Departamento de Computación
FCEFQyN, Universidad Nacional de Río Cuarto
Asignatura: Algoritmos y Estructuras de Datos I
Segundo Cuatrimestre de 2024

Conceptos Básicos.

Ejercicios

1. Leer los capítulos 2 y 3 del apunte de la materia: *"Construcción de Programas Correctos"*.

2. Dada las siguientes relaciones, determine si son funciones. En caso de serlo, indique si es función parcial o total. Justifique su respuesta en cada caso.

   (a) Sea $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, donde $R = \{(2,3),(4,4),(4,8)\}$.

   (b) Sea $R \subseteq \{1,2,3\} \times \{4,5\}$, donde $R = \{(1,4),(2,5),(3,4)\}$.

   (c) Sea $R \subseteq \{a,b,c,d\} \times \{3,5\}$, donde $R = \{(a,5),(b,3),(d,3)\}$

   (d) Sea $R \subseteq \{2,4,6\} \times \{4,8,12\}$, donde $R = \{(2,4),(2,8),(4,12),(6,12)\}$

   (e) Sea $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, donde $R = \{(x, x * x) / \textit{ para todo } x \in \mathbb{N}\}$

3. Realizar las siguientes sustituciones, eliminando paréntesis innecesarios:

   (a) $(z * 3)[z := 6]$,

   (b) $((z - 4) * x)[x := z - 1]$,

   (c) $(x * x * y)[y, x := 5, 9]$,

   (d) $((z - 9)[z := y])[y := z * 8]$,

   (e) $((a * (b + 1))[a, b := c - b, 3])[c := 5]$.

   (f) $(((a + c - 1) * b)[a, b, c := b, 6, a])[b := 3 + a]$.

   (g) $(((a - 1) * (c + b))[a, b, c := c * 2, z, 81])[z := 3 + a]$.

4. Dada la función max, que devuelve el máximo entre dos números y consideremos los siguientes axiomas:

$$P \ \mathsf{max}\ Q = Q \ \mathsf{max}\ P \tag{1}$$
$$P \ \mathsf{max}\ (Q \ \mathsf{max}\ R) = (P \ \mathsf{max}\ Q) \ \mathsf{max}\ R \tag{2}$$
$$P \ \mathsf{max}\ P = P \tag{3}$$
$$P + (Q \ \mathsf{max}\ R) = (P + Q) \ \mathsf{max}\ (P + R) \tag{4}$$
$$(P \ \mathsf{max}\ Q) \ \mathsf{max}\ P = P \ \mathsf{max}\ Q \tag{5}$$
$$(P \ \mathsf{max}\ Q) \ \geq P \tag{6}$$

   Demuestre las siguientes propiedades:

(a) A max 0 max $-A = A$ max $-A$,

(b) $(A+B) \leq (A+C)$ max $(B+C)+(A-C)$ max $(B-C)$, para $C \in \mathbb{N}$ (Para C perteneciente a los enteros no a los naturales)

(c) $(A+B)$ max $-(A+B) \leq A$ max $-A$ $+$ B max $-B(*\ opcional)$

5. Defina una función máximo de tres, tal que `maxTres x y z` es el máximo valor entre x, y, z, utilizando la función max.

6. Demostrar que la equivalencia lógica ($\equiv$) es una relación de equivalencia, es decir, es reflexiva, simétrica, y transitiva.

7. Demostrar que cualquier operador booleano (en la lógica proposicional) se puede definir utilizando $\neg$ y $\vee$.

8. El operador *nand* (el *and* negado) se define de la siguiente forma:

$$p \mid q = \neg(p \wedge q)$$

Demostrar que cualquier operador lógico (en la lógica proposicional) se puede definir con el *nand*.

9. Utilizando `Java`, definir una clase `Fórmula`, y la jerarquía de subclases correspondiente, que permita modelar las fórmulas de la lógica proposicional. (Pensarlo y Hacer)

10. Demostrar que se cumple la siguiente equivalencia:

$$\langle \exists i : R(i) : T(i) \rangle \equiv \neg \langle \forall i : R(i) : \neg T(i) \rangle$$

11. Dada la definición del cuantificador N :

$$(Ni : R.i : T.i) = (\sum i : R.i \wedge T.i : 1)$$

- 1) Enunciar y demostrar la regla de partición de rango de la contatoria.
- 2) Idem con la regla del rango vacío.
- 3) Probar $(\sum i : R.i \wedge T.i : K) = K * (Ni : R.i : T.i)$

12. Resuelve las siguientes expresiones de cálculo lambda:

(a) $(\lambda x.x + 2)\ 3$

(b) $(\lambda x. -x)\ 7$

(c) $(\lambda x.\lambda y.x * y)\ 5\ 2$

(d) $(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

13. Instalar el intérprete de Python y ejecutar las expresiones del ejercicio 12.

14. Definir el *or* y la implicación en Cálculo Lambda.