Z}$$

§3.4.03 **Aufgabe** *(Mengen vs. Familien).* Es sei $I := \{1,2,3,4,5\}$ und es sei $a = (a_i)_{i \in I}$ diejenige Familie mit $a_i = i + 2$ für jedes $i \in I$. Welche der folgenden Objekte sind einander gleich?

I	$(a_i)_{i \in I}$	$\{a_i \mid i \in I\}$	$(4,3,5,6,7)$	$(2,1,3,4,5,5)$
a	$\{1,2,3,4,5\}$	$(3,4,5,6,7)$	$\{4,3,5,6,7\}$	$\{2,1,3,4,5,5\}$

§3.4.04 **Aufgabe** *(Produkte konkret).* Wir betrachten die Mengen $T := \{\text{Dr.}\}$, $A := \{\text{Herr, Frau}\}$, $V := \{\text{Anna, Benjamin}\}$ und $N := \{\text{Hathaway, Sinclair, Wayne}\}$. Liste die Elemente der folgenden Mengen auf:

a) $A \times N$

b) $A \times T \times V \times N$

c) $(T \cup V) \times N$

d) $(T \times N) \cup (V \times N)$

§3.4.05 **Aufgabe** *(Rechenregeln für $\cap$ und $\cup$).* Seien X, Y, Z drei beliebige Mengen. Mach dir klar, dass folgende Identitäten gelten:

$$\begin{aligned} (X \cap Y) \cap Z &= X \cap (Y \cap Z) \\ (X \cup Y) \cup Z &= X \cup (Y \cup Z) \end{aligned} \qquad \text{(Assoziativgesetze)}$$

$$\begin{aligned} X \cap Y &= Y \cap X \\ X \cup Y &= Y \cup X \end{aligned} \qquad \text{(Kommutativgesetze)}$$

$$\begin{aligned} X \cap (Y \cup Z) &= (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \\ X \cup (Y \cap Z) &= (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \end{aligned} \qquad \text{(Distributivgesetze)}$$

Kapitel 4

Abbildungen

Der Begriff der Abbildung verallgemeinert den Funktionenbegriff aus der Schule. In diesem Vortrag werden grundlegende Werkzeuge im Umgang mit Abbildungen anhand von Beispielen besprochen.

Im letzten Kapitel haben wir den Begriff der *Menge* eingeführt und einige Konstruktionen damit durchgeführt. Nun möchten wir in der Mathematik nicht nur Mengen an sich betrachten, sondern insbesondere die Zusammenhänge zwischen verschiedenen Mengen. Das zentrale Werkzeug dazu und eine weitere Klasse grundlegender mathematischer Objekte sind die *Abbildungen* zwischen Mengen.

§4.1 Allgemeines

§4.1.01 **Definition.** Seien X, Y zwei Mengen. Eine **Abbildung** (oder auch **Funktion**[1]) von X nach Y ist eine *Zuordnung* f, die jedem Element aus X genau ein Element aus Y zuordnet. Die Aussage „f ist eine Abbildung von X nach Y“ notieren wir kurz und bündig mit:

$$f : X \to Y \qquad \text{oder auch} \qquad X \xrightarrow{f} Y$$

Für ein Element $x \in X$ notieren wir das diesem zugeordnete Element mit

$$f(x) \qquad\qquad \text{(lies: „}f\text{ von }x\text{“)}$$

und nennen es den **Funktionswert** von f an der Stelle x oder auch das *Bild* von x unter der Abbildung f. Wir schreiben auch

$$x \mapsto f(x) \qquad\qquad \text{(lies: „}x\text{ geht auf }f(x)\text{“)}$$

Die Menge aller Abbildungen von X nach Y notieren wir mit $\mathrm{Abb}(X, Y)$:

$$\mathrm{Abb}(X, Y) := \{f \mid f \text{ ist eine Abbildung von } X \text{ nach } Y\}$$

Ist f eine Abbildung von X nach Y, so nennt man die Menge X den **Definitionsbereich** oder auch die *Quelle* der Abbildung f und die Menge Y den **Wertebereich** oder auch das *Ziel* der Abbildung f.

[1] Manche Leute bevorzugen das Wort „Abbildung“ im Umfeld abstrakter Mengen und das Wort „Funktion“ im Umfeld von $\mathbb{R}$. Wir werden beide Wörter aber völlig synonym verwenden.

§4.1.02 **Beispiel**. a) Wir möchten eine Abbildung P von der Menge aller Katzen `cat` in die Menge aller Farben `colour` notieren, die jeder Katze ihre Fellfarbe zuordnet. Dann können wir schreiben:

$$\begin{aligned} P : \texttt{cat} &\to \texttt{colour} \\ K &\mapsto (\text{Fellfarbe von } K) \end{aligned}$$

Das soll bedeuten: P ist diejenige Abbildung von `cat` nach `colour`, die jeder Katze K ihre Fellfarbe zuordnet. Ihr Definitionsbereich ist `cat` und ihr Wertebereich ist `colour`.

b) Durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto 3x^2 - 2x + 4$$

ist eine Abbildung g definiert, die von der Menge $\mathbb{R}$ in die Menge $\mathbb{R}$ geht und jeder Zahl $x \in \mathbb{R}$ die Zahl $3x^2 - 2x + 4$ zuordnet. Sie ist ein Beispiel für eine „Polynomfunktion", wie du sie aus der Schule kennst. Ihr Wertebereich ist gleich ihrem Definitionsbereich, nämlich die Menge der reellen Zahlen. Beispielsweise ist $g(5) = 3 \cdot 25 - 2 \cdot 5 + 4 = 69$.

c) Die Abbildung

$$e : \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}\ ,\ f \mapsto f(2)$$

ordnet jeder Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ihren Funktionswert an der Stelle 2 zu. Ihr Definitionsbereich ist $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und ihr Wertebereich ist $\mathbb{R}$. Für die Funktion g von gerade eben wäre beispielsweise

$$e(g) = g(2) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 4 = 12$$

d) Sei X eine beliebige Menge. Die Abbildung

$$F : X \to \mathcal{P}(X)\ ,\ x \mapsto \{x\}$$

hat als Definitionsbereich X, als Wertebereich die Potenzmenge von X und sie ordnet jedem Element $x \in X$ diejenige einelementige Menge zu, die nur aus x besteht. Im Fall $X = \mathbb{N}$ wäre beispielsweise $F(4) = \{4\}$.

e) Es seien

$$A := \{a \mid a \text{ ist eine Tonaufnahme}\} \qquad V := \{v \mid v \text{ ist ein Video}\}$$

Dann hat man eine Abbildung

$$\begin{aligned} \text{Extraktion der Tonspur} : \quad V &\to A \\ v &\mapsto (\text{Die Tonspur von } v) \end{aligned}$$

die jedes Video auf seine Tonspur abbildet. Beispielsweise würde dieses Erklärvideo zu Abbildungen auf diese Tonaufnahme abgebildet werden.

§4.1.03 **Bemerkung** *(Abbildungsvorschrift).* In den Beispielen gerade eben konnte die Abbildung stets durch eine überschaubare Formel beschrieben werden:

$$\begin{aligned} K &\mapsto (\text{Fellfarbe von } K) \\ x &\mapsto 3x^2 - 2x + 4 \\ f &\mapsto f(2) \\ x &\mapsto \{x\} \\ v &\mapsto (\text{Die Tonspur von } v) \end{aligned}$$

Solche Ausdrücke nennt man auch *Zuordnungsvorschriften* oder *Abbildungsvorschriften*. Jede Beispiel-Abbildung von gerade eben wurde durch die Angabe ihres Definitionsbereichs, ihres Wertebereichs sowie einer Zuordnungsvorschrift definiert.
Beachte aber, dass nicht jede Abbildung eine einfache Zuordnungsvorschrift haben braucht. Abbildungsvorschriften können beliebig kompliziert sein und manche Abbildungen sind so chaotisch, dass sie gar keiner Abbildungsvorschrift gehorchen. Beispielsweise lässt sich mit metamathematischen Methoden nachweisen, dass es Abbildungen $\mathbb{N} \to \{0, 1\}$ (also Abfolgen von Nullen und Einsen) geben muss, die so chaotisch sind, dass sie nicht durch eine Abbildungsvorschrift beschreibbar sind.

§4.1.04 **Bemerkung** *(Abbildungsvorschrift mit Fallunterscheidung).* Eine gelegentlich benutze Möglichkeit, um Abbildungen anzugeben, ist per Fallunterscheidung. Das sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{falls } x \geqslant 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Hier haben wir etwa gerade die Betragsabbildung definiert, die gerade x unverändert lässt, falls x nichtnegativ ist und auf $-x$ schickt, falls x negativ ist.
Selbstverständlich gibt es auch Fallunterscheidungen mit mehr als 2 Fällen.
Es ist auch geläufig, das 'falls' wegzulassen und zu schreiben

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Wichtig ist es, darauf zu achten, Definitionsbereiche nicht widersprüchlich doppelt zu vergeben. Im obigen Beispiel wäre es nicht falsch das "< "Zeichen durch ein "$\leqslant$ "Zeichen zu ersetzen, dies führt zu keinen Widersprüchen. Ein Ausdruck wie

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & x \geqslant 0 \\ -1 & x \leqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ergäbe aber keinen Sinn. Denn es müsste hier sowohl $f(0) = 1$ als auch $f(0) = -1$ gelten, was den Widerspruch $1 = -1$ ergäbe.

§4.1.05 **Bemerkung** *(Rigorose Abbildungsdefinition).* Die hier gegebene Abbildungsdefinition ist kurz und nah an der Denkweise vieler Mathematiker. Streng genommen ist sie aber unfundiert, da in ihr das Wort „Zuordnung“ auftaucht, das vorher nicht definiert wurde. Wie genau sich der Begriff der Abbildung präzise mengentheoretisch definieren lässt, lässt sich beispielsweise hier in der Wikipedia nachlesen.

§4.1.06 **Definition** *(Gleichheit von Abbildungen)*. Seien X, Y Mengen, sowie $f : X \to Y$, $g : X \to Y$ zwei Abbildungen zwischen diesen Mengen. Dann definieren wir die **Gleichheit** von f und g via:

$$f = g \qquad :\Leftrightarrow \qquad \forall x \in X : f(x) = g(x)$$

§4.1.07 **Bemerkung**. Eine Abbildung setzt sich zusammen aus ihrem Definitionsbereich, ihrem Wertebereich und der eigentlichen Zuordnung, die jedem Element des Definitionsbereichs ein Element des Wertebereichs zuordnet. Insofern sind Definitions- und Wertebereich grundlegender Bestandteil einer Abbildung und es ergibt nur Sinn, von der Gleichheit zweier Abbildungen zu sprechen, wenn sie dieselbe Quelle und dasselbe Ziel haben.
Abbildungen mit gleicher Zuordnungsvorschrift können sich in Quelle oder Ziel unterscheiden und dann auch sehr unterschiedliche mathematische Objekte sein. Beispielsweise haben die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto x^2 \\ g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0\ ,\ x \mapsto x^2 \end{aligned}$$

dieselbe Zuordnungsvorschrift, sind aber dennoch zwei verschiedene Abbildungen, da sie verschiedene Definitions- und Wertebereiche haben.

§4.1.08 **Bemerkung** *(Beweisen, dass zwei Abbildungen gleich oder ungleich sind)*. Seien X, Y zwei Mengen. Da die Definition der Gleichheit zweier Abbildungen $f, g : X \to Y$ eine Allaussage ist (für *jedes* $x \in X$ ist $f(x) = g(x)$), kann die Gleichheit $f = g$ nach Axiom §2.5.03 dadurch bewiesen werden, dass ein „beliebiges“ Element von X fixiert wird und dann bewiesen wird, dass dessen Funktionswerte unter f und g übereinstimmen.
Bevor du überhaupt versuchst, die Gleichheit zweier Abbildungen zu beweisen, solltest du dich natürlich vergewissern, dass sie denselben Definitionsbereich und denselben Wertebereich haben.

Um zu zeigen, dass zwei Abbildungen verschieden sind, genügt es nach Satz §2.6.05, ein Gegenbeispiel anzugeben, das heißt hier konkret ein Element aus dem Definitionsbereich, das von den zwei Abbildungen auf unterschiedliche Elemente im Zielbereich abgebildet wird. So ein Element zu finden ist nicht immer einfach. Manchmal ist Trial und Error in solchen Fällen hilfreich um Informationen oder Ansätze zu gewinnen.

§4.1.09 **Beispiel**. Betrachten wir die Abbildungen:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto x^2 \\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto 2x \end{aligned}$$

So ist $f \neq g$, denn $f(1) = 1$, aber $g(1) = 2$.
Betrachten wir dagegen die Abbildungen:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto x^2 - 1 \\ \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto (x+1) \cdot (x-1) \end{aligned}$$

so gilt $\alpha = \beta$, denn für jede beliebige reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\alpha(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1) = \beta(x)$$

sodass sich aus Definition §4.1.06 ergibt, dass $\alpha = \beta$.

§4.2 Bildmengen und Urbildmengen

§4.2.01 **Definition** *(Bild und Urbild von Teilmengen).* Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

- Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt

  $$f(A) := \{f(a) \in Y \mid a \in A\}$$

  die **Bildmenge** oder schlicht das **Bild** von A unter f.

- Die Bildmenge von ganz X wird mit $\operatorname{im}(f)$ notiert (für englisch: "image")

  $$\operatorname{im}(f) := f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : \ f(x) = y\}$$

  und das **Bild von** f genannt.

- Für eine Teilmenge $B \subseteq Y$ heißt

  $$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

  die **Urbildmenge** oder schlicht das **Urbild** von B unter f.

- Ist $y \in Y$ irgendein Element, so schreibt man anstelle von „$f^{-1}(\{y\})$" meist einfach nur „$f^{-1}(y)$", d.h. bei Urbildern einelementiger Teilmengen lässt man in der Notation die Mengenklammern weg.

- Die Abbildung, die jeder Teilmenge von X ihre Bildmenge unter f zuordnet

  $$\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)\,, \ A \mapsto f(A)$$

  wird meist ebenfalls mit dem Buchstaben „f" bezeichnet (obwohl sie etwas anderes als die Abbildung f ist!) und von uns die **Bildabbildung** zu f genannt.

- Die Abbildung, die jeder Teilmenge von Y ihre Urbildmenge unter f zuordnet

  $$\mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)\,, \ B \mapsto f^{-1}(B)$$

  wird meist mit dem Buchstaben „f^{-1}" bezeichnet und von uns die **Urbildabbildung** zu f genannt.

§4.2.02 **Bemerkung**. Man achte darauf, das jetzt mit „f“ sowohl die Abbildung selbst als auch die induzierte Abbildung auf den Potenzmengen gemeint sein kann. Die Bedeutung ist also kontextabhängig. Falls man mal den Faden verliert, um welche Abbildung es geht, kann man sich beispielsweise das Argument anschauen, ob es ein Element oder eine Menge ist, und daran erkennen, welche Abbildung man vor sich hat.

Wenn du dich damit besser fühlst, kannst du für dich die Bildabbildung zu f auch mit $\bar{f}$ oder dergleichen notieren; mit der Zeit wirst du dich auch an die doppelte Verwendung des Zeichens „f“ gewöhnen.

§4.2.03 **Beispiel**. Betrachten wir

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \ , \ x \mapsto x^2$$

so gilt z.B.

$$\begin{aligned} \operatorname{im}(f) &= \{n \in \mathbb{N}_0 \mid n \text{ ist eine Quadratzahl}\} \\ f(\{2, -2, 6, -5\}) &= \{4, 25, 36\} \\ f(\{n \in \mathbb{Z} \mid n < 0\}) &= \{n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} \mid n \text{ ist eine Quadratzahl}\} \\ f^{-1}(9) &= \{-3, 3\} \\ f^{-1}(\{0, 9, 16, 22\}) &= \{0, 3, -3, 4, -4\} \\ f^{-1}(\{2, 6, -9\}) &= \emptyset \\ f^{-1}(\operatorname{im}(f)) &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

§4.2.04 **Beispiel** *(mehr Bilder)*. Es gilt:

a) Das Bild der Funktion

$$e : \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \ , \ f \mapsto f(2)$$

ist ganz $\mathbb{R}$. Denn für jede beliebige reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ lässt sich eine „konstante Abbildung“

$$f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ x \mapsto a$$

definieren, die überall den Funktionswert a hat. Dann ist $e(f_a) = f_a(2) = a$ und somit $a \in \operatorname{im}(e)$. Da $a \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt war, ist somit $\operatorname{im}(e) = \mathbb{R}$ bewiesen.

b) Das Bild der Funktion

$$F : X \to \mathcal{P}(X) \ , \ x \mapsto \{x\}$$

ist $\{T \in \mathcal{P}(X) \mid T \text{ enthält genau ein Element}\}$, also die Menge aller einelementigen Teilmengen von X.

§4.2.05 **Beweis**. „$\subseteq$“: Sei $T \in \operatorname{im}(f)$. Dann gibt es ein $x \in X$ mit $T = f(x) = \{x\}$. Also enthält T genau ein Element.
„$\supseteq$“: Sei T eine einelementige Teilmenge von X. Da T einelementig ist, gibt es ein Objekt x mit $T = \{x\}$ und da T eine Teilmenge von X ist, ist $x \in X$. Daher ist $f(x) = \{x\} = T$, sodass $T \in \operatorname{im}(f)$ ist. ■

§4.3 Verketten

§4.3.01 **Definition** *(Hintereinanderausführung von Abbildungen)*. Seien X, Y, Z drei Mengen und $f : X \to Y$, sowie $g : Y \to Z$ Abbildungen. Mit

$$g \circ f \qquad\qquad \text{(lies: „}g\text{ nach }f\text{“ oder „}g\text{ kringel }f\text{“)}$$

wird diejenige Abbildung $X \to Z$ bezeichnet, die gegeben ist durch

$$g \circ f : X \to Z\,,\ x \mapsto g(f(x))$$

Die Abbildung $g \circ f$ heißt die **Komposition** oder **Verkettung** von f und g.

§4.3.02 **Bemerkung**. Beachte, dass in der Notation „$g \circ f$“ diejenige Abbildung, die „zuerst“ ausgeführt wird, rechts steht. Für ein Element $x \in X$ berechnet man $(g \circ f)(x)$, indem man zuerst $f(x)$ ausrechnet und darauf nun die Abbildung g loslässt.

§4.3.03 **Beispiel**. Betrachte die drei Abbildungen

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto 2x \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x^2 \\ h &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto 4x^2 \end{aligned}$$

Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = (2x)^2 = 4x^2 = h(x)$$

Da $x \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt, dass $g \circ f = h$, d.h. h ist genau die Verkettung von f mit g.

§4.3.04 **Beispiel** *(Kommutative Diagramme)*. Die Tatsache, dass im letzten Beispiel $g \circ f = h$ gilt, lässt sich visuell auch dadurch ausdrücken, dass „das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

kommutiert“. Dass ein solches Diagramm von Mengen und Abbildungspfeilen kommutiert, besagt, dass es, um von einem Punkt mittels Pfeilen zu einem anderen Punkt zu gelangen, egal ist, welchen Pfad man geht. In diesem Beispiel heißt das also: „Es ist egal, ob ich, um von oben links nach unten rechts zu gelangen, erst die Abbildung f und dann die Abbildung g durchlaufe, oder ob ich stattdessen die Abbildung h durchlaufe“. Und dies ist in unserem Beispiel ja auch tatsächlich egal, da dort $g \circ f = h$ ist.

§4.3.05 **Bemerkung** *(Integration durch Substitution)*. Die Technik, einer Abbildung g eine Abbildung f „vorzuschalten“, kennst du vielleicht schon aus der Schule als „Variablensubstitution“. In der Methode der „Integration durch Substitution“, die du vielleicht aus der Schule kennst, spielt dies eine maßgebliche Rolle. Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei hinreichend „glatte“ Abbildungen und $a, b \in \mathbb{R}$, so besagt die Substitutionsregel, dass

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g = \int_a^b (g \circ f) \cdot f'$$

Beispielsweise ist

$$\int_2^6 x^2\,dx = \int_{2\cdot 1}^{2\cdot 3} x^2\,dx = \int_1^3 (2x)^2 \cdot 2\,dx = 8 \cdot \int_1^3 x^2\,dx = 69\tfrac{1}{3}$$

Falls du diese Methode nicht kennst, ist das nicht schlimm. Sie wird üblicherweise in der Ana1-Vorlesung thematisiert.

§4.3.06 **Satz** *(Verketten von Abbildungen ist assoziativ).* *Seien A, B, C, D vier beliebige Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ drei Abbildungen. Dann gilt:*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

§4.3.07 **Beweis.** Sei $a \in A$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) \\ &= h(g(f(a))) \\ &= (h \circ g)(f(a)) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(a)\end{aligned}$$

Da das Element $a \in A$ beliebig gewählt war, folgt mit Definition §4.1.06, dass $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ ist. ■

§4.3.08 **Bemerkung** *(Klammern sparen).* Aufgrund des letzten Satzes kann man in dessen Situation auch einfach

$$h \circ g \circ f$$

schreiben, da es egal ist, ob man erst g mit f verkettet und dann h mit $g \circ f$ – oder ob man erst h mit g verkettet und dann f mit $h \circ g$. Mit fortgeschrittenen Techniken lässt sich zeigen, dass es auch bei Verkettungen von mehr als drei Abbildungen egal ist, wie man Klammern setzt. Daher werden Klammerungen meist ganz weggelassen.[2] Sind etwa A, B, C, D, E, F sechs Mengen und sind Abbildungen

$$A \xrightarrow{a} B \xrightarrow{b} C \xrightarrow{c} D \xrightarrow{d} E \xrightarrow{e} F$$

gegeben, so notiert man mit

$$e \circ d \circ c \circ b \circ a$$

diejenige Abbildung, die durch Verkettung dieser fünf Abbildungen entsteht, die also daraus besteht, dass man erst a durchläuft, dann b, dann c, dann d und zuletzt e.

§4.4 Einschränken

In diesem Abschnitt seien stets X, Y zwei Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

Im folgenden betrachten wir zwei Konstruktionen, mit denen wir die Definitions- und Wertebereiche von Abbildungen verändern können.

[2] vgl. dazu auch Bemerkung §7.2.08

§4.4.01 **Definition** *(Einschränkung des Definitionsbereichs).* Sei $X' \subseteq X$ eine Untermenge von X. Dann ist die **Einschränkung** in der Quelle von f auf X' gegeben durch

$$\begin{aligned} f|_{X'} : X' &\to Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Die Zuordnung von $f|_{X'}$ funktioniert also genau wie die von f, mit dem einzigen Unterschied, dass der Definitionsbereich verkleinert wurde und $f|_{X'}$ nur noch den Elementen aus X' etwas zuordnet.

§4.4.02 **Beispiel.** Betrachte die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, , \; x \mapsto x^2 - 2$$

Deren Einschränkung auf die Teilmenge $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ ist dann gegeben durch

$$f|_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \, , \; x \mapsto x^2 - 2$$

Obwohl die Zuordnungsvorschrift ($x \mapsto x^2 - 2$) dieselbe ist, handelt es sich um eine andere Funktion! Beispielsweise ist $f^{-1}(0) = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$, d.h. die Funktion f besitzt genau zwei Nullstellen. Dagegen ist $(f|_{\mathbb{Q}})^{-1}(0) = \emptyset$, d.h. die Funktion $f|_{\mathbb{Q}}$ besitzt keine Nullstelle.

§4.4.03 **Definition** *(Einschränkung des Wertebereichs).* Ist $\mathrm{im}(f) \subseteq Y' \subseteq Y$ eine Zwischenmenge des Bildes von $\mathrm{im}(f)$ und Y, so können wir die **Einschränkung** von f auf Y' betrachten:

$$\begin{aligned} f|^{Y'} : X &\to Y' \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

Die Zuordnung von $f|_{X'}$ funktioniert also genau wie die von f, mit dem einzigen Unterschied, dass der Wertebereich von f verkleinert wurde. Ist $x \in X$, so ist zwar $f|^{Y'}(x) = f(x)$, allerdings liegt bei $f(x)$ die Betonung darauf, dass es sich um ein Element von Y handelt, während bei $f|^{Y'}(x)$ die Betonung darauf liegt, dass es sich um ein Element von Y' handelt.

§4.4.04 **Beispiel.** Es seien $M := \{x \mid x \text{ steht in der Startelf des FC Bayern}\}$ sowie

$$f : M \to \mathbb{R} \, , \; x \mapsto (\text{Das Jahresgehalt von } x)$$

Dann ist $\mathrm{im}(f) \subseteq \mathbb{R}_{\geqslant 5.000.000}$, da (Stand 2021/22) jeder Spieler in der Startelf der Bayern ein Jahresgehalt von über fünf Millionen Euro bezieht[3]. Also lässt sich der Wertebereich von f auf $\mathbb{R}_{\geqslant 5.000.000}$ einschränken, wodurch man die Abbildung

$$f : M \to \mathbb{R}_{\geqslant 5.000.000} \, , \; x \mapsto (\text{Das Jahresgehalt von } x)$$

erhält.

§4.4.05 **Bemerkung.** Beachte, dass sich der Wertebereich einer Funktion f nur auf solche Teilmengen einschränken lässt, die $\mathrm{im}(f)$ umfassen. Ist beispielsweise

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \, , \; x \mapsto x^2 - 2$$

[3]Quelle: vermoegenmagazin.de. Beachte, dass die realen Einkommen dank Prämien und Werbeverträgen nochmal deutlich höher sind.

so ergäbe der Ausdruck „$f|^{\mathbb{Q}}$“ keinen Sinn. Denn der Ausdruck

$$„f|^{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}\,,\ x \mapsto x^2 - 2“ \qquad \text{(Dies ergibt keinen Sinn)}$$

definiert keine Abbildung, da etwa $f(\sqrt{\pi + 2})$ gar kein Element von $\mathbb{Q}$ ist.

Im Gegensatz zum Wertebereich einer Funktion lässt sich deren Definitionsbereich aber problemlos auf beliebige Teilmengen einschränken.

§4.5 Besondere Abbildungen

1. Identität

Sei X eine beliebige Menge. Gibt es überhaupt eine Abbildung $X \to X$? Solange wir nicht mehr Informationen über die Elemente von X haben, können wir ja schwerlich eine besondere Abbildungsvorschrift angeben. Dennoch gibt es stets eine Abbildung $X \to X$, deren Zuordnungsvorschrift so simpel ist, dass man sie schon wieder übersehen kann:

§4.5.01 **Definition** *(Identitätsabbildung).* Sei X eine Menge. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_X : X &\to X \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

heißt die **Identität auf** X.

§4.5.02 **Bemerkung**. Die Identität auf der Menge X bildet also jedes Element aus sich selbst ab und „lässt alles unverändert“. Die Identität auf $\mathbb{R}$ kennt ihr auch schon aus der Schule: die Polynomfunktion „$f(x) = x$“ ist genau die Identitätsabbildung $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ auf der Menge der reellen Zahlen.

Die Identität ist eine sehr wichtige Abbildung, denn sie wirkt hinsichtlich der Verkettung von Abbildungen gewissermaßen wie die 0 bei der Addition oder die 1 bei der Multiplikation:[4]

§4.5.03 **Satz** *(Neutralität der Identität). Seien X, Y zwei beliebige Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung von X nach Y. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} f \circ \mathrm{id}_X &= f \\ \mathrm{id}_Y \circ f &= f \end{aligned}$$

§4.5.04 **Beweis**. Ist $x \in X$ ein beliebiges Element, so gilt

$$\begin{aligned} (f \circ \mathrm{id}_X)(x) &= f(\mathrm{id}_X(x)) \\ &= f(x) && \text{(Definition von } \mathrm{id}_X) \\ (\mathrm{id}_Y \circ f)(x) &= \mathrm{id}_Y(f(x)) \\ &= f(x) && \text{(Definition von } \mathrm{id}_Y) \end{aligned}$$

Da das Element $x \in X$ beliebig gewählt war, folgen die Gleichungen $f \circ \mathrm{id}_X = f$ und $\mathrm{id}_X \circ f = f$ mit Definition §4.1.06. ∎

[4] vgl. Definition §7.3.01

2. Inklusion einer Teilmenge

§4.5.05 **Definition** *(Inklusionsabbildung)*. Sei A, B, zwei Mengen, wobei A eine Untermenge von B sei. Dann haben wir die sogenannte (natürliche) **Inklusion**, meist notiert mit dem griechischen Buchstaben ι (Iota):

$$\iota : A \to B \ , \ a \mapsto a$$

Die natürliche Inklusion ordnet einem Element aus A genau das gleiche Element in B zu. Genauso wie bei der Identitätsabbildung wird auch von der Inklusion „nichts verändert“. Allerdings bewirkt die Inklusion eine „Kontextverschiebung“. Ist $a \in A$ irgendein Objekt, von dem betont ist, dass es ein Element von A ist, so ist $\iota(a)$ nachwievor dasselbe Objekt, jetzt aber betont als Element von B.

§4.5.06 **Beispiel**. Da $\mathbb{Z}$ eine Teilmenge von $\mathbb{Q}$ ist, hat man die Inklusionsabbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, die jede ganze Zahl auf sich selbst, nun aufgefasst als rationale Zahl, abbildet.

So wirklich interessante Beispiele fallen uns hierzu auch nicht ein – denn die Inklusion „tut ja nichts“, außer den Kontext der Elemente erweitern.

§4.5.07 **Bemerkung** *(„Kanonizizät“ der natürlichen Inklusion)*. Seien X eine beliebige Menge und $U \subseteq X$ eine Teilmenge. Spricht man ohne weitere Spezifikation von „der Abbildung $U \to X$“, so ist damit meistens die natürliche Inklusion gemeint. Denn welche „natürliche“ Abbildung sollte es, sofern dir keine weiteren Informationen über X und U bekannt sind, außer dass halt U eine Teilmenge von X ist, sonst noch von U nach X geben?
Darin besteht das „Natürliche“ an der natürlichen Inklusion: dass man völlig unabhängig von der konkreten Gestalt von X und der Teilmenge U stets eine konkrete Abbildung $U \to X$ zur Hand hat, nämlich die Inklusion.

§4.5.08 **Satz**. *Seien X, Y zwei beliebige Mengen, $f : X \to Y$ eine Abbildung , $U \subseteq X$ irgendeine Teilmenge von X und $\iota_U : U \to X$ die natürliche Inklusion. Dann gilt:*

$$f|_U = f \circ \iota_U$$

d.h. die Einschränkung von f auf U lässt sich dadurch erhalten, dass man f mit ι_U verkettet.

§4.5.09 **Beweis**. Wegen $f \in \mathrm{Abb}(X, Y)$ und $\iota_U \in \mathrm{Abb}(U, X)$ ist $f \circ \iota_U$ eine Abbildung von U nach X, genauso wie $f|_U$. Also stimmen schonmal Definitions- und Wertebereich überein. Da außerdem für jedes beliebige $x \in U$ gilt:

$$(f \circ \iota_U)(x) = f(\iota_U(x)) = f(x) = f|_U(x)$$

gilt insgesamt die Gleichheit von Abbildungen $f|_U = f \circ \iota$. ∎

§4.5.10 **Bemerkung**. Insbesondere ist

$$\mathrm{id}_X|_U = \mathrm{id}_X \circ \iota_U = \iota_U$$

d.h. die Inklusion von U in X ist genau die Einschränkung der Identität id_X auf die Teilmenge U.

3. Umkehrabbildungen

In diesem Abschnitt seien stets X, Y zwei Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

§4.5.11 **Definition** *(Umkehrabbildung)*. Eine Abbildung $g : Y \to X$ heißt **Umkehrabbildung von** f oder auch eine **inverse Abbildung zu** f, falls sie die beiden „Inversengleichungen" erfüllt:

$$g \circ f = \mathrm{id}_X,$$
$$f \circ g = \mathrm{id}_Y .$$

Falls f eine Umkehrabbildung besitzt, nennt man f eine **invertierbare Abbildung**.

§4.5.12 **Beispiel**. Die Abbildung

$$f : \mathbb{R}_{>-1} \to \mathbb{R}_{>0} \ , \ x \mapsto \frac{1}{x+1}$$

ist invertierbar, denn die Abbildung

$$g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>-1} \ , \ x \mapsto \frac{1}{x} - 1$$

ist eine Umkehrabbildung.

Die Abbildung g habe ich dadurch gefunden, dass ich die Gleichung $y = \frac{1}{x+1}$ nach y umgestellt habe.

§4.5.13 **Beweis**. ($g \circ f = \mathrm{id}$): Für jede Zahl $x \in \mathbb{R}_{>-1}$ ist

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g\left(\frac{1}{x+1}\right) \\ &= \frac{x+1}{1} - 1 \\ &= x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>-1}}(x)\end{aligned}$$

Da $x \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig war, folgt die Gleichheit von Abbildungen $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>-1}}$.

($f \circ g = \mathrm{id}$): Sei $y \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}(f \circ g)(y) &= f(g(y)) \\ &= f\left(\frac{1}{y} - 1\right) \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{y} - 1\right) + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{y}} \\ &= y = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>0}}(y)\end{aligned}$$

und da $y \in \mathbb{R}$ beliebig war, folgt die Gleichheit von Abbildungen $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{>0}}$. ∎

§4.5.14 **Satz** *(Eindeutigkeitssatz für inverse Abbildungen)*. *Wenn f eine invertierbare Abbildung ist, so gibt es auch nur* genau eine *Umkehrabbildung zu f.*[5]

§4.5.15 **Beweis**. Seien $g, h : Y \to X$ zwei inverse Abbildungen zu f. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g &= g \circ \mathrm{id}_Y && \text{(nach Satz §4.5.03)} \\ &= g \circ (f \circ h) && \text{(da } h \text{ invers zu } f \text{ ist)} \\ &= (g \circ f) \circ h && \text{(nach Satz §4.3.06)} \\ &= \mathrm{id}_X \circ h && \text{(da } g \text{ invers zu } f \text{ ist)} \\ &= h && \text{(nach Satz §4.5.03)} \end{aligned}$$

Also ist die Umkehrabbildung f eindeutig bestimmt. ■

§4.5.16 **Bemerkung** *(Die Umkehrabbildung)*. Der letzte Satz berechtigt uns dazu, anstelle von „einer Umkehrabbildung von f" von *der* Umkehrabbildung von f zu sprechen.
Die inverse Abbildung zu f notiert man meistens mit

$$f^{-1}$$

Beachte nochmal, dass es nur nur dann Sinn ergibt, von der „Umkehrabbildung f^{-1}" zu sprechen, wenn f invertierbar ist. Wir werden in Bemerkung §4.6.14 Techniken kennenlernen, mit denen sich beweisen lässt, dass eine Abbildung nicht invertierbar ist.

§4.5.17 **Bemerkung**. Das Zeichen „f^{-1}" ist bereits in Definition §4.2.01 aufgetaucht und wurde dort im Kontext von Urbildmengen benutzt. Sofern f eine invertierbare Abbildung ist, bezeichnet „f^{-1}" also zwei verschiedene Abbildungen auf einmal: die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \to X$ sowie die Urbildabbildung $f^{-1} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$.

Hier ist eine Tabelle mit den verschiedenen Bedeutungen von „f" und „f^{-1}":

Zeichen	Bedeutung
f	Die Abbildung $X \to Y$, $x \mapsto f(x)$
f	Die (mengenwertige) Abbildung $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$, $A \mapsto f(A)$
f^{-1}	Die (mengenwertige) Abbildung $\mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$, $B \mapsto f^{-1}(B)$
f^{-1}	Die (mengenwertige) Abbildung $Y \to \mathcal{P}(X)$, $y \mapsto f^{-1}(y)$
f^{-1}	Die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$, $y \mapsto f^{-1}(y)$ (existiert nur, sofern f invertierbar ist)

Beachte, dass die ersten vier Abbildungen immer existieren; die fünfte Abbildung aber nur dann, wenn f invertierbar ist.

4. Projektionen beim kartesischen Produkt

§4.5.18 **Definition**. Seien X, Y zwei Mengen. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \pi_1 : X \times Y &\to X \\ (x, y) &\mapsto x \\ \pi_2 : X \times Y &\to Y \\ (x, y) &\mapsto y \end{aligned}$$

heißen **kanonischen Projektionen**.

[5] vgl. Satz §7.5.09

§4.5.19 **Beispiel**. Interpretiert man $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ als die Menge der „Punkte in der Ebene“, so kann man sich die beiden Projektionen $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ als „Orthogonalprojektionen auf die Koordinatenachsen“ vorstellen, die jeden Punkt in der Ebene auf seine x-Koordinate bzw. seine y-Koordinate abbilden.

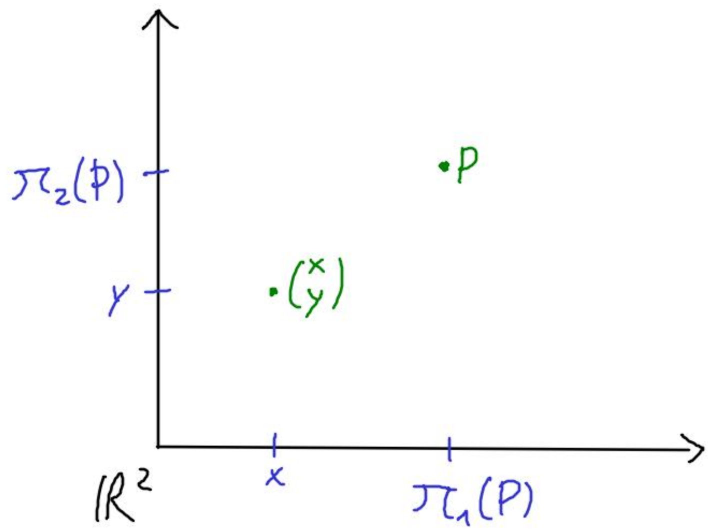


Abbildung 4.1: x-Koordinate und y-Koordinate eines Punkts in der Ebene

§4.5.20 **Bemerkung** *(Komponentenweises Definieren von Abbildungen)*. Seien A, X, Y drei Mengen. Eine Abbildung $A \to X \times Y$ lässt sich „komponentenweise definieren“, sofern man eine Abbildung $A \to X$ und eine Abbildung $A \to Y$ zur Hand hat.
Um genau zu sein: Sind $f : A \to X$ und $g : A \to Y$ zwei Abbildungen, so erhält man eine Abbildung

$$A \to X \times Y \ , \ a \mapsto (f(a), g(a))$$

die „in der ersten Komponente“ durch f und „in der zweiten Komponente“ durch g gegeben ist.
Insgesamt liefert diese Technik eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Abb}(A, X) \times \mathrm{Abb}(A, Y) &\to \mathrm{Abb}(A, X \times Y) \\ (f, g) &\mapsto (a \mapsto (f(a), g(a)) \end{aligned}$$

§4.5.21 **Beispiel**. Die beiden Abbildungen

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ , \ (x, y) \mapsto 3x - y \\ &g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \ , \ (x, y) \mapsto 4x \end{aligned}$$

können kombiniert werden zur Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \ , \ (x, y) \mapsto (f(x, y), g(x, y)) = (3x - y, 4x)$$

die in der ersten Komponente durch f und in der zweiten Komponente durch g gegeben ist. Aus der Schule weißt du vielleicht schon, dass man diese Abbildung durch eine Matrix darstellen kann:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

§4.6 Injektiv, surjektiv, bijektiv

Wir schauen uns nun einige grundlegende Eigenschaften an, die Abbildungen besitzen können. Um zu vermitteln, dass es nicht immer die eine richtige Definition gibt, geben wir diese über äquivalente Bedingungen an. Der Kniff in der Anwendung ist es dann, jeweils jene zu finden die im Augenblick am praktischsten ist. Dies ist oft auch Geschmackssache.

§4.6.01 **Definition** *(Injektive Abbildung)*. Seien X, Y Mengen und $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent

(i) Für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $x_1 \neq x_2$ gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

(ii) Für alle $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$ gilt bereits $x_1 = x_2$.

(iii) Für alle $y \in Y$ ist die Urbildmenge $f^{-1}(y)$ höchstens einelementig.

Erfüllt f eine (und damit alle) dieser drei äquivalenten Bedingungen, so heißt f eine **injektive** Abbildung.

§4.6.02 **Beweis.** (i)⇔(ii) Es ist (i) genau die Kontraposition von (ii) und damit zu (ii) äquivalent.

(ii)⇒(iii) Seien $y \in Y$ und $x_1, x_2 \in f^{-1}(y)$. Dann gilt $f(x_1) = y = f(x_2)$, also wegen (ii) bereits $x_1 = x_2$. Damit ist bewiesen, dass $f^{-1}(y)$ höchstens einelementig ist. Da $y \in Y$ beliebig gewählt war, folgt (iii).

(iii)⇒(ii) Seien $x_1, x_2 \in X$ mit $f(x_1) = f(x_2)$. Für $y := f(x_1)$ gilt dann $x_1, x_2 \in f^{-1}(y)$. Da $f^{-1}(y)$ nach (iii) aber nur höchstens einelementig ist, muss dann $x_1 = x_2$ gelten. ∎

§4.6.03 **Beispiel.** Es gilt:

a) Die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x^2$$

ist nicht injektiv, da beispielsweise $f(-2) = f(2)$, aber $-2 \neq 2$.

b) Die Abbildung

$$e : \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}\,,\ f \mapsto f(2)$$

ist nicht injektiv. Betrachte dazu die beiden Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x + 2$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto 2x$$

Wegen $f(1) \neq g(1)$ ist $f \neq g$ aber es ist dennoch

$$e(f) = f(2) = 4 = g(2) = e(g)$$

c) Sei X eine beliebige Menge. Die Abbildung

$$F : X \to \mathcal{P}(X)\ ,\ x \mapsto \{x\}$$

ist injektiv. Denn sind $x, y \in X$ beliebig mit $F(x) = F(y)$, so ist

$$x \in \{x\} = F(x) = F(y) = \{y\}$$

sodass $x = y$ sein muss. Da die Elemente $x, y \in X$ beliebig gewählt waren, folgt aus (ii) von Definition §4.6.01, dass F injektiv ist.

d) Sind X eine beliebige Menge, $U \subseteq X$ eine Teilmenge und $\iota : U \to X$ die natürliche Inklusion, so ist ι eine injektive Abbildung. Denn sind $x, y \in U$ mit $\iota(x) = \iota(y)$, so ist bereits $x = y$, da ja $\iota(x) = x$ und $\iota(y) = y$ gilt.

§4.6.04 **Definition** *(Surjektive Abbildung)*. Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

(i) Für alle $y \in Y$ existiert ein $x \in X$, sodass $f(x) = y$.

(ii) Es gilt $\mathrm{im}(f) = Y$, d.h. das Bild von f stimmt mit seinem Wertebereich überein.

(iii) Für alle $y \in Y$ ist die Urbildmenge $f^{-1}(\{y\})$ mindestens einelementig.

Erfüllt f eine (und damit alle) dieser drei äquivalenten Bedingungen, so heißt f eine **surjektive** Abbildung.

§4.6.05 **Beweis**. (i)⇔(ii) Per Definition von $\mathrm{im}(f)$ ist

$$\mathrm{im}(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in X :\ f(x) = y\}$$

Also ist genau dann $\mathrm{im}(f) = Y$, wenn es für jedes Element $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

(i)⇔(iii) Für jedes $y \in Y$ ist:

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}$$

Dass $f^{-1}(y)$ mindestens ein Element enthält, besagt also gerade, dass es mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt. Da dies für jedes $y \in Y$ gilt, folgt die Äquivalenz (i)⇔(iii). ■

§4.6.06 **Beispiel**. Es gilt:

a) Die Abbildung

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0\ ,\ n \mapsto n+1$$

ist nicht surjektiv. Denn es gibt keine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, für die $0 = f(n) = n+1$ gälte. Daher ist $0 \notin \mathrm{im}(f)$ und f ist nicht surjektiv.

$$f : \qquad 0 \to 1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to \dots$$

b) Die Abbildung

$$g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \ , \ n \mapsto \begin{cases} n-1 & n \geqslant 1 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

hingegen ist surjektiv, denn für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n+1 \in g^{-1}(n)$.

$$\begin{tikzcd} g: & 0 & 1 \arrow[l, bend right] & 2 \arrow[l, bend right] & 3 \arrow[l, bend right] & 4 \arrow[l, bend right] & 5 \arrow[l, bend right] & \dots \arrow[l, bend right] \end{tikzcd}$$

c) Die Abbildung

$$e : \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R} \ , \ f \mapsto f(2)$$

ist surjektiv, was bereits in Beispiel §4.2.04 gezeigt wurde.

d) Ist X eine beliebige Menge, so ist die Abbildung

$$F : X \to \mathcal{P}(X) \ , \ x \mapsto \{x\}$$

nicht surjektiv. Denn das Bild von F besteht aus genau den einelementigen Teilmengen von X, aber nicht jede Teilmenge von X ist einelementig. Z.B. ist $\emptyset \subseteq X$ eine nullelementige Teilmenge.

§4.6.07 **Definition** *(Bijektive Abbildung)*. Eine Abbildung heißt **bijektiv**, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

§4.6.08 **Bemerkung**. Seien X, Y zwei Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Nach Definition §4.6.01 und Definition §4.6.04 gilt

$$\begin{array}{rcl} f \text{ ist injektiv} & \Leftrightarrow & \text{Für jedes } y \in Y \text{ enthält } f^{-1}(\{y\}) \text{ höchstens ein Element} \\ f \text{ ist surjektiv} & \Leftrightarrow & \text{Für jedes } y \in Y \text{ enthält } f^{-1}(\{y\}) \text{ mindestens ein Element} \end{array}$$

Also ist f genau dann bijektiv, wenn für jedes $y \in Y$ die Urbildmenge $f^{-1}(\{y\})$ aus *genau einem* Element besteht.

§4.6.09 **Satz** *(Bijektiv ⇔ invertierbar)*. *Seien X, Y zwei Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist eine bijektive Abbildung.

(ii) f ist eine invertierbare Abbildung.

§4.6.10 **Beweis**. (i)⇒(ii): Sei f bijektiv. Für jedes $y \in Y$ enthält dann die Urbildmenge $f^{-1}(\{y\})$ genau ein Element. Definiere die Abbildung

$$g : Y \to X \ , \ y \mapsto (\text{Das eine Element von } f^{-1}(\{y\}))$$

Dann ist g invers zu f, denn:
($g \circ f = \mathrm{id}_X$) Für ein beliebiges $x \in X$ ist

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= (\text{Das eine Element von } f^{-1}(\{f(x)\})) \\ &= x && (\text{da } f(x) \in \{f(x)\}) \\ &= \mathrm{id}_X(x)\end{aligned}$$

Weil $x \in X$ beliebig war, folgt die Gleichheit von Abbildungen $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

($f \circ g = \mathrm{id}_Y$) Für ein beliebiges $y \in Y$ ist

$$\begin{aligned}(f \circ g)(y) &= f(\text{Das eine Element von } f^{-1}(\{y\})) \\ &= y && (\text{per Definition von } f^{-1}(\{y\})) \\ &= \mathrm{id}_Y(y)\end{aligned}$$

Also ist $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Insgesamt ist damit gezeigt, dass g invers zu f ist.

(ii)⇒(i): Sei f invertierbar und sei $f^{-1} : Y \to X$ die inverse Abbildung. Dann ist f bijektiv, denn:
(Injektivität): Seien $x, y \in X$ mit $f(x) = f(y)$. Es folgt

$$\begin{aligned}x &= f^{-1}(f(x)) && (\text{da } f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X) \\ &= f^{-1}(f(y)) && (\text{da } f(x) = f(y)) \\ &= y && (\text{da } f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X)\end{aligned}$$

Da $x, y \in X$ beliebig waren, ist bewiesen, dass f injektiv ist.
(Surjektivität): Sei $y \in Y$ beliebig. Dann ist

$$\begin{aligned}y &= f(f^{-1}(y)) && (\text{da } f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y) \\ &\in \mathrm{im}(f)\end{aligned}$$

Da das Element $y \in Y$ beliebig war, ist damit bewiesen, dass $\mathrm{im}(f) = Y$, also dass f surjektiv ist. ■

§4.6.11 **Bemerkung** *(Bijektivität beweisen)*. Ist f eine Abbildung, für die du beweisen möchtest, dass sie bjektiv ist, so stehen dir damit zwei Wege offen:

1. Du arbeitest mit Definition §4.6.07, d.h. du beweist sowohl, dass f injektiv ist, als auch, dass f surjektiv ist.
2. Du arbeitest mit Satz §4.6.09, d.h. du schreibst einen Kandidaten für die Umkehrabbildung hin und beweist daraufhin, dass er tatsächlich invers zu f ist.

Es gibt Situationen, wo es schwer bis unmöglich ist, eine konkrete Abbildungsvorschrift für eine Umkehrabbildung anzugeben. In diesem Fall ist der erste Weg leichter.
Es gibt aber auch Situationen, in denen du unmittelbar „siehst“, dass f invertierbar ist und dir auch direkt ein Kandidat für eine Umkehrabbildung einfällt. In diesem Fall bietet sich der zweite Weg an. Beachte auch, dass ein Beweis über den zweiten Weg stets informativer ist, da er dem Leser bereits die Gestalt der inversen Abbildung mitteilt.

Hier ist ein Beispiel für einen Bijektivität-Beweis, bei dem der zweite Weg weniger aufwendig als der erste ist:

§4.6.12 **Satz**. *Die Abbildung* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\ ,\ n \mapsto n+1$ *ist bijektiv.*

§4.6.13 **Beweis**. Betrachte die Abbildung

$$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}\ ,\ n \mapsto n-1$$

Dann ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$:

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+1) = (n+1) - 1 = n$$
$$(f \circ g)(n) = f(g(n)) = f(n-1) = (n-1) + 1 = n$$

Da $n \in \mathbb{Z}$ beliebig war, folgt die Gleichheit von Abbildungen $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ und $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Also ist g invers zu f und f somit bijektiv. ■

§4.6.14 **Bemerkung** *(Invertierbarkeit widerlegen)*. Möchtest du beweisen, dass eine Abbildung keine Umkehrabbildung besitzt, so genügt es nach Satz §4.6.09 bereits, wenn du beweist, dass sie nicht injektiv oder nicht surjektiv ist. Beispielsweise gilt:

- Die Abbildung

  $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto x^2$$

  ist nicht invertierbar, weil sie nicht injektiv ist. Denn es ist zum Beispiel $f(-2) = f(2)$.

- Die Abbildung

  $$g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0\ ,\ n \mapsto n+1$$

  ist nicht invertierbar, weil sie nicht surjektiv ist. Denn es ist $0 \notin \mathrm{im}(g)$.

§4.6.15 **Bemerkung** *(Abbildungen künstlich surjektiv machen)*. Seien X, Y zwei Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Gemäß Definition §4.4.03 lässt sich der Wertebereich von f auf die Menge $\mathrm{im}(f)$ einschränken. Die dadurch erhaltene Abbildung

$$f|^{\mathrm{im}(f)} : X \to \mathrm{im}(f)\ ,\ x \mapsto f(x)$$

ist automatisch surjektiv, da es ja für jedes $y \in \mathrm{im}(f)$ mindestens ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

Auf diese Weise ist es uns gelungen, f „künstlich surjektiv“ zu machen. Ist uns daran gelegen, mit surjektiven Abbildungen zu arbeiten, so stellt das also kein Problem dar, da wir die Wertebereiche unserer Abbildungen immer soweit einschränken können, bis die Abbildungen surjektiv werden. Jede injektive Abbildung kann durch eventuelle Einschränkung ihres Wertebereichs bijektiv, und damit invertierbar, gemacht werden.

Es ist auch möglich, die Abbildung f „künslich injektiv“ zu machen. Der Trick hinter dieser Methode besteht darin, zwischen solchen Elementen von X, die unter f denselben Funktionswert haben, „nicht mehr zu unterscheiden“. Die Technik „ähnliche Elemente nicht mehr voneinander zu unterscheiden“ wird in der LA1 eine prominente Rolle im Umfeld des sogenannten „Homomorphiesatzes“ spielen und kann mithilfe sogenannter *Äquivalenzrelationen*, die im nächsten Vortrag eingeführt werden, formalisiert werden.[6]

[6] siehe Bemerkung §5.3.17. Vergleiche dazu auch **??**

§4.7 Aufgabenvorschläge

§4.7.01 **Aufgabe** *(Überprüfen von Eigenschaften).* Es bezeichne $V := \{M \mid M \text{ ist eine Menge}\}$ die Gesamtheit aller Mengen. Untersuche folgende Abbildungen auf Surjektivität, Injektivität und Bijektivität:

a) $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto x^2$$

b) $$g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})\ ,\ n \mapsto \{m \in \mathbb{N} \mid n \leqslant m\}$$

c) $$h : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_{\geqslant 1} \to \mathbb{Q}\ ,\ (m,n) \mapsto \frac{m}{n}$$

d) $$\mathcal{P} : V \to V\ ,\ M \mapsto \mathcal{P}(M)$$

e)* $$s : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0\ ,\ s(n) = \begin{cases} -2n & \text{falls } n \leqslant 0 \\ 2n-1 & \text{falls } n \geqslant 1 \end{cases}$$

§4.7.02 **Aufgabe** *(Wohldefiniertheit).* An der Tafel von Captain Chaos stehen die folgenden Ausdrücke:

(i) $$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\ ,\ n \mapsto n-1$$

(ii) $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto \frac{1}{x}$$

(iii) $$h : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}\ ,\ \frac{p}{q} \mapsto p$$

(iv) $$\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}|^{\mathbb{Z}}$$

Was hältst du davon?

§4.7.03 **Aufgabe** *(Vererbung von Injektivität und Surjektivität).* Seien X, Y, Z drei beliebige Mengen und $f : X \to Y, g : Y \to Z$ zwei Abbildungen. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

c)* Überlege Dir, ob die Umkehrungen der Aussagen in $a)$ und $b)$ gültig sind und beweise sie oder widerlege sie durch ein Gegenbeispiel.

§4.7.04 **Aufgabe** *(Umkehrfunktionen).* Sei X eine beliebige Menge. Beweise, dass die folgenden Abbildungen bijektiv sind, indem du eine Umkehrabbildung findest.

a) $$\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto (3x+1)^3$$

b) $$\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)\ ,\ A \mapsto X \setminus A$$

c) $$\mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})\ ,\ f \mapsto (x \mapsto f(x+1))$$

d)* $$\mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}\ ,\ n \mapsto \begin{cases} -\frac{n}{2} & n \text{ ist eine gerade Zahl} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ ist eine ungerade Zahl} \end{cases}$$

Kapitel 5

Relationen

Relationen drücken Beziehungen zwischen Elementen einer Menge aus. Von besonderer Bedeutung sind Ordnungs- und Äquivalenzrelationen, deren grundlegende Eigenschaften in diesem Vortrag besprochen werden.

§5.1 Begriff der Relation

Im letzten Kapitel haben wir Ausdrücke der Form $f(x) = x^3$ in *Abbildungen* $f : A \to B$ verallgemeinert, die eine Beziehung zwischen den Elementen einer Menge A und einer Menge B herstellen. Heute möchten wir Ausdrücke wie $2 \leqslant 3$ oder $\sqrt{2} \neq \sqrt{3}$, die Beziehungen zwischen je zwei Elementen der selben Menge angeben, als *Relationen* realisieren. Relevant sind vor allem *Ordnungsrelationen* und *Äquivalenzrelationen*.

Abstrakt kodieren wir für den Relationenbegriff die Elemente, die in Beziehung stehen sollen, in einem Paar, also einem Element des kartesischen Produkts.

§5.1.01 **Definition**. Sei X eine Menge. Eine **Relation** $\sim$ auf X ist verkörpert durch eine Teilmenge $R \subseteq X \times X$ mit

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad (x,y) \in R \qquad\qquad x, y \in X$$

§5.1.02 **Beispiel**. Auf der Menge $X = \{$Luke Skywalker, Anakin Skywalker, Yoda, Obi-Wan Kenobi, Qui-Gon Jinn, Dooku, Palpatine, Darth Maul, Darth Plagueis$\}$ betrachten wir die Relation

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x \text{ war Padawan von } y.$$

Wir haben

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Darth Plagueis} & \\
\text{Yoda} & \text{Palpatine} \arrow[u] & \\
 & \text{Dooku} \arrow[ul] \arrow[u] & \text{Darth Maul} \arrow[ul] \\
 & \text{Qui-Gon Jinn} \arrow[u] & \\
 & \text{Obi-Wan Kenobi} \arrow[u] & \\
\text{Luke Skywalker} \arrow[uuuu] \arrow[ur] & & \text{Anakin Skywalker} \arrow[ul] \arrow[uuuul]
\end{tikzcd}$$

Ein Pfeil von a nach b soll dabei dafür stehen, dass a mit b in Beziehung $a \sim b$ steht, also a ein Padawan von b war. Eine solche Darstellung nennt man einen **Graphen** der Relation.

Die kodierende Menge $R \subseteq X \times X$ ist also $R = \big\{$(Luke,Yoda), (Luke,Obi-Wan), (Anakin,Obi-Wan), (Anakin, Palpatine), (Obi-Wan,Qui-Gon), (Qui-Gon, Dooku), (Dooku, Yoda), (Dooku, Palpatine) (Darth Maul, Palpatine), (Palpatine, Darth Plagueis)$\big\}$.

§5.1.03 **Beispiel**. Auf $\mathbb{Z}$ definieren die Relation „$\leqslant$“ durch

$$n \leqslant m \quad :\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}_0 : m = n + k \qquad\qquad n, m \in \mathbb{Z}$$

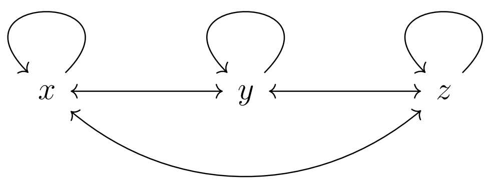
Durch welche Menge $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ wird „$\leqslant$“ repräsentiert? Für $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$(n, m) \in R \quad \overset{!}{\Leftrightarrow} \quad n \leqslant m \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N}_0 : m = n + k\,.$$

Eine mögliche Formulierung wäre also $R = \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : m = n + k\}$. Letztlich haben wir hier einfach nur die Definition der Relation abgeschrieben und nicht wirklich etwas gelernt; wenn man tatsächlich mit Relationen arbeitet, ist es ganz allgemein meist ergiebiger, die Menge R als technische Umsetzung zu vergessen und sich mit der direkten Definition der Relation auseinanderzusetzen. Wie das gemeint ist, sehen wir gleich bei den Eigenschaften von Relationen.

§5.1.04 **Definition**. Vorher noch drei Extrembeispiele: Sei X eine beliebige Menge.

- Die **Allrelation** auf X ist verkörpert durch die Menge $X \times X$, setzt also alle Elemente miteinander in Beziehung:

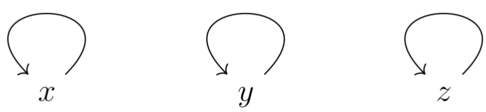
  

  Die Doppelpfeile stehen dabei für eine Beziehung in beide Richtungen, etwa gilt $x \sim y$ sowie $y \sim x$.

- Die **Nullrelation** ist verkörpert durch die leere Menge $\emptyset$, setzt also keine Elemente in Beziehung:

  $x \qquad\qquad y \qquad\qquad z$

- Die **Gleichheitsrelation** ist definiert durch $x \sim y :\Leftrightarrow x = y$, also

  Sie ist verkörpert durch die so genannte *Diagonale*

  $$D_X := \{(x, x) \in X \times X \mid x \in X\}\,.$$

  (In der Darstellung des kartesischen Produkts als Ebene mit Koordinatenachsen ist das gerade die Winkelhalbierende, daher der Name.)

§5.1.05 **Definition.** Sei X eine Menge und $\sim$ eine Relation auf X. Dann heißt die Relation $\sim$

- **reflexiv**, falls für alle $x \in X$ die Relation $x \sim x$ gilt. Im Graphen muss jedes Element also einen Pfeil von sich auf sich selbst tragen.
- **symmetrisch**, falls für alle $x, y \in X$ aus $x \sim y$ schon $y \sim x$ folgt. Im Graphen müssen also alle Pfeile zwischen verschiedenen Elementen Doppelpfeile sein.
- **antisymmetrisch**, falls für alle $x, y \in X$ aus $x \sim y$ und $y \sim x$ schon $x = y$ folgt. Im Graphen darf es also zwischen verschiedenen Elementen keine Doppelpfeile geben.
- **transistiv**, falls für alle $x, y, z \in X$ aus $x \sim y$ und $y \sim z$ schon $x \sim z$ folgt. Im Graphen gibt es für einen indirekten Weg entlang der Pfeile auch immer den direkten.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[loop above] \end{tikzcd} \qquad x \longleftrightarrow y \qquad x \not\longleftrightarrow y \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, bend left] & & z \\ & y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

reflexiv | symmetrisch | antisymmetrisch | transitiv

§5.1.06 **Bemerkung.** Die Definition einer symmetrischen Relation kann als die Formel

$$x \sim y \implies y \sim x \qquad\qquad x, y \in X$$

formuliert werden. Dies impliziert bereits die Äquivalenz

$$x \sim y \Leftrightarrow y \sim x \qquad\qquad x, y \in X$$

da „x“ und „y“ ja austauschbare Bezeichnungen für beliebige Elemente von X sind.

§5.1.07 **Beispiel.** Wir prüfen die Padawan-Relation aus Beispiel §5.1.02 auf diese Eigenschaften:

- Sie ist nicht reflexiv, etwa war Obi-Wan nicht sein eigener Padawan (tatsächlich gilt das für kein $x \in X$).
- Sie ist nicht symmetrisch, etwa war Luke Yodas Padawan, aber Yoda nicht Lukes.
- Sie ist antisymmetrisch, denn es gibt keine $x, y \in X$ mit $x \sim y$ und $y \sim x$; daher ist die Implikation

  $$\forall x, y \in X : \big(\underbrace{x \sim y \text{ und } y \sim x}_{\text{falsch}} \implies x = y\big)$$

  trivialerweise eine wahre Aussage (*ex falso quod libet*, siehe auch Bemerkung §3.1.19).
- Sie ist nicht transitiv, denn es war Darth Maul Padawan von Palpatine, und Palpatin Padawan von Darth Plagueis, aber Darth Maul nicht Padawan von Darth Plagueis.

Für die $\leqslant$-Relation aus Beispiel §5.1.03 gilt:

- Sie ist reflexiv, denn für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $n \leqslant n$ (setze $k = 0$).
- Sie ist nicht symmetrisch, so ist etwa $2 \leqslant 3$ aber $3 \nleqslant 2$.
- Sie ist antisymmetrisch, denn aus $n \leqslant m$ und $m \leqslant n$ folgt $n = m + k_1$ und $m = n + k_2$. Setzen wir ein, erhalten wir $n = n + k_1 + k_2$, also $k_1 + k_2 = 0$. Wegen $k_1, k_2 \geqslant 0$ folgt $k_1 = k_2 = 0$ und daher $n = m$.
- Sie ist transitiv, denn: Sei $n \leqslant m$ und $m \leqslant k$, etwa $m = n + k_1$ und $k = m + k_2$. Dann gilt

  $$k = m + k_2 = n + \underbrace{k_1 + k_2}_{=:k_3}$$

  und wegen $k_3 = k_1 + k_2 \in \mathbb{N}_0$ folgt daraus gerade $n \leqslant k$.

§5.1.08 **Bemerkung** *(Die tiefere Bedeutung der Transitivität).* Seien X eine Menge mit einer Relation „$\sim$“ und $a, b, c, d \in X$ ein paar Elemente von X. Anstelle von „Es gilt $a \sim b$, $b \sim c$ und $c \sim d$“ schreibt man kurz einfach

$$a \sim b \sim c \sim d$$

Beispielsweise schreibt man

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

oder

$$2 < 4 < 8 < 12 < 15$$

Mit dieser Notation lässt sich die Definition der Transitivität auch durch folgende Formel ausdrücken:

$$x \sim y \sim z \quad \Longrightarrow \quad x \sim z \qquad\qquad x, y, z \in X$$

Transitivität heißt also, dass sich jede aus drei Elementen bestehende „Relationskette“ „zusammenfalten“ lässt. Es lässt sich zeigen, dass dies bei transitiven Relationen auch für beliebig lange „Ketten“ gilt. Mit anderen Worten: Sind $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in X$ ein paar Elemente mit

$$x_1 \sim x_2 \sim \ldots \sim x_n$$

so folgt, sofern $\sim$ eine transitive Relation ist, daraus auch schon $x_1 \sim x_n$. Im Spezialfall, dass $\sim$ die Gleichheitsrelation ist, hast du das auch schon in der Schule andauernd ausgenutzt: Sind $x_1, \ldots, x_n$ irgendwelche Zahlen/Vektoren/Funktionen und gilt

$$x_1 = x_2 \ldots = x_n$$

so folgt daraus, dass auch $x_1 = x_n$ ist.

Beachte, dass diese Schlussfolgerung bei nicht-transitiven Relationen fehlschlägt. Beispielsweise gilt

$$2 \cdot 6 \neq 3 \cdot 6 \neq 3 \cdot 4$$

aber es ist ja dennoch $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$.

§5.2 Ordnungsrelationen

Ordnungsrelationen sind Verallgemeinerungen der bekannten „$\leqslant$“-Relation auf den Zahlenräumen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und werden daher häufig mit dem Symbol $\leqslant$ anstelle von $\sim$ notiert, auch wenn es nicht zwingend um Zahlenräume geht.

§5.2.01 **Definition** *(Ordnungsrelationen).* Eine **Ordnungsrelation** (auch: *partielle Ordnung* oder *Halbordnung*) auf einer Menge X ist eine Relation $\leqslant$ auf X, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist. Konkret:

$$\begin{array}{llllll} \text{(O1)} & \forall x \in X: & x \leqslant x & & & \text{(Reflexivität)} \\ \text{(O2)} & \forall x, y \in X: & x \leqslant y \ \wedge \ y \leqslant x & \Longrightarrow & x = y & \text{(Antisymmetrie)} \\ \text{(O3)} & \forall x, y, z \in X: & x \leqslant y \ \wedge \ y \leqslant z & \Longrightarrow & x \leqslant z & \text{(Transitivität)} \end{array}$$

In diesem Fall nennt man das Paar $(X, \leqslant)$ eine **geordnete Menge**.

Besitzt die Ordnungsrelation „$\leqslant$“ sogar die Eigenschaft

$$\text{(TO)} \qquad \forall x, y \in X: \quad x \leqslant y \ \vee \ y \leqslant z$$

so nennt man sie eine **Totalordnung**. Eine Totalordnung ist also eine Halbordnung, bei der je zwei Elemente miteinander „vergleichbar“ sind.

§5.2.02 **Beispiel.** Es gilt:

- Die Padawan-Relation aus Beispiel §5.1.02 ist keine Halbordnung, denn in Beispiel §5.1.07 haben wir gesehen, dass sie nicht transitiv (und auch nicht reflexiv) ist.
- Die $\leqslant$-Relation aus Beispiel §5.1.03 dagegen ist nach Beispiel §5.1.07 tatsächlich eine Halbordnung. Es liegt sogar eine Totalordnung vor, denn: Seien $m, n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt entweder $m - n \geqslant 0$ oder $m - n < 0$. Im ersten Fall setze $k = m - n \in \mathbb{N}_0$ und erhalte aus $m = n + k$ schon $n \leqslant m$. Im zweiten Fall setze $k = n - m = -(m - n) \in \mathbb{N}_0$ und erhalte aus $n = m + k$ schon $m \leqslant n$.

§5.2.03 **Beispiel** *(Teilmengenrelation).* Sei M eine Menge. Auf $\mathcal{P}(M)$ betrachten wir die Inklusionsrelation „$\subseteq$“. In Satz §3.1.08 haben wir genau die für eine Halbordnung geforderten Eigenschaften nachgewiesen. Somit ist $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ eine geordnete Menge.

Sofern M mindestens zwei verschiedene Elemente enthält, ist sie jedoch nicht totalgeordnet. Denn sind $a, b \in M$ zwei verschiedene Elemente, so sind die Einermengen $\{a\}$ und $\{b\}$ jeweils Teilmengen von M aber wegen $a \neq b$ ist weder $\{a\} \subseteq \{b\}$ noch $\{b\} \subseteq \{a\}$.

1. Schranken

Besonders interessant sind häufig Elemente, die als sogenannte Schranken fungieren:

§5.2.04 **Definition** *(Schranken).* Sei X eine halbgeordnete Menge und T eine Teilmenge von X. Dann heißt ein Element $x \in X$

1. eine **obere Schranke** von T, wenn für alle $t \in T$ gilt $t \leqslant x$.
2. eine **untere Schranke** von T, wenn für alle $t \in T$ gilt $x \leqslant t$.

Hat T eine obere (bzw. untere) Schranke, so heißt T **nach oben (bzw. unten) beschränkt**.

§5.2.05 **Beispiel**. Die Teilmenge $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}$ ist bezüglich der $\leqslant$-Relation nach unten, aber nicht nach oben beschränkt.

§5.2.06 **Beweis**. Wir behaupten (etwas verschärft) zwei Dinge:

(i) Die Null ist eine untere Schranke von $\mathbb{N}_0$.

(ii) Es gibt keine obere Schranke von $\mathbb{N}_0$.

Zu (i): Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $n = 0 + n$ und wegen $n \in \mathbb{N}_0$ ist die Definition von $0 \leqslant n$ damit erfüllt.

Zu (ii): Angenommen, $k \in \mathbb{Z}$ wäre eine obere Schranke von $\mathbb{N}_0$. Insbesondere gälte dann $0 \leqslant k$, also wäre $k \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Dann wäre aber auch $k + 1 \in \mathbb{N}_0$. Da wir k aber als obere Schranke von $\mathbb{N}_0$ angenommen haben, müsste dann $k + 1 \leqslant k$ gelten, was nicht sein kann. ■

§5.2.07 **Beispiel**. Ist M eine Menge, so ist in der geordneten Menge $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ jede Teilmenge nach oben und nach unten beschränkt.

§5.2.08 **Beweis**. Für alle $A \in \mathcal{P}(M)$ gilt $\emptyset \subseteq A$ und $A \subseteq M$. Ist $T \subseteq \mathcal{P}(M)$ eine Teilmenge, so gilt dies natürlich immer noch auch für alle $A \in T$. Für jedes $T \subseteq \mathcal{P}(M)$ ist also $\emptyset$ eine untere und M eine obere Schranke. ■

§5.2.09 **Bemerkung** *(mehrere Schranken)*. Eben in Beispiel §5.2.05 hatten wir bewiesen, dass die Null eine untere Schranke für $\mathbb{N}_0$ ist. Genauso gut hätten wir aber auch -1 (oder jede andere negative ganze Zahl) nehmen können, und der Beweis hätte nur leicht modifiziert werden müssen. Die Null ist jedoch eine natürlichere Wahl in dem Sinne, dass sie $\mathbb{N}_0$ am engst möglichen eingrenzt. Solche Schranken erhalten einen besonderen Namen:

§5.2.10 **Definition** *(Supremum/Infimum)*. Sei X eine halbgeordenete Menge und $T \subseteq X$ eine Teilmenge.

- Ein Element $x \in X$ heißt **Supremum** von T, wenn x eine kleinste obere Schranke von T ist. Das heißt, x ist eine obere Schranke von T und für jede weitere obere Schranke y von T gilt $x \leqslant y$.

- Ein Element $x \in X$ heißt **Infimum** von T, wenn x eine größte untere Schranke von T ist. Das heißt, x ist eine untere Schranke von T und für jede weitere untere Schranke y von T gilt $y \leqslant x$.

§5.2.11 **Beispiel**. Die Null ist das Infimum von $\mathbb{N}_0$, denn: Wir haben bereits gesehen, dass Null eine untere Schranke ist. Ist $n \in \mathbb{Z}$ eine weitere untere Schranke von $\mathbb{N}_0$, so gilt definitionsgemäß $n \leqslant 0$, denn $0 \in \mathbb{N}_0$. Damit ist alles gezeigt. Unser Infimum war hier selbst Element der zu beschränkenden Menge, das ist jedoch nicht immer so (vgl. gleich Bemerkung §5.2.14).

Wir können tatsächlich von *dem* Infimum sprechen:

§5.2.12 **Satz** *(Eindeutigkeitssatz für Infimuma und Suprema)*. *Sei X eine halbgeordnete Menge und $T \subseteq X$ eine Teilmenge. Existiert dann ein Supremum oder Infimum von T, so sind diese jeweils eindeutig bestimmt.*

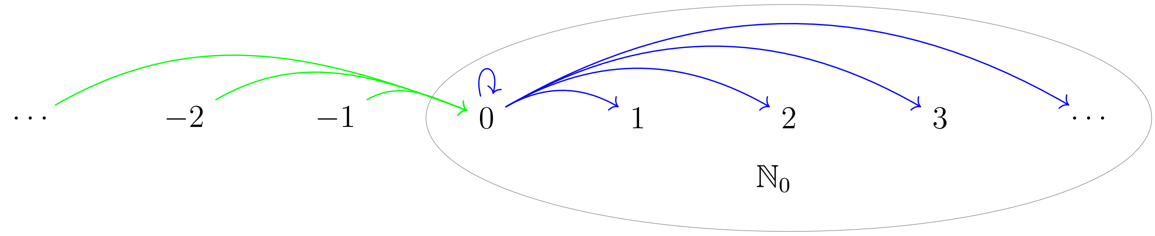


Abbildung 5.1: Die Null ist das Infimum von $\mathbb{N}_0$ in $\mathbb{Z}$ bezüglich „$\leqslant$“: Null ist eine untere Schranke (blau) und jede weitere untere Schranke ist kleiner (grün).

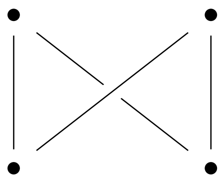
§5.2.13 **Beweis**. Angenommen, x und y seien beides Infima von T. Dann ist x eine untere Schranke von T, und da y eine größte untere Schranke von T ist, gilt $x \leqslant y$. Umgekehrt ist aber auch y eine untere Schranke von T, und da x ebenfalls eine größte untere Schranke ist, gilt $y \leqslant x$. Aus der Antisymmetrie folgt $y = x$.

Der Beweis für Suprema funktioniert sehr ähnlich und ist daher Übungsaufgabe. ■

§5.2.14 **Bemerkung**. Damit ist nur gesagt, dass falls ein Supremum oder Infimum existiert, es eindeutig ist; die Existenz allein ist jedoch nicht unbedingt gesichert. Wenn eine Teilmenge gar keine obere Schranke besitzt, so besitzt sie erst recht auch kein Supremum. Beispielsweise ist die Teilmenge $\mathbb{N}_0 \subseteq \mathbb{Z}$ nach oben unbeschränkt und besitzt daher kein Supremum.

Aber selbst, wenn eine Teilmenge nach oben beschränkt ist, braucht sie kein Supremum besitzen. Ein Beispiel in der geordneten Menge $(\mathbb{Q}, \leqslant)$ ist die Teilmenge $T := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$. Dann ist T sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt in $\mathbb{Q}$, besitzt aber dennoch weder ein Supremum noch ein Infimum in $\mathbb{Q}$.

§5.2.15 **Bemerkung** *(*)*. Ein weiteres Beispiel einer beschränkten Teilmenge, die kein Supremum besitzt, liefert die folgende Ordnungsrelation, die wir durch ein Hasse-Diagramm darstellen:



Dabei sollen die Punkte die Elemente der geordneten Menge repräsentieren und ein Punkt soll genau dann kleiner als ein anderer Punkt sein, wenn er am unteren Ende eines Verbindungsstrichs zum anderen Punkt liegt.
Man sieht, dass die Menge der unteren beiden Punkte beschränkt ist und dass die beiden oberen Punkte jeweils Schranken darstellen. Allerdings ist keine dieser beiden Schranken ein Supremum.

Konkret können wir diese Ordnungsrelation z.B. folgendermaßen realisieren. Seien a, b, c, d vier paarweise verschiedene Objekte und $X = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$. Dann ist $(X, \subseteq)$ eine geordnete Menge, die genau so aussieht, wie das abstrakte Bild von gerade eben. Die Teilmenge $T = \{\{a\}, \{b\}\}$ hat genau die oberen Schranken $\{a, b, c\}$ und $\{a, b, d\}$. Aber keine dieser Schranken ist ein Supremum.

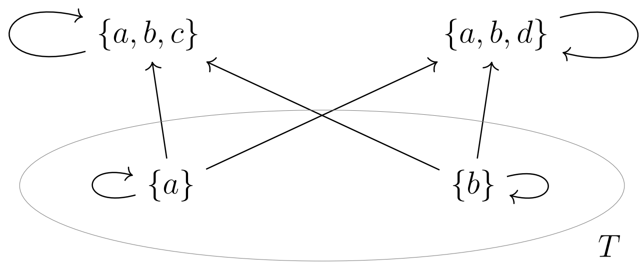


Abbildung 5.2: Die beiden oberen Schranken von T sind nicht vergleichbar mittels der Inklusionsrelation, also gibt es keine kleinste obere Schranke und T hat kein Supremum.

Durch künstliches Hinzufügen eines weiteren Punkts ist es aber möglich, ein Supremum zu bekommen. Wir wollen das hier nicht im Detail ausführen, sondern nur mit einem Bild visualisieren:

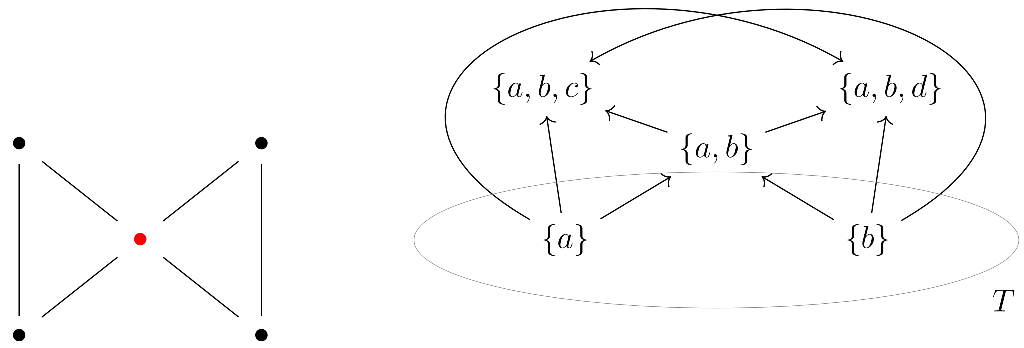


Abbildung 5.3: Plötzlich besitzt die Menge T ein Supremum. (Im rechten Diagramm wurden die Reflexivitätspfeile aus Platzgründen weggelassen. Im Hasse-Diagramm auf der linken Seite werden auch diejenigen Verbindungslinien, die sich aus der Transitivität und den anderen Linien ergeben, weggelassen.)

§5.3 Äquivalenzrelationen

Sei X eine Menge. Äquivalenzrelationen auf X sind die Relationen, anhand derer wir die Objekte von X in gewisse „Klassen“ einteilen können.

§5.3.01 **Definition**. Sei X eine Menge. Eine **Äquivalenzrelation** auf X ist eine Relation $\sim$, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Konkret:

$$\begin{array}{llll} \text{(ÄR1)} & \forall x \in X: & x \sim x & \text{(Reflexivität)} \\ \text{(ÄR2)} & \forall x, y \in X: & x \sim y \implies y \sim x & \text{(Symmetrie)} \\ \text{(ÄR3)} & \forall x, y, z \in X: & x \sim y \wedge y \sim z \implies x \sim z & \text{(Transitivität)} \end{array}$$

§5.3.02 **Beispiel** *(Wohngemeinschaften)*. Auf der Menge aller Menschen in Deutschland betrachten wir die Relation „_ wohnt zusammen mit _“. Diese ist reflexiv, denn jede Person wohnt mit sich selbst zusammen (so komisch das klingt); sie ist symmetrisch, denn wenn Alice mit Bob zusammen wohnt, wohnt Bob auch mit Alice zusammen; und sie ist transitiv, denn wenn Alice mit Bob zusammen wohnt und Bob mit Charlie, so wohnt auch Alice mit Charlie zusammen (wobei wir vereinfachend annehmen, dass jede Person nur einen Wohnsitz hat). Es liegt also eine Äquivalenzrelation vor.

§5.3.03 **Beispiel** *(Äquivalenz von Aussagen).* Es sei $\mathcal{A} := \{A \mid A \text{ ist eine Aussage}\}$ die Menge aller Aussagen. Dann liefert die Äquivalenz von Aussagen

$$A \sim B \quad :\Leftrightarrow \quad \text{Es lässt sich beweisen, dass } A \leftrightarrow B \text{ gilt} \qquad\qquad A, B \in \mathcal{A}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{A}$ (was ja auch schon dem Namen nach Sinn ergibt). Denn:

- Die Reflexivität ist erfüllt nach Satz §2.3.14.
- Die Symmetrie ergibt sich aus Satz §2.3.16.
- Die Transitivität ist eine Konsequenz aus Satz §2.3.09.

1. Äquivalenzklassen

§5.3.04 **Definition.** Seien X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation und $x \in X$ ein Element in X. Dann nennen wir

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim x\}$$

die **Äquivalenzklasse von** x. Sie besteht aus allen Elementen, die zu x „äquivalent" sind. Ist $y \in [x]$ ein Element, so nennt man y einen **Vertreter** oder auch **Repräsentanten** von $[x]$.

Da „$\sim$" reflexiv ist, gilt $x \sim x$, also $x \in [x]$. Mit anderen Worten: Jedes Element ist ein Vertreter seiner Äquivalenzklasse.

§5.3.05 **Beispiel.** In unserem Beispiel der „_ wohnt zusammen mit _"-Relation ist [Bob] die Menge aller Mitbewohner von Bob (und auch Bob). Wenn Alice mit Bob zusammenwohnt, so ist diese Menge aber identisch mit [Alice], da dann Alice und Bob natürlich die selben Mitbewohner haben.

Beim nächsten Satz handelt es sich um eine Mehrfach-Äquivalenz, siehe Definition §2.3.29.

§5.3.06 **Satz** *(Gleichheit von Äquivalenzklassen). Seien X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x, y \in X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) Es ist $[x] = [y]$, d.h. x und y bestimmen dieselbe Äquivalenzklasse.

(ii) Es gilt $x \sim y$.

(iii) Es ist $x \in [y]$.

(iv) Es ist $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, d.h. $[x]$ und $[y]$ haben mindestens ein gemeinsames Element.

§5.3.07 **Bemerkung**. Unsere Beweisstrategie besteht in der Etablierung der folgenden Beziehungen:

$$\begin{tikzcd}
(i) \arrow[d] & (ii) \arrow[l] \arrow[dl, leftrightarrow] \\
(iii) \arrow[r] & (iv) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Daraus ergibt sich dann, dass alle vier Aussagen zueinander äquivalent sind, siehe Satz §2.3.31.

§5.3.08 **Beweis**. Die Äquivalenz (ii)↔(iii) ergibt sich sofort aus der Definition von $[y]$.

(iii)→(iv): Es gelte (iii), also $x \in [y]$. Da auch $x \in [x]$, ist insgesamt $x \in [x] \cap [y]$. Also gilt (iv).

(iv)→(ii): Es gelte (iv), d.h. es gebe ein Element $a \in [x] \cap [y]$. Dann ist $a \sim x$ und $a \sim y$. Wegen der Symmetrie gilt dann auch $x \sim a$ und dank der Transitivität folgt aus $x \sim a$ und $a \sim y$, dass auch $x \sim y$ gilt.

(ii)→(i): Es gelte $x \sim y$. Da „$\sim$“ eine symmetrische Relation ist, gilt dann auch $y \sim x$. Wir zeigen nun die Gleichheit von Mengen $[x] = [y]$:
„$\subseteq$“: Sei $z \in [x]$ ein beliebiges Element. Dann ist $z \sim x$ und zusammen mit $x \sim y$ folgt aus der Transitivität, dass auch $z \sim y$. Also ist $z \in [y]$.
„$\supseteq$“: Sei $z \in [y]$ ein beliebiges Element. Dann ist $z \sim y$ und zusammen mit $y \sim x$ folgt aus der Transitivität, dass auch $z \sim x$. Also ist $z \in [x]$.

(i)→(iii): Es gelte (i), also $[x] = [y]$. Wegen $x \in [x]$ ist dann auch $x \in [y]$. ∎

§5.3.09 **Beispiel**. Oft sind die Äquivalenzklassen interessanter als die ursprünglichen Objekte der Menge X: Auf der Menge der Laptops ist „_ ist das gleiche Modell wie _“ eine Äquivalenzrelation (siehe Aufgabe §5.4.05). Eine Äquivalenzklasse besteht dann aus allen Laptops desselben Modells. Wer sich einen neuen Laptop besorgen möchte, geht aber nicht in den Laden und lässt sich jeden Computer einzeln vorführen (also: betrachtet jedes Objekt), sondern entscheidet sich nur für ein Modell (also: sucht eine Äquivalenzklasse aus) und welches konkrete Objekt in der Äquivalenzklasse schließlich mitgenommen wird, ist relativ egal.

Tatsächlich ist üblicherweise zu jedem Modell nur ein Vorführgerät (also: ein Vertreter der Äquivalenzklasse) ausgestellt, denn die Unterschiede, die die Laptops desselben Modells aufweisen, sind für den Käufer irrelevant.

Diese Idee findet Ausdruck in der nächsten Definition.

2. Die Faktormenge modulo einer Äquivalenzrelation

§5.3.10 **Definition** *(Faktormenge)*. Seien X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ heißt die **Faktormenge** X **modulo** $\sim$ und wird mit $X/_{\sim}$ notiert:

$$X/_{\sim} := \{[x] \mid x \in X\}$$

§5.3.11 **Beispiel**. In dem Laptop-Beispiel kann die Faktormenge $X/_{\sim}$ als Menge aller Laptop-Modelle aufgefasst werden. Sie ist für den Käufer sehr viel interessanter als die Menge X aller Laptops.

§5.3.12 **Beispiel**. Bezüglich der „_ wohnt zusammen mit _“-Relation besteht eine Äquivalenzklasse aus allen Mitgliedern einer Wohngemeinschaft. Die Faktormenge $X/_{\sim}$ kann dann als die Menge aller Haushalte in Deutschland verstanden werden.

§5.3.13 **Definition** *(Kanonische Projektion)*. Seien X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Die Abbildung

$$\pi : X \to X/_\sim\,, x \mapsto [x]\,,$$

die jedem Element von X seine Äquivalenzklasse zuordnet, heißt die **(kanonische) Projektion von X auf $X/_\sim$**.

§5.3.14 **Bemerkung**. Seien X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann ist die kanonische Projektion $\pi : X \to X/_\sim$ eine surjektive Abbildung.

§5.3.15 **Beweis**. Jedes Element von $X/_\sim$ ist von der Gestalt $[x]$ für irgendein $x \in X$. Und für dieses Element gilt dann $\pi(x) = [x]$, also ist x ein Urbild von $[x]$. ∎

§5.3.16 **Beispiel**. In dem Beispiel mit den Laptops ordnet π jedem Gerät sein Modell zu. In dem Beispiel der Wohnungen ordnet π jedem Menschen seinen Haushalt zu. Dass π surjektiv ist, spiegelt den intuitiven Fakt wieder, dass es zu jedem Modell mindesten ein Gerät dieses Modells gibt und an jedem Haushalt mindestens eine Person teilhat.

§5.3.17 **Bemerkung** *(Philosophie hinter der Faktormenge)*. Der Übergang von X zur Faktormenge $X/_\sim$ beinhaltet einen Abstraktionsprozess, der dazu dient, gewisse Details über die Elemente von X zu „vergessen“ und nur noch „modulo die Relation $\sim$ zu rechnen“. Im Laptop-Beispiel vergessen wir die individuellen Eigenschaften der einzelnen Laptops und „identifizieren“ solche Laptops, die demselben Modell angehören. Und im WG-Beispiel „identifizieren“ wir diejenigen Leute, die in derselben Wohnung leben.
Im Rahmen von $X/_\sim$ führt diese „Identifikation“ tatsächlich zu einer Gleichheit im streng mathematischen Sinn. Denn nach Satz §5.3.06 gilt für solche Individuen $x, y \in X$ mit $x \sim y$, dass $[x] = [y]$. Unter der kanonischen Projektion $x \mapsto [x]$ werden also „äquivalente“ Elemente künstlich *identisch* „gemacht“, sodass sie in $X/_\sim$ nicht mehr unterschieden werden.
Während die Elemente von $X/_\sim$ zwar ihrer formalen Definition nach gewisse Teilmengen von X sind, können sie ihrer „Philosophie“ nach oft wiederum als eigenständige Objekte aufgefasst werden oder als „Elemente von X, die aber weniger streng unterschieden werden als die echten Elemente von X“.

§5.3.18 **Satz**. *Seien X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann gilt:*

a) Es ist $X = \bigcup_{x\in X}[x]$.

b) Für alle $x, y \in X$ mit $[x] \neq [y]$ gilt $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Mit anderen Worten: Die Menge X „zerfällt“ in paarweise disjunkte Äquivalenzklassen.

§5.3.19 **Beweis**. a): Wir müssen eine Gleichheit von Mengen beweisen:
„$\subseteq$“: Sei $a \in X$ ein beliebiges Element. Dann ist $a \in [a]$ und somit erst recht auch in $a \in \bigcup_{x\in X}[x]$.
„$\supseteq$“ Für jedes $x \in X$ ist $[x]$ eine Teilmenge von X. Also ist auch $\bigcup_{x\in X}[x]$ eine Teilmenge von X.

b) ergibt sich sofort aus der Äquivalenz (i)↔(iv) in Satz §5.3.06. ∎

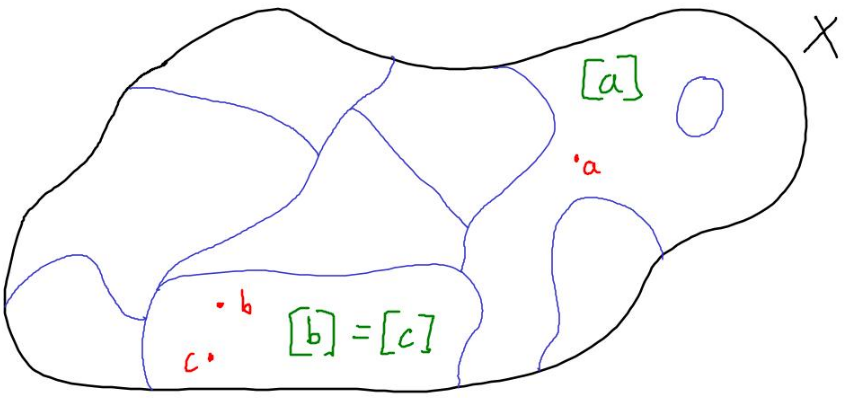


Abbildung 5.4: Die Menge X zerfällt in disjunkte Äquivalenzklassen.

§5.4 Aufgabenvorschläge

§5.4.01 **Aufgabe** *(Konkrete Relationen).* Untersuche die folgenden Relationen darauf, ob sie reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv sind. Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen, welche Halbordnungen, welche Totalordnungen? Sofern eine Äquivalenzrelation vorliegt, beschreibe die Äquivalenzklassen.

a) Es bezeichne S die Menge aller Städte auf der Erde. Betrachte darauf die Relation

$$A \sim B \quad :\Leftrightarrow \quad A \text{ und } B \text{ sind höchstens 100km voneinander entfernt} \quad A, B \in S$$

b) Auf der Menge $\mathbb{R}$ die Ungleichheitsrelation „$\neq$“.

c) Auf der Menge $\mathbb{R}$ die übliche „$<$“-Relation.

d) Es sei M die Menge aller Menschen. Betrachte darauf die Relation

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad a \text{ und } b \text{ haben (bzw. hatten) ein gemeinsames Kind} \qquad a, b \in M$$

e) Auf der Menge $\mathbb{Z}$ die Teilbarkeitsrelation

$$m \mid n \quad :\Leftrightarrow \quad \exists c \in \mathbb{Z} : \ c \cdot m = n \qquad\qquad m, n \in \mathbb{Z}$$

§5.4.02 **Aufgabe** *(Abstrakte Relationen).* Untersuche die folgenden Relationen darauf, ob sie reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch oder transitiv sind. Welche Relationen sind Äquivalenzrelationen, welche Halbordnungen, welche Totalordnungen? Sofern eine Äquivalenzrelation vorliegt, beschreibe die Äquivalenzklassen.

a) Auf einer beliebigen Menge X die Gleichheitsrelation „$=$“.

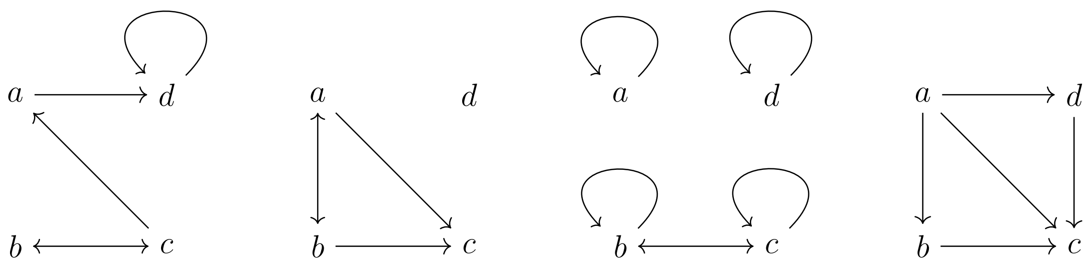
b) Für zwei Mengen X, Y und eine beliebige Abbildung $f : X \to Y$ die Relation

$$a \sim b \quad :\Leftrightarrow \quad f(a) = f(b) \qquad\qquad a, b \in X$$

c) Auf einer beliebigen Menge X die „Allrelation“, bezüglich der für alle $x, y \in X$ gilt, dass $x \sim y$. Verkörpert wird diese Relation durch die Teilmenge $X \times X \subseteq X \times X$.

d) Auf einer beliebigen Menge X die „leere Relation“, bezüglich der gar keine Elemente von X zueinander in Beziehung stehen und die durch die Teilmenge $\emptyset \subseteq X \times X$ verkörpert wird.

§5.4.03 **Aufgabe** *(Graphen).* Bestimme, ob die Relationen, die durch die folgenden Graphen repräsentiert werden, reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch und/oder transitiv sind. Liegt sogar eine Äquivalenzrelation oder eine Ordnungsrelation vor?



§5.4.04 **Aufgabe** *(Äquivalenzklassen).* Betrachte die beiden Abbildungen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ (x, y) \mapsto x + y$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ (x, y) \mapsto x^2 + y^2$$

Nach Aufgabe §5.4.02b) sind durch

$$p \sim_f q \quad :\Leftrightarrow \quad f(p) = f(q) \qquad p, q \in \mathbb{R}^2$$
$$p \sim_g q \quad :\Leftrightarrow \quad g(p) = g(q) \qquad p, q \in \mathbb{R}^2$$

zwei Äquivalenzrelationen $\sim_f$, $\sim_g$ auf $\mathbb{R}^2$ gegeben. Visualisiere die Äquivalenzklassen jeweils durch eine Zeichnung.

§5.4.05 **Aufgabe** *(Laptops).* Zeige, dass auf der Menge X aller Laptops die Relation „_ ist das gleiche Modell wie _ “eine Äquivalenzrelation ist. Verdeutliche Dir anhand des Beispiels noch einmal den Unterschied zwischen X und $X/_\sim$.

Kapitel 6

Folgen, Abstand und Grenzwerte

In diesem Vortrag werden einige Eigenschaften und Beispiele für Folgen vorgestellt. In Form von Abstand und Folgenkonvergenz werden grundlegende Begriffe der Analysis thematisiert.

§6.0.01 **Bemerkung** *(das Zeichen „$\mathbb{N}$“).* In diesem Kapitel wird die Menge der natürlichen Zahlen, sofern die Null eingeschlossen ist, mit „$\mathbb{N}_0$“ bezeichnet, sofern die Null ausgeschlossen ist mit „$\mathbb{N}_{\geqslant 1}$“. In Situationen, in denen es keine Rolle spielt, ob die Null nun dabei ist oder nicht, schreiben wir einfach nur „$\mathbb{N}$“.

§6.1 Zahlenfolgen

§6.1.01 **Definition** *(Folge).* Eine **Folge** ist eine Familie von Objekten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deren Indexmenge die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist. Ist $n \in \mathbb{Z}$ eine beliebige ganze Zahl, so spricht man auch bei Familien, deren Indexmenge $\mathbb{Z}_{\geqslant n}$ ist, von Folgen. In diesem Fall starten die Indizes nicht bei Eins oder Null, sondern bei n. Der Begriff der Folge ist also nicht klar umrissen, spricht man aber von „der beliebigen Folge (a_n)“ so ist damit gemeint, dass die Indexmenge gleich $\mathbb{N}$ (mit oder ohne Null) ist.
Sind A eine Menge und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, deren Einträge allesamt in A liegen, so spricht man von einer *Folge von Elementen aus* A oder einer „A-wertigen Folge“. Nach Definition §3.2.02 bezeichnet

$$A^{\mathbb{N}} := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in A\}$$

die Menge aller Folgen mit Einträgen aus A. Im Spezialfall $A = \mathbb{R}$ spricht man von **reellen Zahlenfolgen** oder auch **reellwertigen Folgen**. Analog spricht man von rationalen Zahlenfolgen, Folgen ganzer Zahlen oder Folgen komplexer Zahlen, falls es sich um Elemente von $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ oder $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ handelt.
Folgen lassen sich sowohl durch eine exakte Angabe definieren, etwa

$$(n^2)_{n\in\mathbb{N}_0}$$

als auch durch eine suggestive Aufzählung der ersten paar Folgenglieder, etwa

$$0, \quad 1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad \ldots$$

Die „Definition durch Auflistung“ ist allerdings nicht mathematisch präzise und sollte nur dann benutzt werden, wenn wirklich unmissverständlich klar ist, welche Folge gemeint ist. Würdest du etwa erahnen, dass mit

$$0, \quad 2, \quad 12, \quad 36, \quad 80, \quad 150, \quad 252, \quad 392, \quad \ldots$$

die Zahlenfolge $(n^2 \cdot (n+1))_{n\in\mathbb{N}_0}$ gemeint sein soll?

§6.1.02 **Bemerkung** *(Folge vs. Menge ihrer Einträge).* Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht mit der Menge ihrer Einträge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zu verwechseln.[1] Beispielsweise sind die beiden Zahlenfolgen

$$\begin{array}{cccccc} 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & \dots \\ 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & \dots \end{array}$$

voneinander verschieden, während die Mengen ihrer Einträge übereinstimmen und gleich der Menge $\{0,1\}$ sind.

§6.1.03 **Beispiel**. Beispiele für reelle Zahlenfolgen sind:

a) Die Folge der Primzahlen $2, 3, 5, 7, 11, \dots$. Also die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}}$ wobei für jedes $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ mit a_n die n-te Primzahl gemeint ist.

b) Die Folge der natürlichen Zahlen $(n)_{n\in\mathbb{N}_0}$: $0, 1, 2, 3, 4, \dots$.

c) Die Folge $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \dots$. Sie lässt sich definieren als diejenige Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}_0}$ mit den Einträgen

$$a_n := \begin{cases} -\frac{n}{2} & n \text{ ist eine gerade Zahl} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ ist eine ungerade Zahl} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

d) Die „alternierende Folge“ $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Also $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$.

e) Die Folge der Kehrwerte natürlicher Zahlen $(1/n)_{n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}}$. Das ist $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$. Beachte, dass bei dieser Folge die Indizes erst bei Eins losgehen.

f) Die Folge $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Also $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$.

g) Die „konstante Folge“ $(3)_{n\in\mathbb{N}}$. Also: $3, 3, 3, 3, 3, \dots$.

h) Für $q \in \mathbb{R}$ die Folge der q-Potenzen $(q^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Im Fall $q = 2$ erhielte man beispielsweise die Folge der Zweierpotenzen $1, 2, 4, 8, 16, \dots$.

In all diesen Beispielen gehorchen die Folgenglieder einer einfachen Regel. Dies muss aber nicht immer der Fall sein. Eine Folge darf auch völlig chaotisch sein und ihre Einträge brauchen keinem Muster zu gehorchen. Möglichst chaotische Folgen können mit einem Zufallsgenerator erzeugt werden.
Hier ist noch ein Beispiel für eine Folge, deren Einträge mal keine Zahlen sind:

- Die Folge $(\{1, \dots, n\})_{n\in\mathbb{N}_0}$, deren Einträge die „Anfangsstücke“ von $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ sind. Also

  $$\emptyset, \quad \{1\}, \quad \{1,2\}, \quad \{1,2,3\}, \quad \{1,2,3,4\} \quad , \dots$$

  Dies ist keine Zahlenfolge, sondern eine Folge von Mengen. Sie besitzt die Eigenschaft, dass für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ihr n-ter Eintrag eine Menge ist, die genau n-viele Elemente enthält.

[1] vgl. Bemerkung §3.2.12

§6.1.04 **Definition** *(Rechnen mit Folgen)*. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zwei reelle Zahlenfolgen. Dann heißt die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

die **Summe** von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}} := (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

heißt das **Produkt** der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Ist ferner $\lambda \in \mathbb{R}$, so ist

$$\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Da man Summe und Produkt zweier Zahlenfolgen dadurch erhält, dass man sie eintragsweise addiert bzw. multipliziert, spricht man auch von der *komponentenweisen* Addition bzw. Multiplikation.

§6.1.05 **Beispiel.** Sind

$$\begin{aligned} a_n &:= (-1)^n \\ b_n &:= \frac{n}{n+1} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} &= \left((-1)^n + \frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0} &&= 1, \frac{-1}{2}, \frac{5}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{9}{5}, \frac{-1}{6}, \frac{13}{7}, \ldots \\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} &= \left((-1)^n \cdot \frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0} &&= 0, \frac{-1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{-3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{-5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} 3 \cdot (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} &= \left(\frac{3n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}_0} &&= 0, \frac{3}{2}, \frac{6}{3}, \frac{9}{4}, \frac{12}{5}, \frac{15}{6}, \ldots \\ 0 \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} &= (0 \cdot (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}_0} &&= 0, 0, 0, 0, 0, \ldots \end{aligned}$$

§6.1.06 **Definition** *(Beschränktheit)*. Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ heißt **nach oben beschränkt** bzw. **nach unten beschränkt**, falls die Menge ihrer Einträge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine nach oben bzw. nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ im Sinne von Definition §5.2.04 ist. Konkret ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ also genau dann

- **nach oben beschränkt**, falls es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n \leqslant M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. In diesem Fall heißt ein solches M eine **obere Schranke** für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **nach unten beschränkt**, falls es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $a_n \geqslant M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. In diesem Fall heißt ein solches M eine **untere Schranke** für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **beschränkt**, falls sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.
- **unbeschränkt**, wenn sie nicht beschränkt ist.

§6.1.07 **Beispiel**. Es gilt:

- Die Folge $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach unten durch 0 und nach oben durch 1 beschränkt.
- Die Folge $2, 3, 5, 7, 11, \ldots$ der Primzahlen ist nach oben unbeschränkt. Dies ist die Aussage des berühmten *Satzes von Euklid*, siehe Beispiel §2.5.16.
- Die alternierende Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, da sie nach oben durch 1 und nach unten durch -1 beschränkt ist.

§6.1.08 **Bemerkung**. Da die Beschränktheit einer Folge allein von der Menge ihrer Einträge abhängt, ist sie unempfindlich gegenüber einer Änderung der Reihenfolge der Folgeneinträge. Da beispielsweise die Folge

$$0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{6}{7}, \quad \ldots$$

nach unten durch 0 und nach oben durch 1 beschränkt ist, gilt dasselbe auch für die Folge

$$\frac{1}{2}, \quad 0, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{5}{6}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{7}{8} \quad \ldots$$

die man durch eine Umordnung der Folgenglieder erhält.

§6.1.09 **Definition** *(Monotonie)*. Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ heißt

- **(monoton) wachsend**, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_{n+1} \geqslant a_n$.
- **(monoton) fallend**, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_{n+1} \leqslant a_n$.
- **monoton**, falls sie wachsend oder fallend ist.

Gilt sogar $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so sagt man auch, die Folge sei *strikt wachsend*. Ähnlich definiert man auch „strikt fallend“.

§6.1.10 **Beispiel**. Es gilt:

a) Die alternierende Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht monoton, da zum Beispiel $(-1)^3 < (-1)^4$ aber auch $(-1)^4 > (-1)^5$.

b) Die Folge $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist strikt wachsend.

§6.1.11 **Beweis**. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)}{(n+1)+1} - \frac{n}{n+1} &= \frac{(n+1)^2 - n\cdot(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \\
&> 0
\end{aligned}$$

sodass $\frac{(n+1)}{(n+1)+1} > \frac{n}{n+1}$ ist. ■

c) Für $q \in \mathbb{R}_{\geqslant 1}$ ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

§6.1.12 **Beweis.** Weil für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} q^{n+1} &= q \cdot q^n \\ &\geqslant 1 \cdot q^n && (\text{wegen } q \geqslant 1 \text{ und } q^n > 0) \\ &= q^n \quad \blacksquare \end{aligned}$$

d) Eine reelle Folge ist genau dann sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend, wenn sie konstant ist, d.h. wenn alle ihre Einträge identisch sind.

§6.1.13 **Beweis.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge, die gleichzeitig wachsend und fallend ist. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ muss dann

$$a_{n+1} \geqslant a_n \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} \leqslant a_n$$

also insgesamt $a_{n+1} = a_n$ gelten. Aus der Tranitivität der Gleichheitsrelation[2] ergibt sich, das $a_n = a_0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Also ist die Folge konstant. ■

e) Die Folge

$$0, \quad -1, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \dots$$

ist nicht monoton. Sie könnte aber zu einer strikt wachsenden Folge gemacht werden, ließe man die ersten zwei Folgenglieder weg.

§6.2 Abstand

§6.2.01 **Definition** *(Betrag und Abstand).* Für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist ihr **Betrag** definiert durch

$$|a| = \begin{cases} a & a \geqslant 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

Beispielsweise ist

$$|3| = 3 \qquad |-7| = 7 \qquad |0| = 0$$

Sind $x, y \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen, so ist ihr **Abstand** definiert als

$$d(x,y) := |x - y|$$

Beispielsweise ist

$$d(5,2) = 3 \qquad d(-2,5) = 7 \qquad d(3,3) = 0$$

In der Literatur wird meistens der Buchstabe „d“ benutzt (für englisch “distance”).

[2] vgl. Bemerkung §5.1.08

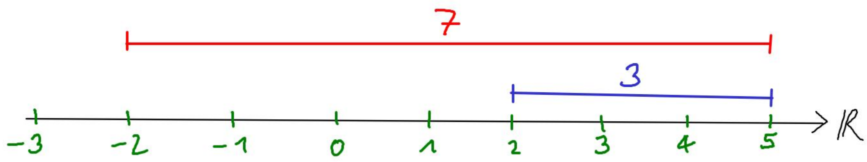


Abbildung 6.1: Abstände auf der reellen Gerade

§6.2.02 **Bemerkung**. Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x| = |x - 0| = d(x, 0)$$

d.h. der Betrag einer Zahl ist genau ihr Abstand zur Null.

§6.2.03 **Bemerkung** *(Allgemeine Abstände)*. In der Ebene $\mathbb{R}^2$, im Raum $\mathbb{R}^3$ und allgemein im Hyperraum $\mathbb{R}^n$ (für ein $n \in \mathbb{N}$) ist der Abstand zweier Punkte definiert als die Länge ihrer Verbindungsstrecke. Dies wird in den Analysis-Vorlesungen rigoros definiert werden, wir werden es hier aber ab und zu schon in einem informellen Sinn ausnutzen, um nette Beispiele und Illustrationen beisteuern zu können. Alle präzisen Aussagen und Beweise in diesem Text handeln aber lediglich von reellen Zahlen.

§6.2.04 **Definition** *(Intervalle in $\mathbb{R}$)*. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leqslant b$. Dann heißen

- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ das **offene Intervall** mit den Randpunkten a und b.
- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ das **abgeschlossene Intervall** mit den Randpunkten a und b.
- Die Mengen $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ und $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$ heißen **halboffene Intervalle** mit Randpunkten a, und b.

§6.2.05 **Bemerkung**. Das offene Intervall (a, b) besteht also aus genau denjenigen Elementen, die zwischen a und b liegen. Es ist nicht zu verwechseln mit dem Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Da sowohl für das Paar $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ als auch für das offene Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ dieselbe Notation verwendet wird, musst du beim Lesen mathematischer Texte aus dem Kontext erraten, von welchem Objekt gerade die Rede ist.

Das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ unterscheidet sich vom offenen Intervall (a, b) lediglich dadurch, dass in $[a, b]$ auch noch die beiden „Randpunkte“ a und b enthalten sind, während sie bei (a, b) fehlen.

§6.2.06 **Definition** *(offene Bälle)*. Für $x \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ist der **offene Ball** um x mit Radius r definiert durch

$$\mathbb{B}_r(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid d(x, y) < r\}$$

$\mathbb{B}_r(x)$ besteht also genau aus denjenigen Elementen, deren Abstand zu x kleiner als r ist.

§6.2.07 **Beispiel**. Für $x = 4$ und $r = \frac{3}{2}$ ist

$$\mathbb{B}_{3/2}(4) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid |4 - y| < \frac{3}{2} \right\} = \{y \in \mathbb{R} \mid 5/2 < y < 11/2\} = (5/2, 11/2)$$

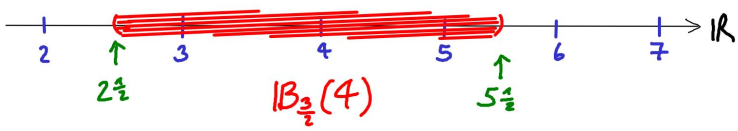


Abbildung 6.2: Der offene Ball $\mathbb{B}_{3/2}(4)$

Dies sind genau die Punkte in $\mathbb{R}$, deren Abstand zur 4 kleiner als $3/2$ ist. Allgemein gilt für reelle Zahlen $x \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$:

$$\mathbb{B}_r(x) = (x - r, x + r)$$

§6.2.08 **Bemerkung** *(Entartete Fälle)*. Es gilt:

- Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a = b$, so ist $(a, b) = (a, a) = \emptyset$, da es kein Element gibt, das sowohl strikt kleiner als auch strikt größer als a wäre. Ebenso wären $[a, a) = (a, a] = \emptyset$, wohingegen $[a, a] = \{a\}$.

- Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist $\mathbb{B}_0(x) = \emptyset$, da es kein Element gibt, dessen Abstand zu x noch kleiner als Null wäre.

§6.2.09 **Bemerkung** *(zum Wort „Ball“)*. Zugegeben ergibt die Bezeichnung „offener Ball“ auf der (eindimensionalen) Zahlengerade nicht so viel Sinn, da es sich dabei um Intervalle handelt. Sobald man aber in der Ebene $\mathbb{R}^2$ oder im Raum $\mathbb{R}^3$ unterwegs ist, sehen die „Bälle“ auch wirklich aus wie Bälle:

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist zum Beispiel der offene Ball $\mathbb{B}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben durch:

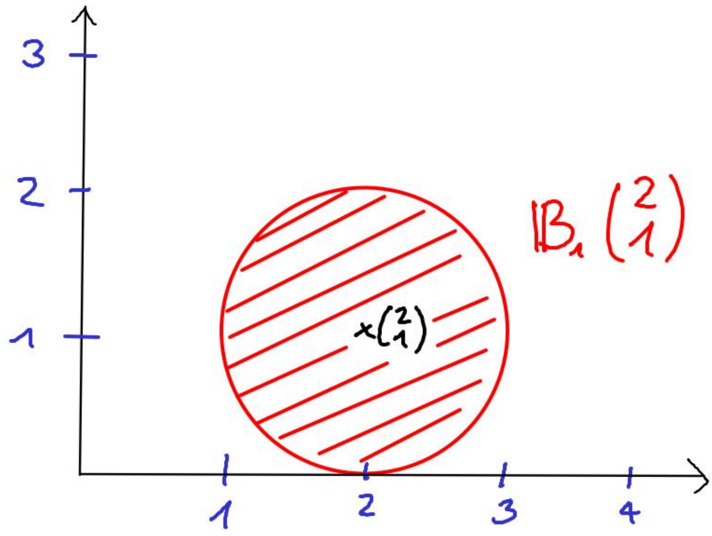


Abbildung 6.3: Menge aller Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$, deren Abstand zum Punkt mit den Koordinaten $(2,1)$ kleiner als 1 ist.

Im Raum $\mathbb{R}^3$ ist beispielsweise der offene Ball $\mathbb{B}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben durch:

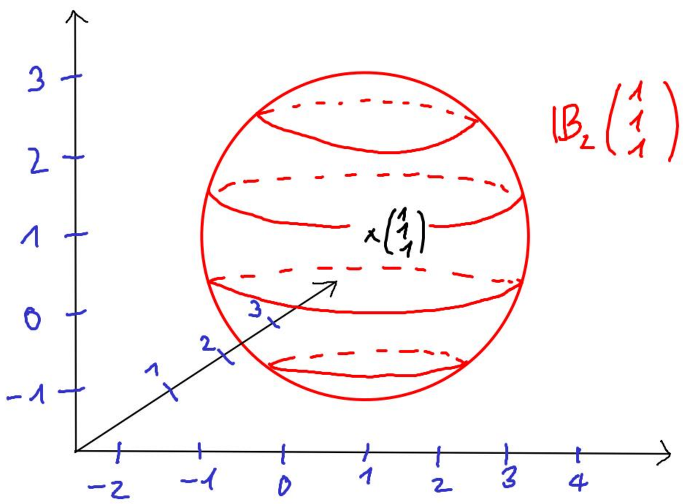


Abbildung 6.4: Menge aller Punkte im Raum $\mathbb{R}^3$, deren Abstand zum Punkt mit den Koordinaten $(1,1,1)$ kleiner als 2 ist.

Beachte aber, dass diese offenen Bälle keinen „Rand“ haben. Denn $\mathbb{B}_r(x)$ besteht ja nur aus den Elementen, deren Abstand zu x strikt kleiner als r ist. Diejenigen Elemente, deren Abstand zu x genau gleich r ist (im Zweidimensionalen also genau die Punkte auf dem Kreisrand, im Dreidimensionalen die Punkte auf der Kugeloberfläche), sind nicht in $\mathbb{B}_r(x)$ enthalten.

§6.3 Konvergenz

§6.3.01 **Bemerkung** *(Motivation).* Betrachten wir einmal eine Folge von Punkten in der Ebene, sie sich spiralenförmig dem Ursprung annähert:

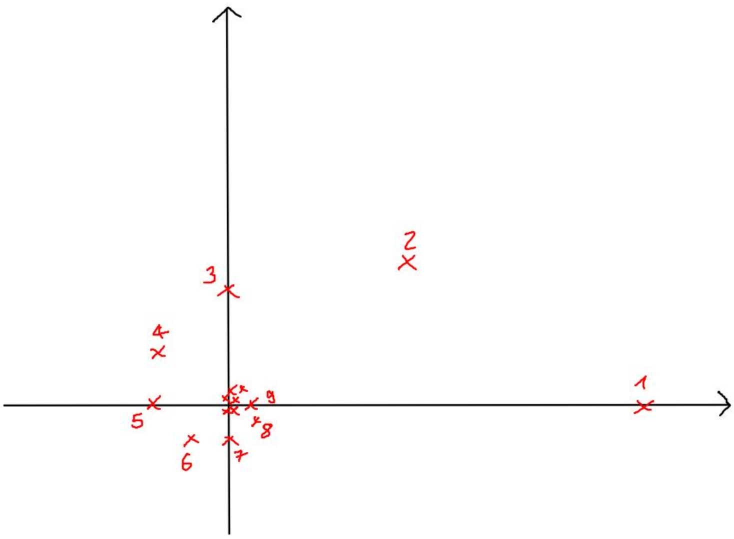


Abbildung 6.5: Eine konvergente Folge von Punkten in der Ebene

Konkret könnte man

$$a_n := \frac{1}{n} \cdot \begin{pmatrix} \cos(n \cdot \pi/4) \\ \sin(n \cdot \pi/4) \end{pmatrix} \qquad n \in \mathbb{N}$$

definieren, aber das soll gerade keine Rolle spielen.
Man sieht, dass die Folgenglieder dem Koordinatenursprung immer näher kommen, sich ihm geradezu „anschmiegen".

Dass eine Folge gegen einen Grenzwert konvergiert, heißt grob gesagt, dass sie diesem Grenzwert „irgendwann beliebig nahe kommt". Die übliche mathematische Formalisierung dieser Vorstellung geht folgendermaßen:

§6.3.02 **Definition** *(Konvergenz).* Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Man sagt, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **konvergiert** gegen a, falls es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass ab dem N-ten Folgenglied alle Folgenglieder in $\mathbb{B}_\varepsilon(a)$ liegen. Als Quantorenformel:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N}_{\geqslant N} : \; a_n \in \mathbb{B}_\varepsilon(a)$$

In diesem Fall heißt a ein **Grenzwert** der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man schreibt

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = a \qquad \text{oder} \qquad a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

Eine Folge, die keinen Grenzwert besitzt, heißt **divergent**.

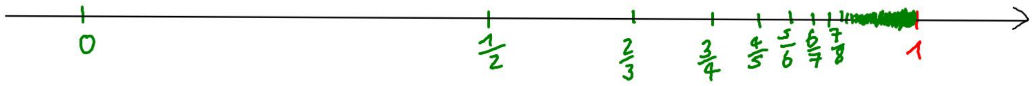
§6.3.03 **Bemerkung** *(„Sei $\varepsilon > 0$“).* Diese Grenzwertdefinition ist vergleichsweise jung: sie stammt aus dem 19. Jahrhundert und wurde durch Cauchy[3] und Weierstraß[4] populär. Bis dahin herrschte in der Mathematik ein eher „intuitiver“ Umgang mit Grenzwerten vor.

Seit dem Aufkommen der modernen Analysis hat es sich eingebürgert, in Definitionen und Beweisen jene Abstände, die „beliebig klein“ werden sollen, mit einem „ε“ zu notieren. Aus diesem Grund spricht man bei Definitionen und Beweisen der Analysis, die viel Gebrauch von ε’s machen, von „Epsilontik“.

§6.3.04 **Beispiel**. Die durch

$$a_n := \frac{n}{n+1} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}$$

definierte reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1.



§6.3.05 **Bemerkung**. Bevor wir versuchen, für diese Aussage einen Bilderbuchbeweis hinzuschreiben, wollen wir „auf dem Skizzenblatt“ erstmal ein paar Überlegungen anstellen:
Wir müssen für ein beliebiges $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $N \in \mathbb{N}$ finden, sodass für alle $m \in \mathbb{N}_{\geqslant N}$ gilt:

$$\varepsilon > d(1, \frac{m}{m+1})$$

Mit ein paar Umformungen ergibt sich:

$$\begin{aligned} d(1, \frac{m}{m+1}) &= \left|1 - \frac{m}{m+1}\right| \\ &= \left|\frac{m+1}{m+1} - \frac{m}{m+1}\right| \\ &= \left|\frac{1}{m+1}\right| \\ &= \frac{1}{m+1} \qquad\qquad \text{(da } m \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Die Ungleichung $\varepsilon > d(1, m/(m+1))$ lässt sich daher umformen zu

$$m > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

Wählen wir also für N die nächstgrößere natürliche Zahl oberhalb von $1/\varepsilon$, indem wir $1/\varepsilon$ aufrunden (man könnte für N auch jede weitere Zahl, die größer als $(1/\varepsilon - 1)$ ist, verwenden). Dann sind sowohl N als auch alle $m \in \mathbb{N}_{>N}$ größer als $1/\varepsilon - 1$, sodass die Ungleichung aufgeht.

[3] Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857)
[4] Karl Weierstraß (1815 - 1897)

Damit haben wir die Aufgabe auf dem Schmierblatt gelöst. Im finalen Beweis lassen wir die Überlegungen, die uns zur Wahl von N geführt haben, weg. Dies tritt häufig in Analysis-Beweisen auf: die Beweise unterdrücken den Gedankenprozess, der zu ihrem Auffinden geführt hat und verlaufen genau in die entgegengesetzte Richtung:

§6.3.06 **Beweis.** Es sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Sei $N \in \mathbb{N}$ die kleinste natürliche Zahl, die größer als $1/\varepsilon$ ist. Für alle $m \in \mathbb{N}_{\geqslant N}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} d(1, a_m) &= \left|1 - \frac{m}{m+1}\right| \\ &= \left|\frac{1}{m+1}\right| \\ &= \frac{1}{m+1} \\ &< \frac{1}{m} \\ &\leqslant \frac{1}{N} && (\text{da } m \geqslant N) \\ &< \frac{1}{1/\varepsilon} && (\text{da } N > 1/\varepsilon) \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Somit liegen ab dem N-ten Folgenglied alle Folgenglieder in $\mathbb{B}_\varepsilon(1)$. Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig gewählt war, ist damit bewiesen, dass die a_n's gegen 1 konvergieren. ■

§6.3.07 **Bemerkung.** Beachte, dass die Tatsache, ob eine Folge konvergiert oder divergiert, eine reine Eigenschaft des „Langzeitverhaltens“ dieser Folge ist. Die ersten paar Millionen Folgenglieder haben für sich allein keinen Einfluss auf das Konvergenzverhalten, weil die Folge ja ab dem dreimillionsten Eintrag plötzlich eine ganz andere Richtung einschlagen könnte. (Die Folgen, mit denen man es in der Praxis zu tun hat, unterliegen aber meist einem einfachen Muster, das spätestens nach ein paar Dutzend Folgengliedern ersichtlich sein sollte)

§6.3.08 **Beispiel.** Die Folge der Quadratzahlen $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt keinen Grenzwert.

§6.3.09 **Beweis.** Für einen Widerspruchsbeweis sei angenommen, es gebe einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Dann gäbe es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqslant N}$ gälte, dass $n^2 \in \mathbb{B}_1(a)$. Wähle ein $k \in \mathbb{N}$, für das sowohl $k > N$ als auch $k^2 > a + 1$ gilt. Dann wäre $k^2 \in \mathbb{B}_1(a)$ und wegen $\mathbb{B}_1(a) = (a-1, a+1)$ folgte der Widerspruch $a + 1 < k^2 < a + 1$. ■

§6.3.10 **Beispiel** *(Konstante Folgen konvergieren)*. Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann konvergiert die konstante Folge $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x.

$$x, x, x, x, \ldots \qquad \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

§6.3.11 **Beweis.** Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $|a_n - x| = x - x = 0 < \varepsilon$. ■

§6.4 Einige Konvergenzgesetze

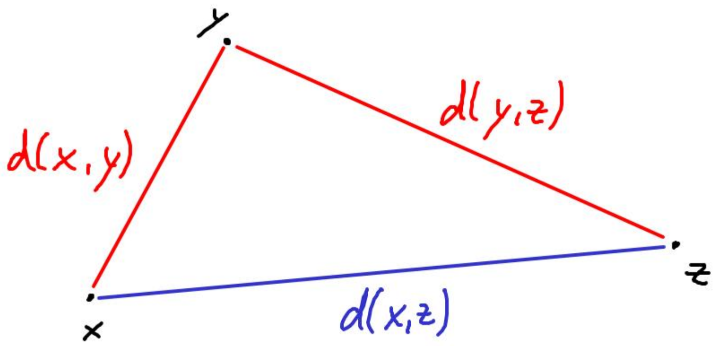
§6.4.01 **Satz** *(Eigenschaften der Abstandsfunktion). Für alle reellen Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$d(x,y) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = y \qquad (\textit{Definitheit})$$
$$d(x,y) = d(y,x) \qquad (\textit{Symmetrie})$$
$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z) \qquad (\textit{Dreiecksungleichung})$$

§6.4.02 **Beweis.** Wir werden diese Eigenschaften hier ohne Beweis verwenden. Einen Beweis kannst du z.B. in Satz I.11.4 im Analysis-Lehrbuch Amann [2006] (das du über den Link im Literaturverzeichnis kostenlos aus dem Uni-Netz herunterladen kannst) nachschlagen. Du kannst aber auch abwarten, bis diese Eigenschaften in der Ana1-Vorlesung thematisiert werden.

§6.4.03 **Bemerkung** *(Metrische Räume).* Die obigen drei Aussagen können auch an und für sich untersucht werden: Ist X eine beliebige Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ eine Abbildung, die diese drei Aussagen erfüllt, so nennt man d eine „Metrik“ und das Paar (X, d) einen „metrischen Raum“. Ein erheblicher Teil der Analysis reeller Zahlen verallgemeinert sich auf beliebige metrische Räume, was meist in der Zweitsemestervorlesung „Analysis 2“ thematisiert wird.

§6.4.04 **Bemerkung** *(zur Dreiecksungleichung).* Der Name „Dreiecksungleichung“ ergibt, sofern man nur Abstände reeller Zahlen untersucht, nicht so viel Sinn. Vielmehr kommt er aus der ebenen bzw. räumlichen Geometrie. Sind $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ drei Punkte in der Ebene, die ein Dreieck bilden, so besagt die Dreiecksungleichung, dass „der direkte Weg von x nach z nicht länger als der Umweg über y sein kann“:



§6.4.05 **Satz** *(Eindeutigkeit des Grenzwerts). Sofern eine Folge reeller Zahlen konvergiert, ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.*

§6.4.06 **Beweis.** Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge, $a, b \in \mathbb{R}$ und es gelte sowohl $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ als auch $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$. Ferner sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.
Weil die a_n’s gegen a konvergieren, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m \in \mathbb{N}_{\geqslant N}$ gilt, dass $a_m \in \mathbb{B}_{\varepsilon/2}(a)$. Und weil die a_n’s auch gegen b konvergieren, gibt es ebenso ein $M \in \mathbb{N}$, sodass für alle $m \in \mathbb{N}_{\geqslant M}$ gilt, dass $a_m \in \mathbb{B}_{\varepsilon/2}(b)$.
Sei nun $k \in \mathbb{N}$ eine Zahl, die sowohl größer als N als auch größer als M ist. Dann gilt

$$a_k \in \mathbb{B}_{\varepsilon/2}(a) \qquad \text{und} \qquad a_k \in \mathbb{B}_{\varepsilon/2}(b)$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$d(a,b) \leqslant d(a,a_k) + d(a_k,b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Da die Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig gewählt war, ergibt sich, dass der Abstand $d(a,b)$ kleiner als jede beliebige positive reelle Zahl sein muss. Damit bleibt nur noch $d(a,b) = 0$ übrig, woraus aufgrund der Definitheit der Abstandsfunktion folgt, dass $a = b$. ■

§6.4.07 **Bemerkung** *(Der Grenzwert einer Folge).* Dieser Satz berechtigt uns, bei einer konvergenten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ anstelle von „einem Grenzwert“ von *dem* Grenzwert dieser Folge zu sprechen. Ist $a \in \mathbb{R}$ der Grenzwert der a_n's, so suggeriert die Notation

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

ja auch schon, dass „$\lim_{n\to\infty} a_n$“ ein wohlbestimmtes Objekt ist, das eben gleich a oder ungleich a sein kann.

§6.4.08 **Satz** *(Rechenregeln für Folgengrenzwerte). Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $a = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} b_n$. Dann gilt:*

a) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (a_n + b_n) = a + b$

b) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot a$ *für* $\lambda \in \mathbb{R}$

c) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

§6.4.09 **Beweis**. Wir werden hier nur die Gleichung für die Addition beweisen. Die Punkte b) und c) werden in der Ana1-Vorlesung bewiesen werden[5].

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ eine beliebige positive reelle Zahl. Weil die a_n's gegen a konvergieren, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $a_n \in \mathbb{B}_{\varepsilon/2}(a)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqslant N}$ gilt. Und weil die b_n's gegen b konvergieren, existiert ein $M \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \in \mathbb{B}_{\varepsilon/2}(b)$ für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqslant M}$ gilt. Setze $K := \max\{N, M\}$ auf die größere der beiden Zahlen M, N. Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geqslant K}$ ist dann $a_n \in \mathbb{B}_{\varepsilon/2}(a) \cap \mathbb{B}_{\varepsilon/2}(b)$, sodass

$$\begin{aligned}
|(a_n + b_n) - (a+b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\
&\leqslant |a_n - a| + |b_n - b| && \text{(ohne Beweis)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} && (\text{da } a_n \in \mathbb{B}_{\varepsilon/2}(a) \cap \mathbb{B}_{\varepsilon/2}(b)) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Da $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ beliebig gewählt war, folgt, dass die Folge $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a+b$ konvergiert. ■

§6.4.10 **Bemerkung** *(Komplizierte Objekte in einfache Bausteine zerlegen).* Sätze wie dieser sind von herausragender Bedeutung für die Analysis. Sofern man einen kleinen Vorrat an Folgen, für die man ihre Konvergenz bewiesen hat, aufgebaut hat, erlauben sie es, Grenzwerte für die kompliziertesten Folgen auszurechnen, ohne dass man für einen Beweis nochmal die ε's auskramen müsste.

[5] und lassen sich etwa in Satz II.2.2 und Satz II.2.4 im hervorragenden Lehrbuch Amann [2006] nachschlagen.

Beispielsweise würde kein routinierter Mathematiker einen ε-Beweis dafür führen, dass die Folge

$$\left(1+\frac{3n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen 4 konvergiert. Sondern er würde schlicht bemerken, dass sich diese Folge als Linearkombination

$$(1)_{n\in\mathbb{N}}+3\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

zusammensetzt und dann auf die Rechenregeln für $\lim_{n\to\infty}(-)$ verweisen. Denn es ist

$$4=1+3\cdot 1=\left(\lim_{n\to\infty}1\right)+3\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3n}{n+1}\right)$$

Diese Denkweise kennst du auch aus der Schule: Um beispielsweise die Ableitung der Funktion

$$f(x)=(x^2+3x)\cdot e^x \qquad x\in\mathbb{R}$$

zu berechnen, würdest du ausnutzen, dass sich diese Funktion aus den Bestandteilen

$$\begin{aligned} g(x)&=x^2\\ h(x)&=3x\\ q(x)&=e^x \qquad x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

zusammensetzt via

$$f(x)=(g(x)+h(x))\cdot q(x) \qquad x\in\mathbb{R}$$

Mittels Summen- und Produktregel würdest du schlussfolgern

$$\begin{aligned} f'(x)&=(g'(x)+h'(x))\cdot q(x)+(g(x)+h(x))\cdot q'(x)\\ &=(2x+3)\cdot e^x+(x^2+3x)\cdot e^x\\ &=(x^2+5x+3)\cdot e^x \qquad x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Die „analytische“ Methode, komplexe Funktionen in einfache Bestandteile zu zerlegen, ist auch an der Uni überlebensnotwendig. Kein erfahrener Mathematiker würde, um die Ableitung von $(x^2+3x)\cdot e^x$ zu berechnen, unmittelbar mit der Definition der Ableitung arbeiten und versuchen, den Differenzialquotienten

$$f'(x):=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{((x+h)^2+3(x+h))\cdot e^{x+h}-(x^2+3x)\cdot e^x}{h} \qquad x\in\mathbb{R}$$

direkt auszurechnen.

Ein Ziel der Analysis-Vorlesung ist es, dich mit Werkzeugen auszustatten, die das Berechnen von Grenzwerten bequemer machen und Epsilontik vermeiden. Versuche in Analysis-Beweisen, die Objekte immer soweit es geht in einfachste Bausteine zu zerlegen und einen ε-Beweis erst wenn gar nichts anderes mehr geht als Ultima Ratio anzusetzen.

§6.5 Aufgabenvorschläge

§6.5.01 **Aufgabe** *(Konkrete Folgen).* Untersucht jede der folgenden Folgen darauf, ob sie (nach oben oder unten) beschränkt und/oder monoton ist.

a) Die Folge der Kehrwerte natürlicher Zahlen $(1/n)_{n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}}$. Das ist $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$.

b) Die Folge $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ der Quadratzahlen: $0, 1, 4, 9, 16, \ldots$.

c) Die Folge $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, \ldots$.

d)* Die Folge $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

§6.5.02 **Aufgabe** *(Teilmengen skizzieren).* Visualisiert die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ jeweils durch eine Zeichnung:

a) $$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [3k+1, 3k+2]$$

b) $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-n, \frac{n}{n+1}\right]$$

c) $$\bigcap_{n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}} \mathbb{B}_{1/n}(7)$$

d)* $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}} \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n}\right]\right)$$

§6.5.03 **Aufgabe** *(Intuition für $\mathbb{R}$).* Beurteile intuitiv, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Du brauchst in dieser Aufgabe keine wasserdichten Beweise formulieren und dir auch nicht hundertprozentig sicher sein; es geht hier um die Schärfung deiner Intuition für reelle Zahlen.

a) Sind $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $d(x, y) < 2$ und $d(y, z) < 3$, so ist $d(x, z) < 5$.

b) Sind $x, y, z \in \mathbb{R}$ mit $d(x, y) > 2$ und $d(y, z) > 3$, so ist $d(x, z) > 5$.

c) Jede monoton wachsende Folge reeller Zahlen konvergiert.

d) Jede beschränkte, monoton wachsende Folge reeller Zahlen konvergiert.

e) Jede konvergente Folge reeller Zahlen ist beschränkt.

f) Jede beschränkte Folge reeller Zahlen konvergiert.

g) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine konvergente Zahlenfolge und ist $a_n \leqslant 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\lim_{n\to\infty} a_n \leqslant 4$.

h) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine konvergente Zahlenfolge und ist $a_n < 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\lim_{n\to\infty} a_n < 4$.

§6.5.04 **Aufgabe** *(Konvergenzbeweis).* Zeigt mithilfe eines ε-Beweises, dass die Folge $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.

Kapitel 7

Verknüpfungen

Der Begriff der Verknüpfung verallgemeinert die aus der Schule bekannten Rechenoperationen. In diesem Vortrag werden grundlegende Eigenschaften von Verknüpfungen untersucht und ein paar Konsequenzen daraus abgeleitet.

§7.1 Verknüpfungen

In den Kapiteln 3 und 4 haben wir als zentrale mathematische Objekte Mengen und die Abbildungen zwischen ihnen eingeführt. Von sich aus tragen Mengen relativ wenig Information: nämlich nur, welche Elemente in ihnen enthalten sind und welche nicht. Als einen Weg, einer Menge mehr Struktur zu verleihen, wurden in Kapitel 5 Relationen thematisiert, die je zwei Elemente einer Menge in eine „Beziehung" setzen können, wodurch die bereits aus der Schule bekannten Relationen $\leqslant$ und $=$ verallgemeinert wurden.

In diesem Kapitel möchten wir einen weiteren Weg, mehr Struktur in eine Menge zu bringen, vorstellen, der die bekannten Rechenoperationen wie „$+$" und „$\cdot$" verallgemeinert.

Was soll eine Verknüpfung tun? Als Input möchten wir ihr zwei Elemente x, y unserer Menge geben, und als Output erwarten wir ein neues Element z, eben die Verknüpfung der Elemente x und y; so wie auch die Addition „$+$" aus zwei Zahlen x, y die Zahl $z = x + y$ macht. Formal wird dies in einer Abbildung realisiert, die zwei Elemente aufnimmt und ein neues ausgibt:

§7.1.01 **Definition.** Sei X eine beliebige Menge. Eine (zweistellige) **Verknüpfung** auf X ist eine Abbildung

$$X \times X \to X$$

Eine zweistellige Verknüpung wird in der Regel mit einem „Verknüpfungszeichen" notiert. Das heißt: ist der Name der Abbildung etwa „$*$", so schreibt man

$$x * y \qquad \text{anstelle von} \qquad *(x, y)$$

für den Funktionswert des Paares (x, y) unter der Abbildung „$*$".

§7.1.02 **Bemerkung** *(*).* Prinzipiell lassen sich auch dreistellige und höherstellige Verknüpfungen definieren. Allerdings sind so gut wie alle Verknüpfungen, die dir im Studium begegnen werden, zweistellig. Falls wir daher von „Verknüpfungen" schreiben, sollen damit stets zweistellige Verknüpfungen gemeint sein.

§7.1.03 **Beispiel** *(Grundrechenarten).* Es gilt:

a) Auf $\mathbb{R}$ ist durch die Addition $(x, y) \mapsto x + y$ eine zweistellige Verknüpfung gegeben. Da die Summe zweier rationaler Zahlen ebenfalls rational ist, liefert „$+$" auch eine Verknüpfung auf der Menge $\mathbb{Q}$. Ebenso ist auch auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ durch die Addition „+“ jeweils eine Verknüpfung gegeben.

b) Auf den Mengen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist durch die Subtraktion $(x, y) \mapsto x - y$ jeweils eine zweistellige Verknüpfung gegeben. Allerdings ergibt der Ausdruck

$$„\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}\,,\ (x, y) \mapsto x - y“$$

keinen Sinn, da etwa „$2-3$“ gar kein Element von $\mathbb{N}$ ist. Auf $\mathbb{N}$ ist die Subtraktion also **keine** zweistellige Verknüpfung. Zwar kann man für gewisse Zahlenpaare durchaus Differenzen in $\mathbb{N}$ bilden (z.B. „$3 - 2$“); dass „$-$“ eine Verknüpfung auf $\mathbb{N}$ wäre, scheitert aber daran, dass man eben nicht für *jedes* Paar natürlicher Zahlen eine Differenz in $\mathbb{N}$ bilden kann.

c) Auf den Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist durch die Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$ jeweils eine zweistellige Verknüpfung gegeben.

d) Auf den Mengen $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist durch die Division $(x, y) \mapsto x : y$ jeweils eine zweistellige Verknüpfung gegeben. Beachte, dass die Null ausgelassen werden muss, weil bspw. nicht „$1 : 0$“ gebildet werden kann. Zwar könnte man $1 : 0 = \infty$ setzen, aber „∞“ wäre ja kein Element von $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, sodass man dadurch dennoch keine Verknüpfung auf $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ erhielte.

§7.1.04 **Beispiel** *(Rechenoperationen auf Folgen).* Auf der Menge $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellen Zahlenfolgen gibt es die folgenden Verknüpfungen, die bereits in Definition §6.1.04 eingeführt wurden:

a) Die Addition reeller Zahlenfolgen:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,,\ ((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

b) Die Multiplikation reeller Zahlenfolgen:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,,\ ((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \mapsto (a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

c) Ebenso kann man auch eine Subtraktion reeller Folgen definieren und, sofern man sich auf solche Folgen, in denen nirgends die Null als Eintrag auftritt, beschränkte, sogar eine Division.

Dies lässt sich weitreichend verallgemeinern. Wann immer auf einer Menge X irgendeine Verknüpfung gegeben ist, erhält man durch „komponentenweises Verknüpfen“ eine Verknüpfung auf dem Folgenraum $X^{\mathbb{N}}$.

§7.1.05 **Beispiel** *(Verkettung von Abbildungen).* Sei M eine beliebige Menge. Dann ist auf der Menge $\mathrm{Abb}(M, M)$ der Selbstabbildungen von M eine Verknüpfung gegeben durch die Verkettung[1] von Abbildungen:

$$\mathrm{Abb}(M, M) \times \mathrm{Abb}(M, M) \to \mathrm{Abb}(M, M)\,,\ (f, g) \mapsto f \circ g$$

[1] siehe Definition §4.3.01

§7.1.06 **Bemerkung**. Beachte, dass in diesem Beispiel von Selbstabbildungen (also Abbildungen, deren Definitions- und Wertebereich übereinstimmen) die Rede ist. Sind allgemein A, B, C drei Mengen, so hat man zwar eine Abbildung

$$\text{Abb}(B,C) \times \text{Abb}(A,B) \to \text{Abb}(A,C)\ ,\ (f,g) \mapsto f \circ g$$

sofern A, B, C drei verschiedene Mengen sind, ist dies aber **keine** zweistellige Verknüpfung – denn auf welcher Menge sollte diese Verknüpfung „leben", wenn ja $\text{Abb}(B,C)$ und $\text{Abb}(A,B)$ zwei verschiedene Mengen sind?

Nichtsdestotrotz besitzt auch das allgemeine Verketten von Abbildungen eine interessante, häufig auftretende Struktur, die man „Kategorie" nennt. Mehr darüber wirst du spätestens in fortgeschrittenen Algebra-Vorlesungen kennenlernen.

§7.1.07 **Beispiel** *(Operationen mit Mengen)*. Sei M eine beliebige Menge. Dann gibt es unter Anderem die folgenden Verknüpfungen auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$:

$$\begin{aligned}
\cap &: \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)\ ,\ (A,B) \mapsto A \cap B \\
\cup &: \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)\ ,\ (A,B) \mapsto A \cup B \\
\setminus &: \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)\ ,\ (A,B) \mapsto A \setminus B
\end{aligned}$$

Denn der Durchschnitt / die Vereinigung / die Differenzmenge zweier Teilmengen von M ist ebenfalls eine Teilmenge von M.

§7.1.08 **Beispiel** *(* Kleineres und Größeres zweier Elemente)*. Sei X eine beliebige totalgeordete Menge (z.B. $X = \mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Ordnung). Indem man von je zwei Elementen das kleinere bzw. größere auswählt, erhält man zwei Verknüpfungen auf X:

$$\begin{aligned}
\min &: X \times X \to X\ ,\ (x,y) \mapsto \min\{x,y\} \\
\max &: X \times X \to X\ ,\ (x,y) \mapsto \max\{x,y\}
\end{aligned}$$

Eine Verallgemeinerung sowohl dieses Beispiels als auch des Beispiels mit „$\cap$" und „$\cup$" stellen sogenannte „Verbände" dar.

§7.1.09 **Bemerkung**. Alle bisher beschriebenen Verknüpfungen besaßen ein eigenes Verknüpfungssymbol und waren relativ übersichtlich aufzuschreiben. Allgemeine Verknüpfungen auf einer Menge X dürfen aber beliebig kompliziert sein. Es muss sich ja lediglich um *irgendeine* Abbildung $X \times X \to X$ handeln, die beliebig chaotisch sein darf und keinem Muster gehorchen muss. Neben Addition und Multiplikation gibt es auf $\mathbb{N}$ unendlich viele weitere Verknüpfungen, von denen die meisten wohl niemals von mathematischem Interesse sein werden.

§7.1.10 **Bemerkung** *(Verknüpfungssymbole)*. In diesem Text werden wir, wenn wir über eine „allgemeine zweistellige Verknüpfung" schreiben, die Verknüpfung mit einem „$*$" notieren. Die vorigen Beispiele zeigen, dass konkrete Verknüpfungen auch mit ganz anderen Zeichen wie etwa $+, -, \cdot, :, \cap, \cup$ usw. notiert werden. Andere Bücher und Vorlesungen verwenden auch andere Symbole wie etwa „$\odot$" oder „$\circ$", um über „die allgemeine Verknüpfung" zu reden. Oftmals schreiben Bücher auch gar kein Verknüpfungssymbol auf. Sind X eine Menge mit einer zweistelligen Verknüpfung und $a, b \in X$ zwei Elemente, so schreiben sie einfach „ab" für deren Verknüpfung, so wie du es aus der Schule auch schon von der Multiplikation zweier Zahlvariablen kennst.

§7.2 Assoziativ- und Kommutativgesetz

§7.2.01 **Definition.** Seien X eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf X. Die Verknüpfung $*$ heißt

- **assoziativ**, falls für alle $x, y, z \in X$ das sogenannte *Assoziativgesetz* gilt:

$$x * (y * z) = (x * y) * z$$

- **kommutativ**, falls für alle $x, y \in X$ das sogenannte *Kommutativgesetz* gilt:

$$x * y = y * x$$

§7.2.02 **Beispiel** *(Grundrechenarten)*. Es gilt:

a) Auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind die Addition $+$ und die Multiplikation $\cdot$ sowohl assoziativ als auch kommutativ. Denn für alle natürlichen/ganzen/rationalen/reellen/komplexen Zahlen x, y, z gilt bekanntlich

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= (x + y) + z \\ x + y &= y + x \\ x \cdot (y \cdot z) &= (x \cdot y) \cdot z \\ x \cdot y &= y \cdot x \end{aligned}$$

b) Die Subtraktion auf $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ist weder assoziativ noch kommutativ. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} 3 - (2 - 1) &\neq (3 - 2) - 1 \\ 3 - 2 &\neq 2 - 3 \end{aligned}$$

c) Die Division auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist weder assoziativ noch kommutativ. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned} 2 : (3 : 2) = 4 : 3 &\neq 1 : 3 = (2 : 3) : 2 \\ 2 : 3 &\neq 3 : 2 \end{aligned}$$

§7.2.03 **Beispiel** *(Verketten von Abbildungen)*. Sei M eine beliebige Menge. Dann ist die Verkettung von Abbildungen eine assoziative Verknüpfung auf $\mathrm{Abb}(M, M)$, die aber, sofern M mindestens zwei Elemente enthält, nicht kommutativ ist.

§7.2.04 **Beweis** (*). (Assoziativität) Dies wurde in Satz §4.3.06 bewiesen.

(Nicht-Kommutativität) Die Menge M enthalte mindestens zwei verschiedene Elemente $a, b \in M$. Betrachte die beiden konstanten Abbildungen

$$\begin{aligned} f_a &: M \to M \,, \; x \mapsto a \\ f_b &: M \to M \,, \; x \mapsto b \end{aligned}$$

d.h. f_a bildet jedes Element von M auf a ab und f_b bildet alles auf b ab. Dann gilt:

$$(f_a \circ f_b)(a) = f_a(f_b(a)) = f_a(b) = a \neq b = f_b(a) = f_b(f_a(a)) = (f_b \circ f_a)(a)$$

Also ist $f_a \circ f_b \neq f_b \circ f_a$, sodass die Verknüpfung „$\circ$“ nicht kommutativ ist. ■

§7.2.05 **Beispiel** *(Das Verketten von Abbildungen ist nicht kommutativ!).* Hier ist ein weiteres, weniger abstraktes Beispiel dafür, dass das Verketten von Abbildungen im Allgemeinen nicht kommutativ ist:
Betrachte die beiden Abbildungen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto 2 \cdot x$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ x \mapsto x^2$$

Dann gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$(g \circ f)(x) = (2 \cdot x)^2$$
$$(f \circ g)(x) = 2 \cdot x^2$$

und es ist beispielsweise

$$(g \circ f)(3) = 36 \neq 18 = (f \circ g)(3)$$

sodass $g \circ f \neq f \circ g$ ist. Es macht einen Unterschied, ob ich erst verdoppele und dann quadriere oder erst quadriere und dann verdopple.

§7.2.06 **Beispiel** *(Mengenverknüpfungen).* Ist M eine beliebige Menge, so sind die beiden Verknüpfungen $\cap$ und $\cup$ auf $\mathcal{P}(M)$ sowohl assoziativ als auch kommutativ. Die Operation $\setminus$ ist aber, sofern M nichtleer ist, weder assoziativ noch kommutativ.

§7.2.07 **Beweis.** Dies ist der Inhalt von Aufgabe §3.4.05.

§7.2.08 **Bemerkung** *(Die tiefere Bedeutung des Assoziativgesetzes).* Sei X eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $*$. Der tiefere Grund dafür, dass das Assoziativgesetz so eine wichtige Rolle in der Uni-Mathematik spielt, ist, dass man bei einer assoziativen Verknüpfung keine Klammern setzen braucht. Das Assoziativgesetz selbst

$$(x * y) * z = x * (y * z) \qquad x, y, z \in X$$

besagt schonmal, dass bei solchen Termen, die nur drei Elemente involvieren, jede Art von Klammernplatzierung auf dasselbe Ergebnis hinausläuft. Daher kann man auch einfach

$$x * y * z$$

schreiben. Mit fortgeschrittenen Techniken lässt sich beweisen, dass bei assoziativen Verknüpfungen sogar in Termen mit beliebig vielen Elementen jede Art von Klammerung auf dasselbe Ergebnis hinausläuft. Beispielsweise gilt für $a, b, c, d, e \in X$:

$$\begin{aligned}
(a * (b * c)) * (d * e) &= ((a * b) * c) * (d * e) && \text{(Assoziativgesetz für } a\text{, } b \text{ und } c\text{)}\\
&= (((a * b) * c) * d) * e && \text{(Assoziativgesetz für } (a * b) * c\text{, } d \text{ und } e\text{)}\\
&= ((a * b) * (c * d)) * e && \text{(Assoziativgesetz für } a * b\text{, } c \text{ und } d\text{)}\\
&= \text{ usw.}
\end{aligned}$$

Daher kann man bei assoziativen Verknüpfungen ganz allgemein überall die Klammern weglassen und in diesem Fall einfach

$$a * b * c * d * e$$

schreiben.
Aus der Schule bist du es ja auch gewohnt, einfach

$$1 + 3 + 2 + 4 \qquad \text{anstelle von} \qquad (1 + 3) + (2 + 4) \text{ oder } (1 + (3 + 2)) + 4$$

zu schreiben und daran ändert sich auch an der Uni nichts. Sind beispielsweise A, B, C, D vier Mengen, so schreibt man schlicht

$$A \cup B \cup C \cup D$$

für deren Vereinigung, was unproblematisch ist, da $\cup$ eine assoziative Verknüpfung ist. Sind $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$ drei Abbildungen, so schreibt man schlicht

$$h \circ g \circ f$$

für deren Verkettung, wobei man auch hier wegen der Assoziativität keine Klammern setzen muss.

Aber Achtung: Bei nicht-assoziativen Verknüpfungen kannst du in der Regel nicht auf Klammerung verzichten. Beispielsweise ergäbe der Ausdruck

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}_{>0}$$

keinen Sinn, solange du nicht klarstellst, ob

$$(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \setminus \mathbb{R}_{>0} \qquad \text{oder} \qquad \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}_{>0})$$

gemeint ist.

§7.2.09 **Beispiel** *(Rechnen mit Rundungsfehlern).* So gut wie alle Verknüpfungen in den ersten Semestern Mathematikstudium sind assoziativ. Ein für die Informatik wichtiges Beispiel für eine nicht-assoziative Verknüpfung ist die „fehlerbehaftete Multiplikation“. Da ein Computer eine Zahl nicht mit beliebig vielen Nachkommastellen speichern kann, muss er nach solchen Rechenschritten, die die Anzahl der Nachkommastellen übers Maximum erhöhen würde, die letzte verfügbare Nachkommastelle runden. Für ein vereinfachtes Beispiel betrachte die Menge

$$\frac{1}{10}\mathbb{Z} := \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \exists z \in \mathbb{Z} : \; x = \frac{z}{10} \right\}$$

all derjenigen rationalen Zahlen, die höchstens eine Nachkommastelle besitzen (im Dezimalsystem – Computer würden im Binärsystem rechnen und erheblich mehr Nachkommastellen einbeziehen). Auf dieser Menge ist folgendermaßen eine zweistellige Verknüpfung „$*$“ gegeben:

> Für $a, b \in \frac{1}{10}\mathbb{Z}$ bilde zuerst das gewöhnliche Produkt rationaler Zahlen $a \cdot b \in \mathbb{Q}$. Runde dieses Produkt nun auf die erste Nachkommastelle. Diese gerundete Zahl sei $a * b$.

Für diese Verknüpfung gilt beispielsweise:

$$1,5 * 0,5 = 0,8 \qquad 0,1 * 0,1 = 0 \qquad 2 * 3 = 6 \qquad 1,5 * (-0,3) = -0,5$$

Diese „ungenaue Multiplikation“ ist zwar kommutativ, aber nicht assoziativ, da beispielsweise:

$$(0,1 * 0,1) * 10 = 0 * 10 = 0 \neq 0,1 = 0,1 * 1 = 0,1 * (0,1 * 10)$$

§7.2.10 **Definition** *(Potenzen)*. Seien X eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $*$ und $a \in X$ irgendein Element. Für ein $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ nennt man das Element, das durch n-faches Verknüpfen von a mit sich selbst entsteht

$$a^n := \underbrace{a * \ldots * a}_{n\text{-mal}}$$

(beachte, dass hier aufgrund der Assoziativität keine Klammern gesetzt werden müssen) die **n-te Potenz von a**. Beispielsweise gilt:

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^2 &= a * a \\ a^3 &= a * a * a \\ a^{n+1} &= a^n * a && n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} \end{aligned}$$

§7.2.11 **Bemerkung**. Seien X eine Menge mit einer assoziativen Verknüpfung $*$ und $a, b \in X$ mit $a * b = b * a$. Für $n, m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ gelten die folgenden *Potenzgesetze*:

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^{n+m} &= a^n * a^m \\ (a^m)^n &= a^{n \cdot m} \\ (a * b)^n &= a^n * b^n \end{aligned}$$

Beachte, dass für die letzte Gleichung wichtig ist, dass $a * b = b * a$ gilt. Nur so kann man beispielsweise ohne Weiteres die Umformungen

$$(a * b)^2 = (a * b) * (a * b) = a * (b * a) * b \overset{!}{=} a * (a * b) * b = (a * a) * (b * b) = a^2 * b^2$$

durchführen.

§7.2.12 **Beweis**. Diese Gleichungen beweist man komfortabel mit einem sogenannten Induktionsbeweis. Da diese Beweistechnik im Vorkurs nicht behandelt wurde, könntest du noch abwarten, bis sie in den ersten beiden Semesterwochen durchgenommen wurde und daraufhin nochmal hierher zurückkehren.

§7.3 Neutrales Element

§7.3.01 **Definition** *(Neutrales Element)*. Seien X eine Menge und $*$ eine zweistellige Verknüpfung auf X. Ein Element $e \in X$ heißt **neutrales Element**, falls für jedes $x \in X$ die folgenden beiden Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} e * x &= x && \text{(Linksneutralität)} \\ x * e &= x && \text{(Rechtsneutralität)} \end{aligned}$$

§7.3.02 **Beispiel**. Es sei M eine beliebige Menge. Dann gilt:

a) Die Addition auf $\mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ hat die Zahl Null als neutrales Element. Denn für jede natürliche/ganze/rationale/reelle/komplexe Zahl x gilt ja

$$x + 0 = 0 + x = x$$

b) Die Multiplikation auf $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ hat die Zahl Eins als neutrales Element. Denn für jede natürliche/ganze/rationale/reelle/komplexe Zahl x ist

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$$

c) Das Verketten von Abbildungen aus Abb(M, M) hat die Identität id_M als neutrales Element. Denn für jede beliebige Abbildung $f : M \to M$ gilt

$$\mathrm{id}_M \circ f = f \circ \mathrm{id}_M = f$$

was in Satz §4.5.03 bewiesen wurde.

d) Bezüglich der Verknüpfung $\cap$ hat $\mathcal{P}(M)$ das neutrale Element M. Denn es gilt:

$$A \cap M = M \cap A = A \qquad \text{für jede Teilmenge } A \subseteq M$$

e) Bezüglich der Verknüpfung $\cup$ hat $\mathcal{P}(M)$ das neutrale Element $\emptyset$. Denn für jede Teilmenge $A \subseteq M$ gilt

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$$

f) Die fehlerbehaftete Multiplikation aus Beispiel §7.2.09 hat die 1 als neutrales Element. Denn wenn ich eine rationale Zahl, die höchstens eine Nachkommastelle besitzt, mit 1 multipliziere, ändert sich nichts, sodass auch das nachfolgende Runden nichts am Zahlenwert ändert.

g) Hinsichtlich der Subtraktion auf $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ gibt es *kein* neutrales Element. Denn die einzige Zahl $e \in \mathbb{C}$, die

$$x - e = x \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{Z}$$

erfüllt, ist die 0. Also käme höchstens die 0 als neutrales Element in Betracht. Aber z.B. wegen

$$0 - 5 \neq 5$$

ist die 0 kein neutrales Element.

h) Hinsichtlich der Division auf $\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt es ebenfalls kein neutrales Element.

i) Sofern M eine nichtleere Menge ist, gibt es bezüglich der Verknüpfung „$\setminus$“ auf $\mathcal{P}(M)$ auch kein neutrales Element.

§7.3.03 **Bemerkung** *(Beweisarbeit einsparen im kommutativen Fall).* Seien X eine Menge mit einer Verknüpfung $*$ und $e \in X$ ein Element, von dem du vermutest, dass es ein neutrales Element ist. Sofern $*$ eine *kommutative Verknüpfung* ist, brauchst du, um zu beweisen, dass e ein neutrales Element ist, von den beiden Gleichungen

$$e * x = x \qquad \text{und} \qquad x * e = x \qquad x \in X$$

nur eine zu beweisen. Die andere folgt dann direkt aus dem Kommutativgesetz.

§7.3.04 **Satz** *(Eindeutigkeitssatz für neutrale Elemente). Seien X eine Menge und $*$ eine Verknüpfung auf X, die ein neutrales Element $e \in X$ besitzt. Dann ist e auch das einzige neutrale Element.*

§7.3.05 **Beweis**. Es sei $d \in X$ ein beliebiges neutrales Element bezüglich der Verknüpfung $*$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d &= d * e && \text{(weil } e \text{ neutrales Element)} \\ &= e && \text{(weil } d \text{ neutrales Element)} \end{aligned}$$

Also gibt es neben e keine weiteren neutralen Elemente. ∎

§7.3.06 **Bemerkung** *(Das neutrale Element).* Der Eindeutigkeitssatz berechtigt uns, beim Vorhandensein eines neutralen Elements statt von „einem neutralen Element" von *dem* neutralen Element zu reden.
An diesem Satz wird vielleicht deutlich, wie vorteilhaft die axiomatische Arbeit mit abstrakten Verknüpfungen sein kann. Denn er garantiert uns auf einen Schlag, dass die neutralen Elemente aus allen Beispielen in Beispiel §7.3.02 auch jeweils die einzigen neutralen Elemente sind, ohne dass wir dies in jedem Fall einzeln beweisen müssten.

§7.4 Monoide

§7.4.01 **Definition** *(Monoid).* Ein **Monoid** ist ein Paar $(M, *)$ bestehend aus einer Menge M und einer Verknüpfung $*$ auf M, für das gilt:

(M1) $*$ ist eine assoziative Verknüpfung.

(M2) M enthält ein neutrales Element (bezüglich der Verknüpfung $*$).

In diesem Fall ist das neutrale Element nach Satz §7.3.04 automatisch eindeutig bestimmt.
Ist überdies die Verknüpfung $*$ auch noch kommutativ, so nennt man $(M, *)$ ein **kommutatives Monoid**.

§7.4.02 **Beispiel**. Es gilt:

a) (Addition von Zahlen) $(\mathbb{N}_0, +)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sind jeweils kommutative Monoide. Denn die Addition ist assoziativ und kommutativ und die Zahl 0 ist ihr neutrales Element.

b) (Multiplikation von Zahlen) $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{R}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, \cdot)$ sind jeweils kommutative Monoide. Denn die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ und die Zahl 1 ist ihr neutrales Element.

c) Die Subtraktion und die Division liefern keine Monoide, weil sie nicht assoziativ sind. Und ein neutrales Element besitzen sie ja auch nicht.

d) Ist X eine beliebige Menge, so ist $(\mathrm{Abb}(X, X), \circ)$ ein Monoid mit neutralem Element id_X. Sofern X mindestens zwei verschiedene Elemente enthält, ist es aber nicht kommutativ, siehe Beispiel §7.2.03

e) Ist X eine beliebige Menge, so sind $(\mathcal{P}(X), \cup)$ und $(\mathcal{P}(X), \cap)$ zwei kommutative Monoide mit den jeweiligen neutralen Elementen $\emptyset$ und X. Sofern X nichtleer ist, ist $(\mathcal{P}(X), \setminus)$ aber kein Monoid, da es weder assoziativ ist noch ein neutrales Element enthält.

f) Die „ungenaue Multiplikation" aus Beispiel §7.2.09 besitzt zwar ein neutrales Element – sie liefert aber kein Monoid, weil sie nicht assoziativ ist.

g) Die Addition „+" ist zwar eine assoziative Verknüpfung auf der Menge $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$, aber $(\mathbb{N}_{\geqslant 1}, +)$ ist kein Monoid, da es kein neutrales Element besitzt.

§7.4.03 **Bemerkung** *(Trägermenge).* Beachte, dass ein Monoid immer ein Paar $(M, *)$ ist, in das sowohl die „Trägermenge" M als auch die Verknüpfung $*$ kodiert ist. Ein und dieselbe Menge kann durchaus als Trägermenge für verschiedene Monoide herhalten. Beispielsweise sind $(\mathbb{N}_0, +)$ und $(\mathbb{N}_0, \cdot)$ zwei verschiedene Monoide, die dennoch dieselbe Trägermenge $\mathbb{N}_0$ besitzen.
Andererseits gibt es Mengen mit „kanonischen" Verknüpfungen, wie z.B. $\text{Abb}(X, X)$ (wobei X irgendeine Menge ist). Sprechen Mathematiker von „dem Monoid $\text{Abb}(X, X)$", so meinen sie damit grundsätzlich das Monoid $(\text{Abb}(X, X), \circ)$, also $\text{Abb}(X, X)$ mit der Verkettung von Abbildungen als Verknüpfung. Solche Konventionen wirst du mit der Zeit durch Erfahrung und Gewohnheit verinnerlichen.

§7.4.04 **Bemerkung** *(Die tiefere Bedeutung des Kommutativgesetzes).* Es sei $(M, *)$ ein kommutatives Monoid. Weil dann $*$ assoziativ ist, brauchen wir nach Bemerkung §7.2.08 keine Klammern setzen. Sind beispielsweise $a, b, c, d \in M$, so können wir einfach

$$a * b * c * d$$

schreiben. Das Kommutativgesetz

$$x * y = y * x \qquad\qquad x, y \in M$$

sagt nun aus, dass es bei der Verknüpfung *zweier* Elemente nicht auf die Reihenfolge ankommt. Es lässt sich zeigen, dass es damit sogar bei der Verknüpfung beliebig vieler Elemente nicht auf die Reihenfolge ankommt. Beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} a * b * c * d &= a * c * b * d && \text{(Kommutativgesetz für } b \text{ und } c) \\ &= c * a * b * d && \text{(Kommutativgesetz für } a \text{ und } c) \\ &= b * d * c * a && \text{(Kommutativgesetz für } c * a \text{ und } b * d) \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Bei kommutativen Monoiden brauchst du also weder aufs Klammernsetzen, noch auf die Reihenfolge, in der du die Elemente verknüpfst, achten.

§7.4.05 **Definition** *(Nullte Potenz).* Seien $(M, *)$ ein Monoid mit neutralem Element $e \in M$ und $a \in M$ irgendein Element. In Bemerkung §7.2.11 wurden bereits die n-ten Potenzen von a für $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ definiert. In Monoiden lässt sich eine „nullte Potenz" definieren durch

$$a^0 := e$$

Mit dieser Definition sind die Potenzgesetze aus Bemerkung §7.2.11 allgemeiner für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$ gültig.

§7.4.06 **Bemerkung** *(„multiplikativ geschriebene“ Monoide).* In fortgeschrittenen Büchern und Vorlesungen wird als Verknüpfungszeichen für ein „allgemeines Monoid M“ oftmals der Malpunkt „·“ verwendet. Wir haben dies hier vermieden, damit du nicht auf die Idee kämest, ein Monoid müsse unbedingt etwas mit Zahlen und deren Multiplikation zu tun haben.
Das neutrale Element notieren solche Texte dann oft mit dem Zeichen „1“ und nennen es das „Einselement“ des Monoids M. In dieser Notation gilt also

$$\begin{aligned} &1 \cdot x = x \\ &x \cdot 1 = x \qquad\qquad x \in M \end{aligned}$$

Beachte, dass es sich hier trotz Verwendung des Zeichens „1“ **nicht** um die natürliche Zahl Eins handelt! Um hervorzuheben, dass es sich nicht um die Zahl Eins, sondern um das neutrale Element des Monoids M handelt, kann man anstelle von „1“ auch „1_M“ schreiben.

§7.5 Inverse Elemente

§7.5.01 **Definition** *(Inverse Elemente).* Sei X eine Menge mit einer zweistelligen Verknüpfung $*$, die ein (nach Satz §7.3.04 automatisch eindeutig bestimmtes) neutrales Element e besitzt. Ein Element $b \in M$ heißt **invers** zu a, falls es die folgenden beiden „Inversengleichungen“ erfüllt:

$$\begin{aligned} &b * a = e \qquad \text{(„}b\text{ ist linksinvers zu }a\text{“)} \\ &a * b = e \qquad \text{(„}b\text{ ist rechtsinvers zu }a\text{“)} \end{aligned}$$

Das Element a heißt **invertierbar** (oder auch: *Einheit*[2]), falls es mindestens ein zu a inverses Element in X gibt.

§7.5.02 **Bemerkung** *(Keine Inversen ohne Neutrales).* Beachte, dass es nur bei Vorhandensein eines neutralen Elements überhaupt Sinn ergibt, von inversen Elementen zu sprechen.

§7.5.03 **Beispiel** *(Addition und Multiplikation).* Es gilt:

a) In den Monoiden $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$ ist jedes Element invertierbar. Denn für jede ganze/rationale/reelle/komplexe Zahl x gilt

$$\begin{aligned} &x + (-x) = 0 \\ &(-x) + x = 0 \end{aligned}$$

sodass $-x$ invers zu x ist.

b) Das einzige invertierbare Element im Monoid $(\mathbb{N}_0,+)$ ist die 0. Denn als neutrales Element ist die 0 invertierbar und für jede Zahl $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ kann es kein $m \in \mathbb{N}_0$ mit $n + m = 0$ geben.

c) In den Monoiden $(\mathbb{Q},\cdot)$, $(\mathbb{R},\cdot)$, $(\mathbb{C},\cdot)$ ist jedes Element $\neq 0$ invertierbar. Denn für jede rationale/reelle/komplexe Zahl $x \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned} &x \cdot \frac{1}{x} = 1 \\ &\frac{1}{x} \cdot x = 1 \end{aligned}$$

[2] Abgesehen von der Benennung hat das aber erstmal nichts mit den „Einheiten“ aus der Physik, wie z.B. „Meter“ und „Kilogramm“, zu tun.

sodass $\frac{1}{x}$ invers zu x ist. Die Null ist dagegen nicht invertierbar. Denn für jede beliebige Zahl x ist

$$0 \cdot x = 0 \neq 1$$

§7.5.04 **Bemerkung** *(Beweisarbeit einsparen im kommutativen Fall).* Sei X eine Menge mit einer Verknüpfung $*$, die ein neutrales Element $e \in X$ besitzt. Außerdem seien $a, b \in X$ und du vermutest, dass b invers zu a ist. Sofern $*$ eine *kommutative* Verknüpfung ist, brauchst du, um zu beweisen, dass b invers zu a ist, von den beiden Gleichungen

$$b * a = e \qquad \text{und} \qquad a * b = e$$

nur eine zu beweisen. Die andere folgt dann aus dem Kommutativgesetz.

§7.5.05 **Bemerkung** *(Das neutrale Element ist selbstinvers).* Sei X eine Menge mit einer zweistelligen Verknüpfung $*$, die ein neutrales Element $e \in X$ besitzt. Dann ist e invertierbar und ein inverses Element zu sich selbst.

§7.5.06 **Beweis.** Da e ein neutrales Element ist, gilt

$$e * e = e$$

Und diese Gleichung entspricht beiden Inversengleichungen aus Definition §7.5.01 zugleich. ∎

§7.5.07 **Beispiel** *(Inverse Abbildungen).* Es gilt:

a) Betrachte das Monoid $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}_{\geqslant 0}, \mathbb{R}_{\geqslant 0})$ und darin die beiden Abbildungen

$$f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}\ ,\ x \mapsto x^2$$
$$g : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}\ ,\ x \mapsto \sqrt{x}$$

Dann ist g invers zu f.

§7.5.08 **Beweis.** Für jedes $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ist

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{x}^2 = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geqslant 0}}(x)$$
$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geqslant 0}}(x)$$

sodass bereits die Gleichheit von Abbildungen $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geqslant 0}}$ und $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_{\geqslant 0}}$ gilt. Also ist g invers zu f. ∎

b) Betrachte das Monoid $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und darin die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto x^2$$

Dann besitzt f keine Inverse. Denn nach Satz §4.6.09 müsste dann f eine bijektive Abbildung sein; aber wegen $f(1) = f(-1)$ ist f nicht einmal injektiv.

c) Betrachte das Monoid $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0)$ und darin die beiden Abbildungen

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \ , \ n \mapsto n+1$$
$$g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \ , \ n \mapsto \begin{cases} 0 & n = 0 \\ n-1 & n \geqslant 1 \end{cases}$$

Dann gilt zwar $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}$. Allerdings ist $f \circ g \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}$, sodass g nicht invers zu f ist. Tatsächlich kann f gar keine Inverse besitzen, da f wegen $0 \notin \mathrm{im}(f)$ nicht surjektiv, also erst recht nicht bijektiv, ist.

§7.5.09 **Satz** *(Eindeutigkeitssatz für inverse Elemente)*. *Seien $(M, *)$ ein Monoid und $a \in M$ ein invertierbares Element. Dann gibt es auch nur genau ein inverses Element zu a.*[3]

§7.5.10 **Beweis**. Es seien $e \in M$ das neutrale Element von M und $b, b' \in X$ zwei beliebige Inverse zu a. Dann gilt:

$$\begin{aligned} b &= b * e && \text{(da } e \text{ neutral ist)} \\ &= b * a * b' && \text{(da } b' \text{ invers zu } a \text{ ist)} \\ &= e * b' && \text{(da } b \text{ invers zu } a \text{ ist)} \\ &= b' && \text{(da } e \text{ neutral ist)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

§7.5.11 **Bemerkung** *(Das inverse Element)*. Seien $(M, *)$ ein Monoid und $a \in M$ ein invertierbares Element. Da dann a auch nur genau ein Inverses besitzt, ergibt es Sinn, anstelle von „einem Inversen zu a" von *dem* Inversen von a zu sprechen.

§7.5.12 **Bemerkung**. Beachte, dass wir im Beweis von Satz §7.5.09 implizit Gebrauch vom Assoziativgesetz gemacht haben (erkennst du, wo?). Bei einer nicht-assoziativen Verknüpfung wie z.B. der fehlerbehafteten Multiplikation aus Beispiel §7.2.09, die sowohl kommutativ ist als auch ein neutrales Element besitzt, brauchen Inverse nicht eindeutig sein. Beispielsweise gilt dort

$$0,4 * 2,5 = 2,5 * 0,4 = 1$$
$$0,4 * 2,6 = 2,6 * 0,4 = 1$$

sodass das Element $0,4$ mindestens zwei verschiedene Inverse besitzt, nämlich $2,5$ und $2,6$.

§7.5.13 **Definition** *(negative Potenzen)*. Seien $(M, *)$ ein Monoid mit neutralem Element $e \in M$ und $a \in M$ ein invertierbares Element mit Inversem $h \in M$. Für $n \in \mathbb{Z}$ setzt man in Verallgemeinerung der bisher definierten Potenzen

$$a^n := \begin{cases} \underbrace{a * \ldots * a}_{n\text{-mal}} & n \geqslant 1 \\ e & n = 0 \\ \underbrace{h * \ldots * h}_{-n\text{-mal}} & n \leqslant -1 \end{cases}$$

[3] vgl. Satz §4.5.14

Mit dieser Definition gelten in Verallgemeinerung von Bemerkung §7.2.11 für alle invertierbaren Elemente $a, b \in M$ mit $a * b = b * a$ folgende Potenzgesetze:

$$\begin{aligned} a^1 &= a \\ a^0 &\text{ ist das neutrale Element} \\ a^{-1} &\text{ ist die Inverse zu } a \\ a^{n+m} &= a^n * a^m \\ (a^m)^n &= a^{n \cdot m} \\ (a * b)^n &= a^n * b^n \qquad\qquad n, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Beachte, dass die Voraussetzung $a * b = b * a$ essenziell für die letzte Gleichung ist.

§7.5.14 **Bemerkung**. Ab sofort werden wir die Inverse eines invertierbaren Monoidelements a meist mit „a^{-1}“ notieren. Viele Lehrbücher tun das auch schon von Anfang an, ohne es mit Potenzen zu motivieren.

§7.5.15 **Bemerkung** *(„additiv geschriebene“ Monoide)*. Als Verknüpfungszeichen *kommutativer* Monoide verwenden Bücher gerne ein „+“-Zeichen. Bis jetzt haben wir das vermieden, damit du nicht auf die Idee kommst, es müsse etwas mit der Addition von Zahlen zu tun haben.

Sofern die Verknüpfung in einem kommutativen Monoid M mit „+“ notiert wird, ändern sich auch einige weitere Schreibweisen. Beispielsweise wird das neutrale Element dann gerne mit dem Zeichen „0“ notiert (es braucht aber nichts mit der Zahl Null zu tun haben!) und das „Nullelement von M“ genannt. Zur Abgrenzung von der natürlichen Zahl Null schreibt man manchmal auch „0_M“. Es gilt dann also

$$\begin{aligned} x + 0_M &= x \\ 0_M + x &= x \qquad\qquad x \in M \end{aligned}$$

Überdies wird für ein invertierbares Element $a \in M$ dessen Inverse nicht mit „a^{-1}“, sondern mit „$-a$“ notiert. Für $b \in M$ schreibt man dann

$$b - a \qquad \text{anstelle von} \qquad b + (-a)$$

Die Inversengleichungen aus Definition §7.5.01 nehmen für $-a$ dann die Gestalt

$$\begin{aligned} a - a &= 0 \\ (-a) + a &= 0 \end{aligned}$$

an, wobei die zweite Gleichung aufgrund der Kommutativität redundant ist.
Außerdem wird für ein $n \in \mathbb{N}_0$ (bzw. $n \in \mathbb{Z}$, falls a invertierbar ist) die n-te Potenz von a nicht mit „a^n“, sondern mit „$n \cdot a$“ notiert. Im Fall $n \geqslant 1$ gilt also:

$$n \cdot a := \underbrace{a + \ldots + a}_{n\text{-mal}}$$

Hier ist eine Gegenüberstellung der Potenzgesetze in multiplikativer und in additiver Schreibweise:

Multiplikative Notation	Additive Notation	$a, b \in M$, $n, m \in \mathbb{N}_0$
$a^1 = a$	$1 \cdot a = a$	
$a^0 = 1_M$	$0 \cdot a = 0_M$	
$a^{-1} =$ Inverses zu a	$-a =$ Inverses zu a	(sofern a invertierbar ist)
$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$	$(n+m) \cdot a = n \cdot a + m \cdot a$	
$(a^m)^n = a^{n \cdot m}$	$n \cdot (m \cdot a) = (n \cdot m) \cdot a$	
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$n \cdot (a+b) = n \cdot a + n \cdot b$	(sofern $a \cdot b = b \cdot a$ ist)

Beachte, dass es sich hierbei um ein- und dieselbe Sache, nur in zwei verschiedenen Schreibweisen, handelt.

§7.5.16 **Satz** *(Regel von Hemd und Jacke). Seien $(M, *)$ ein Monoid und $a, b \in M$ zwei invertierbare Elemente. Dann ist auch $a * b$ invertierbar und es gilt*

$$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$$

Beim Invertieren dreht sich also die Reihenfolge um.

§7.5.17 **Beweis.** Es gilt

$$\begin{aligned} b^{-1} * a^{-1} * a * b &= b^{-1} * e * b \\ &= b^{-1} * b \\ &= e \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} a * b * b^{-1} * a^{-1} &= a * e * a^{-1} \\ &= a * a^{-1} \\ &= e \end{aligned}$$

Insgesamt erfüllt $b^{-1} * a^{-1}$ somit beide Inversengleichungen. ∎

§7.5.18 **Bemerkung.** Dieser Satz wird „Regel von Hemd und Jacke“ genannt aufgrund folgender Analogie: Habe ich mir erst ein Hemd und daraufhin eine Jacke angezogen und möchte mich nun wieder entkleiden – so muss ich zuerst die Jacke und dann das Hemd ausziehen.

Im kommutativen Fall kommt es nicht auf die Reihenfolge an, sodass man dann auch $(a*b)^{-1} = a^{-1}*b^{-1}$ schreiben kann. Insofern ist dir die Regel von Hemd und Jacke gar nicht fremd: schließlich hast du auch in der Schule regelmäßig benutzt, dass:

$$\begin{aligned} -(x+y) &= -x - y && x, y \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{x \cdot y} &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} && x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

§7.5.19 **Satz** *(Inverses vom Inversen). Seien $(M, *)$ ein Monoid und $a \in M$ ein invertierbares Element. Dann ist auch a^{-1} invertierbar und es gilt*

$$(a^{-1})^{-1} = a$$

§7.5.20 **Beweis**. Sei $e \in M$ das neutrale Element von M. Da a^{-1} invers zu a ist, gelten die beiden Gleichungen

$$a * a^{-1} = e \qquad \text{und} \qquad a^{-1} * a = e$$

Die erste dieser Gleichungen besagt, dass a linksinvers zu a^{-1} ist und die zweite Gleichung besagt, dass a rechtsinvers zu a^{-1} ist. Insgesamt ist also a die Inverse von a^{-1}. ■

§7.5.21 **Bemerkung**. Auch diese Regel ist dir in Spezialfällen aus der Schule bekannt. Schließlich gilt

$$\begin{aligned} -(-x) &= x & \qquad & x \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{\frac{1}{x}} &= x & \qquad & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

§7.6 Gruppen

§7.6.01 **Definition** *(Gruppe)*. Eine **Gruppe** ist ein Monoid, in dem jedes Element invertierbar ist. Konkret handelt es sich bei einer Gruppe also um ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer Menge G und einer Verknüpfung $*$ auf G, für das die sogenannten *Gruppenaxiome* gelten:

(G1) Die Verknüpfung $*$ ist assoziativ.

(G2) G enthält ein neutrales Element (bezüglich der Verknüpfung $*$).

(G3) Jedes Element von G ist invertierbar.

Ist überdies die Verknüpfung auch noch kommutativ, so spricht man von einer **abelschen Gruppe**[4].

§7.6.02 **Beispiel**. Es gilt:

a) $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sind jeweils abelsche Gruppen. Denn die Addition ist assoziativ, kommutativ, besitzt die 0 als neutrales Element und für jede ganze/rationale/reelle/komplexe Zahl x ist $-x$ ebenfalls eine ganze/rationale/reelle/komplexe Zahl und invers zu x.

b) Das Monoid $(\mathbb{N}_0, +)$ ist keine Gruppe, da beispielsweise das Element $5 \in \mathbb{N}_0$ nicht invertierbar ist.

c) Sofern X eine mindestens zweielementige Menge ist, ist das Monoid $\text{Abb}(X, X)$ keine Gruppe.

§7.6.03 **Beweis** (*). Seien $a \in X$ irgendein Element und $f : X \to X$ die konstante Abbildung, die alles auf a abbildet. Weil X mindestens zwei Elemente enthält, ist f injektiv und nach Satz §4.6.09 somit auch nicht invertierbar in $\text{Abb}(X, X)$. Also ist $\text{Abb}(X, X)$ keine Gruppe. ■

Viele interessante Verknüpfungen liefern lediglich Monoide aber keine Gruppen. Allerdings kann aus jedem Monoid eine (mehr oder weniger große) Gruppe extrahiert werden, indem man sich einfach auf die invertierbaren Elemente einschränkt:

[4] Niels Henrik Abel (1802-1829)

§7.6.04 **Definition** *(Einheitengruppe eines Monoids)*. Sei $(M, *)$ ein Monoid. Die Teilmenge

$$M^\times := \{x \in M \mid x \text{ ist invertierbar}\}$$

heißt die **Einheitengruppe** von M.

§7.6.05 **Satz**. *Sei $(M, *)$ ein Monoid. Dann kann die Verknüpfung von M auf $M^\times$ eingeschränkt werden. Auf diese Weise wird $M^\times$ zu einer Gruppe. Ist M ein kommutatives Monoid, so ist $M^\times$ eine abelsche Gruppe.*

§7.6.06 **Beweis**. (Einschränkbarkeit) Nach der Regel von Hemd und Jacke ist für alle $a, b \in M^\times$ auch $a * b \in M^\times$. Somit liefert $*$ durch Einschränkung eine zweistellige Verknüpfung auf der Menge $M^\times$.

(Assoziativität): Da $*$ eine assoziative Verknüpfung ist, gilt

$$x * (y * z) = (x * y) * z \qquad x, y, z \in M$$

Also gilt diese Gleichung auch erst recht für alle Elemente von $M^\times$. Somit ist $*$ auch auf $M^\times$ eine assoziative Verknüpfung.

(Neutrales Element): Sei $e \in M$ das neutrale Element von M. Nach Bemerkung §7.5.05 ist $e \in M^\times$. Weil für alle $x \in M$ gilt

$$e * x = x * e = x$$

gilt dies erst recht auch für alle $x \in M^\times$. Somit ist e ein neutrales Element in $M^\times$.

(Inverse): Sei $a \in M^\times$. Dann ist a ein invertierbares Element von M. Nach Satz §7.5.19 ist auch a^{-1} invertierbar, also $a^{-1} \in M^\times$. Wegen

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

und weil e das neutrale Element in $M^\times$ ist, ist dann a^{-1} auch in $M^\times$ invers zu a.

(Kommutativität) Sei M ein kommutatives Monoid. Dann gilt für alle $x, y \in M$:

$$x * y = y * x$$

Also gilt diese Gleichung erst recht auch für alle Elemente von $M^\times$, sodass $M^\times$ in diesem Fall eine abelsche Gruppe ist. ■

§7.6.07 **Beispiel**. Es gilt:

- Die Einheitengruppe des Monoids $(\mathbb{N}_0, +)$ ist $\{0\}$. Insbesondere ist $(\{0\}, +)$ eine Gruppe, die nur ein einziges Element enthält. Solche Gruppen nennt man auch *triviale Gruppen*.[5]
- Die Einheitengruppe des Monoids $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist $\{1, -1\}$. Insbesondere ist $(\{1, -1\}, \cdot)$ eine Gruppe, die aus genau zwei Elementen besteht.
- Nach Punkt c ist die Einheitengruppe des Monoids $(\mathbb{R}, \cdot)$ genau $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Somit ist $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe.

[5] vgl. Aufgabe §7.7.01d)

§7.6.08 **Definition** *(Permutationsgruppe)*. Sei M eine beliebige Menge. Die Menge der bijektiven Selbstabbildungen von M

$$S(M) := \{f \in \mathrm{Abb}(M, M) \mid f \text{ ist bijektiv}\}$$

heißt die **symmetrische Gruppe** von M. Ihre Elemente heißen **Permutationen** von M.

§7.6.09 **Satz**. *Sei M eine Menge. Dann ist $S(M)$ mit der Verkettung von Abbildungen als Verknüpfung eine Gruppe. Es handelt sich genau um die Einheitengruppe von Abb(M, M).*

§7.6.10 **Beweis**. Aus Satz §4.6.09 folgt, dass eine Abbildung $f : M \to M$ genau dann bijektiv ist, wenn sie invertierbar im Monoid Abb(M, M) ist. Also ist $S(M)$ tatsächlich die Einheitengruppe von Abb(M, M) und nach Satz §7.6.05 somit eine Gruppe. ■

§7.6.11 **Bemerkung** *(Endliche Permutationsgruppen)*. Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ schreibt man

$$S_n := S(\{1, \ldots, n\})$$

für die Permutationsgruppe der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Diese Gruppen sind von großer Bedeutung in der Gruppentheorie, da sie nach dem sogenannten „Satz von Cayley“ in einem gewissen Sinne „universell“ sind unter allen Gruppen, die nur endlich viele Elemente besitzen. Die S_n-Gruppen werden dir bereits in der LA1-Vorlesung wieder begegnen, dort spätestens im Kontext von *Matrixdeterminanten*.

§7.6.12 **Bemerkung** *(* Grothendieck[6]-Gruppe)*. Neben dem Konzept „Einheitengruppe“ gibt es ein weiteres Rezept, um aus Monoiden Gruppen zu machen: die sogenannte „Grothendieck-Gruppe“. Während man, um von einem Monoid zu seiner Einheitengruppe zu gelangen, die Trägermenge soweit verkleinert, bis nur noch die invertierbaren Elemente übrigbleiben, fügt man bei der Grothendieck-Gruppe „künstliche Inverse“ hinzu. Beispielsweise kann die Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$ dadurch konstruiert werden, dass man dem Monoid $(\mathbb{N}_0, +)$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ eine „künstliche Inverse $-n$“ beilegt. Auch die Zahlbereichserweiterung $\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Q}$ geschieht durch die Hinzufügung künstlicher Inverser, diesmal bezüglich der Multiplikation. Solche Techniken, bei denen man für eine Struktur gewisse wünschenswerte Eigenschaften künstlich erzwingt, sind typisch für die abstrakte Algebra und tauchen dort beispielsweise bei den Konzepten „Quotientenkörper“, „Lokalisierung eines Rings“, „Tensoralgebra“ oder „Zerfällungskörper“ auf.

[6] Alexander Grothendieck (1928-2014)

§7.7 Aufgabenvorschläge

§7.7.01 **Aufgabe.** Entscheidet für jede der folgenden Verknüpfungen, ob sie assoziativ ist, kommutativ ist, ob sie ein neutrales Element besitzt und ob sie ein Monoid oder gar eine Gruppe liefert. Sofern ein Monoid vorliegt, bestimmt dessen Einheitengruppe.

a) Die auf der Menge $\mathbb{N}_0$ durch

$$\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \ , \ (n, m) \mapsto n^m$$

gegebene Verknüpfung (wobei $n^0 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei).

b) Auf der Menge $\mathbb{R}_{>0}$ der positiven reellen Zahlen die Multiplikation $(x, y) \mapsto x \cdot y$.

c) Die auf der Menge $\mathbb{R}$ durch

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ (x, y) \mapsto 96$$

gegebene Verknüpfung (d.h. je zwei beliebige Elemente verknüpfen sich immer zu 96).

d) Auf einer beliebigen einelementigen Menge eine beliebige zweistellige Verknüpfung.

e) Es sei V die Gesamtheit aller Mengen. Betrachte darauf die Verknüpfung

$$V \times V \to V \ , \ (A, B) \mapsto \{A, B\}$$

§7.7.02 **Aufgabe.** Seien $(M, *)$ ein Monoid und $a \in M$ ein invertierbares Element. Beweist, dass „Multiplikation mit a“ eine Äquivalenzumformung ist, d.h. dass für alle $x, y \in M$ gilt:

$$\begin{aligned} x = y \quad &\leftrightarrow \quad a * x = a * y \\ x = y \quad &\leftrightarrow \quad x * a = y * a \end{aligned}$$

Gilt dies auch, wenn a nicht invertierbar ist? Könnt ihr ein Gegenbeispiel für diesen Fall finden?

§7.7.03 **Aufgabe.** Sei X eine beliebige Menge. Beweist die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Die symmetrische Gruppe $S(X)$ ist eine abelsche Gruppe.

(ii) X enthält höchstens zwei verschiedene Elemente.

§7.7.04 **Aufgabe.** Sei X irgendeine Menge.

a) Beweist, dass die Einheitengruppe des Monoids $(\mathcal{P}(X), \cup)$ aus nur einem einzigen Element besteht. Welchem?

b) Beweist, dass das Monoid $(\mathcal{P}(X), \cup)$ dann und nur dann eine Gruppe ist, wenn $X = \emptyset$.

Anhang

Einige wichtige Mengen

- $\mathbb{N} = \{(0,)1, 2, 3, 4, \ldots\}$. Menge der natürlichen Zahlen. Ob die Null dazugehört oder nicht, hängt vom Autor ab.
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots\}$. Menge der ganzen Zahlen.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$. Menge der rationalen Zahlen.
- $\mathbb{R}$. Menge der reellen Zahlen, d.h. aller Zahlen, die sich als Kommazahl (mit möglicherweise unendlich vielen Nachkommastellen) schreiben lassen.
- $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Menge der komplexen Zahlen.
- $\emptyset$. Leere Menge. Manche Autoren schreiben auch $\{\}$.

Aussagenlogische Tautologien

Seien A, B, C drei beliebige Aussagen. Hier ist eine Liste aussagenlogischer Tautologien. Versuche besser nicht, für jede einzelne Formel eine Wahrheitstafel aufzustellen. Wenn du Lust hast, kannst du

- versuchen, dir für die ein oder andere Formel intuitiv klarzumachen, dass es sich um eine Tautologie handeln muss. So kannst du ein besseres Verständnis für die Junktoren erwerben.
- mithilfe der Beweistechniken aus dem zweiten Vortrag versuchen, die eine oder andere dieser Formeln zu beweisen.

$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow ((A \to B) \land (B \to A))$$

$$A \to (B \to (A \land B))$$

$$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow ((A \land B) \to C) \qquad \text{(Import-/Exportformel)}$$

$$\left.\begin{array}{l} ((A \to C) \land (B \to C)) \leftrightarrow ((A \lor B) \to C) \\ ((C \to A) \land (C \to B)) \leftrightarrow (C \to (A \land B)) \end{array}\right. \qquad \text{(Fallunterscheidungsformeln)}$$

$$((A \to B) \land A) \to B \qquad \text{(Modus-ponens-Formel)}$$

$$(A \to (B \to C)) \leftrightarrow (B \to (A \to C)) \qquad \text{(Umordnung der Prämissen)}$$

$$((A \to B) \land (B \to C)) \to (A \to C)$$
$$((A \leftrightarrow B) \land (B \leftrightarrow C)) \to (A \leftrightarrow C)$$

$$(A \leftrightarrow (A \to B)) \to B \qquad \text{(Curry-Paradoxon)}$$

$$((A \land B) \land C) \leftrightarrow (A \land (B \land C))$$
$$((A \lor B) \lor C) \leftrightarrow (A \lor (B \lor C)) \qquad \text{(Assoziativgesetze)}$$

$$(A \land B) \leftrightarrow (B \land A)$$
$$(A \lor B) \leftrightarrow (B \lor A) \qquad \text{(Kommuativgesetze)}$$
$$(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow A)$$

$$(A \lor (A \land B)) \leftrightarrow A$$
$$(A \land (A \lor B)) \leftrightarrow A \qquad \text{(Absorptionsgesetze)}$$

$$(A \land A) \leftrightarrow A$$
$$(A \lor A) \leftrightarrow A \qquad \text{(Idempotenzgesetze)}$$

$$(A \land (B \lor C)) \leftrightarrow ((A \land B) \lor (A \land C))$$
$$(A \lor (B \land C)) \leftrightarrow ((A \lor B) \land (A \lor C)) \qquad \text{(Distributivgesetze)}$$

$$(A \to B) \leftrightarrow ((A \land B) \leftrightarrow A)$$
$$(A \to B) \leftrightarrow ((A \lor B) \leftrightarrow B)$$

$$(A \land B) \leftrightarrow (A \leftrightarrow (A \to B))$$
$$(A \lor B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow (A \to B))$$

$$(A \land \neg A) \to B$$
$$((A \lor B) \land \neg A) \to B \qquad \text{(Modus-tollendo-ponens-Formel)}$$

$$(A \to B) \leftrightarrow (\neg A \lor B)$$
$$\neg(A \to B) \leftrightarrow (A \land \neg B)$$

$$(\neg A \land \neg B) \leftrightarrow \neg(A \lor B)$$
$$(\neg A \lor \neg B) \leftrightarrow \neg(A \land B) \qquad \text{(Regeln von De Morgan)}$$

$$(A \to B) \lor (B \to C)$$
$$((A \to B) \to A) \to A \qquad \text{(Peirce'sche Regel)}$$
$$(A \to (A \land B)) \lor (B \to (A \land B)) \qquad \text{(Aussagenlogisches ``Drinker paradox'')}$$

Prädikatenlogische Tautologien

Seien A eine Aussage, φ, ψ zwei einstellige Prädikate und χ ein zweistelliges Prädikat. Bei den folgenden Aussagen handelt es sich um Tautologien. Wenn du Lust hast, kannst du

- versuchen, dir für die ein oder andere Formel intuitiv klarzumachen, dass es sich um eine Tautologie handeln muss. So kannst du deine Intuition für die Quantoren trainieren.
- mithilfe der Beweistechniken aus dem zweiten Vortrag versuchen, die eine oder andere dieser Formeln zu beweisen.

$$\begin{aligned} (\forall x : \varphi(x)) &\leftrightarrow (\forall y : \varphi(y)) \\ (\exists x : \varphi(x)) &\leftrightarrow (\exists y : \varphi(y)) \end{aligned} \qquad \text{(Austauschbarkeit der gebundenen Variable)}$$

$$\begin{aligned} (\forall x, y : \chi(x,y)) &\to (\forall x : \chi(x,x)) \\ (\exists x : \chi(x,x)) &\to (\exists x, y : \chi(x,y)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((\forall x : \varphi(x)) \land A) &\leftrightarrow (\forall x : (\varphi(x) \land A)) \\ ((\forall x : \varphi(x)) \land (\forall y : \psi(y))) &\leftrightarrow (\forall x, y : (\varphi(x) \land \psi(y))) \\ ((\forall x : \varphi(x)) \land (\forall y : \psi(y))) &\leftrightarrow (\forall x : (\varphi(x) \land \psi(x))) \end{aligned} \qquad (\land \text{ und } \forall)$$

$$\begin{aligned} ((\exists x : \varphi(x)) \lor A) &\leftrightarrow (\exists x : (\varphi(x) \lor A)) \\ ((\exists x : \varphi(x)) \lor (\exists y : \psi(y))) &\leftrightarrow (\exists x, y : (\varphi(x) \lor \psi(y))) \\ ((\exists x : \varphi(x)) \lor (\exists y : \psi(y))) &\leftrightarrow (\exists x : (\varphi(x) \lor \psi(x))) \end{aligned} \qquad (\lor \text{ und } \exists)$$

$$\begin{aligned} ((\exists x : \varphi(x)) \land A) &\leftrightarrow (\exists x : (\varphi(x) \land A)) \\ ((\exists x : \varphi(x)) \land (\exists y : \psi(y))) &\leftrightarrow (\exists x, y : (\varphi(x) \land \psi(y))) \\ ((\exists x : \varphi(x)) \land (\exists y : \psi(y))) &\leftarrow (\exists x : (\varphi(x) \land \psi(x))) \end{aligned} \qquad (\land \text{ und } \exists)$$

$$\begin{aligned} ((\forall x : \varphi(x)) \lor A) &\leftrightarrow (\forall x : (\varphi(x) \lor A)) \\ ((\forall x : \varphi(x)) \lor (\forall y : \psi(y))) &\leftrightarrow (\forall x, y : (\varphi(x) \lor \psi(y))) \\ ((\forall x : \varphi(x)) \lor (\forall y : \psi(y))) &\to (\forall x : (\varphi(x) \lor \psi(x))) \end{aligned} \qquad (\lor \text{ und } \forall)$$

$$\begin{aligned} (\forall x : (\varphi(x) \to A)) &\leftrightarrow ((\exists x : \varphi(x)) \to A) \\ (\forall x : (A \to \varphi(x))) &\leftrightarrow (A \to (\forall x : \varphi(x))) \\ (\forall x : (\varphi(x) \to \psi(x))) &\leftarrow ((\exists x : \varphi(x)) \to (\forall x : \psi(x))) \end{aligned} \qquad (\to \text{ und } \forall)$$

$$\begin{aligned} (\exists x : (\varphi(x) \to A)) &\leftrightarrow ((\forall x : \varphi(x)) \to A) \\ (\exists x : (A \to \varphi(x))) &\leftrightarrow (A \to (\exists x : \varphi(x))) \\ (\exists x : (\varphi(x) \to \psi(x))) &\leftrightarrow ((\forall x : \varphi(x)) \to (\exists x : \psi(x))) \end{aligned} \qquad (\to \text{ und } \exists)$$

$$\begin{aligned} &\forall x\, \exists y : (\varphi(x) \to \varphi(y)) \\ &\exists x\, \forall y : (\varphi(x) \to \varphi(y)) \end{aligned} \qquad \text{(“Drinker paradox”)}$$

Literaturverzeichnis

J. Amann, Herbert und Escher. *Analysis I*. SpringerLink : Bücher. Birkhäuser Basel, Basel, dritte auflage edition, 2006. ISBN 978-3-7643-7756-4. URL https://katalog.ub.uni-heidelberg.de/cgi-bin/titel.cgi?katkey=66925687&sess=1c389df2f23695a7723f067303f8ef7b&art=f&kat1=freitext&kat2=ti&kat3=au&op1=AND&op2=AND&var1=&var2=&var3=amann%20escher&aa=1&sess=1c389df2f23695a7723f067303f8ef7b.

G. Cantor. *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengelehre. In: Mathematische Annalen 46*. 1895. URL https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN237853094?tify={%22pages%22:[294],%22view%22:%22export%22}.

D. J. Velleman. *How to prove it*. Cambridge University Press, Cambridge ; New York, NY, second edition edition, 2006. URL https://users.metu.edu.tr/serge/courses/111-2011/textbook-math111.pdf.