11. Establecer si es válida la conclusión en cada uno de los siguientes conjuntos de premisas:

(a) A continuación el razonamiento ordenado:

P1.	$p \implies q$	Premisa 1
P2.	$\neg q$	Premisa 2
P3.	$\neg p \implies r$	Premisa 3
C.	$\therefore r$	Conclusión

Si tomamos la P2. y la P1:

P2.	$\neg q$
P1.	$p \implies q$
	$\neg p$

Table 1: Ley Modus Tolens

Si tomamos $\neg p$ y la Premisa 3:

	$\neg p$
P3.	$\neg p \implies r$
	r

Table 2: Ley Modus Ponens

Por lo tanto es un razonamiento válido

(b) A continuación el razonamiento ordenado:

P1.	$r \iff (p \wedge q)$	Premisa 1
P2.	$\neg q \implies t$	Premisa 2
P3.	$\neg t \vee s$	Premisa 3
P4.	$\neg s \wedge p$	Premisa 4
C.	$\therefore r$	Conclusión

Como asumo que todas las premisas son verdaderas, en particular si asumo que la premisa 4 es verdadera al ser una conjunción de proposiciones, todas estas tiene que ser verdaderas, o sea:

P4: $v(\neg s \wedge p) = V$, *entonces* $v(p) = V$ *y* $v(\neg s) = V$

Luego como $v(\neg s) = V$

$$\begin{array}{ll} & \neg s \\ \text{P3.} & \neg t \lor s \\ \hline & \neg t \end{array}$$

Table 3: Ley Silogismo Disyuntivo

Luego $v(\neg t) = V$

$$\begin{array}{ll} & \neg t \\ \text{P2.} & \neg q \implies t \\ \hline & \neg\neg q \equiv q \end{array}$$

Table 4: Ley Modus Tolens

Luego como $v(q) = V$ y $v(p) = V$, entonces $v(p \wedge q) = V$. Además como la premisa 1 es verdadera, $v(r) = V$. Por lo tanto el razonamiento es válido.

(c) A continuación el razonamiento ordenado:

$$\begin{array}{ll|l} \text{P1.} & p \implies q & \text{Premisa 1} \\ \text{P2.} & r \implies \neg q & \text{Premisa 2} \\ \hline \text{C.} & \therefore r \implies \neg p & \text{Conclusión} \end{array}$$

Primero podemos sustituir la premisa 1 por su contrarecíproco, o sea:

$$p \implies q \; por \; su \; contrareciproco \; \neg q \implies \neg p$$

Entonces:

$$\begin{array}{ll} \text{P2.} & r \implies \neg q \\ & \neg q \implies \neg p \\ \hline & r \implies \neg p \end{array}$$

Table 5: Ley Transitividad de la implicación

Por lo tanto el razonamiento es válido.

(d) A continuación el razonamiento ordenado:

P1.	$p \vee \neg q$	Premisa 1
P2.	$\neg q \Longleftrightarrow r$	Premisa 2
P3.	$p \vee \neg r$	Premisa 3
C.	$\therefore p$	Conclusión

Como asumimos que todas las premisas son verdaderas, en particular asumimos que la premisa 2 es verdadera, o sea:

$$v(\neg q \leftrightarrow r) = V$$

Esto pasa en dos casos:

- **CASO 1**: $v(\neg q) = V$ y $v(r) = V$. Entonces:

$$\begin{array}{ll} & r \\ \text{P3.} & p \vee \neg r \\ \hline & p \end{array}$$

Table 6: Ley Silogísmo Disyuntivo

- **CASO 2**: $v(\neg q) = F$ y $v(r) = F$. Entonces:

$$\begin{array}{ll} & q \\ \text{P3.} & p \vee \neg q \\ \hline & p \end{array}$$

Table 7: Ley Silogísmo Disyuntivo

Por lo tanto el razonamiento es válido.

12. Anlaizar la validez de la conclusión en cada caso:

(a) Ordenamos:

P1.	$\neg s$	Premisa 1
P2.	$p \implies r$	Premisa 2
P3.	$q \implies p$	Premisa 3
P4.	$q \vee t$	Premisa 4
P5.	$t \implies s$	Premisa 5
C.	$\therefore r$	Conclusión

Si observamos la premisa 1 con el contrarecíproco de la premisa 5:

$$\begin{array}{ll} \text{P1.} & \neg s \\ & \neg s \implies \neg t \\ \hline & \neg t \end{array}$$

Table 8: Ley Modus Ponens

Entonces:

$$\begin{array}{ll} & \neg t \\ \text{P4.} & q \vee t \\ \hline & q \end{array}$$

Table 9: Ley Silogismo Disyuntivo

Además por transitividad entre las P3 y P2, vale que $v(q \to r) = V$, entonces:

$$\begin{array}{c} q \\ q \implies r \\ \hline r \end{array}$$

Table 10: Ley Modus Ponens

Por lo tanto la conclusión es válida.

(b) Ordenamos:

P1.	$p \wedge \neg q$	Premisa 1
P2.	$\neg q \iff t$	Premisa 2
P3.	$\neg t \vee \neg r$	Premisa 3
C.	$\therefore r$	Conclusión

Como la P1 asumimos que es verdadera y es una conjunción de proposiciones, entonces $v(p) = V$ y $v(\neg q) = V$. Como P2 es verdadera y $v(\neg q) = V$, vale que $v(t) = V$. Además:

$$\begin{array}{ll} & t \\ \text{P3.} & \neg t \vee \neg r \\ \hline & \neg r \end{array}$$

Table 11: Ley Silogismo Disyuntivo

Por lo tanto la conlcusión es no válida.

c) Usando la Ley del silogismo disyuntivo es fácil ver que la conclusión es válida.

d) Ordenamos:

$$\begin{array}{lc|l} \text{P1.} & (r \implies q) \wedge r & \text{Premisa 1} \\ \text{P2.} & s \implies t & \text{Premisa 2} \\ \text{P3.} & r \implies s & \text{Premisa 3} \\ \hline \text{C.} & \therefore q \vee t & \text{Conclusión} \end{array}$$

Observemos que como la P1 es válida entonces $v(r) = V$ y $v(r \rightarrow q) = V$.

Luego la Ley Modus Ponens $v(q) = V$. Entonces $v(q \vee t) = V$. Por lo tanto la conclusión es válida.

13. Demostrar los siguientes teoremas por vía exclusivamente lógica, sin recurrir a propiedades de los números reales:

(a) Primero traducimos a lenguaje proposicional:

- p: $x = 0$
- q: $y = 1$
- r: $x = y$
- s: $y = z$

Entonces:

H1.	$\neg p \implies q$	Hipótesis 1
H2.	$r \implies s$	Hipótesis 2
H3.	$s \implies \neg q$	Hipótesis 3
H4.	r	Hipótesis 4
T.	$\therefore p$	Tesis

Usando la Ley de transitividad de la implicación podemos ver que H2 Y H3 implican que $v(r \to \neg q) = V$. Además que por el contrarrecíproco de H1 tenemos que $v(\neg q \to p) = V$.

Usando la Ley transitiva entre $r \to \neg q$ y $\neg q \to p$, tenemos que $v(r \to p) = V$. Entonces

$$\begin{array}{ll} \text{H4.} & r \\ & r \implies p \\ \hline & p \end{array}$$

Table 12: Ley Modus Ponens

Por lo tanto el teorema es válido.

(b) Se resuelve de manera similar.Pista: usar mucho el contrarecíproco.

14. Justificar los siguientes razonamientos:

(a) Primero traducimos a lenguaje proposicional:

- p: $2 > 1$
- q: $3 > 1$
- r: $3 > 0$

Por lo tanto el razonamiento queda de la siguiente manera:

H1.	$p \implies q$	Hipótesis 1
H2.	$q \implies r$	Hipótesis 2
H3.	p	Hipótesis 3
T.	$\therefore r$	Tesis

Usando la transitividad de la implicación: $p \to r$ y como $v(p) = V$.

Usando Modus Ponens concluímos que $v(r) = V$. Por lo tanto el razonamiento es válido.

(b) Igual al ejercicio 11d .

(c) Antes de resolver este ejercicion veamos una equivalencia que nos va a resultar muy útil:

EQUIVALENCIA DE LA IMPLICACIÓN: $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

Volviendo al problema, primero ordenamos:

H1.	$r \implies s$	Hipótesis 1
H2.	$p \vee q$	Hipótesis 2
H3.	$\neg(\neg p \implies s)$	Hipótesis 3
H4.	$\neg p \implies q$	Hipótesis 4
T.	$\therefore q \wedge \neg r$	Tesis

Usando la equivalencia, podemos cambiar la hipótesis 3 por:

$$\neg(\neg \boldsymbol{p} \to \boldsymbol{s}) \leftrightarrow \neg[\neg(\neg p) \vee s] \leftrightarrow \neg(p \vee s) \leftrightarrow \neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{s}$$

Por lo tanto como asumimos que todas las hipótesis son verdaderas, tenemos que v($\neg p \wedge \neg s) = V$, o sea, v($\neg p$) $= V$ y $v(\neg s) = V$. Usando el contrarrecíproco de la hipótesis 1 y que $v(\neg s) = V$, deducimos que $v(\neg r) = V$ por Modus Ponens. Y como v($\neg p$) $= V$ y la H4 usando Modus Ponens nuevamente, deducimos que v(q) $= V$.

Luego, como $v(\neg r) = V$ y $v(q) = V$, entonces $v(q \wedge \neg r) = V$.

Por lo tanto, el razonamiento es válido.