



---

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS y NATURALES**

**U.N.C.**

**Cátedra: Sistemas de Control I**

**Año: 2024**

---

**“Trabajo Integrador”**

**Docente: Mg. Ing. Juan Pablo Pedroni**

**Alumno: Rodriguez Facundo Nicolas - 39.473.648**

<b>Índice</b>	<b>2</b>
<b>Introducción</b>	<b>3</b>
<b>Modelo Matemático</b>	<b>4</b>
• Diagrama de bloques	4
• Modelado matemático	5
<b>Análisis del sistema</b>	<b>11</b>
<b>Análisis de estabilidad</b>	<b>12</b>
<b>Análisis temporal</b>	<b>14</b>
<b>Compensación PID</b>	<b>16</b>
<b>Error en régimen permanente</b>	<b>19</b>

## Introducción

Los sistemas de control son una parte fundamental de nuestra vida cotidiana. Se utilizan en una gran variedad de aplicaciones, desde el control de temperatura de un horno hasta el control de vuelo de los aviones.

En este trabajo se presenta el diseño y construcción de un banco de prueba para el estudio de sistemas de control de posición. El sistema balancín es un sistema dinámico con un grado de libertad que consiste en una barra horizontal que se puede mover alrededor de un eje vertical. El movimiento de la barra es producido por una fuerza de empuje generada por un motor con hélice.

El objetivo del trabajo es implementar un controlador PID para estabilizar el balancín. Dicho control se realizará con la ayuda de un sensor, este consiste en un potenciómetro lineal acoplado al eje que para un determinado ángulo nos devolverá un valor de voltaje.

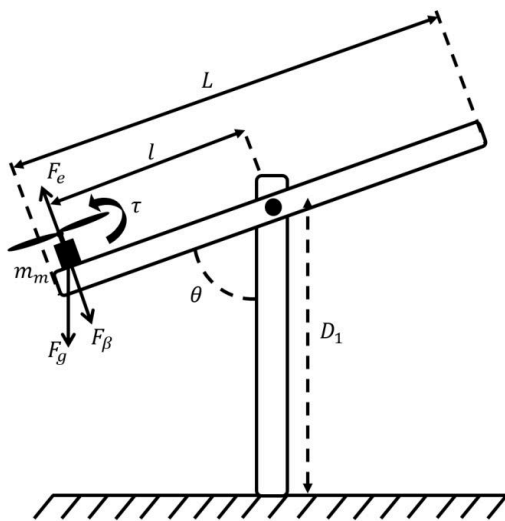


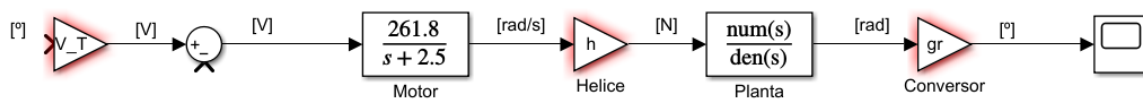
Imagen 1: Diseño del sistema balancín.

## Modelo matemático

### Diagrama de bloques

Para poder controlar y medir el ángulo de inclinación de la barra, trabajaremos con grados. Estos serán transformados en valores de tensión los cuales representarán nuestro setpoint o valores de referencia.

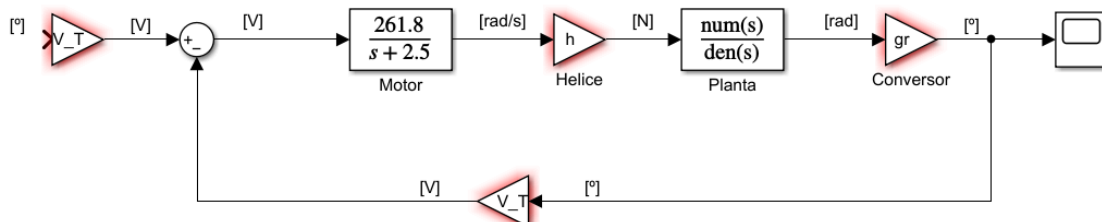
En el lazo abierto del sistema tenemos una función de transferencia que corresponde al motor, el cual para un nivel de voltaje, se obtiene una cierta velocidad de rotación. Acoplado al motor encontramos la hélice cuya función es convertir la velocidad de rotación en fuerza de empuje. Seguido a esto la fuerza de empuje que resulta del motor y la hélice, ingresa a la planta y a la salida de esta se consigue obtener el valor del ángulo del balancín expresado en radianes, queda convertir este valor en grados.



*Diagrama de bloques sistema a lazo abierto.*

Para poder realizar el control del sistema, se realimenta la salida a través del “sensor” mencionado anteriormente en la introducción. El cual además convertirá el valor de grados en niveles de tensión para poder compararlo con el valor del SetPoint.

El esquema representativo de esto es el siguiente:



*Diagrama de bloques sistema de lazo cerrado. (Las funciones dentro del recuadro aún no están definidas).*

## Modelado matemático

Se analizan y obtienen todas las funciones de transferencia que intervienen según el diagrama de bloques.

### Función de transferencia del motor

Para poder obtener la función del motor, se busca a través de mercado libre los motores brushless disponibles en el mercado. Se opta como opción el siguiente motor:

Motor para Drone Brushless 1000KV A2212 4 Axis

- KV: 1000
- Eficiencia máxima: 80%
- Corriente de eficiencia máxima: 4-10A (> 75%)
- Capacidad actual: 12A / 60s
- Sin corriente de carga @ 10V: 0.5A
- Entrada: 2-3 lipo.
- Dimensiones del motor: F27.5 x 30mm
- Diámetro del eje: .173.17mm
- Peso: 47g

Link: [Motor Brushless 1000kv A2212 Drone Cuadricoptero Avion Rc | Envío gratis](#)

Se considera como modelo para el motor un sistema de primer orden:

$$\frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{k}{tm*s + 1}$$

Se tiene como dato que el motor tiene una velocidad de rotación de 1000 rpm/V , es decir, número de vueltas por voltio.

Por lo tanto, podemos obtener el valor de ganancia  $k$  en [rad/s]

```
>> k = 1000*2*pi/60
k =
    104.7198
```

es decir,  $k = 104.7198 \text{ [rad/s]}$

Como el motor no tiene información acerca de la constante de tiempo mecánica  $t_m$  sin carga. Se investigó sobre la misma en distintos informes donde se realizaron experimentos. Concluyendo un valor de  $t_m = 0.4 \text{ [s]}$ .

finalmente la función de transferencia del motor queda definida de la siguiente manera:

$$\frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{104.72}{0.4s + 1} = \frac{261.8}{s + 2.5}$$

### Función de transferencia de la hélice

Esta función define la fuerza de empuje que puede ejercer la hélice según la velocidad angular del motor. Buscando especificaciones de motores de estas características con hélices 1045, encontramos que el vendedor confirma que puede levantar hasta 900 g.

Con estos datos definimos que la fuerza de empuje del motor con la hélice es:

$$F_{\text{emax}} = 0.9 \text{ [kg]} * 9.8 \left[ \frac{m}{s^2} \right] = 8.82 \text{ [N]}$$

Conociendo la tensión máxima que puede recibir el motor (10V) y el valor  $k$ . Se puede calcular la velocidad angular máxima del motor.

$$\omega_{\text{max}} = 104.72 \left[ \frac{rad}{sV} \right] * 10V = 1047.2 \left[ \frac{rad}{s} \right]$$

Luego la función de transferencia de la hélice se obtiene:

$$\frac{F(s)_e}{\omega(s)} = \frac{8.82[N]}{1047.2 \left[\frac{rad}{s}\right]} = 8.42 \times 10^{-3} \frac{[N]}{\left[\frac{rad}{s}\right]}$$

### Función de transferencia de la planta

Para poder deducir la siguiente función será necesario recurrir a la segunda ley de Newton angular. El cual establece que la inercia total del sistema por la aceleración angular es igual a la suma de todos los torques que intervienen en dicho sistema.

Analizando los elementos que intervienen en la planta tenemos que

$$I_T * \alpha = t_{motor} + t_{barra} + t_{friccion}$$

Se podría analizar la función en el dominio del tiempo y próximamente llevarlo a Laplace.

$$I_T * \ddot{\theta}(t) = l * F_e(t) - l * P_{barra} \theta(t) + l * \beta * \dot{\theta}(t)$$

$$I_T * \ddot{\theta}(s) s^2 = l * F_e(s) - l * P_{barra} \theta(s) - l * \beta * \dot{\theta}(s) s$$

$l$  : longitud de la barra, como en la Imagen 1.

A partir de esta ecuación podemos despejar para encontrar la función de transferencia de la planta, que relaciona la entrada,  $F_e$  (fuerza de empuje del motor) y la salida de la planta que se representa la posición  $\theta$  en radianes la cual está la barra.

$$\theta(s) [I_T s^2 + l * F_g \theta(s) + l * \beta * \dot{\theta}(s) s] = l * F_e(s)$$

$$\frac{\theta(s)}{F_e(s)} = \frac{l}{[I_T s^2 + l * F_g + l * \beta * s]}$$

Luego igualando esta función a la función de sistema de segundo orden

$$\frac{\frac{l}{I_T}}{\left[s^2 + \frac{l^2 \beta}{I_T} s + \frac{l^2 F_g}{I_T}\right]} = \frac{k \omega_n^2}{s^2 + 2 \zeta \omega_n s + \omega_n^2}$$

Teniendo como datos:

$$I_T = I_{barra} + I_{motor}$$

La inercia total  $I_T$  es igual a la suma de las inercias causadas por la masa de la barra  $I_{barra}$  y del motor  $I_{motor}$ .

Para calcular la inercia del motor tenemos que

$$I_{motor} = 0.047 kg * l^2$$

donde  $l$  representa la mitad del largo de la barra. Supondremos el largo total de la barra  $L = 60cm$ .

Por lo tanto

$$I_{motor} = 4.23 \times 10^{-3} [kgm^2]$$

Para el cálculo de la inercia de la barra se tiene

$$I_{barra} = \frac{1}{12} * m_{barra} * L^2$$

(Esta ecuación se deduce a partir del análisis de derivadas.)

Suponiendo una masa  $M=0.20kg$

$$I_{barra} = 6 \times 10^{-3} [kgm^2]$$

$$I_T = 10.23 \times 10^{-3} [kgm^2]$$

Finalmente ahora se puede calcular:



$$\omega_n = \sqrt{\frac{l * m_{motor} * 9.8}{I_T}} = \sqrt{\frac{0.30 * 0.047 * 9.8}{10.23 \times 10^{-3}}} = 3.67 [rad/s]$$

Para poder calcular  $\xi$  se utiliza la fórmula que relaciona este valor con la frecuencia y el tiempo de establecimiento. Con respecto al tiempo de establecimiento se investigó de diferentes pruebas que se realizaron y concluimos en 4.5 segundos.

$$\xi = \frac{4}{t_s * \omega_n} = \frac{4}{4.5 * 3.67} = 0.24$$

Finalmente para el cálculo del numerador:

$$\frac{l}{I_T} = k * \omega_n^2 \rightarrow k = \frac{l}{\omega_n^2 * I_T} = 2.1773$$

Resolviendo la función de transferencia de la planta

$$\frac{\Theta(s)}{F_e(s)} = \frac{29.33}{s^2 + 1.778s + 13.47} [rad/N]$$

#### Conversor radianes a grados

A la salida de la planta se tiene que para un cierto valor de fuerza de empuje  $F_e$  en la entrada, se tiene un valor de radianes a la salida. Y para poder trabajar con grados, necesitamos realizar una conversión.

$$\frac{\Theta_{grados}}{\Theta_{radianes}} = 57.2958 [^\circ/rad]$$

### Sensor

Como se comentó anteriormente para poder conocer la posición de la barra, haremos uso de un potenciómetro (sensor). Como se conoce que el resistor es un elemento lineal con respecto a la tensión podemos realizar una tabla que relacione los grados con distintos valores de potencial eléctrico.

Para poder calcular esto, primero debemos conocer el ángulo máximo que puede tener el sistema, es decir, el punto en el cual el motor está sin funcionar. Para ello, definiremos un valor de D1 para la figura 1. Supongamos que D1 = 20cm

Luego por trigonometría se tiene

Command Window

```
>> %sen^-1 = (20cm/30cm) resultado en radianes * 57,2958 para obtener grados
alpha = asin(2/3)*57.2958

alpha =

    41.8103
```

Este valor  $\theta_{\text{grados}} = 41^\circ$  viene a representar el ángulo al inicio del sistema.

Podríamos definir un valor de voltaje para los  $0^\circ$  y de manera lineal obtener un valor tensión para los  $41^\circ$ .

Supongamos que para  $0^\circ$  el nivel de tensión es 0V y para  $41^\circ$  es 4,1V.

Podríamos luego realizar una función lineal tal que

$$\frac{V}{\theta_{\text{grados}}} = 0.1$$

## Análisis del sistema

### Función de transferencia a lazo abierto

```
%Constantes y funciones de transferencia
close all; clear all; clc

s=tf('s');
%FT del motor
W_V = 104.72/(s+2.5)

%Constante helice
h = 8.42e-3

%FT de Planta
T_F = 29.33/(s^2 + 1.778*s + 13.47)

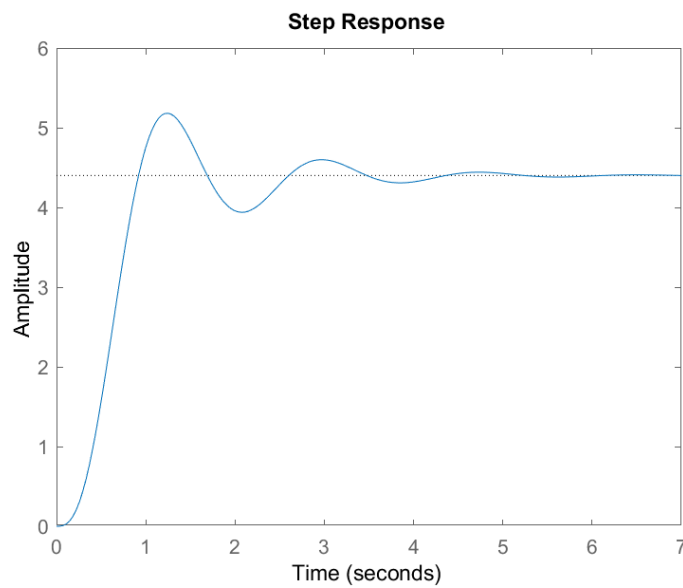
%Constante conversor grados a radianes
gr = 57.2958

%Funcion V y grados
V_T = 0.1

%Sistema
FTLA = W_V*h*T_F*gr*V_T

FTLC = minreal(FTLA/(1+FTLA))
```

$$FTLA = \frac{148.2}{s^3 + 4.278s^2 + 17.91s + 33.68}$$



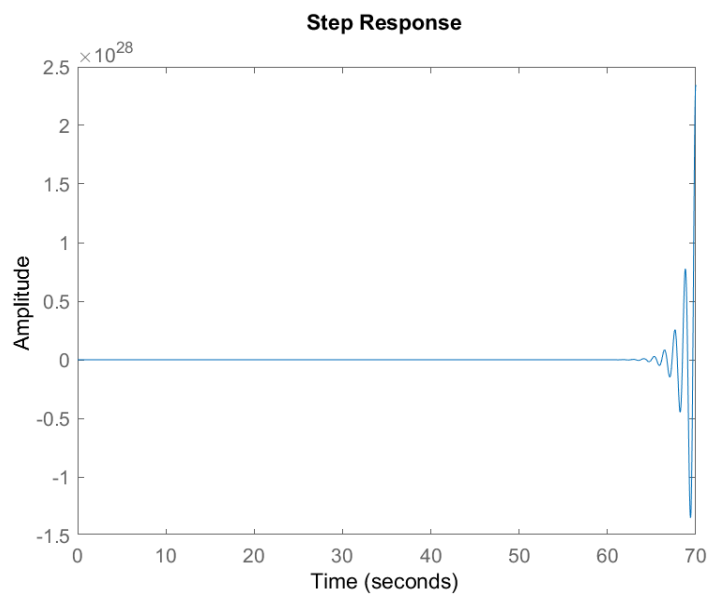
*Comportamiento de la función lazo abierto.*

### Funcion de transferencia de lazo cerrado

Obtenemos la función de transferencia a lazo cerrado

$$FTLC = \frac{FTLA}{1 + FTLA}$$

$$FTLC = \frac{148.2}{s^3 + 4.278*s^2 + 17.92*s + 181.9}$$



*Comportamiento del sistema lazo cerrado*

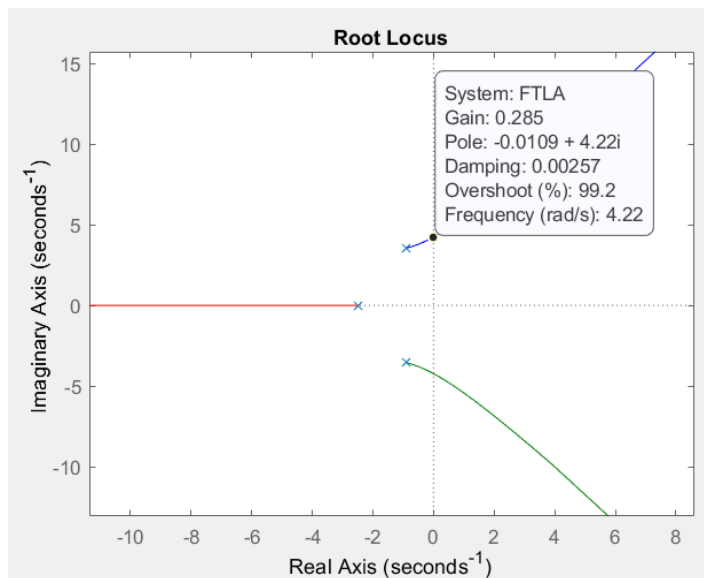
Se puede ver la respuesta del sistema en lazo abierto y lazo cerrado.

### **Análisis de estabilidad**

A través del resultado obtenido anteriormente de la respuesta temporal, el sistema a lazo cerrado parece ser que diverge hacia el infinito, por lo tanto podríamos decir que es inestable. Un método para poder solucionar esto es modificar la ganancia del sistema. Para conocer qué valor de ganancia requiere el sistema para ser estable, podemos hacer un análisis de la estabilidad relativa.

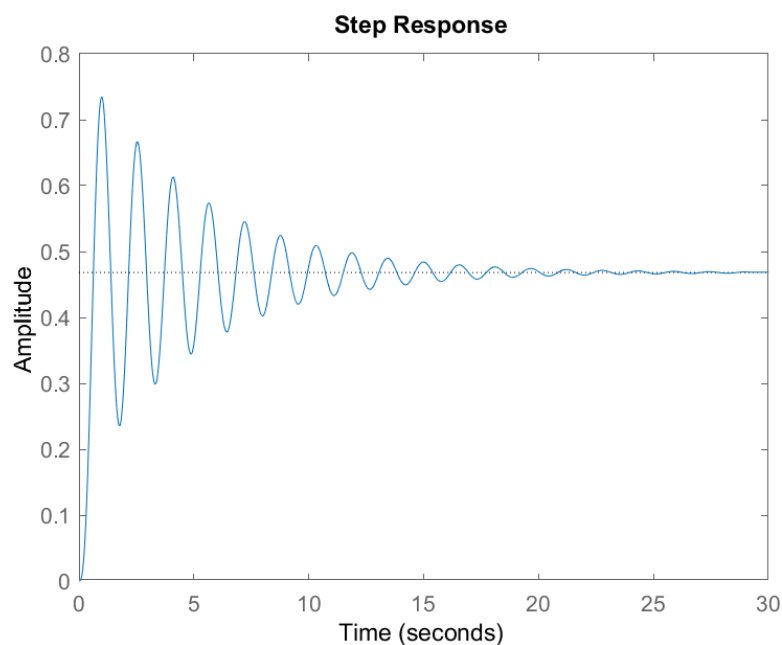
A través de la función rlocus de Matlab vemos que el sistema es estable en lazo abierto para valores de  $K < 0.029$ . Es decir, la inestabilidad del sistema a lazo cerrado se debe a la ganancia que tiene el

mismo, lo que provoca que trabaje en el semiplano derecho (zona de inestabilidad). Obtenemos entonces:



*Polos del sistema, análisis de estabilidad*

Por lo tanto podríamos aplicar una ganancia de 0.02 a nuestro sistema y así lograr una estabilidad. Se obtiene así.



Donde parece que el sistema converge en algún punto en el infinito. Una manera de verificar esto es a través del método de Routh Hurwitz.

$s^3$	a0	a2
	1	17.91
$s^2$	a1	a3
	4.278	33.68
$s^1$	b1	
	10.0372	
$s^0$	c1	
	33.68	

Cálculos

```
%Estabilidad Routh Hurwitz
```

```
a0 = 1;
```

```
a2 = 17.91;
```

```
a1 = 4.278;
```

```
a3 = 33.68;
```

```
b1 = (a1*a2 - a0*a3)/a1
```

```
c1 = (b1*a3 - a1*0)/b1
```

Podemos concluir que el sistema es absolutamente estable porque la tabla no presenta ningún cambio de signo.

### Análisis temporal

Para poder realizar un análisis de la respuesta temporal del sistema se utilizan las funciones pole y rlocus en el sistema a lazo cerrado. Obtenemos así los valores de los polos:

$$P1 = -3.8730 + 0.0000i$$

$$P2 = -0.2025 + 4.0380i$$

$$P3 = -0.2025 - 4.0380i$$

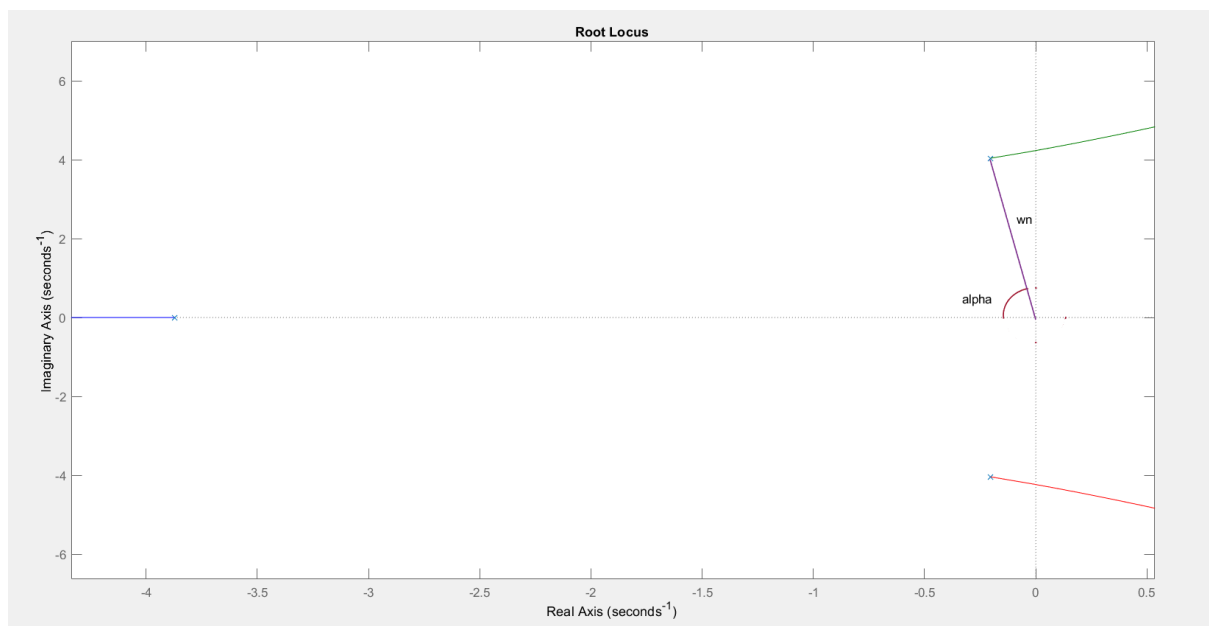
Una vez más comprobamos también la estabilidad del sistema teniendo todos los polos en el semiplano negativo.

Podríamos tomar los polos P2 y P3 y usarlos para analizar el tiempo de subida, de establecimiento y sobrepasamiento.

Para ello pasamos a la forma polar.

$$P2 = 4.043 \angle -87.13$$

$$P3 = 4.043 \angle 87.13$$



$$\omega_n = 4.043$$

$$\xi = \cos(180 - 87.13) = 0.05$$

$$\alpha = 1.52 \text{ [rad]}$$

Podemos entonces calcular el tiempo de subida:

$$t_r = \frac{\pi - \alpha}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} = 0.40 \text{ [s]}$$

Sobrepasamiento Mp:

$$M_p(\%) = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} * 100 = 85.45$$

Tiempo de establecimiento:

$$t_s(2\%) = \frac{4}{\omega_n \xi} = 19.78 [s]$$

### Compensación PID

Para poder realizar las correcciones y mejorar el comportamiento del sistema, se hará uso de un PID. Lo que se busca es lograr minimizar el error, reducir el sobrepasamiento y mejorar el tiempo de establecimiento.

$$PID = K_p \frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s}$$

El objetivo sería cancelar los polos más cercanos al origen. Una manera de implementar el PID sería tomar la función de transferencia de la planta ya que es de segundo orden y es quien establece dichos polos. Por igualación podemos encontrar los parámetros del PID.

$$PID = K_p \frac{s^2 + \frac{1}{T_d} s + \frac{1}{T_d T_i}}{\frac{1}{T_d} s} = K \frac{s^2 + 1.778s + 13.47}{s}$$

$$K_p T_d = K$$

$$T_d = \frac{1}{1.778}$$

$$T_i = \frac{1}{13.47 * T_d}$$

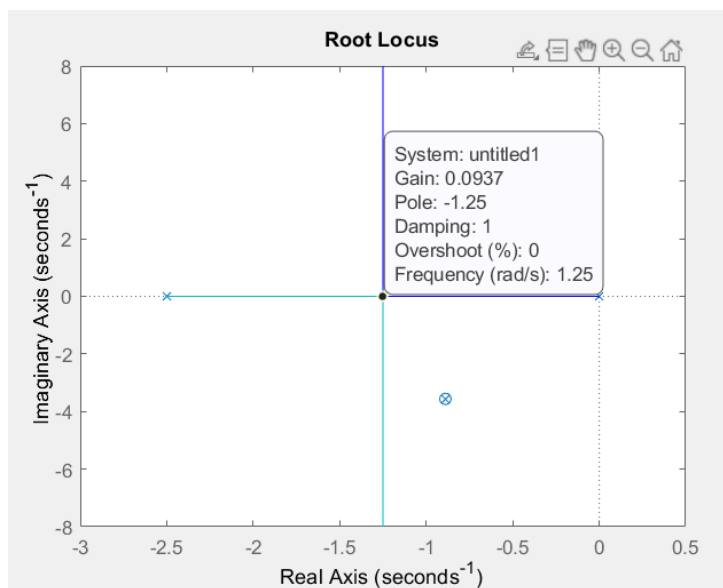
Arbitrariamente se toma  $K_p = 1$ , luego:



```
%Diseño del compensador PID
d = [1 1.778 13.47];
Td=1/d(2);
Ti=1/(d(3)*Td);
Kp=1;

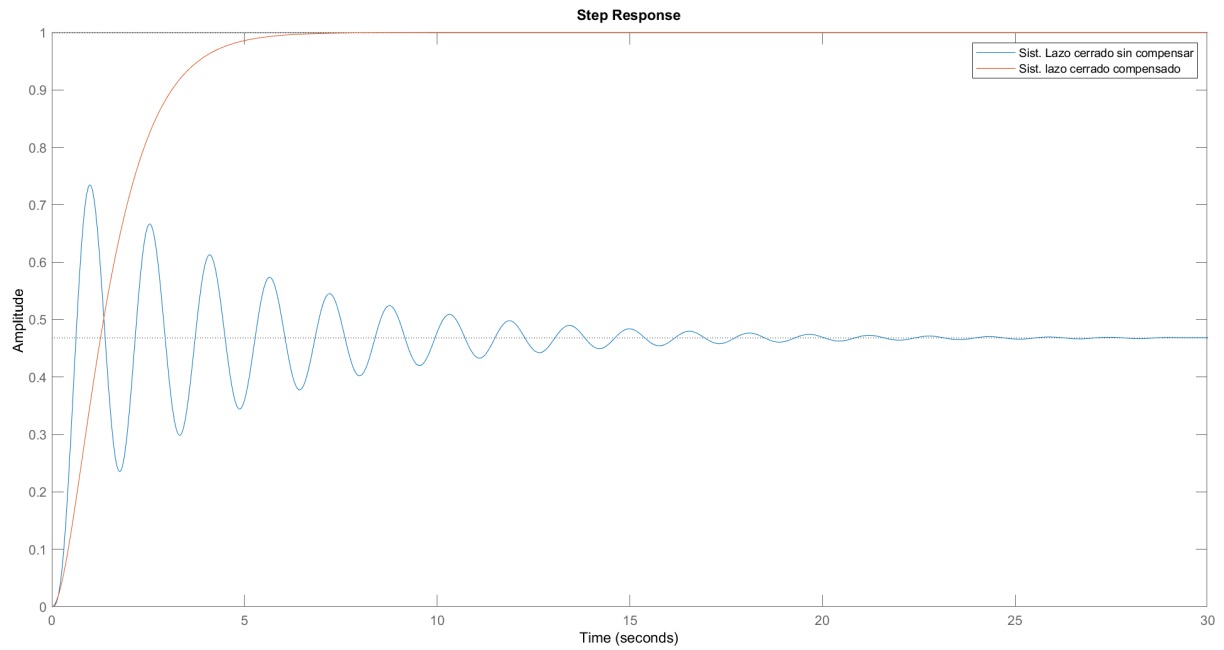
PID = tf(Kp*[Ti*Td Ti 1],[Ti 0])
rlocus(PID*FTLA);
```

A través de rlocus obtenemos el valor de ganancia óptimo

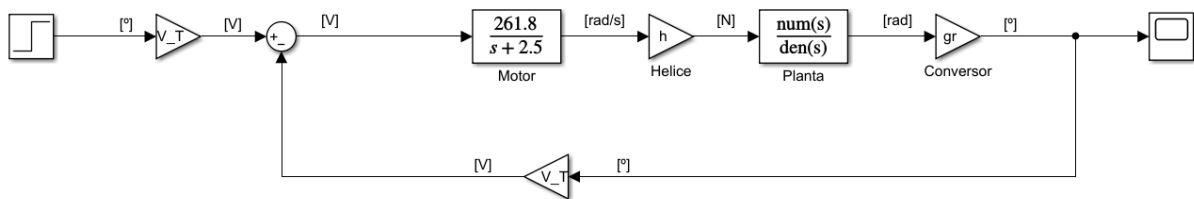


Por lo tanto ahora nuestro sistema compensado tendrá el siguiente comportamiento

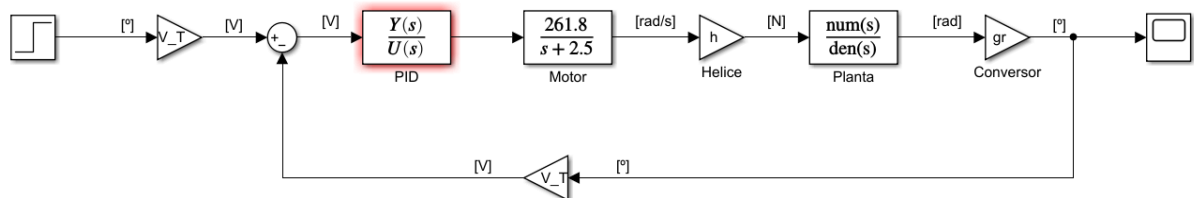
```
step(FTLC, feedback(0.0937*PID*FTLA, 1))
legend('Sist. Lazo cerrado sin compensar', 'Sist. lazo cerrado compensado')
```



*Comparación sistema compensado y sin compensar*



*Diagrama de bloques sistema sin compensar*



*Diagrama de bloques sistema compensado*

### Error en régimen permanente

Luego de la compensación se tiene un sistema del tipo 1. Debido al polo en el origen a causa del Integrador del PID.

Función de transferencia compensada a lazo abierto

$$FTLA_{Compensado} = \frac{1.562}{s^2 + 2.5s}$$

Al ser un sistema de tipo 1 se tiene que:

$$Kp = \lim_{s \rightarrow 0} FTLA_{Compensado} = infinito$$

$$Kv = \lim_{s \rightarrow 0} s * FTLA_{Compensado} = 0.6248$$

$$Ka = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 * FTLA_{Compensado} = 0$$

A continuación se analiza el error para las distintas entradas.

$$ESCALON: \text{erp} = \frac{1}{1 + Kp} = 0$$

$$RAMPA: \text{erp} = \frac{1}{Kv} = 1.6$$

$$PARABOLA: \text{erp} = \frac{1}{Ka} = infinito$$

## **Conclusión**

Si bien muchos de los datos no se pudieron corroborar, a través de distintos informes y experimentos se logró simular en matlab el comportamiento del sistema de balancín.

Este proyecto tiene la característica de poder ver a simple vista el funcionamiento de un sistema compensado contra el sistema sin compensar.

Físicamente al quitar el PID, veríamos que el balancín oscila unos segundo antes de fijarse en el punto correcto. Al conectar el PID se apreciaría que el sistema gradualmente se iría acercando al valor definido por la entrada. Por simulación este punto vemos en la ilustración anterior que lo alcanza aproximadamente a los 5 segundos.

## **Bibliografía**

Apuntes de la cátedra: *Guía de ejercicios Sistemas de control versión 3.3*

Links de internet:

<https://dademuchconnection.wordpress.com/2018/03/09/respuesta-transitoria-de-un-sistema-de-control/>

Monografías e informes de sistemas de balancín:

<https://uvadoc.uva.es/bitstream/10324/1895/1/PFC-P%2026.pdf>

<https://repository.uaeh.edu.mx/revistas/index.php/icbi/article/download/2937/2959/>