Kapitel 3

Mengen, natürliche Zahlen, Induktion

§01 Motivation

Wir haben im Beweismethode-Vortrag die Struktur eines Satzes kennengelernt. Hier können wir aus einer Prämisse eine Konklusion folgern. Damit das sinnvoll gelingt, muss die Prämisse wahr sein. Weil wahre Aussagen nicht einfach vom Himmel fallen, müssen wir uns auf etwas einigen, was wir als wahr annehmen. Darauf basiert letztlich die gesamte Mathematik.
Diese als wahr angenommenen Aussagen nennen wir **Axiome**. Da wir heute in die Mathematik einsteigen wollen, beschäftigen wir uns mit eben diesen. Der Ansatz liegt in der Mengenlehre, da wir, wenn wir über Mathematik sprechen, intuitiv anfangen, über **Mengen** von Zahlen oder anderen Objekten zu sprechen (z.B. wenn wir lernen, mit den Grundrechenarten umzugehen). Es ist also sinnvoll, einen festen Mengenbegriff zu definieren.
Diese Definition fällt jedoch sehr kompliziert aus, wenn man alles formal korrekt machen möchte. Deswegen gibt es in der Mathematik dazu ein ganzes Teilgebiet, die **Mengenlehre**. Für unsere Zwecke reicht uns jedoch ein naiver Mengenbegriff, mit dem wir uns in diesem Vortrag auseinandersetzen werden.
Außerdem betrachten wir das konkrete Beispiel der Menge der **natürlichen Zahlen** und untersuchen die eine Besonderheit dieser Menge, die uns das Prinzip der **vollständigen Induktion** liefert.

§02 Mengen

1. Definition eines Mengenbegriffes

§02.01 **Definition** *(nach Georg Cantor, 19. Jhd.).* Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Eine Menge ist nicht angeordnet. □

§02.02 **Notation.** Sei M eine Menge. Wir haben folgende Möglichkeiten, M zu notieren:

- Aufzaehlung von Elementen, z.B. $M = \{\text{Donuts}, \text{ Kuchen}, 5\}$ oder $M = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- Definition ueber charakterisierende Eigenschaft: $M = \{x | x \text{ erfuellt Eigenschaft } E\}$

Ist m ein Element von M, d.h. tritt m in einer solchen Aufzaehlung auf oder erfuellt die charakterisierende Eigenschaft einer Menge, so schreiben wir:

$$m \in M.$$

Ist m kein Element von M, so schreiben wir:

$$m \notin M$$

□

§02.03 **Beispiel**. $M = \{x \in \mathbb{N} | 3 < x < 7\} = \{4, 5, 6\}$
Ausserdem gilt $M = \{6, 5, 4, 4\}$ (das versteckt sich hinter den Begriffen "wohlunterschiedenünd nicht angeordnet".) □

§02.04 **Bemerkung**. Man kann einer Menge eine *Kardinalitaet* zuordnen. Formal definiert ist das etwas komplizierter, aber fuer die Zwecke reicht erstmal, sie als die Anzahl der Elemente einer Menge zu definieren. □

§02.05 **Notation**. $\#M$ oder $|M|$. □

§02.06 **Definition**. Es gibt genau eine Menge mit Kardinalitaet 0. Wir nennen sie die *leere Menge*. □

§02.07 **Notation**. $\emptyset$ □

§02.08 **Definition**.

(a) Seien M und N Menge. Es ist N eine *Teilmenge* von M, falls gilt:

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \in M$$

§02.09 **Notation**. $N \subseteq M$ bzw. $M \subseteq N$) □

(b) Wir nennen N eine *echte Teilmenge* von M, falls gilt:

$$N \subseteq M \land \exists m \in M : m \notin N$$

§02.10 **Notation**. $N \subsetneq M$ bzw. $N \underset{\neq}{\subseteq} M$ □

(c) M und N heissen *gleich*, falls gilt

$$M \subseteq N \land N \subseteq M$$

§02.11 **Notation**. $N = M$ □

□

§02.12 **Satz** *(Transitivitaet der Mengeninklusion)*. *Seien L, N, M Mengen mit $L \subseteq N,\ N \subseteq M$. Dann gilt $L \subseteq M$* □

§02.13 **Beweis**. Sei $x \in L$ beliebig. Da $L \subseteq N$, gilt $x \in N$ und da $N \subseteq M$, gilt $x \in M$. □

2. Mengen-Bastelstunde

Wir beschaeftigen uns jetzt mit Operationen, die wir auf Mengen anwenden koennen, um aus mehreren Mengen neue Mengen zu generieren.

§02.14 **Definition**. Sei M eine Menge mit $A, B \subseteq M$ Teilmengen von M. Wir definieren:

(a) den *Schnitt* von A und B: $A \cap B := \{x \in M | x \in A \land x \in B\}$

(b) die *Vereinigung* von A und B: $A \cup B := \{x \in M | x \in A \land x \in B\}$

(c) das *kartesische Produkt* von A und B: $A \times B := \{(a, b) | a \in A \land b \in B\}$

(d) das *Komplement* von A in M: $M \setminus A := \{x \in M | x \notin A\}$

□

§02.15 **Beispiel**. Sei $M = \{1, 2, \dots, 10\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 4, 7\}$. Dann gilt:

(a) $A \cap B = \{1, 4\}$

(b) $A \cup B = \{1, 2, 4, 7\}$

(c) $A \times B = \{(1,1), (1,4), (1,7), (2,1), (2,4), (2,7), (4,1), (4,4), (4,7)\}$

(d) $M \setminus A = \{5, 6, \dots, 10\}$

□

§02.16 **Definition**. Die *Potenzmenge* einer Menge M ist die Menge aller Teilmengen von M:

$$\mathcal{P}(M) := \{N | N \subseteq M\}$$

Es gilt stets $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$ und $M \in \mathcal{P}(M)$, da $\emptyset \subseteq M$ und $M \subseteq M$ immer wahr ist. □

§02.17 **Satz**. *Sei M eine endliche Menge, d.h. $|M| = n < \infty$. Dann gilt:*

$$|\mathcal{P}(M)| > |M|$$

□

§02.18 **Beweis**. Schreibe $M = \{x_1, \dots, x_n\}$. Dann gilt fuer alle $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\{x_i\} \in \mathcal{P}(M)$$

Es gilt aber auch $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$, also:

$$|\mathcal{P}(M)| \geqslant n + 1 > n = |M|$$

□

§03 Natürliche Zahlen

Die erste menge, die den meisten Leuten einfaellt, wenn sie an Mathematik denken, sind die **natuerlichen Zahlen**. Wir wollen uns in diesem Vortrag auch nach dieser Intuition richten und uns die natuerlichen Zahlen als mathematisches Konstrukt anschauen. Dazu betrachten wir, wie sich diese Menge formal definieren und konstruieren laesst.
Der uebliche Nutzen der natuerlichen Zahlen in der Mathematik ist, dass wir zaehlen und nummerieren wollen, wie auch im alltaeglichen Leben. Nur dass wir in der Mathematik mehr die Tatsache nutzen, dass es unendlich viele natuerliche Zahlen gibt.

1. Peano-Axiome

§03.01 **Definition** *(Peano-Axiome)*. Erfuellt eine Menge die *Peano-Axiome*, so nennen wir sie die Menge der *natuerlichen Zahlen*.

P1) $1 \in \mathbb{N}$

P1) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \in \mathbb{N}$, wobei n' den Nachfolger von n bezeichnet

P1) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n' \neq 1$

P1) $m, n \in \mathbb{N}$ und $m' = n' \Rightarrow m = n$

P1) Ist M eine Menge, sodass $1 \in M$ und $\forall n \in \mathbb{N} : (n \in M \Rightarrow n' \in M)$, so gilt $M = \mathbb{N}$

§03.02 **Notation.** $\mathbb{N}$ □

□

Um dieses Axiomsystem zu ueberpruefen, sind zwei Fragen zu klaeren:

1) Existiert ein Objekt mit den geforderten Eigenschaften?

1) Ist das Objekt durch die gegebenen Eigenschaften eindeutig bestimmt?

In diesem Vortrag werden wir nur auf die erste Frage eingehen, da die meisten Zuhoerenden/Lesenden noch nicht genuegend Wissen haben, um die mathematische Begruendung nachzuvollziehen.

2. Formale Konstruktion

§03.03 **Definition.** Wir setzen:

$$\begin{aligned} 1 &:= \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \\ 2 &:= \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\ 3 &:= \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \end{aligned}$$

usw.

Dann ist $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ □

Nun koennen wir auf $\mathbb{N}$ eine Addition und eine Multiplikation definieren:

§03.04 **Definition.** Seien $n, m \in \mathbb{N}$

(a) Setze $n + 1 := n'$ und $n + m' = (n + m)'$

(b) Analog: $n \cdot 1 := n$ und $n \cdot m' = (n \cdot m) + n$

□

§03.05 **Beispiel.**

(a) $n + 3 = n + 2' = (n + 2)' = ((n + 1)')' = ((n')')'$

(b) $n \cdot 3 = n \cdot 2' = (n \cdot 2) + n = (n \cdot 1') + n = ((n \cdot 1) + n) + n = n + n + n$

□

§03.06 **Satz** *(Kardinalitaet der natuerlichen Zahlen). Es ist* $|\mathbb{N}| = \infty$ □

§03.07 **Beweis.** Beweis durch Widerspruch.
Angenommen es ex. ein $m < \infty$, sodass $|\mathbb{N}| = m$.
Dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass n_0 maximal in $\mathbb{N}$ ist. Nach Konstruktion in ? ist dann auch $\mathcal{P}(n_0) \in \mathbb{N}$. Aber nach Satz ? gilt $|\mathcal{P}(n_0)| > n_0$. Das steht im Widerspruch zur Maximalitaet von $|n_0|$. □

§04 Vollständige Induktion

Aus dem fuenften Peano-Axiom kann man ein Beweisprinzip ableiten , welches sich *vollstaendige Induktion* nennt. Die Voraussetzung hierfuer ist, dass wir eine Aussage fuer alle $n \in \mathbb{N}$ zeigen wollen. Man geht nach der folgenden Anleitung vor:

1) *Induktionsanfang:* Zeige die Aussage fuer $n = 1$.

1) *Induktionsvoraussetzung:* Die Aussage gelte fuer ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

1) *Indukionsschritt:* Folgere aus der Induktionsvoraussetzung, dass die Aussage auch fuer $n+1$ gilt.

§04.1 **Anmerkung**. Weshalb gilt die Aussage nun fuer alle $n \in \mathbb{N}$?
Sei $\mathcal{A}$ eine Aussage und gelte:

- $\mathcal{A}$ gilt fuer 1
- $\mathcal{A}$ gilt fuer $n \Rightarrow \mathcal{A}$ gilt fuer $n + 1$

Setze $M = \{n \in \mathbb{N} | \mathcal{A} \text{ ist wahr fuer } n\}$. Nach P5) gilt: $M = N$. □

§04.02 **Satz**. *Fuer alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ □

§04.03 **Beweis**. **Induktionsanfang (IA):** Sei $n = 1$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1)$$

Induktionsvoraussetzung (IV): Es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

fuer ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt (IS): Wir muessen nun zeigen:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+1)$$

Dies tun wir folgendermassen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} + n + 1 \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) + (n+1) \\ &= (n+1) \cdot (\frac{1}{2} \cdot n + 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \end{aligned}$$

□

§04.04 **Satz**. *Fuer alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:* $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$ □

§04.05 **Beweis**. **Induktionsanfang (IA):** Sei $n = 1$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2-1 = 1 = 1^2$$

Induktionsvoraussetzung (IV): Es gelte

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

fuer ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.
Induktionsschritt (IS): Nun ist zu zeigen:

$$\sum_{k=1}^{n+1}(2k+1) = (n+1)^2.$$

Dies tun wir folgendermassen:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k+1) &= \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + 2\cdot(n+1) - 1\\ &\overset{\text{IV}}{=} n^2 + 2n + 1\\ &= (n+1)^2\end{aligned}$$

□

§05 Aufgabenvorschlaege

Bereits bewiesene Saetze (auch aus den vorherigen Vortraegen) duerfen benutzt werden. Es ist euch ueberlassen, welche Aufgaben ihr die Uebungsgruppe rechnen laesst. Ihr solltet die Aufgaben aber vorher einmal selbst gerechnet haben.

1. Elementare Beweise zu Mengenoperationen

Seien A und B Mengen. Zeige:

1. $A \cap B \subseteq A$
   $A \cap B \subseteq B$

1. $A \subseteq A \cup B$
   $B \subseteq A \cup B$

1. $A \cap B \subseteq A \cup B$

2. Komplexere Beweise zu Mengenoperationen

Sei M eine Menge, $A, B \subseteq M$ seien Teilmengen. Zeige:

1. $M \setminus (M \setminus A) = A$

1. $M \setminus (A \cap B) = (M \setminus A) \cup (M \setminus B)$

1. $M \setminus (A \cup B) = (M \setminus A) \cap (M \setminus B)$

3. Schnitte und Vereinigungen: anschaulich

Zeichne folgende Mengen als Bilder an die Tafel und lass die Studis markierten Bereiche mithilfe der Mengen A, B sowie der bekannten Mengenoperationen angeben:

1. $A \cap B$

1. $A \setminus B$

1. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

1. $A \cup B$

Alternativ kannst du sie die Mengen selber zeichnen lassen. Dazu gibst du vorher am besten ein Beispiel, z.B. die erste Menge.

4. Schnitte und Vereinigungen vereinfachen

Seien A, B, C Mengen mit $A \subseteq B \subseteq C$. Wie lassen sich folgende Ausdruecke vereinfachen?

1. $(A \cup B) \cap (B \cup C)$

1. $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

1. $(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B \cap C)$

5. Schnitte und Vereinigungen: Falsche Freunde

Seien A, B, C beliebige Mengen. Unter welchen Bedingungen gilt folgende Aussage:

$$A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$$

6. Kardinalitaet

Hier hilft der zweite Aufgabenblock.
Sei M eine Menge, $A, B \subseteq M$ seien Teilmengen. Es gelte $|M| = 100, |A| = 20, |B| = 10$ sowie $|(M \setminus A) \cap (M \setminus B)| = 75$. Was ist $|A \cap B|$?

7. Vollstaendige Induktion

Beweise folgende Aussagen mittels vollstaendiger Induktion:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$: 3 teilt n^3n
1. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$
1. $2^n > n$
1. $\forall x \in \mathbb{R}$ mit $x > -1$ gilt $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$
1. Definiere $a_1 = 2, a_{n+1} = 2 - \frac{1}{a_n}$. Dann gilt $a_n = \frac{n+1}{n}$
1. Definiere $a_1 = 2, a_{n+1} = a_{n-1} + n \cdot 2^n$. Dann gilt $a_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$.
1. Definiere $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{a_n})$. Dann gilt $\frac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant 2$.

§06 Lösungen zu den Übungsaufgaben