Kapitel 4

Relationen

§01 Partitionen und Äquivalenzrelationen

1. „Wohngemeinschaften und die GEZ“

Wir blicken zurück auf den Beginn des Wintersemesters 2012. Viele viele Studienanfänger_innen lauschen gespannt dem mathematischen Vorkurs, lernen sich und die Stadt kennen und ziehen vielleicht in die ein oder andere Wohngemeinschaft. Ein paar Tage nach dem Einzug erhalten sie auf einmal Post von der Gebühreneinzugszentrale der öffentlich-rechtlichen Rundfunkanstalten (kurz GEZ). Seit langer Zeit verlangt sie von jedem Menschen in Deutschland Rundfunkgebühren. Das Gebührenmodell betrachtet dazu die Menge

$$D := \{x \mid x \text{ ist Mensch in Deutschland}\}$$

Dieses Jahr sieht die Welt aber anders aus. Die GEZ heißt dann ARD ZDF Deutschlandradio Beitragsservice, die Rundfunkgebühren heißen Rundfunkbeiträge, und das Gebührenmodell sieht eine Haushaltspauschale vor. Wir betrachten also

$$H := \{h \mid h \text{ ist ein Haushalt in Deutschland}\}$$

Die Haushalte h enthalten Menschen aus Deutschland[1]. Wir können nur spekulieren, was sich die Zuständigen dabei gedacht haben, aber vermutlich hatten sie folgende Hoffnungen

- Der Verwaltungsaufwand wird kleiner. „H ist kleiner als D“.
- Jeder Mensch ist Mitglied in einem Haushalt. Alle werden erfasst.
- Niemand ist Mitglied in zwei Haushalten. Keiner muss doppelt zahlen.

Die GEZ hofft also, dass H eine *Partition* von D ist.

§01.01 **Definition**. Sei X eine Menge und $P := \{P_1, P_2, P_3, \dots\} \subseteq \mathcal{P}(M)$ eine Menge von nichtleeren Teilmengen von X. Wir nennen P eine *Partition von X*, falls

$$X = \bigcup_i P_i$$

und für alle $P_i, P_j \in P$ genau eine der folgenden Aussagen wahr ist:

1. $P_i = P_j$
2. $P_j \cap P_j = \emptyset$

□

[1] Die Haushalte h sind also Mengen, auch wenn wir hier kleine Buchstaben verwenden.

2. Äquivalenzrelationen

Die Denkweise des Gebührenmodells der GEZ entspricht nicht unserem Denkmuster im Alltag. Wir nehmen unser Leben in Wohngemeinschaften selten als eine Partition aller Menschen wahr und denken wesentlich lokaler. Für uns ist das Zusammenwohnen eher eine *Beziehung* von einem Menschen zu einem anderen. Fragen wir Alice, wo Bob denn wohnt, hören wir „Bob? Mit dem wohne ich zusammen.“ und nicht „Bob und ich sind im selben Haushalt.“

Welche (intuitiven) Anforderungen stellen wir an eine solche Beziehung?

- Alice wohnt zusammen mit Alice. Klingt komisch, ist aber so.
- Alice wohnt zusammen mit Bob. Also wohnt Bob auch zusammen mit Alice.
- Alice wohnt zusammen mit Bob. Bob wohnt zusammen mit mit Charlie. Also wohnt Alice auch zusammen mit Charlie.

§01.02 **Definition**. Sei X eine Menge und $R \subseteq X \times X$. Dann nennen wir R eine *Relation* auf X. Ist $(x, y) \in R$, so schreiben wir auch

$$xRy \text{ oder } x \sim_R y$$

und sagen x *steht in Relation* R *zu* y. □

Für den Relationenbegriff kodieren wir die Elemente, die in Beziehung stehen sollen in einem Paar, also ein Element des kartesischen Produkts. Beziehungen, die die obigen gewünschten Eigenschften besitzen, nennen wir Äquivalenzrelationen.

§01.03 **Definition**. Sei X eine Menge und R eine Relation auf X. Dann nennen wir R eine *Äquivalenzrelation*, falls für alle $x, y, z \in R$ folgendes gilt

(a) $(x, x) \in R$. (Reflexivität)

(b) Aus $(x, y) \in R$ folgt $(y, x) \in R$. (Symmetrie)

(c) Aus $(x, y), (y, z) \in R$ folgt $(x, z) \in R$. (Transitivität)

□

§01.04 **Definition**. Sei X eine Menge, $R \subseteq X \times X$ eine Äquivalenzrelation und $x \in X$ ein Element in X. Dann nennen wir

$$[x] := \{y \in X \mid y \sim_R x\}$$

die *Äquivalenzklasse von* x. Sie besteht aus allen Elementen, die mit x in Beziehung stehen. □

Im Folgenden schreiben wir $x \sim y$, falls keine Verwechslungsgefahr mit anderen Relationen besteht. Ausserdem bezeichnen wir (by abuse of notation) die Relation mit $\sim$.

§01.05 **Beispiel**. In unserem Beispiel der „... wohnt zusammen mit ...“-Relation ist [Bob] die Menge aller Mitbewohner von Bob (und auch Bob). Diese Menge ist aber identisch mit [Alice], da Alice und Bob natürlich die selben Mitbewohner haben. □

§01.06 **Bemerkung**. Sei X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x \in X$. Dann gilt für alle $y \in [x]$:

$$[x] = [y].$$

□

§01.07 **Beweis**. Sei $y \in [x]$, das heißt $y \sim x$. Da $\sim$ symmetrisch ist, gilt auch $x \sim y$. Wir zeigen die Gleichheit von Mengen:

„$\subseteq$“ Sei $z \in [x]$, also $z \sim x$. Wegen der Transitivität von $\sim$ gilt dann $z \sim y$. Also $z \in [y]$.

„$\supseteq$“ Sei $z \in [y]$, also $z \sim y$. Wir nutzen wider die Transitivität von $\sim$ und erhalten $z \sim x$, d.h. $z \in [x]$.

Also gilt $[x] \subseteq [y]$ und $[x] \supseteq [y]$ und somit $[x] = [y]$. □

§01.08 **Bemerkung**. Seien X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x, y \in X$. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

(i) $[x] = [y]$

(ii) $[x] \cap [y] = \emptyset$

□

§01.09 **Beweis**. Wir unterscheiden die Fälle $x \in [y]$ und $x \notin [y]$.

($x \in [y]$) Gelte $x \in [y]$, dann folgt wegen Bemerkung [01.06] $[x] = [y]$. Also $x \in [x] \cap [y] \neq \emptyset$.

($x \notin [y]$) Gelte $x \notin [y]$, also $[x] \neq [y]$. Angenommen es existiert ein $z \in [x] \cap [y]$, d.h. $z \sim x$ und $z \sim y$. Da $\sim$ symmetrisch ist, folgt $x \sim z$ und wegen der Transitivität von $\sim$ auch $x \sim y$. Dann gilt aber $x \in [y]$, ein Widerspruch. Die Annahme war falsch und es gilt $[x] \cap [y] \neq \emptyset$.

□

§01.10 **Definition**. Sei X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann bezeichnen wir mit

$$X/_{\sim} := \{[x] \mid x \in X\}$$

die *Menge der Äquivalenzklassen von X bzgl. $\sim$*. □

§01.11 **Satz**. *Sei X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann ist $X/_{\sim}$ eine Partition von M.* □

§01.12 **Beweis**. Seien $[x_1], [x_2], [x_3], \ldots$ die verschiedenen Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation $\sim$. Wir müssen zeigen

(i) $M = \bigcup_i [x_i]$

(ii) Für alle $x, y \in X$ mit $[x] \neq [y]$ gilt $[x] \cap [y] = \emptyset$.

Die zweite Aussage (ii) folgt direkt aus Bemerkung [01.08]. Wir zeigen noch (i) und müssen die Gleichheit dieser Mengen nachweisen. Sei $x \in X$, dann ist sicher $x \in [x]$. Die Äquivalenzklasse $[x]$ stimmt wegen Bemerkung [01.08] mit einer der Äquivalenzklassen $[x_j]$ überein. Damit ist

$$x \in [x_j] \subseteq \bigcup_i [x_i].$$

Ausserdem ist klar, dass $\bigcup_i [x_i] \subseteq X$, da $[x_i] \subseteq X$. □

§01.13 **Satz.** *Sei X eine Menge und $P \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Partition von X, dann existiert eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X, sodass*

$$X/_{\sim} = P.$$

□

§01.14 **Beweis.** Diesen Beweis überlassen wir als Übungsaufgabe. □

§02 Aufgabenvorschlaege

1. Aufgabe 1

Seien X, Y, Z Mengen. Beweise, dass folgenden Identitäten gelten.

1. $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$
2. $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$
3. $X \cup Y = Y \cup X$
4. $X \cap Y = Y \cap X$

(Diese Aufgabe ist zur Wiederholung des Stoffes des Mengenvortrages und optional.)

2. Aufgabe 2

Wir betrachten die Mengen $T := \{\text{Dr.}\}, A := \{\text{Herr, Frau}\}, V := \{\text{Alice, Bob}\}$ und $N := \{\text{Hathaway, Sinclair, Wayne}\}$. Bilde die folgenden Mengen.

1. $A \times N$
2. $A \times (V \times N)$
3. $(A \times T) \times (V \times N)$
4. $(T \times V) \cup (A \times V)$

3. Aufgabe 3

Betrachte die Menge $M := \{\text{Alice, Bob, Charlie, Dave}\}$. Welche der folgenden Mengen P_i sind Partitionen von M?

1. $P_5 := \big\{\{\text{Alice , Bob}\}, \{\text{Dave}\}\big\}$
2. $P_2 := \big\{\text{Dave, Alice, Bob, Charlie}\big\}$
3. $P_3 := \big\{\{\text{Dave, Alice, Bob, Charlie}\}\big\}$
4. $P_4 := \big\{\{\text{Dave}\}, \{\text{Alice}\}, \{\text{Charlie}\}, \{\text{Bob}\}\big\}$
5. $P_1 := \big\{\{\text{Dave}\}, \{\text{Bob}, \text{Charlie}\}, \{\text{Alice}, \text{Dave}\}\big\}$

Bilde zwei weitere Partitionen von M.

4. Aufgabe 4

Betrachte $M := \{a, b, c, d\}$. Sind die folgenden Relationen auf M reflexiv, symmetrisch, transitiv, Äquivalenzrelationen?

1. $R_1 := \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b)\}$
2. $R_1 := \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$
3. $R_2 := \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$
4. $R_3 := \{(a, a), (b, b), (a, b), (b, a), (c, c), (d, d)\}$
5. $R_4 := \{(a, b), (b, c), (c, d), (a, c), (a, d), (b, d)\}$

Bilde zwei weitere Äquivalenzrelationen auf M.

5. Aufgabe 5

Welche der folgenden Relationen sind Äquivalenzrelationen? Gib gegebenenfalls die Äquivalenzklassen an.

1. Betrachte die Relation $\sim$ auf $\mathbb{Q}$, definiert via $a \sim b :\Leftrightarrow ab \geqslant 0$
2. Betrachte die Relation $\sim$ auf $\mathbb{Z}$, definiert via $a \sim b :\Leftrightarrow a + b$ ist gerade.
3. Betrachte die Relation $\sim$ auf $\mathbb{Q}$, definiert via $a \sim b :\Leftrightarrow ab > 0$
4. Sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Betrachte die Relation $\sim_n$ auf $\mathbb{Z}$, definiert via
   $a \sim_n b :\Leftrightarrow n$ ist ein Teiler von $a - b$.
5. Betrachte die Relation $\sim$ auf der Menge aller Menschen, definiert via „... ist Geschwister von ...“.

6. Aufgabe 6

Sei X eine Menge, $n \in \mathbb{N}$ und $P := \{P_1, \ldots, P_n\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Partition von X. Zeige, dass eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X existiert, sodass

$$X/_{\sim} = P.$$

Beweis. (Anleitung) Konstruiert eine Relation $\sim$, indem ihr eine Bedingung angebt, wann zwei Elemente aus X in Relation stehen. Für $x, y \in X$ definiere

$$x \sim y \;:\Leftrightarrow\; ???.$$

Dabei muss diese Relation so definiert sein, dass sie eine Äquivalenzrelation ist. Dies ist nachzuweisen. Außerdem muss die Äquivalenzrelation so konstruiert werden, dass die Äquivalenzklasse eines Elements $x \in X$ mit einer der Teilmengen P_i übereinstimmt, also $[x] = P_i$ für ein geeignetes i gilt. □