

Übungen zum Vorkursvortrag "Logik 1"

Aufgabe 1: Seien A, B und C Aussagen. Beweise mittels Wahrheitstabeln und bereits bekannter Sätze:

1. $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$
2. $(A \wedge w) \Leftrightarrow A, (A \wedge f) \Leftrightarrow f$.
3. $(A \vee w) \Leftrightarrow w, (A \vee f) \Leftrightarrow A$
4. Kommutativität: $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$ (gleiches gilt auch für \vee)
5. Assoziativität: $(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C)$ (gleiches gilt auch für \vee)

Aufgabe 2 (De Morgan'sche Regeln und Distributivgesetze): Seien A, B und C Aussagen. Beweise mittels Wahrheitstabeln und bereits bekannter Sätze:

1. De Morgan'sche Regeln:
 - (a) $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$
 - (b) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
2. Distributivgesetze:
 - (a) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ (gleiches gilt auch für \wedge, \vee vertauscht)
3. Weitere Regeln:
 - (a) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$
 - (b) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$
 - (c) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$.

Aufgabe 3 (Bilden von Negationen): Bilde die Negation der unten gegebenen Aussagen A :

1. $A = \forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x < y^2$.
2. (Stetigkeit in 0) Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Definiere
 $A = \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+ : \exists \delta \in \mathbb{R}_+ : \forall x \in \mathbb{R} : (|x - 1| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon)$.
3. $A =$ Alle Studenten, die nicht Mathematik studieren, sind doof.
4. $A =$ Es gibt einen Deckel, der auf jeden Topf passt.
5. $A =$ Es gibt eine Universität, an der es keinen Studenten gibt, der Spaß am Negieren von Aussagen hat.
6. Logik in Volksliedern: "Mein Hut der hat drei Ecken, drei Ecken hat mein Hut - und hätt' er nicht drei Ecken, so wärs auch nicht mein Hut". Die erste Zeile interpretieren wir mal als die Implikation "Wenn ein Hut mein Hut ist, dann hat er drei Ecken". Was ist dann die zweite Zeile? Die Verneinung der ersten? Äquivalent zur ersten? Eine vollkommen neue Information?

Tipp für 3./4./5./6.): Aussage erst in logische Aussage mit Quantoren / Prädikaten umschreiben, dann negieren, und wieder in normale Sprache "zurückübersetzen".

Aufgabe 4 (Überprüfen von Aussagen): Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind oder ob weitere Informationen benötigt werden!

1. $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : x < y$
2. $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : x < y$
3. $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 - x = 0 \Rightarrow (x = 1 \vee x = 0))$
4. $\forall x \in \mathbb{R} : (x^2 > 4 \Rightarrow x > 2)$.
5. $\exists x \in \mathbb{N} : (x \neq 0 \wedge (\forall y \in \mathbb{N} : (x \cdot y < x + y)))$