Kapitel 6

Folgen

Folgen finden sich in der Mathematik immer wieder und gehören zum Grundwerkzeug eines jeden Mathematikers. Eben aus jenem Grund sollte man sich die Zeit nehmen sie zu verstehen.

§01 Motivation

Wir werden uns in diesem Vortrag an einem kleinen sehr einfachen Bespiel entlang hangeln und und so Stück für Stück an das Themengebiet der Folgen heranwagen.

§01.01 **Beispiel.** Wir werfen einen normalen W6 n mal. Wie hoch ist die Chance, dass wir mindestens eine 6 würfeln? Das ist meistens eine der ersten Standardaufgaben wenn man mit Wahrscheinlichkeitsrechnung beginnt. Wenn man sich das auf einem kleinen Stück Papier mal kurz anschaut bekommt man schnell raus was für die ersten Würfe gilt. Über den Vortrag hinweg sei $P(n) \in [0, 1]$ die Chance, dass wir mindestens eine 6 in n Würfen würfeln.

n	P
1	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{11}{36}$
3	$\frac{91}{216}$
$\vdots$	$\vdots$

Nun stellt man sich die Frage, ob man dieses Verhalten irgendwie mathematisch formulieren kann? -> JA!

Um das ganze etwas schöner zu haben schauen wir folgendes Problem an: „Wie hoch ist die Chance nie eine 6 würfeln? “Die liegt bei (nachdenken ;)) $5/6$ pro Wurf, also bei n Würfen $(5/6)^n$. Damit kommen wir also zu folgendem kompaktem Ergebnis:

$$P(n) = 1 - \binom{5}{6}^n$$

Was wir hier haben nennt der gebildete Mathematiker eine Folge (Definition kommt später). Wenn wir unser Beispiel betrachten sieht man auch schnell wofür sich Mathematiker oft bei der Betrachtung von Folgen interessieren: was passiert wenn n immer größer wird? Oder bei uns:

Was passiert mit unserer Chance, wenn wir immer öfter würfeln?

Intuitiv sieht man denke ich leicht, dass $(5/6)^n$ immer kleiner wird und unser $P(n)$ damit immer näher an die 1 ran rutscht. Genau dieses Verhalten werden wir in diesem Vortrag mathematisch formalisieren und untersuchen. Viel Spaß!

§02 Der Betrag

Ich habe gesagt, dass $P(n)$ immer weiter an die 1 „rutscht “. Aber was genau bedeutet das? Im Grunde genommen sage ich hier, dass der Abstand bzw die Größe des Abstandes von $P(n)$ zur 1 immer kleiner wird. Wir müssen uns also erst klar machen, was wir under einem „Abstand“oder eine Länge/Größe verstehen. Die meisten werden dabei an den Betrag $|a|$ einer Zahl a denken. Genau dieses Konzept wollen wir uns anschauen.

§02.01 **Definition**. Der *Betrag auf* $\mathbb{R}$ ist definiert durch

$$|a| = \begin{cases} a & a \geqslant 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

□

Der Betrag ordnet einer Zahl anschaulich eine Länge zu. Man kann damit aber auch einfach den Abstand zwischen 2 Zahlen ausdrücken: $dist(x,y) = |x-y|$. Damit wir sinnvoll mit dieser Definition arbeiten können sollten wir ein paar Eigenschaften zeigen:

§02.02 **Satz**. *Für* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

(i) $x = 0 \Leftrightarrow |x| = 0$

(ii) $x \leqslant |x|$

(iii) $|xy| = |x||y|$

(iv) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

§02.03 **Beweis**.

(i) folgt direkt aus der Definition

(ii) für $x \geqslant 0$ gilt $x = |x|$. Im anderen Fall folgt $x < 0 < -x = |x|$

(iii) Für $x = 0 \vee y = 0$ ist die Aussage trivial. Seien also $x, y \neq 0$.

$x, y > 0$: damit ist auch $xy > 0$. Also: $|xy| = xy = |x||y|$

$x, y < 0$: auch hier ist $xy > 0$. Das heißt $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$

$x < 0, y > 0$: hier ist $xy < 0$ und damit $|xy| = -xy = (-x)y = |x||y|$.

$x > 0, y < 0$: analog

(iv) Da beide Seiten positiv sind, ist das Quadrieren eine Äquivalenzumformung. Dann folgt mit ii)

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \leqslant x^2 + 2|xy| + y^2 \Leftrightarrow 2xy \leqslant 2|xy|$$

□

§03 Folgen

Jetzt, da wir unser Handwerkszeug haben können wir uns den Folgen widmen und diese untersuchen.

§03.01 **Definition.** Unter einer Folge $(a_n)_n$ verstehen wir eine Abbildung

$$a: \mathbb{N} \to \mathbb{R};\ n \longmapsto a_n$$

a_n heißt dabei das n-te Folgenglied der Folge. □

Mit dieser Definition können wir unsere Folge $P(n)$ auch formal ausdrücken:

$$P: \mathbb{N} \to [0,1];\ n \longmapsto P(n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

§03.02 **Beispiel.**

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad\qquad b_n = \cos(n\pi)$$

Jetzt haben wir unser Problem schon fast formalisiert. Fehlt noch die Sache „$P(n)$ rutscht immer weiter auf die 1“. Das heißt ja im Grunde genommen nichts anderes als dass der Abstand von $P(n)$ zur 1 immer kleiner...sogar beliebig klein wird. Das motiviert folgende Definition:

§03.03 **Definition.** Sei $(a_n)_n$ eine Folge. Wir sagen die Folge konvergiert genau dann wenn

$$\exists a \in \mathbb{R}: \forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}: \forall n > N: |a_n - a| < \varepsilon$$

Andernfalls heißt die Folge divergent. Im Falle der Existenz nennen wir a den Grenzwert der Folge und schreiben auch $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} a_n = a$.

Wenn eine Folge konvergiert liegen also fast alle meine Folgenglieder irgendwann nahe genug an diesem Grenzwert.

Zurück zu unserem Würfel. Wir wollen also eigentlich zeigen, dass $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} P(n) = 1$ gilt. Das können wir jetzt einfach nachrechnen!

§03.04 **Beweis.** Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen N groß genug, so dass $(5/6)^N < \varepsilon$. Dann gilt

$$|P(n) - 1| = \left|1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - 1\right| = \left|\frac{5^n}{6^n}\right|$$

Damit erhalten wir:

$$|P(n) - 1| = \left|\frac{5^n}{6^n}\right| = \left|\frac{5}{6}\right|^n < \left|\frac{5}{6}\right|^N < \varepsilon$$

Letztes gilt dabei wohlgemerkt nur für $n > N$.

Das heißt ja jetzt nicht anderes als: je öfter wir würfeln desto höher ist die Chance eine 6 zu würfeln!

Weitere einfache Beispiele sind:

§03.05 **Beispiel.**

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{2n^3 + n^2 - 5n}{n^3 - 20n} = 2 \qquad e_n = \cos(n\pi) \qquad f_n = 5^n$$

Die vorletzte wackelt immer zwischen -1 und 1 und die letzte wird einfach immer größer.

Mathematiker achten immer darauf, dass ihre Definitionen sinnvoll sind. Wir fragen uns also, ob es passieren kann, dass eine Folge 2 Grenzwerte hat? Zum Glück nicht!

§03.06 **Satz**. *Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge und $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a = \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n$. Dann gilt a = b.*

§03.07 **Beweis**. Sei $\varepsilon > 0$. Da die Folge konvergiert existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n > N$ gilt:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad |b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Damit folgt dann

$$|a - b| = |a - b + a_n - a_n| \leqslant |a - a_n| + |a_n - b| = |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Da ε beliebig war folgt $|a - b| = 0$ und damit $a = b$.

§03.08 **Bemerkung**. Es gibt auch Räume die, mit der richtigen Struktur versehen, es erlauben, dass eine Folge 2 Grenzwerte hat. Das werdet ihr vielleicht irgendwann kennen lernen.

Jetzt können wir uns noch fragen: wie sind wir eigentlich daraus gekommen, dass $P(n)$ auf die 1 läuft? Die naheliegenste Idee ist doch, dass der Bruch hinten immer kleiner wird, also gegen 0 konvergiert und damit diese Differenz verschwindet. Um diese Idee zu untermauern schauen wir uns einmal an wie man mit Folgen rechnet und ob wir diese Intuition auch formal beweisen können.

§03.09 **Definition**. Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ Folgen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. $(a_n)_n + (b_n)_n = (a_n + b_n)_n$ und $\lambda(a_n)_n = (\lambda a_n)_n$
2. $(a_n)_n$ heißt beschränkt $\Leftrightarrow\ \exists C \in \mathbb{R} : \ |a_n| \leqslant C \ \forall n \in \mathbb{N}$

□

Folgen werden also Komponentenweise addiert und mit Skalaren multipliziert. Wenn wir das jetzt wissen können wir unsere Folge ja ein bisschen aufteilen:

$$P(n) = K(n) - L(n); \ K(n) = 1, \ L(n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Wenn wir unsere Intuition jetzt mal formalisieren haben wir ja so etwas gemacht:

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} P(n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} (K(n) - L(n)) = \lim_{n\longrightarrow\infty} K(n) - \lim_{n\longrightarrow\infty} L(n) = 1 - 0 = 1$$

Wieso klappt dieser Schritt? Wann darf ich denn Grenzwerte auseinander ziehen?

§03.10 **Satz**. *Seien $(a_n)_n, (b_n)_n$ konvergente Folgen mit $a = \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n$ und $b = \lim_{n\longrightarrow\infty} b_n$. Dann gilt:*

1. $\lim_{n\longrightarrow\infty} (a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim_{n\longrightarrow\infty} (\lambda a_n) = \lambda a$ *für* $\lambda \in \mathbb{R}$

§03.11 **Beweis.** Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ so dass $\forall n > N$ $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt.

(i) hier gilt dann:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(ii) hier reicht es $\lambda \neq 0$ zu betrachten. Für $\lambda = 0$ ist der Beweis trivial.
Wir beachten hier: aus der Konvergenz folgt: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ \forall n > N : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$, denn $\varepsilon/|\lambda| > 0$. Damit gilt dann:

$$|\lambda a_n - \lambda a| = |\lambda(a_n - a)| = |\lambda|\, |a_n - a| < |\lambda| \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon$$

□

§03.12 **Bemerkung.** Das auch für Produkte: $(a_n)_n \dot{} (b_n)_n \longrightarrow a \cdot b$

Wichtig ist hierbei dass wirklich <u>beide</u> Folgen konvergieren. Folgende Beispiele zeigen wieso:

§03.13 **Beispiel.**

(a) Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n = 0 = n - n$. Dann gilt nicht:

$$0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} 0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} (n - n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} n - \lim_{n \longrightarrow \infty} n$$

Die Folge $n \mapsto n$ divergiert. Insbesondere können wir hier nicht von einem Grenzwert sprechen. $\lim_{n \longrightarrow \infty} n$ ist daher undefiniert und insbesondere NICHT Null!

(b) Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit $a_n = 1 = n/n$. Dann gilt nicht:

$$1 = \lim_{n \longrightarrow \infty} 1 = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_n = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{n}{n} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \longrightarrow \infty} n = 0 \cdot \infty$$

Hier gilt die selbe Argumentation wie oben. Der Ausdruck $0 \cdot \infty$ ist nicht definiert.

□

§04 Cauchyfolgen

Oftmals ist es nicht nötig, dass man den Grenzwert explizit kennt. Wichtig ist nur, dass er existiert. Können wir also irgendwie auf die Existenz des Grenzwertes schließen ohne ihn zu kennen? Diese Frage hat Mathematiker schon sehr früh beschäftigt. Ihre Idee: wenn meine Folgenglieder sich einer Zahl nähern dann müssen ja irgendwann auch beliebige Folgenglieder sehr nah bei einander liegen. Das brachte sie zu folgender Definition:

§04.01 **Definition.** Eine Cauchyfolge ist eine Folge $(a_n)_n$ mit folgender Eigenschaft:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m > N : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Wie man hier sieht ist das eine Eigenschaft die nicht von eventuell vorhandenen Grenzwerten abhängt. Die obige Idee der Mathematiker kam aus folgender Eigenschaft:

§04.02 **Satz.** *Sei $(a_n)_n$ eine konvergente Folge mit Grenzwert a. Dann ist sie auch eine Cauchyfolge.*

§04.03 **Beweis.** Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$ so dass $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > N$ gilt. Es folgt für $n, m > N$

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Das heißt Konvergenz und die Cauchy-Eigenschaft hängen irgendwie miteinander zusammen. Wir haben allerdings nur Konvergenz $\rightarrow$ Cauchy gezeigt. Eigentlich möchte man auch die andere Richtung haben um Konvergenzaussagen ohne Grenzwerte treffen zu können. Leider ist das im allgemeinen falsch wie wir gleich sehen werden.

§04.04 **Bemerkung.** Man kann Folgen auch rekursiv definieren. Zum Beispiel kann ich die Folge mit $a_n = 2^{-n} = 1/2^n$ auch so definieren:

$$a_1 = 1; \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot a_n$$

Das praktische an dieser Darstellung ist: wenn $(a_n)_n$ eine konvergente Folge ist konvergiert sowohl a_n als auch a_{n+1} gegen den Grenzwert a. In dem Beispiel könnten wir den Grenzwert also bestimmen indem wir folgende Gleichung lösen:

$$a = \frac{a}{2} \rightarrow 2a = a \rightarrow a = 0$$

§04.05 **Bemerkung.** Sei A eine rationale Folge ($\in \mathbb{Q}$) definiert durch

$$a_1 = 1 \qquad a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}$$

Diese Folge konvergiert in $\mathbb{R}$. Um den Grenzwert zu bestimmen lösen wir:

$$\begin{aligned} a = \frac{a + \frac{2}{a}}{2} &\Leftrightarrow 2a = a + \frac{2}{a} \\ &\Leftrightarrow a^2 = 2 \end{aligned}$$

Wir erhalten also als Lösung $a = \sqrt{2}$ da unsere Folge immer positiv war. Wie aber gesagt liegt dieser Grenzwert in $\mathbb{R}$ und nicht in $\mathbb{Q}$. Damit konvergiert die Folge nicht in $\mathbb{Q}$!

Damit konvergieren also nicht immer alle Cauchyfolgen. Es gibt jedoch eine große Menge an Vektorräumen wie z.B.: $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ in denen alle Cauchyfolgen konvergieren. Diese nennt man dann vollständig.

§05 Übungsaufgaben

Das hier sind die Übungsaufgaben zum Folgen-Vortrag im Vorkurs WS 2014.

1. Aufgabe

Beweist die umgekehrte Dreiecks-Ungleichung

$$|\|\cdot\|x - \|\cdot\|y| \leqslant \|\cdot\|x - y$$

2. Aufgabe

Wir wollen uns die Konvergenz der rationalen Folge

$$a_1 = 1 \qquad\qquad a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}$$

herleiten. Wir zeigen dazu:

1. Sei $A = (a_n)_n$ eine positive streng monoton fallende, d.h. $0 < a_{n+1} < a_n \forall n$, und beschränkte Folge. Dann konvergiert sie.
2. es gilt $1 < a_n < 2 \; \forall n \geqslant 2$
3. die Folge ist streng monoton fallend für $n \geqslant 2$. Ihr dürft benutzen, dass sogar $a_n > \sqrt{2}$ gilt.

3. Aufgabe

Zeigt oder widerlegt die Konvergenz der Folgen:

1. $a_n = \frac{n^2+4}{2n^2}$
2. $b_n = \cos(\pi n)$

4. Aufgabe

Unter Annahme ihrer Konvergenz, berechnet die Grenzwerte der Folgen:

$$a_n = \frac{4^{(2^n)}}{2^{(4^n)}} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{3^n + (-2)^n} \qquad c_n = \frac{(-1)^n n}{n+1}$$

5. Aufgabe

Der goldene Schnitt: Wir betrachten die sogenannte Fibonacci-Folge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

Eine interessante Feststellung ist, dass das Verhältnisje zwei aufeinanderfolgender Zahlen gegen einen festen Wert konvergiert. Diesen nennt man den goldenen Schnitt

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Interessant ist ausserdem, dass dies für viele verschiedene Folgen gilt. Zeigt also:

Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ beliebig sind und

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Dann gilt für die Folge $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$: $b_n \to \Phi$

§06 Lösungen zu den Übungsaufgaben