17) Negar las siguientes proposiciones:

a) $\exists\, x \mid P(x) \vee \neg\, Q\,(x)$

Negación:

$\forall x: \neg(P(x) \vee \neg\, Q\,(x))$

$\neg(P(x) \vee \neg Q(x)) \Longleftrightarrow \neg P(x) \wedge \neg(\neg Q(x)) \Longleftrightarrow \neg P(x) \wedge Q(x)$

$\Longleftrightarrow Q(x) \wedge \neg P(x) \Longleftrightarrow \neg[Q(x) \Longrightarrow P(x)]$

$\forall x: \neg[Q(x) \Longrightarrow P(x)]$

b) $\forall\, x: P(x) \Longrightarrow Q(x)$

$\forall x : \neg P(x) \vee Q(x)$

Negación:

$\exists\, x / \neg\, [\neg P(x) \vee Q(x)]$ Morgan

$\exists x / P(x) \wedge \neg Q(x)$

c) $\forall\, x, y: x \cdot y = 0$

Negación:

$\exists x, y / x \cdot y \neq 0$

d) $\forall\, x \in N$: x es primo $\Longrightarrow$ x es impar

$P(x) \equiv$ x es primo; $Q(x) \equiv$ x es impar;

$\neg P(x) \equiv$ x no es primo; $\neg Q(x) \equiv$ x es par

$\forall\, x \in N: P(x) \Longrightarrow Q(x)$

$\forall\, x \in N: \neg P(x) \vee Q(x)$

Negación:

$\exists\, x \in N / \neg(\neg P(x) \vee Q(x))$

$[\neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \Longleftrightarrow \neg(\neg P(x)) \wedge \neg\, Q(x) \Longleftrightarrow P(x) \wedge \neg Q(x)]$

$\exists\, x \in N / P(x) \wedge \neg Q(x)$

$\exists\, x \in$ N / x es primo $\wedge$ par

e) $\forall\, x \in Z : 4/x \vee 7/x$ (No son P(x))

f) $\exists\, x \in R \mid x<2 \wedge x>3$

$P(x) \equiv x<2$; $Q(x) \equiv x>3$; $\neg P(x) \equiv x \geq 2$; $\neg Q(x) \equiv x \leq 3$

Negación:

$[\neg(P(x) \wedge Q(x)) \Longleftrightarrow \neg P(x) \vee \neg\, Q(x)]$

$\forall x \in R: x \geq 2 \vee x \leq 3$

g) $\exists\, x \in R / x \neq 2 \wedge x>-1$

$P(x) \equiv x \neq 2$; $Q(x) \equiv x>-1$; $\neg P(x) \equiv x=2$; $\neg Q(x) \equiv x \leq -1$

Negación:

$[\neg(P(x) \wedge Q(x)) \Longleftrightarrow \neg P(x) \vee \neg\, Q(x)]$

$\forall x \in R : x = 2 \vee x \leq -1$

18) Dadas las siguientes proposiciones, analizar el valor de verdad de cada una, negarlas y analizar su valor de verdad.

a) $\forall x, y \in R : x + y = y$ — F si $x \neq 0$

Neg: $\exists x,y \in R / x + y \neq y$ — V si $x \neq o$

b) $\exists\, x, y \in R / 2y + x = y$ — V (ej: $x = 0, y = 0$)

Neg: $\forall\, x, y \in R$: $2y + x \neq y$ — F (ej: $x = 0, y = 0$)

c) $\forall x \in R, \exists y \in R / y + x = 1$ — V (ej: $x = 1, y = 0$)

Neg: $\exists x \in R, \forall x \in R$: $y + x \neq 1$ — F (ej: $x= 1, y = 0$)

d) $\exists y \in R / \forall\, x \in R$: $x + y = 1$ — F (ej: x, $y \neq 1-x$)

Neg: $\forall\, y \in R$: $\exists\, x \in R / x + y \neq 1$ — V (ej: x, $y \neq 1- x$)

e) $\forall X \in Z$: $2x \geq 0 \Longrightarrow x^2$ es par $\vee$ x es par — F (ej: $x=1$)

$P(x) \equiv 2x \geq 0$; $Q(x) \equiv x^2$ es par; $R(x) \equiv$ x es par; $\neg P(x) \equiv 2x<0$; $Q(x) \equiv x^2$ es impar; $R(x) \equiv$ x es impar

$[\neg(P(x) \Longrightarrow (Q(x) \vee R(x)) \Longleftrightarrow \neg\, (\neg P(x) \vee (Q(x) \vee R(x)) \Longleftrightarrow \neg(\neg P(x)) \wedge \neg(Q(x) \vee R(x)) \Longleftrightarrow P(x) \wedge \neg Q(x) \wedge \neg R(x)\ ]$

Neg: $\exists x \in Z / 2x \geq 0 \wedge x^2$ es impar $\wedge$ x es impar — V (ej: $x=1$)

19) Dadas las siguientes proposiciones, se pide:

- **Expresar simbolicamente**
- **negarlas y retraducirlas al lenguaje corriente**
- **Analizar el valor de verdad**

a) Todos los números reales son mayores o iguales que dos.

$\forall x \in \mathbb{R}$: $x \geq 2$

Negación: $\exists x \in \mathbb{R} / x<2$ — V(ej: $x=0$)

Existen reales que son menores que dos.

b) Hay enteros no nulos.

$\exists x \in \mathbb{Z} / x \neq 0$

Negación: $\forall x \in \mathbb{Z}$:$x=0$ — F(ej: $x=1$)

Todos los números enteros son iguales que cero

c) El cuadrado de todo número real es mayor que cero.

$\forall x \in \mathbb{R}$: $x^2>0$

Negación: $\exists x \in \mathbb{R} / x^2 \leq 0$ — V(ej. $x=0$)

Existe algún número real cuyo cuadrado es menor o igual a cero.

d) Algunos enteros son múltiplos de cuatro y son divisibles por cinco.

$\exists x \in \mathbb{Z} / x/4 \wedge x/5$ V(ej. x=20)

Negación: $\forall x \in \mathbb{Z}: \sim x/4 \vee \sim x/5$

Todos los números enteros no son múltiplos de cuatro o no son divisibles por cinco.

e) El cubo de un número real es negativo.

$\forall x \in \mathbb{R}: x^3 < 0$ F($\forall x > 0$)

Negación: $\exists x \in \mathbb{R} / x^3 \geqslant 0$ V($\forall x \geqslant 0$)

Existen números reales cuyo cubo es mayor o igual a cero.

f) Existen enteros cuyo cubo aumentado en uno es igual al cubo del siguiente.

$\exists x \in \mathbb{Z} / x^3 + 1 = (x+1)^3$ V(ej. x=0)

Negación: $\forall x \in \mathbb{Z}: x^3 + 1 \neq (x+1)^3$

Todos los enteros cumplen que su cubo aumentado en uno es distinto al cubo del siguiente.

g) La raíz cuadrada de algunos números reales positivos es mayor o igual que cuatro.

$\exists x \in \mathbb{R}^+ / \sqrt{x} \geqslant 4$ V(ej.x=16)

Negación: $\forall x \in \mathbb{R}^+: \sqrt{x} < 4$ F($\forall x > 16$)

La raíz cuadrada de todos los reales positivos es menor a cuatro.

20) Dadas las siguientes proposiciones se pide:

Traducir al lenguaje corriente, negarlas y luego expresar la negación en el lenguaje usual.

a) $\forall x \in \mathbb{Z}: 2x^3 \geqslant 0$

Todos los enteros verifican que el doble de su cubo es cero o positivo.

Negación: $\exists x \in \mathbb{Z} / 2x^3 < 0$

Existen enteros tales que el doble de su cubo es negativo.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / x + y = 0$

Para todo real existe otro real tal que su suma es cero.

Negación: $\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{R}: x + y \neq 0$

Existen reales tales que, para todo real se verifica que su suma no es nula.

c) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}: x + y = 0$

Existen reales tales que para todo real se verifica que su suma es nula.

Negación: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} / x + y \neq 0$

Para todo real existe otro real tal que la suma de los dos no es nula.

d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / x \cdot y = 1$

Para todo real, existe algún real tal que su producto es igual a uno.

Negación: $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}: x \cdot y \neq 1$

Existen reales tales que, para todo real su producto es distinto a uno.

e) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}: x \cdot y = 1$

Existen reales tales que, para todo real, verifican que su producto es uno.

Negación: $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} / x \cdot y \neq 1$

Para todo real existe otro real tal que su producto es distinto a uno.

21) Dados los siguientes enunciados a) escribirlos en lenguaje coloquial, b) obtener el valor de verdad, c) negarlo y d) hallar el valor de lo negado. Justificar.

a) $\forall x \in \mathbb{N}: (12 = x+4 \vee x = 5 \cdot 3) \Longrightarrow x$ es impar

Todos los naturales verifican que si es ocho o quince, es impar. F(ej. x=8)

Negación: $\exists x \in \mathbb{N} / (12 = x+4 \vee x = 5 \cdot 3) \wedge x$ es par

Existe algún natural que es ocho o quince y es par. V(ej. x=8)

b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Z}: x^2 \geq 0 \Longrightarrow x - 2y = 0$

Para todo real existe un entero tal que, si el cuadrado del primero es positivo o nulo, entonces el real es el doble del entero. F ($\forall x$ no entero)

Negación: $\exists x \in \mathbb{R} / \forall y \in \mathbb{Z}: (x^2 \geq 0) \wedge (x - 2y \neq 0)$ V ($\forall x$ no entero)

Existen reales tales que, para todo entero su cuadrado es positivo o nulo y el real es distinto al doble del entero.

c) $\forall x \in \mathbb{Z}$: (x es par $\wedge$ x es múltiplo de 4) $\Longrightarrow$ x es múltiplo de 8

Para todo entero se verifica que, si es par y es múltiplo de 4, entonces es múltiplo de 8.

F(ej. x=4)

Negación: $\exists x \in \mathbb{Z} / x$ es par $\wedge$ x es múltiplo de 4 $\wedge$ x no es múltiplo de 8. V (ej. x=4)

Existe algún entero tal que es par, es múltiplo de cuatro y no es múltiplo de ocho.

d) $\exists x, y \in \mathbb{R}: x \cdot y < -1$

Existen pares de reales que verifican que su producto es menor que -1. V(ej. -2 y 1)

Negación: $\forall x, y \in \mathbb{R}: x \cdot y \geq -1$ F (ej. -2 y 1)

Para todos los pares de reales se verifica que su producto es mayor o igual que -1.

e) $\forall x \in \mathbb{Z}: x^2 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 0$

Todo entero verifica que si su cuadrado es positivo o cero, entonces es positivo o cero.

F ($\forall x<0$)

Negación: $\exists x \in \mathbb{Z} / x^2 \geqslant 0 \wedge x<0$ V ($\forall x<0$)

Existen enteros tales que su cuadrado es positivo o cero y son negativos.

f) $\forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}: x \cdot y \geq 0 \Longrightarrow (x \geqslant 0 \vee y \geqslant 0)$

Todo par de enteros verifica que si su producto es positivo o nulo, entonces uno de los dos o ambos son positivos o nulos.

F ($\forall x,y<0$)

Negación: $\exists x \in, \exists y \in \mathbb{Z} / x \cdot y \geqslant 0 \wedge (x<0 \wedge y<0)$

Existen pares de enteros tales que su producto es positivo o nulo y son negativos.

V($\forall x,y<0$)