

Aufgaben

Das hier sind die Übungsaufgaben zum Folgen-Vortrag im Vorkurs WS 2014.

1. Zeigt, ob folgende Folgen konvergieren

a) $a_n = \frac{n^2+4}{2n^2}$

b) $b_n = \cos(\pi n)$

2. Berechnet die Grenzwerte folgender Folgen. (die Konvergenz darf angenommen werden)

$$a_n = \frac{4^{(2^n)}}{2^{(4^n)}} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{3^n + (-2)^n} \quad c_n = \frac{(-1)^n n}{n+1} \quad d_n = \frac{n^3 - 2n^4 + 5}{n(2n + n^3)}$$

3. Wir wollen uns die Konvergenz der rationalen Folge

$$a_1 = 1 \quad a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{2}{a_n}}{2}$$

herleiten. Wir zeigen dazu:

a) Sei $A = (a_n)_n$ eine positive streng monoton fallende, d.h. $0 < a_{n+1} < a_n \forall n$, und beschränkte Folge. Dann konvergiert sie.

b) es gilt $1 < a_n < 2 \forall n \geq 2$

c) die Folge ist streng monoton fallend für $n \geq 2$. Ihr dürft benutzen, dass sogar $a_n > \sqrt{2}$ gilt.

4. Beweist die umgekehrte Dreiecks-Ungleichung

$$||x| - |y|| \leq |x - y|$$

5. der goldene Schnitt: betrachtet man die sogenannte Fibonacci-Folge

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

Eine interessante Feststellung ist, dass das Verhältnis 2er aufeinander folgender Zahlen gegen einen festen Wert konvergiert. Diesen nennt man den goldenen Schnitt

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Interessant ist, dass das für viele verschiedene Folgen gilt. Zeigt also:

Sei $(a_n)_n$ eine Folge mit der Eigenschaft, dass $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ beliebig sind und

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Dann gilt für die Folge $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$: $b_n \rightarrow \Phi$.

Ihr dürft annehmen, dass $(b_n)_n$ konvergiert (ihr könnt es auch zeigen wenn ihr wollt).

Bemerkung 1.1. Überlegt euch wieso ihr folgenden Ansatz wählen könnt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} + \delta$$