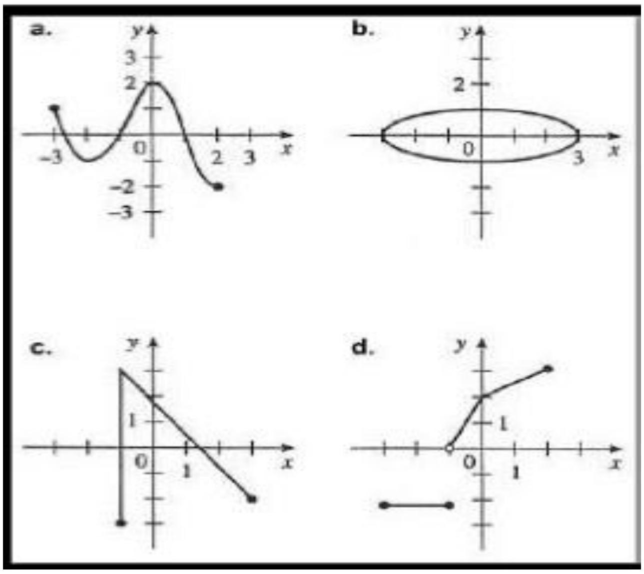
Funciones

1. ¿Cuáles de los siguientes gráficos corresponden a funciones? Justifique su respuesta y, en el caso de que no corresponda a una función, realice el cambio necesario para que lo sea.



Siendo: Dom_a = [-3; 2]

Dom_b = [-3; 3]

Dom_c = [-1; 3]

Dom_d = $(-\infty ; +\infty)$

Para que sea una función a cada valor de la variable x le corresponde un y sólo un valor de la variable y. Por tanto:

- A es función
- B, C y D no son funciones en esos dominios:

Modificaciones:

Domb = $\{-3; 3\}$ Sólo pertenecen al dominio los valores de x=-3 y x=3 para que la relación sea una función.

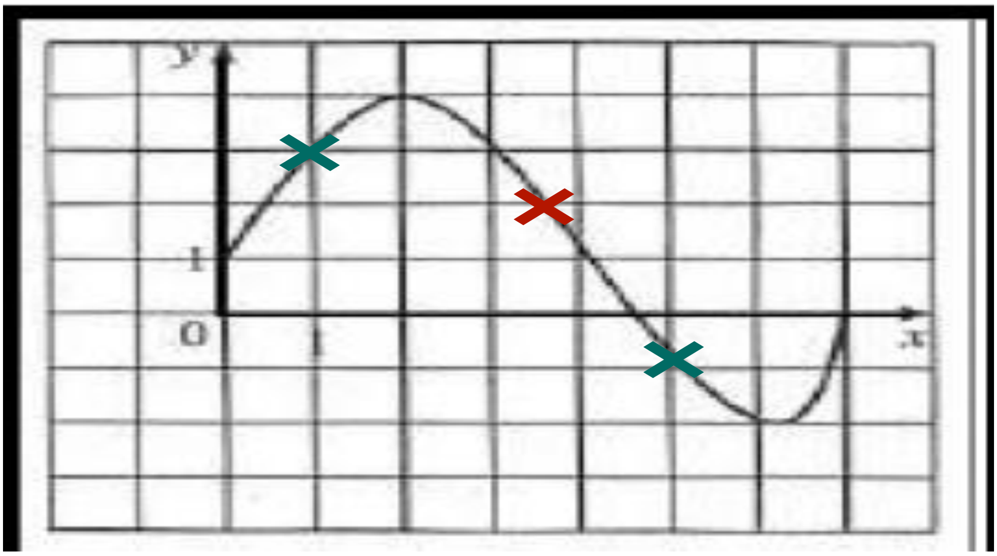
Domc = (-1; 3] Excluímos del dominio original a x=-1.

Domd = [-3; 2] Acotamos el dominio dado.

2. En la figura se muestra el gráfico de una función f con $Dom_f=[0; 7]$

a) Encuentre los valores de f(1) y f(5)

b) Halle x_0 tal que $f(x_0)=2$



a) f(1) = 3; f(5) = -0,5

b) f(0,5) = 2 y f(3,5) = 2

3. En la figura se muestra el gráfico de una función f.

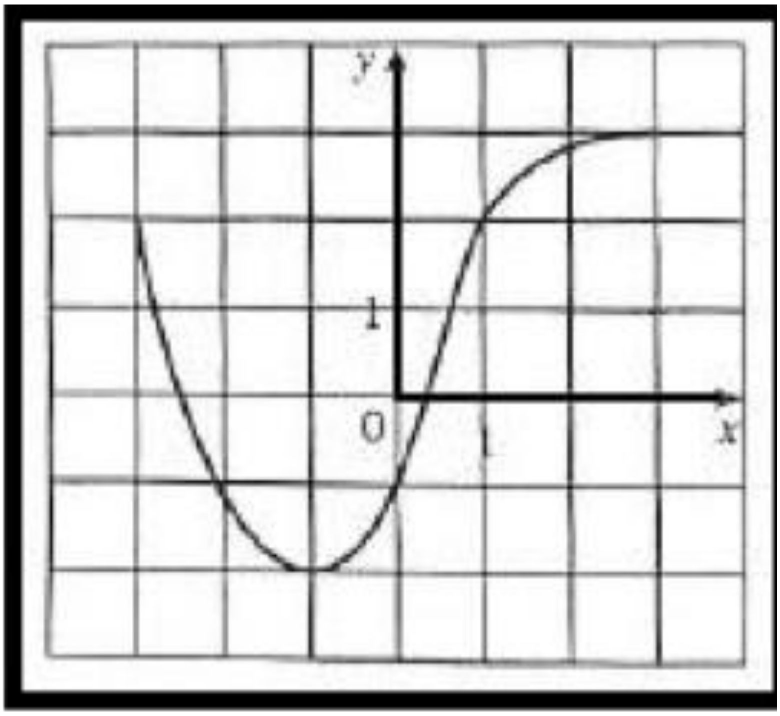
a) ¿Cuál es el dominio de dicha función? $Dom_f = [-3, +\infty)$

b) Establezca el valor de f(-1) f(-1) = -2

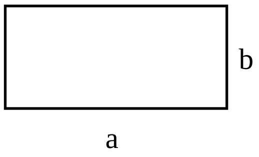
c) Estime el valor de f(2) f(2)~2,8

d) ¿Para cuáles valores de x es f(x) = 2? f(1) = 2 y f(-3) = 2

e) Estime los valores de x tales que f(x) = 0 f(-2,5)= 0; f(0,3)=0



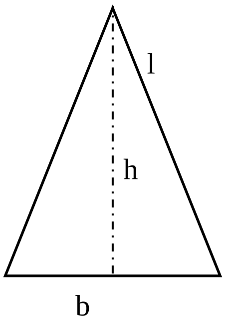
4. El perímetro de un rectángulo es de 50 m. Expresar su área como función de su lado más corto.



2a + 2b = 50 $\Longrightarrow a = \frac{50-2b}{2} = 25 - b$

A = a·b $\Longrightarrow A = (25-b)b = 25b - b^2 \Longrightarrow$ A(b) = 25b - b^2

5. Un triángulo isósceles tiene 100 cm. de perímetro. Expresar su área como función de la longitud de uno de sus lados iguales. Averiguar el dominio de la función A(l) hallada.



2l + b= 100$\Longrightarrow$ b= 100 - 2l $\qquad\qquad A = \frac{b \times h}{2}$

Para reemplazar el valor de h, usamos el Teorema de Pitágoras:

$$l^2 = h^2 + (b/2)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad h^2 = l^2 - (b/2)^2 \Longrightarrow h = \sqrt{l^2 - \frac{b^2}{4}} = \sqrt{l^2 - \frac{(100-2l)^2}{4}} = \sqrt{50l - 2500}$$

Reemplazamos b y h para tenerlo en función de l:

$$A = \frac{b \times h}{2} = (50 - l)\sqrt{50l - 2500} \Longrightarrow \quad A(l) = (50 - l)\sqrt{50l - 2500}$$

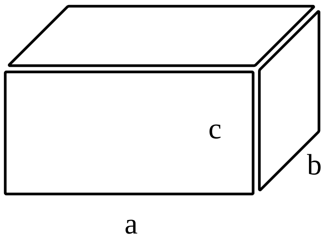
Dom$_A$: La raíz cuadrada de un número negativo no tiene resultado en los números reales, por tanto, la función estará definida siempre que:

$$50l - 2500 \geqslant 0 \Longrightarrow l \geqslant 50$$

6. Una caja de base rectangular, con su parte superior abierta, tiene un volumen de 10 m^3. El largo de la base es el doble de su ancho. El material para la base cuesta \$10 por m2 y el material para las caras laterales, cuesta \$6 por m^2.

a) Exprese el costo del material como función del ancho de la base.

b) Obtenga el costo para los siguientes anchos de la base expresados en metros: 0,6 – 0,8 - 1 – 1,3 – 1,7 - 2 – 2,5 - 3 – 3,6 – 4



V=a·b·c ⟹a·b·c= 10; si a=2b ⟹ (2b) · b · c = 10 ⟹ $2b^2c=10$ ⟹ $c = \frac{10}{2b^2} = \frac{5}{b^2}$

Area lateral larga = a·c = 2·b·c
Area lateral corta = b·c
Entonces:
Area lateral TOTAL= 2·(b·c+2·b·c) = 6·b·c

Costo total= costo base + 2 · costo de Area lateral TOTAL

Costo total= (área de la base)·precio/m^2 de la base + (área lateral TOTAL) · precio/m^2 cara lateral

y= (a·b)·10 + (6·b·c)·6

y= ((2b)·b)·10 + (6·b ·(5/b^2))·6

$$y = ((2b)b)10 + 6b\frac{5}{b^2}6$$
$$y = 20b^2 + \frac{180}{b}$$

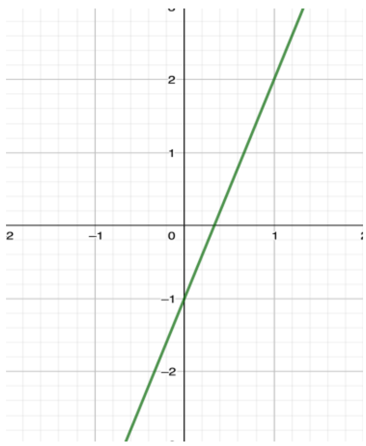
7. Dadas las siguientes expresiones, señalar las ecuaciones asociadas a una función lineal de una variable:

- 10x + 8y - 30 = 0 Sí
- 2x + 3y - z = x + y No
- 4(h+3) - 5t + 8(t-h) = 4 Sí
- $x^2 + y^2 = 4$ No
- $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$ No

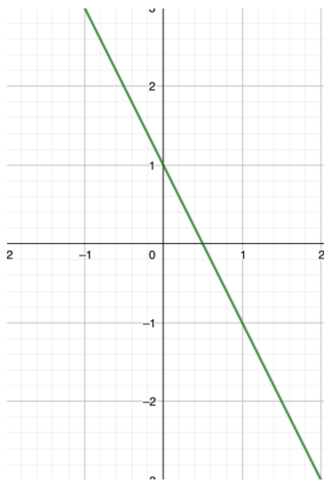
8. Graficar:

a) $f(x) = 3x - 1$
b) $f(x) = -2x + 1$
c) $y = -5$
d) $x = -3$
e) $x + y = 0$
f) $3x - 2y + 1 = 0$
g) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{(-3)} = 1$
h) $f(x) = \begin{cases} 2 & si\ \ x < 0 \\ -x + 2 & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$
i) $f(x) = \begin{cases} -2x\ si\ x < -1 \\ 2x\ si\ x \geq -1 \end{cases}$

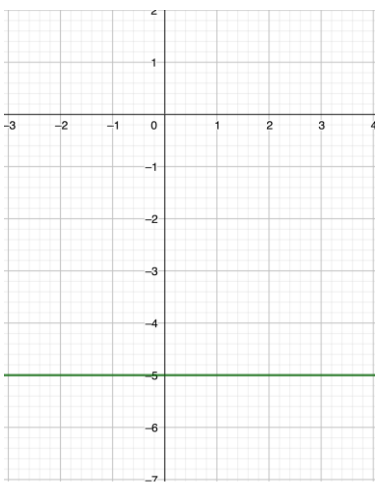
A)



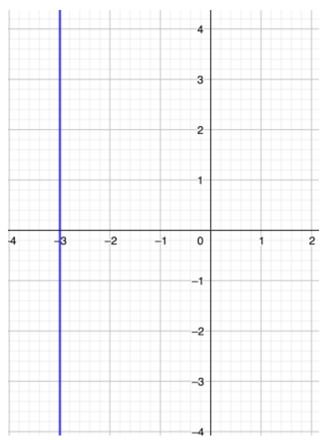
B)



C)

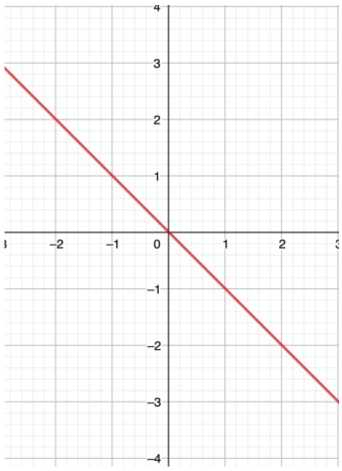


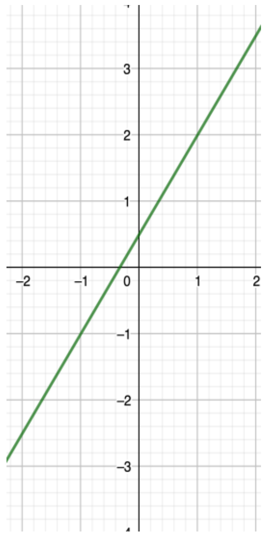
D)



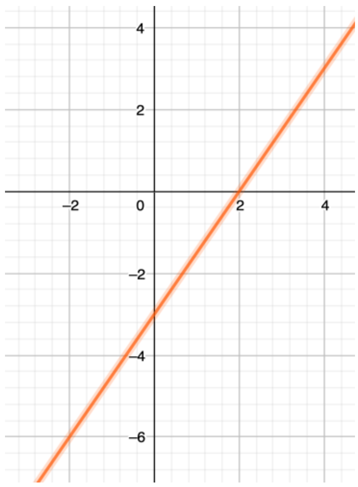
E)

F)

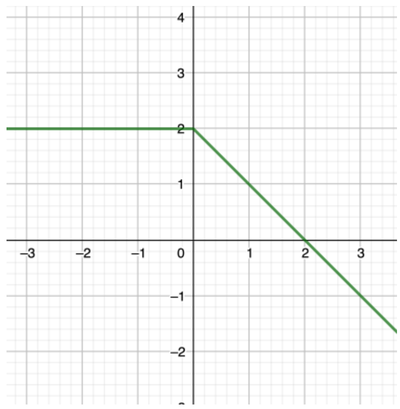

4
3
2
1
−2 −1 0 1 2
−1
−2
−3
−4


3
2
1
−2 −1 0 1 2
−1
−2
−3

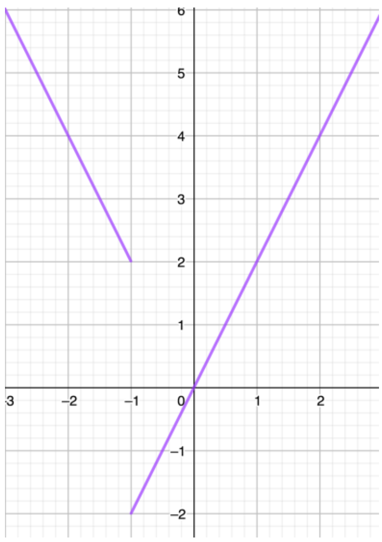
G)


4
2
−2 0 2 4
−2
−4
−6

H)

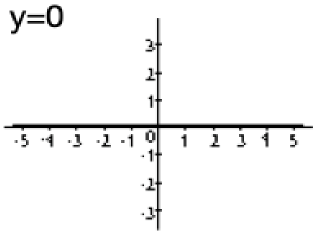

4
3
2
1
−3 −2 −1 0 1 2 3
−1
−2

I)

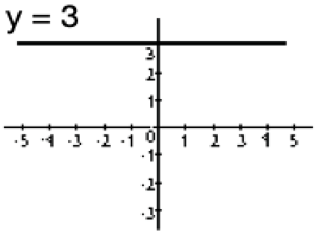

5
4
3
2
1
3 −2 −1 0 1 2
−1
−2

9. Dar la expresión en forma explícita de las rectas graficadas a continuación:

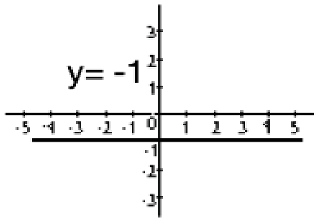
$y=0$



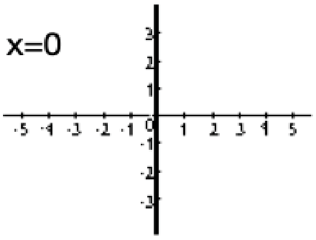
$y = 3$



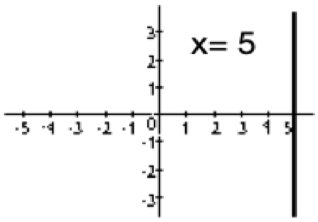
$y = -1$



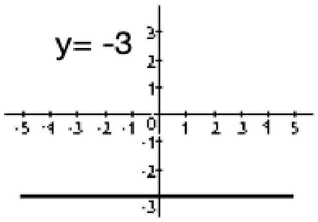
$x=0$



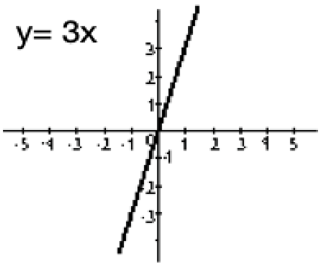
$x = 5$



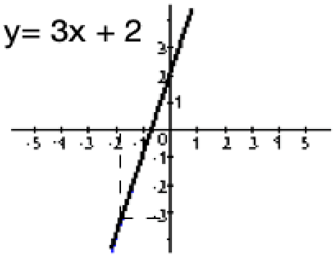
$y = -3$



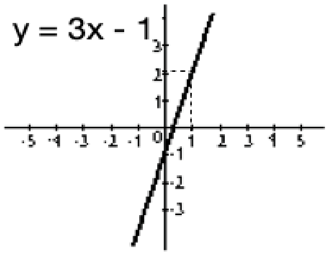
$y = 3x$



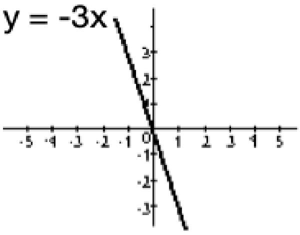
$y = 3x + 2$



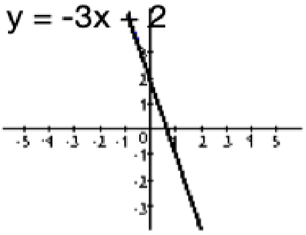
$y = 3x - 1$



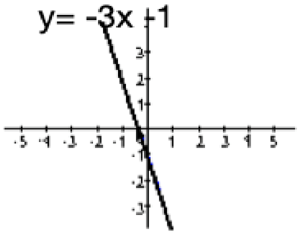
$y = -3x$



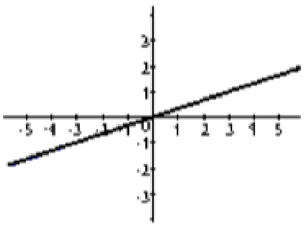
$y = -3x + 2$



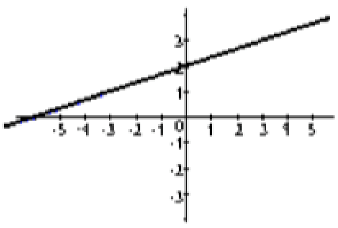
$y = -3x + 1$



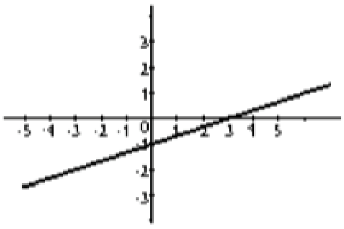
$y = 1/3x$



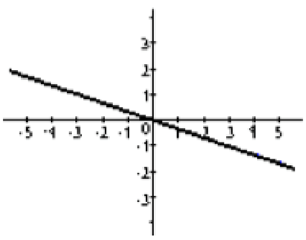
$y = 1/3x + 2$



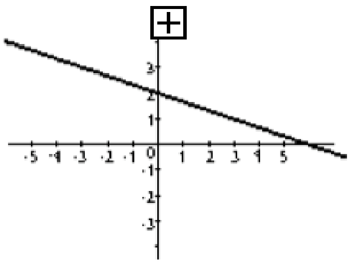
$y = 1/3x - 1$



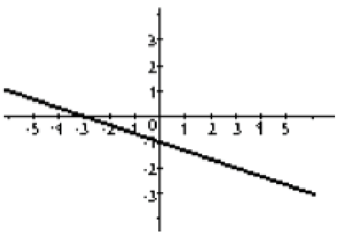
$y = -1/3x$



$y = -1/3x + 2$



$y = -1/3x - 1$



10. Hallar el valor de k en las siguientes ecuaciones a fin de que cada recta pase por el punto indicado:

a) 4x + 3y - k = 0   A=(1 , -2)

4. (1) + 3 (-2) - k =0
4 - 6 - k = 0
-2 - k =0
-2 = 0 + k
-2 = k

b) $-kx + \frac{y}{2} - 1 = 0$ B=(3 , 0)

$-k.3 + \frac{0}{2} - 1 = 0$
-3k -1 = 0
-3k= 0+1
K= 1 : (-3)
k= -1/3

11. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a) (-2, -1) y (-4, -3)

A= (-2, -1); B= (-4, -3)

$$a = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} = \frac{-3-(-1)}{-4-(-2)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

y= ax+b
-1= 1. (-2) +b
-1 = -2 + b
-1+2=b
1=b → **y= x + 1**

b) (3, 5) y (7, -2)

A=(3, 5); B=(7, -2)

$$a = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} = \frac{(-2)-5}{7-3} = \frac{-7}{4}$$

y = ax+b

$5 = -\frac{7}{4}.3 + b$

$5 + \frac{21}{4} = b$

$\frac{41}{4} = b$ → $\boldsymbol{y = -\frac{7}{4}x + \frac{41}{4}}$

12. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto P (2,3) y es paralela a la recta y = -2x +1.

La ecuación de la recta es: y=ax+b

En nuestro caso tenemos un punto P =(2, 3)y como tiene que ser paralela a la recta
y= -2x +1, van a tener la misma pendiente: m= -2

y= a.x+b

3= -2.2 +b

3=-4+b

3+4=b

7= b → y=-2x+7

13. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto P=(-1, 2) y es perpendicular a la recta $y = -\frac{1}{2}x + 2$

Para que sean perpendiculares las pendientes cumplen la siguiente relación **a_1= - 1/a_2**:
Por tanto si tenemos $y = -\frac{1}{2}x + 2$; su pendiente es: a_1= -1/2, y si necesitamos encontrar la recta que sea perpendicular, la pendiente de ésta va a ser a_2=2:

Así reemplazamos a la fórmula:

y=a . x+b

2=2. (-1) + b

2= -2 + b

2+2=b

4=b → **y= 2x + 4**

14. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto P=(3,2) y es perpendicular a la recta x=1.

Solución: y = 2

15. Encontrar la ecuación de la recta que corta al eje de las ordenadas en 3 y al eje de las abscisas en 1.

Tenemos los puntos:

P_1= (0,3) → Ordenada al origen

P_2= (1,0) → Raíz

Según la ecuación de la recta y = ax + b, (a es la pendiente y b es el punto de corte al eje de las ordenadas)

$$a = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{0 - 3}{1 - 0} = -3$$

Como ya habíamos dicho que p_1= (0,3) → Ordenada al origen, b =3

y = -3x + 3

16. Encontrar la ecuación de la recta que corta al eje de las abscisas en -1 y es perpendicular a la recta y = -2x + 4.

P= (-1, 0)

y = -2x + 4, su pendiente es -2; por tanto la pendiente de la recta que buscamos será: ½

Reemplazamos a la ecuación de la recta: y=ax+b

$$0 = \frac{1}{2} \cdot (-1) + b$$

$$0 + \frac{1}{2} = b$$

$$\frac{1}{2} = b \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$$

17. Averiguar si los puntos (0 ; 2), (1 ; -1) y (-1 ; 5) están alineados.

Para que estén alineados las pendientes entre las rectas que los unen deberían ser iguales:

A=(0, 2)

B=(1, -1)

C=(-1, 5)

$$a = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} = \frac{-1-2}{1-0} = -3$$

y=ax+b
-1=-3. 1+b
-1+3=b
2=b → y=-3x+2

Si reemplazamos C=(-1;5) en la recta que pasa por A y B

5=-3. (-1)+2
5= 3+ 2
5 = 5 entonces C pertenece a la recta y=-3x+2, por lo tanto están alineados.

18)i) Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3 ; 2) y (2 ; 5).

A=(3, 2)

B=(2, 5)

$$a = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)} = \frac{5-2}{2-3} = \frac{3}{-1} = -3$$

y=ax+b

2=-3. 3+b

2+9=b

$11 = b \rightarrow$ **$y = -3x + 11$**

ii) Encontrar la ecuación de la recta perpendicular a la obtenida en el punto a) que pasa por (0 ;1).

Si $a_1 = -3$, para que sea perpendicular $a_2 = 1/3$ (rectas $\perp$ $a_1 = -1/a_2$)

$(y - y_0) = a(x - x_0)$

$(y - 1) = 1/3(x - 0)$

$y = 1/3x + 1$

iv) Hallar el punto de intersección de ambas rectas.

Para encontrar el punto de intersección debemos resolver el sistema de ecuaciones:

- $y = -3x + 11$
- $y = 1/3x + 1$

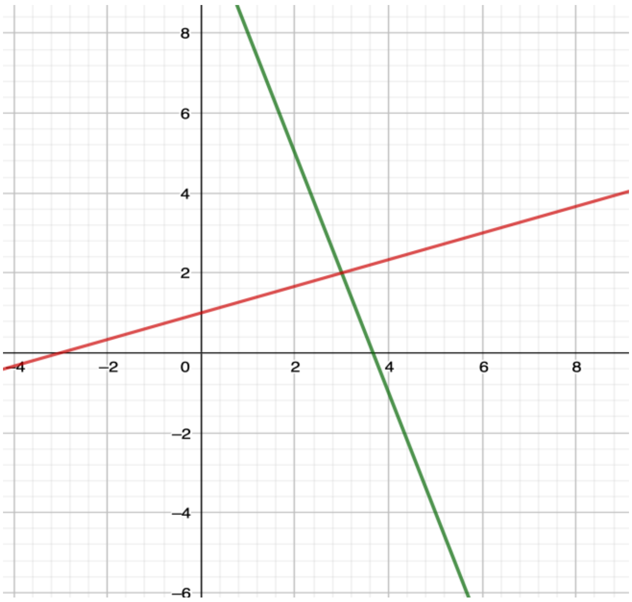
$-3x + 11 = 1/3x + 1$

$-9x + 33 = x + 3$

$10x = 30 \rightarrow x = 3$

$y = -3(3) + 11 = 2 \rightarrow$ El punto de intersección es $P = (3,2)$

v) Graficar ambas rectas.



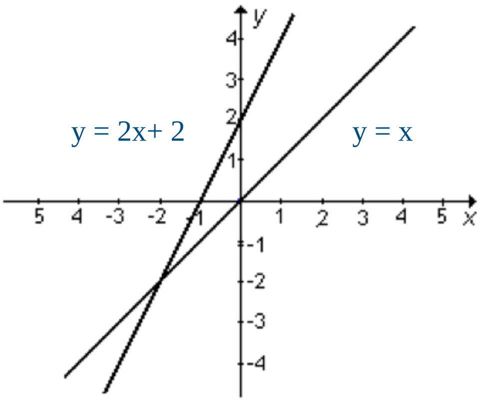
19. Dadas las siguientes funciones lineales:

1. $y = 3x - \frac{1}{3}$
2. $y = 3(x+2)$ $\Longrightarrow$ y= 3x +6
3. $y = 4x + 2$
4. $y = 8\left(x + \frac{1}{4}\right)$ $\Longrightarrow$y= 8x + 2
5. $y = 7x + 2$
6. $y = 3x + 4$

a) ¿Cuáles cortan al eje de las ordenadas en el mismo punto que y = 3x + 2? 3), 4) y 5)

b) ¿Cuáles son paralelas a y = 3x + 2? 1), 2) y 6)

20. Expresar el sistema de dos ecuaciones lineales que se puede determinar con la siguiente gráfica, luego indicar la solución del mismo:



r1: y=x r2: y=2x + 2

Igualo, para calcular la intersección:

x=2x+2

-2=x → x=-2

y=-2

Punto de intersección de las rectas: (-2; -2)

FUNCIÓN CUADRÁTICA

23) Representar gráficamente las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 4x$

b) $y = 2x^2 - 8x + 6$

c) $y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 2$

d) $y = x^2 - 6x + 11$

a) $f(x) = x^2 - 4x$

- **Raíces**

$$\boldsymbol{x^2 - 4x = 0}$$

$$\boldsymbol{x_1;\ x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

a	b	c
1	-4	0

$$x_1;\ x_2 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1\,.0}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-0}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{4 \pm 4}{2}$$

$$\boldsymbol{x_1} = \frac{4+4}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\boldsymbol{x_2} = \frac{4-4}{2} = \frac{0}{2} = 0 \qquad \boldsymbol{x_1 = 4} \quad \textbf{y} \quad \boldsymbol{x_2 = 0}$$

- **Vértice:**

V = $(x_v; y_v)$

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad o\ x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$x_v = -\frac{(-4)}{2.1} = 2$$

$$y_v = \mathrm{f}(\ x_v)$$

$\boldsymbol{f(2) = 2^2 - 4.2}$**= 4- 8= -4**

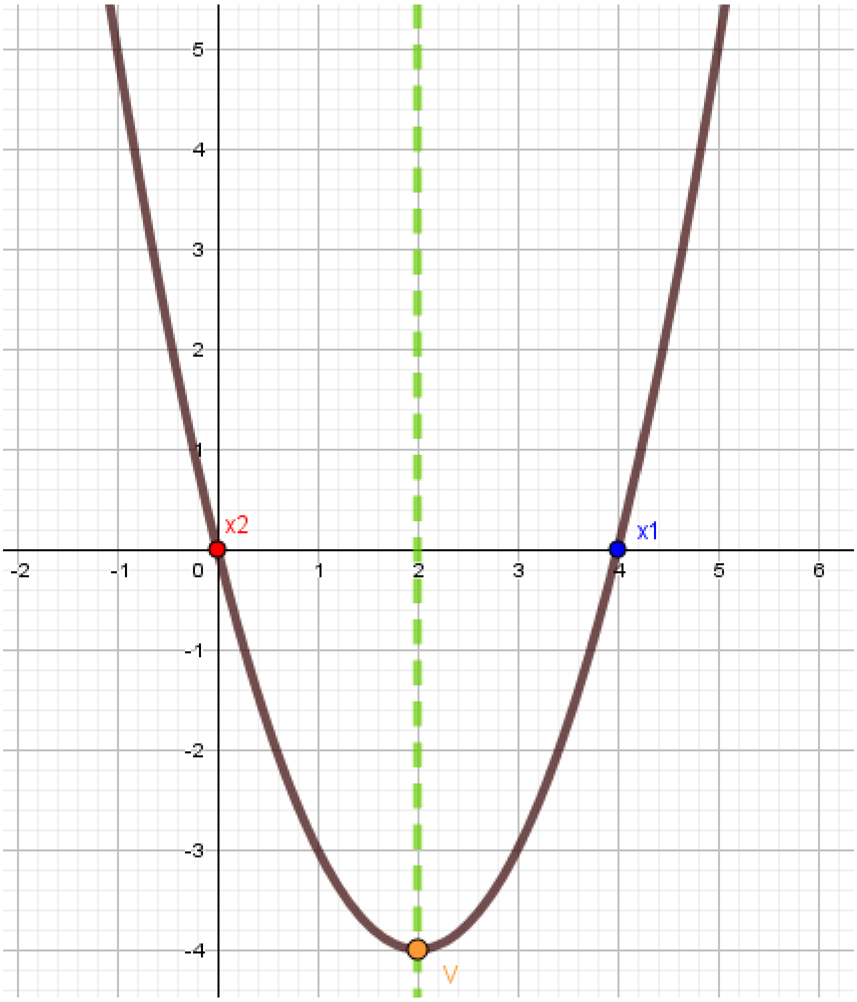
V = $(2; -4)$

- **Eje de simetría:** $x = x_v$

$$x = 2$$

- **Ordenada al origen:**

$$f(0) = \mathbf{0^2 - 4.0} = 0$$



Ecuación factorizada:

$$f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$$

$$f(x) = 1.(x - 4).(x - 0)$$

$$f(x) = x.(x - 4)$$

Ecuación canónica:

$$f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$$

$$f(x) = 1.(x - 2)^2 + (-4)$$

$$f(x) = (x-2)^2 - 4$$

b) $f(x) = 2x^2 - 8x + 6$

- **Raíces**

$2x^2 - 8x + 6 = \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{x_1;\ x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

a	b	c
2	-8	6

$x_1;\ x_2 = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.2\,.6}}{2.2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{4} = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{4} = \frac{8 \pm 4}{4}$

$\boldsymbol{x_1} = \frac{8+4}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$\boldsymbol{x_2} = \frac{8-4}{4} = \frac{4}{4} = 1$ $\qquad \boldsymbol{x_1 = 3}$ **y** $\boldsymbol{x_2 = 1}$

- **Vértice:**

V = $(x_v; y_v)$

$$x_v = -\frac{b}{2a} \qquad o\ x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$x_v = -\frac{(-8)}{2.2} = 2$

$$y_v = \mathrm{f}(\ x_v)$$

$\boldsymbol{f(2) = 2.2^2 - 8.2 + 6 =}$ **-2**

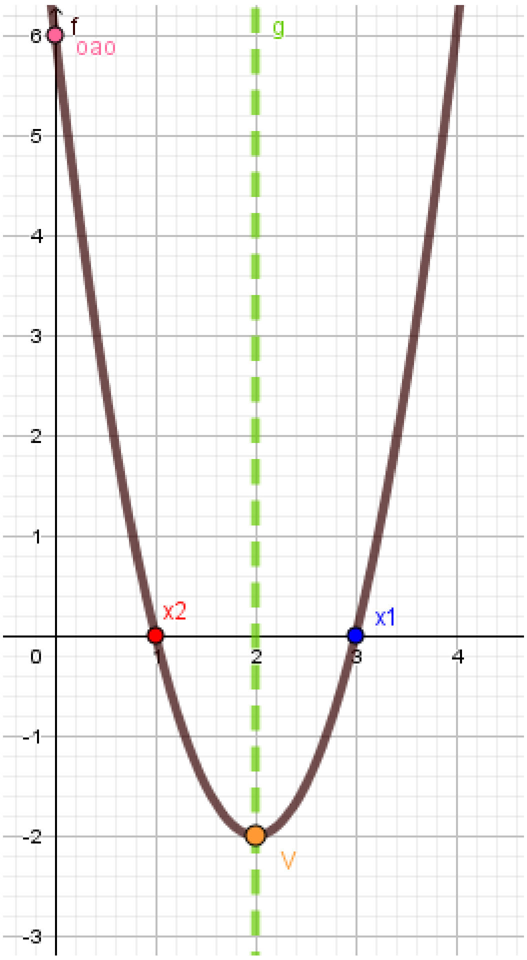
V = $(2; -2)$

- **Eje de simetría:** $x = x_v$

$$x = 2$$

- **Ordenada al origen:**

$$f(0) = 2.\mathbf{0^2 - 8.0 + 6} = 6$$



Ecuación factorizada:

$$f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$$

$$f(x) = 2.(x - 3).(x - 1)$$

Ecuación canónica:

$$f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$$

$$f(x) = 2.(x - 2)^2 + (-2)$$

$$f(x) = 2(x - 2)^2 - 2$$

c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 2$

- **Raíces**

$-\frac{1}{4}x^2 + x + 2 = \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{x_1;\ x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

a	b	C
-1/4	1	2

$$x_1;\ x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.\left(-\frac{1}{4}\right).2}}{2.\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} =$$

$\boldsymbol{x_1} = \frac{-1+\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = 2+2\sqrt{3} \cong 5{,}46$

$\boldsymbol{x_2} = \frac{-1-\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = 2 - 2\sqrt{3} \cong -1{,}46$ $\boldsymbol{x_1} = 2 + 2\sqrt{3}$ y $\boldsymbol{x_2} = 2 - 2\sqrt{3}$

- **Vértice:**

V = $(x_v; y_v)$

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$x_v = -\frac{1}{2.\left(-\frac{1}{4}\right)} = 2$

$$y_v = \mathrm{f}(\ x_v)$$

$\boldsymbol{f(2) = \left(-\frac{1}{4}\right).2^2 + 2 + 2 = 3}$

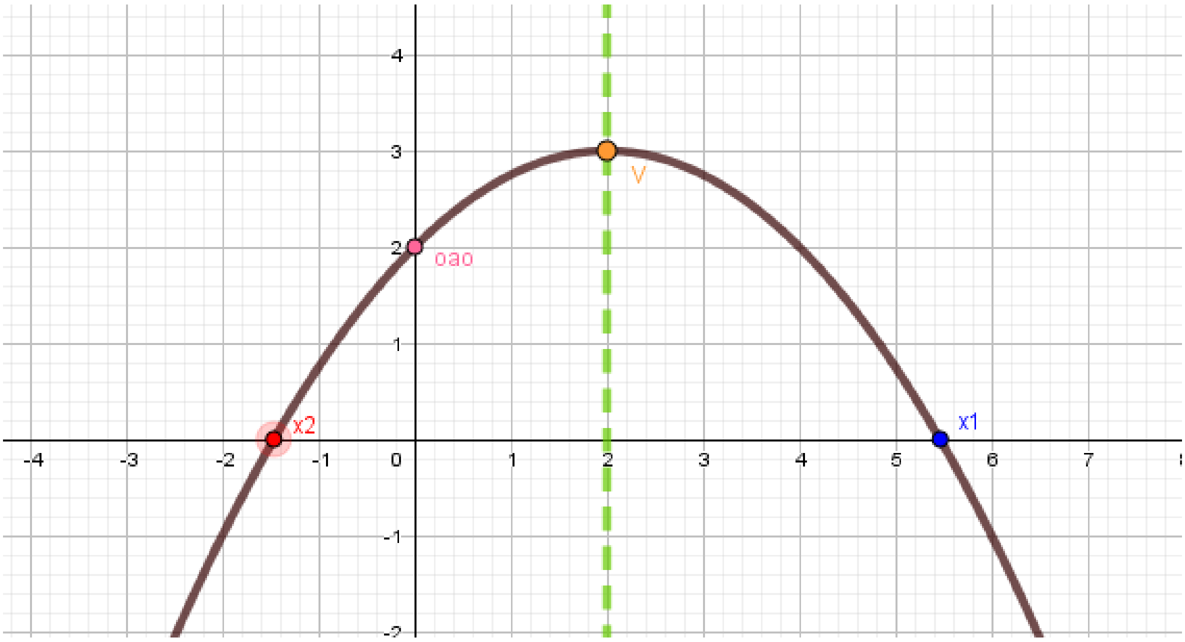
V = $(2; 3)$

- **Eje de simetría:** $x = x_v$

$$x = 2$$

- **Ordenada al origen:**

$$f(0) = -\frac{1}{4}.\mathbf{0^2} + \mathbf{0} + \mathbf{2} = 2$$



Ecuación factorizada:

$$f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$$

$$f(x) = 2.\left(x - \left(2 + 2\sqrt{3}\right)\right).(x - \left(2 + 2\sqrt{3}\right))$$

Ecuación canónica:

$$f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}.(x - 2)^2 + 3$$

d) $f(x) = x^2 - 6x + 11$

- **Raíces**

$$x^2 - 6x + 11 = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{x_1;\ x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

a	b	c
1	-6	11

$$x_1;\ x_2 = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.1\,.11}}{2.1} = \frac{6 \pm \sqrt{36-44}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-8}}{2} = \text{no tiene raíces en R}$$

- **Vértice:**

V = $(x_v; y_v)$

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

$$x_v = -\frac{(-6)}{2.1} = 3$$

$$y_v = \text{f}(\ x_v)$$

$$\boldsymbol{f(3) = 3^2 - 6.3 + 11 = 2}$$

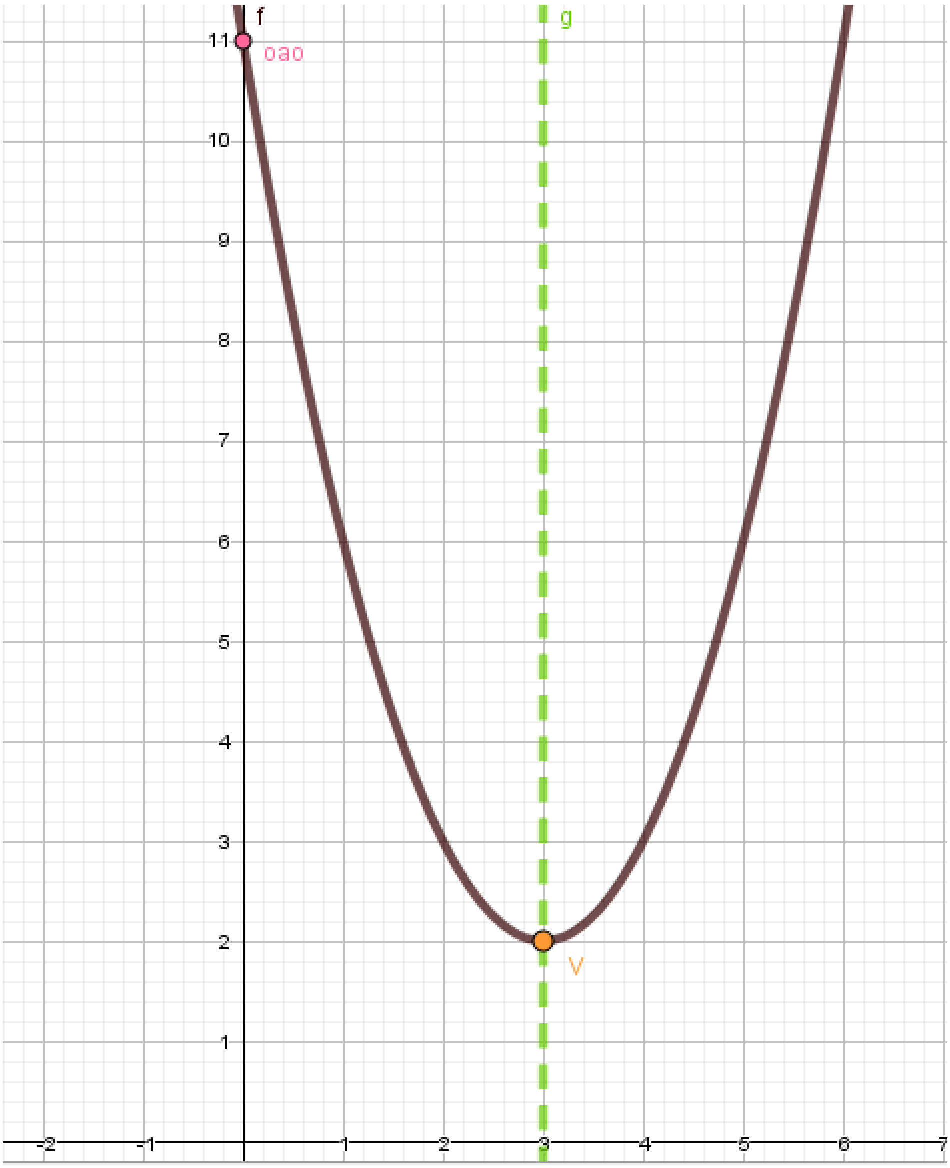
V = $(3; 2)$

- **Eje de simetría:** $x = x_v$

$$x = 3$$

- **Ordenada al origen:**

$$f(0) = \mathbf{0^2 - 6.0 + 11} = \mathbf{11}$$



Ecuación factorizada:

No se puede expresar en función de las raíces

Ecuación canónica:

$$f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$$

$$f(x) = (x - 3)^2 + 2$$

26) Hallar la ecuación de la parábola con una raíz en $x_1 = 1$ y que es intersectada en los puntos (-2,0) y (2,4) por la recta que pasa por dichos puntos. Graficar ambas funciones.

$x_1 = 1$

$P_1 = (-2; 0) \quad \rightarrow \quad x_2 = -2$

$P_2 = (2; 4)$

Usamos la forma factorizada ya que el problema nos da como datos las dos raíces:
$y = a.(x - x_1).(x - x_2)$ reemplazando:
$y = a.(x - 1).(x - (-2))$
$y = a.(x - 1).(x + 2)$

$P_2 \in a\ la\ parábola$

$4 = a.(2 - 1).(2 + 2)$
$4 = a.1.4$
$4 = a.4$
$\frac{4}{4} = a$
$1 = a \rightarrow \quad y = 1.(x - 1).(x + 2)$
$y = (x - 1).(x + 2)$

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por P_1 y P_2

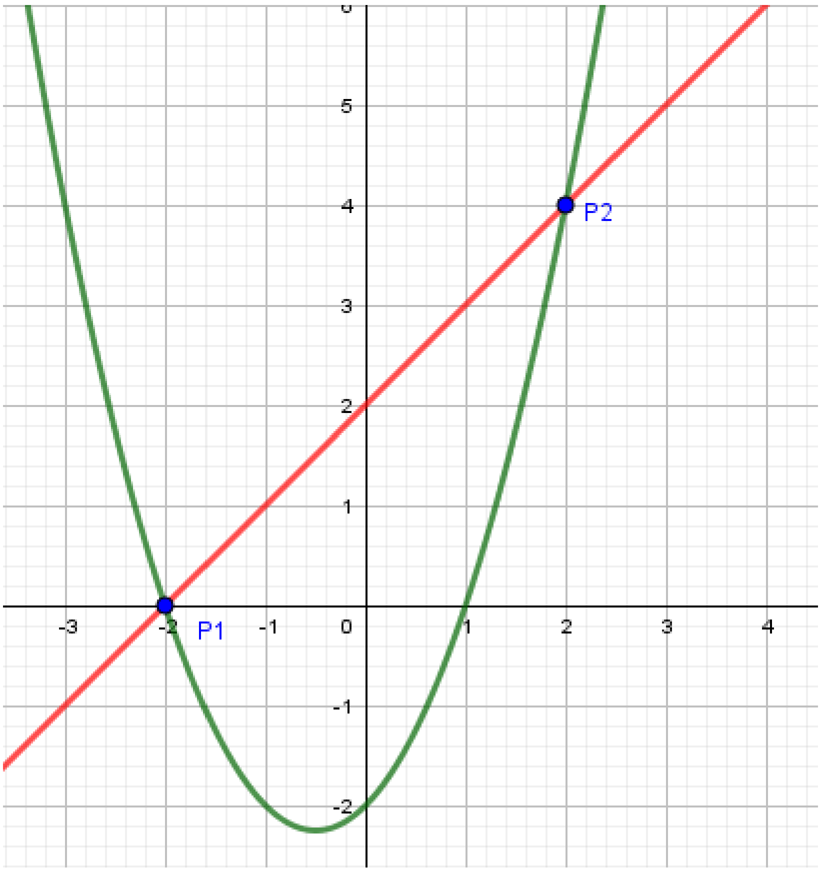
$$a = \frac{4 - 0}{2 - (-2)} = \frac{4}{4} = 1$$

$y = ax + b$
$4 = 1.2 + b$
$4 - 2 = b$
$2 = b \rightarrow y = 1x + 2$
$y = x + 2$

Para graficar la parábola: $y = (x - 1).(x + 2)$
Las raíces son $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$
Vértice: $x_v = \frac{1+(-2)}{2} = -\frac{1}{2}$
$y_v = y = \left(-\frac{1}{2} - 1\right).\left(-\frac{1}{2} + 2\right) = -\frac{9}{4}$

$V = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{4}\right)$, **Eje de simetría**: $x = -\frac{1}{2}$

Ordenada al origen: $f(0) = (0 - 1).(0 + 2) = -2$



27) Hallar la ecuación de la parábola que corta al eje de las ordenadas en *y* = 2 y que es intersectada en los puntos (-1, -1) y (1,1) por la recta perpendicular a *y* = -*x* + 2 que pasa por el punto (0,0). Graficar ambas funciones.

Ordenada al origen: (0;2)

$$y = ax^2 + bx + 2$$

P_1=(-1;-1) → $-1 = a.(-1)^2 + b\,.(-1) + 2$

$$-1 = a - b + 2$$

$$-3 + b = a \qquad (*1)$$

P_2=(1;1)→ $1 = a.1^2 + b\,.1 + 2$

$$1 = a + b + 2$$

$$-1 - b = a \qquad (*2)$$

De (*1) y (*2) $\qquad -3 + b = -1 - b$

$$-3 + 1 = -2b$$

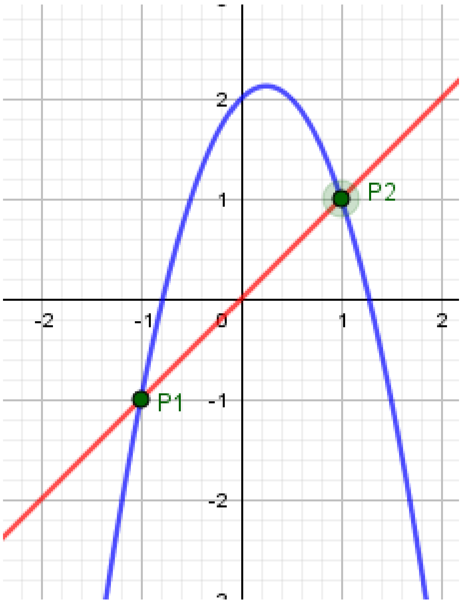
$$\frac{-2}{-2} = b$$

$$1 = b \rightarrow a = -3 + 1 = -2$$

Ecuación de la parábola: $y = -2x^2 + x + 2$

Recta perpendicular a y=-x+2 que pasa por (0;0) → **y = x**

Para graficar $y = -2x^2 + x + 2$, recuerden buscar las raíces, el vértice, el eje de simetría y la ordenada al origen.



28) Dada la función cuadrática y = x^2 - 2x + 3

a) Hallar la función canónica.
b) Hallar, si existen, sus raíces.
c) Indicar el vértice.
d) Graficar.

$f(x) = x^2 - 2x + 3$

a) **V =** $(x_v; y_v)$

$x_v = -\frac{b}{2a}$ → $x_v = -\frac{(-2)}{2.1} = 1$

$y_v = \mathrm{f}(x_v)$

$\boldsymbol{f(1) = 1^2 - 2.1 + 3 = 2}$

V = $(1; 2)$

Ecuación canónica: $f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$

$$f(x) = (x - 1)^2 + 2$$

b) **Raíces**

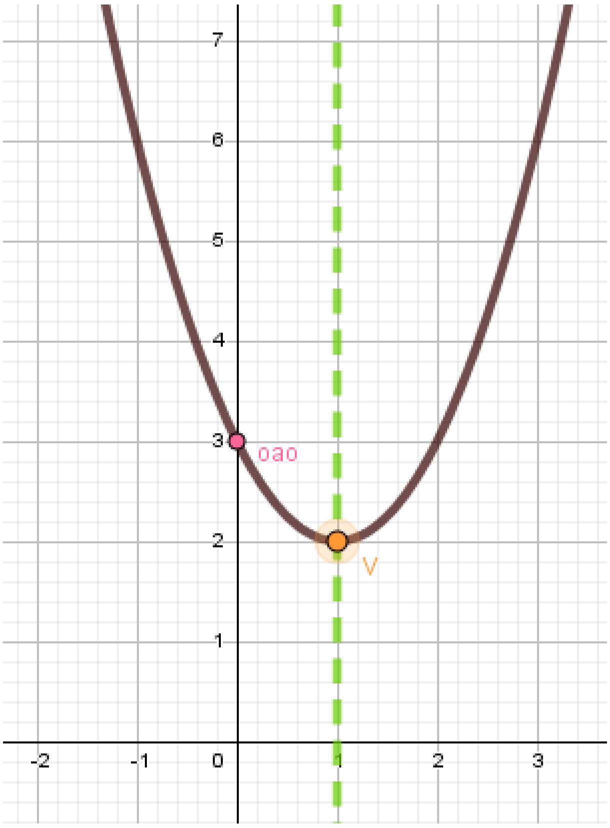
$x^2 - 2x + 3 = \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{x_1;\ x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

a	b	c
1	-2	3

$x_1;\ x_2 = \frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4.1\,.3}}{2.1} = \frac{2 \pm\sqrt{4-12}}{2} = \frac{2 \pm\sqrt{-8}}{2} = \text{no tiene raíces en R}$

c) **Vértice:** **V =** $(3; 2)$



d) **Eje de simetría:** $x = 3$

Ordenada al origen: $f(0) = 3$

29) Hallar el eje de simetría, el vértice y graficar las siguientes funciones cuadráticas. Expresarlas de forma canónica y, si es posible, de forma factorizada.

a) f(x) = x2 + 2 x + 2
b) f(x) = - x2 + 1
c) f(x) = x2 - 4 x + 4

a) $f(x) = x^2 + 2x + 2$

$x_v = -\frac{(-2)}{2.1} = 1$ $\quad y_v = \boldsymbol{f(1) = 1^2 + 2.1 + 2 =}\ \mathbf{4}$ $\quad$ **V =** $(1; 4)$

Ecuación canónica: $f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$

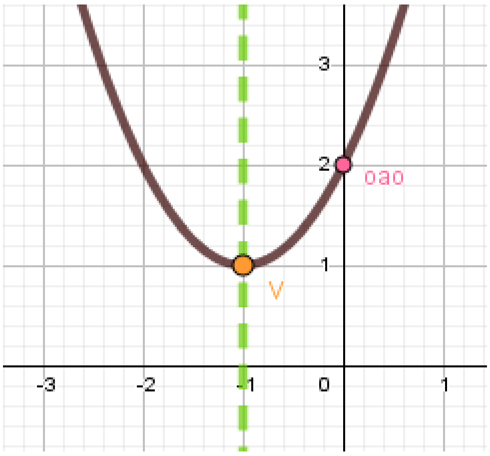
$$f(x) = (x - 1)^2 + 4$$

$x^2 + 2x + 2 = \mathbf{0}$

a	b	C
1	2	2

$x_1;\ x_2 = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.1\,.2}}{2.1} = \frac{2\,\pm\sqrt{4-8}}{2} = \frac{2\,\pm\sqrt{-4}}{2} =$ no tiene raíces en R

Forma factorizada: $No\ es\ posible\ expresarla\ .$



b) $f(x) = -x^2 + 1$

$x_v = -\frac{0}{2.(-1)} = 0$ $\quad y_v = \boldsymbol{f}(\mathbf{0}) = -\mathbf{0^2} + \mathbf{1}$= **-1** $\quad$ **V =** $(0; -1)$

Ecuación canónica: $f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$

$f(x) = -1.(x - 0)^2 + 1 \rightarrow f(x) = -x^2 + 1$

$-x^2 + 1 = 0$

$-x^2 = -\mathbf{1}$

$x^2 = \frac{-1}{-1}$

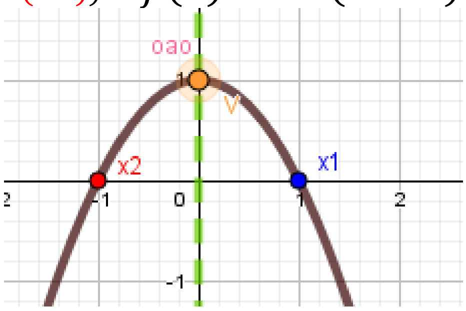
$x^2 = 1$

$|x| = \sqrt{\mathbf{1}}$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$

Forma factorizada: $f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$

$f(x) = -1.(x - 1).(x - (-1)) \rightarrow f(x) = -.(x - 1).(x + 1)$



c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

$x_v = -\frac{(-4)}{2.1} = 2$ $\quad y_v = f(2) = (2)^2 - 4.2 + 4 = 0$ $\quad$ **V** = (2; 0)

Forma canónica: $f(x) = a.(x - x_v)^2 + y_v$

$f(x) = 1.(x - 2)^2 + 0 \rightarrow f(x) = (x - 2)^2$

$x^2 - 4x + 4 = 0$

a	b	c
1	-4	4

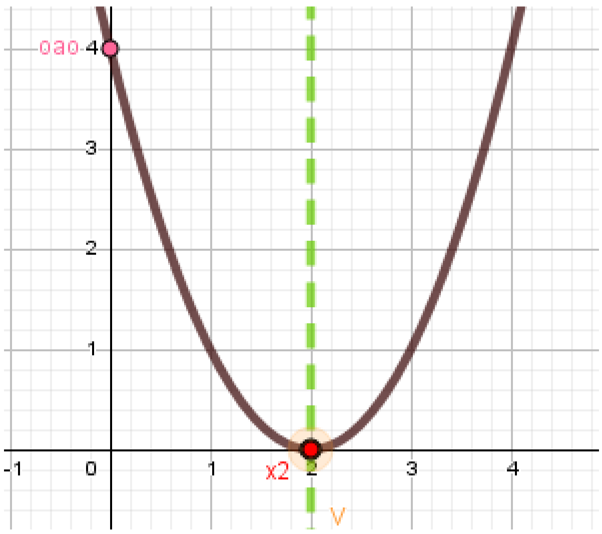
$x_1;\ x_2 = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.1.4}}{2.1} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2}$

$x_1 = \frac{4+0}{2} = 2$

$x_2 = \frac{4-0}{2} = 2$

Forma factorizada: $f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$

$f(x) = 1.(x - 2).(x - 2) \rightarrow f(x) = (x - 2)^2$



30) Calcular la ecuación de la función cuadrática cuyo vértice es *(-3 ; 2)* que pasa por el punto *(-1 ; 10)*. Determinar dominio, imagen, ceros y eje de simetría. Graficar.

V= (-3 ; 2)
P = (-1;10)

$y = a.(x - x_v)^2 + y_v$

$10 = a.(-1 - (-3))^2 + 2$

$10 - 2 = a.(-1 + 3)^2$

$8 = a.2^2$

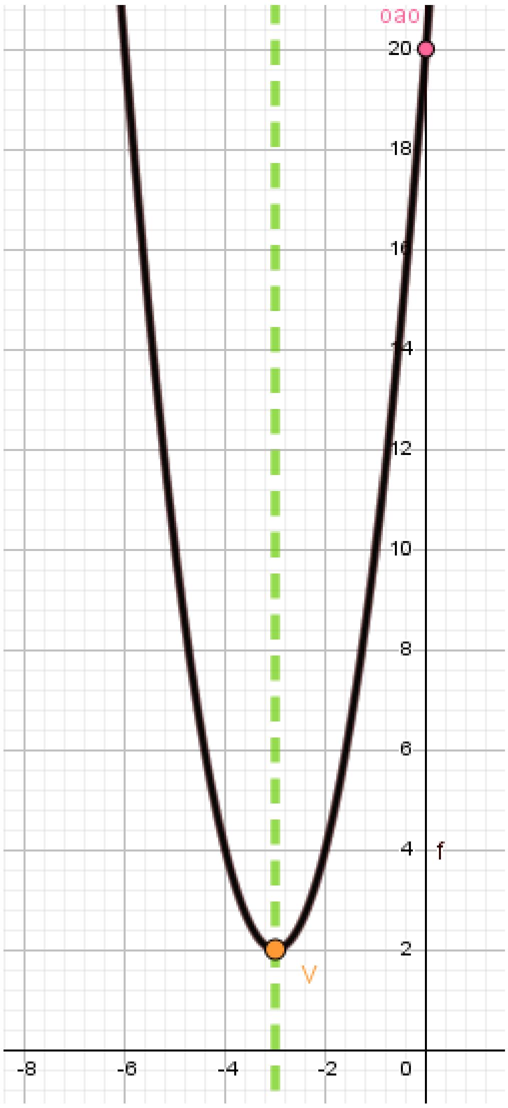
$\frac{8}{4} = a$

$2 = a \rightarrow \quad y = 2.(x+3)^2 + 2$

Calculo las raíces:

$$0 = 2.(x+3)^2 + 2$$
$$0 - 2 = 2.(x+3)^2$$
$$-\frac{2}{2} = (x+3)^2$$
$$-1 = (x+3)^2$$
$$\sqrt{-1} = |x+3|$$
$$No\ tiene\ raíces\ reales$$

Calculo la OAO: $f(0) = 2.(0+3)^2 + 2 = 2.9 + 2 = 20$



31) Supóngase que el comportamiento de la demanda de un producto en función del tiempo (en días) se hace nula en *x1=1* y *x2=3*, y entre *x1* y *x2* está representada por una curva parabólica. Si además se sabe que la curva pasa por el punto (2,3), hallar:
a) La ecuación de la curva que describe la demanda en el intervalo [1,3] .

A partir de los datos dados en la consigna, **nos conviene trabajar con la forma factorizada de la función cuadrática.**

$$f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$$

Reemplazamos las raíces en X_1 y en X_2

$$f(x) = a.(x-1).(x-3)$$

Si la curva pasa por **el punto (2,3), lo reemplazamos en la forma factorizada** para hallar el valor de "a".

$$3 = a.(2-1).(2-3)$$
$$3 = a.1.(-1)$$
$$3 = -a$$
$$-3 = a$$

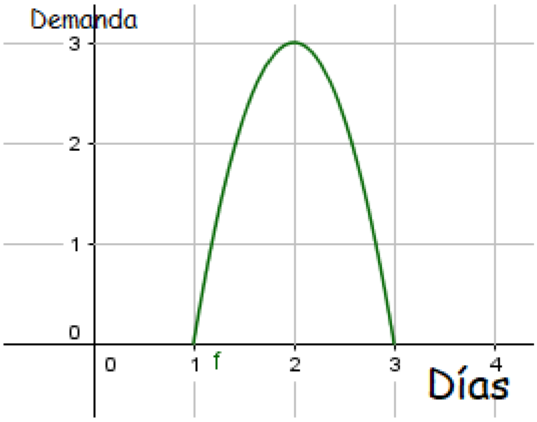
Luego, resulta:

$$f(x) = -3.(x-1).(x-3)$$

Ahora, **si quisiéramos graficar la función en el intervalo [1,3], tenemos que hallar sus Vértices:**

$$V_x = \frac{1+3}{2}$$
$$V_x = \frac{4}{2}$$
$$V_x = 2$$

$$Vy = -3.(x-1).(x-3)$$
$$Vy = -3.(2-1).(2-3)$$
$$Vy = -3.1.(-1)$$
$$Vy = 3$$



b) ¿En qué día la demanda fue máxima, y de cuánto fue dicha demanda?
La demanda fue máxima en el Vx es decir en el segundo día.
La cantidad demandada corresponde al valor del Vy, es decir de 3 unidades.

32) Un camión de reparto trabaja durante 6 horas. Sale de la fábrica en el instante que llamaremos t = 0, y su distancia a la fábrica puede considerarse una función:

$$f: [0\ ;\ 6] \to \mathbb{R}$$

tal que:

$$f(t) = -\frac{10}{3}.(t-3)^2 + 30$$

Para poder responder las preguntas, nos conviene graficar la situación.

De la fórmula dada, se desprende la expresión canónica, **con lo cual, $V_x=3$ y $V_y=30$**

Hallemos las raíces.

(¡Cuidado!, no podemos aplicar la fórmula resolvente, dado que la expresión de la función es la forma canónica y no la forma polinómica).

$$-\frac{10}{3}.(t-3)^2 + 30 = 0$$

$$-\frac{10}{3}.(t-3)^2 = 0 - 30$$

$$(t-3)^2 = -30 : \left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$|t-3| = \sqrt{9}$$

$$t-3 = 3 \qquad t-3 = -3$$

$$t = 3+3 \qquad t = -3+3$$

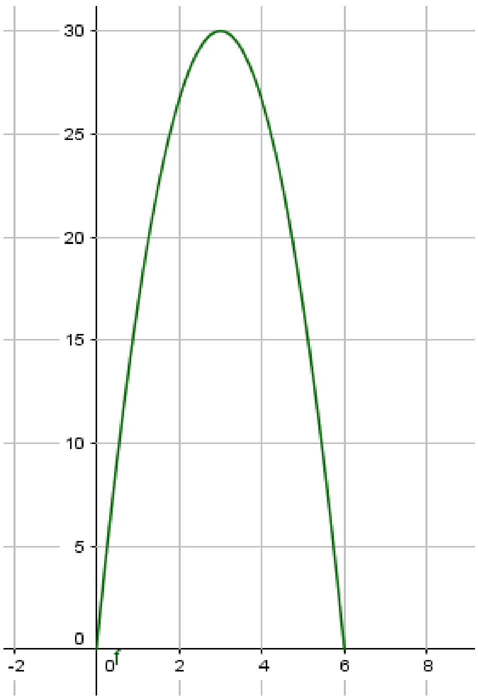
$$t = 6 \qquad t = 0$$

Ordenada al origen:

$$f(0) = -\frac{10}{3}.(0-3)^2 + 30$$

$$f(0) = -30 + 30$$

$$f(0) = 0$$



Hallar:

a) El instante en que el camión volvió a la fábrica.

En el instante t=3 el camión comienza el regreso a la fábrica. **Llega a la fábrica en el instante t=6.**

b) El instante en que el camión estuvo a mayor distancia de la fábrica y el valor de dicha distancia.

Estuvo a mayor distancia en el V_x, es decir, a las **3 horas** y a una **distancia igual a 30** (V_y).

c) ¿En qué instante (o instantes) se alejó de la fábrica? ¿Y en cuál (o cuáles) se acercó?

Se aleja de la fábrica en **el intervalo (0,3)** es decir en su intervalo de crecimiento.

Se acerca a la fábrica en **el intervalo (3,6),** es decir en su intervalo de decrecimiento.

33) Una empresa determinó que el ingreso *f(x)*, por el servicio que presta, depende del precio *x* del mismo según lo indica la función:

$$f(x) = 90x - x^2$$

a) ¿Qué ingreso se obtendrá si se fija en $10 el precio del servicio? ¿Y si se fija en $80?

Si el precio de fija en $10, debemos reemplazar 10 en la "x" de la función:

$$f(10) = 90.10 - 10^2$$
$$f(10) = 900 - 100$$
$$f(10) = 800$$

Si el precio es $10, el ingreso es de $800.

Ahora, si el precio de fija en $80, debemos reemplazar 80 en la "x" de la función:

$$f(80) = 90.80 - 80^2$$
$$f(80) = 7200 - 6400$$
$$f(80) = 800$$

Si el precio es $80, el ingreso es de $800.

c) ¿En cuánto habrá que fijar el precio del servicio si se quiere un ingreso de $2000?

Para poder resolver este punto, igualamos la función a $2000 y aplicamos la fórmula resolvente:

$$90x - x^2 = 2000$$
$$-x^2 + 90x - 2000 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$$x = \frac{-90 \pm \sqrt{90^2 - 4.(-1).(-2000)}}{2.(-1)}$$

$$x = \frac{-90 \pm \sqrt{8100 - 8000}}{-2}$$

$$x = \frac{-90 \pm \sqrt{100}}{-2}$$

$$x = \frac{-90 \pm 10}{-2}$$

$$x = \frac{-90 + 10}{-2} \qquad\qquad x = \frac{-90 - 10}{-2}$$

$$x = 40 \qquad\qquad x = 50$$

El precio puede fijarse en \$40 o en \$50.

c) ¿Para qué precio del servicio se obtiene el máximo ingreso? ¿Cuál es éste ingreso máximo?

Debemos hallar el V_x y el V_y de la función. Para ello aplicamos las siguientes fórmulas:

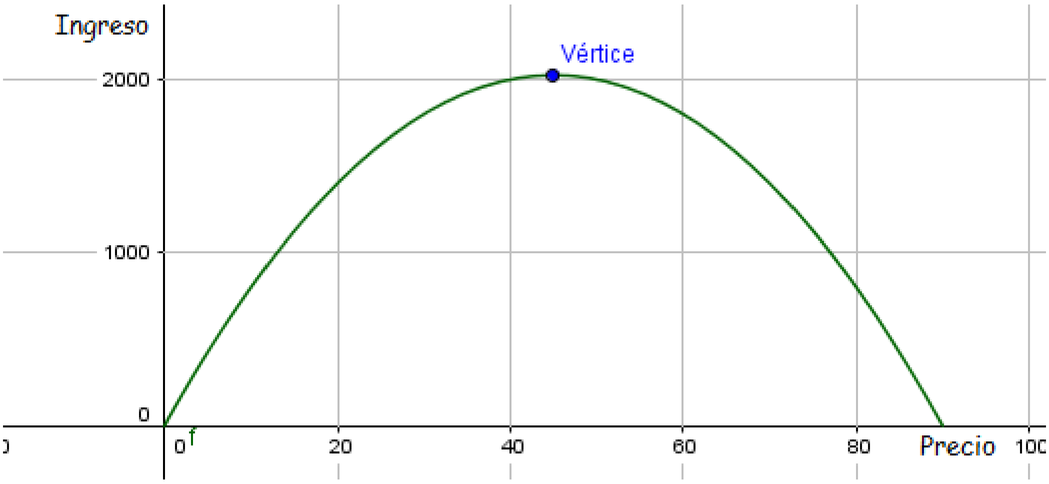
$$V_x = -\frac{b}{2.a} \qquad\qquad Vy = 90x - x^2$$

$$V_x = -\frac{90}{2.(-1)} \qquad\qquad Vy = 90.45 - 45^2$$

$$Vy = 4050 - 2025$$

$$V_x = 45 \qquad\qquad Vy = 2025$$

Para \$45 se obtiene el mayor ingreso que es de \$2025



34) Un chorro de agua es lanzado en forma parabólica hacia arriba. Desde el punto de partida hasta donde cae el chorro, hay 8m, y pasa rozando una cuerda que está a 2 m de donde inicia el chorro, y a 3 m sobre el nivel del suelo. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el chorro?

Comencemos por hallar la ecuación de la forma cuadrática. **Tomamos el punto de inicio como x=0 y el punto donde cae el chorro de agua como x=8.**

Al ser las raíces de la función, podemos plantear la expresión factorizada de la función y reemplazar dichas raíces.

$$f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$$
$$f(x) = a.(x - 0).(x - 8)$$

Ahora, como el chorro de agua, **pasa por el punto (2,3)**, donde se encuentra la soga, reemplazamos dicho punto en la expresión anterior.

$$f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$$
$$f(x) = a.(x - 0).(x - 8)$$
$$3 = a.(2 - 0).(2 - 8)$$
$$3 = a.2.(-6)$$
$$-\frac{3}{12} = a$$
$$-\frac{1}{4} = a$$

Resultando:

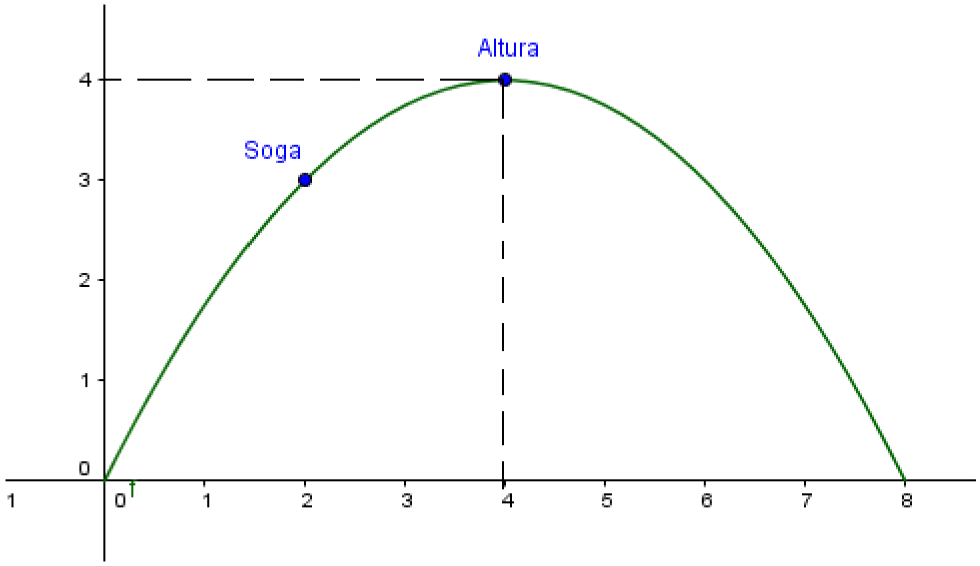
$$f(x) = a.(x - x_1).(x - x_2)$$
$$f(x) = -\frac{1}{4}.x.(x - 8)$$

Para hallar la altura máxima a la que llega el chorro de agua, tenemos que averiguar el vértice de la función:

$$Vx = \frac{0+8}{2}$$
$$Vx = 4$$

$$Vy = -\frac{1}{4}.x.(x - 8)$$
$$Vy = -\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (4 - 8)$$
$$Vy = 4$$

La altura máxima que alcanza el chorro de agua es de 4 metros de alto.



35) En un planeta lejano se lanza hacia arriba una piedra desde una altura de 25 m con una velocidad inicial de 96 m/seg. La altura a la que se encuentra la piedra (medida en metros) desde el suelo, en función del tiempo (en segundos) es:

$$s(t) = -16t^2 + 96t + 25$$

Comencemos por graficar la situación:

a= -16 b= 96 c= 25

- Buscamos las raíces aplicando la fórmula resolvente.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$$x = \frac{-96 \pm \sqrt{96^2 - 4.(-16).25}}{2.(-16)}$$

$$x = \frac{-96 \pm \sqrt{9216 + 1600}}{-32}$$

$$x = \frac{-96 \pm \sqrt{10816}}{-32}$$

$$x = \frac{-96 \pm 104}{-32}$$

$$x = \frac{-96 + 104}{-32} \qquad x = \frac{-96 - 104}{-32}$$

$$x = -\frac{1}{4} \qquad x = \frac{25}{4}$$

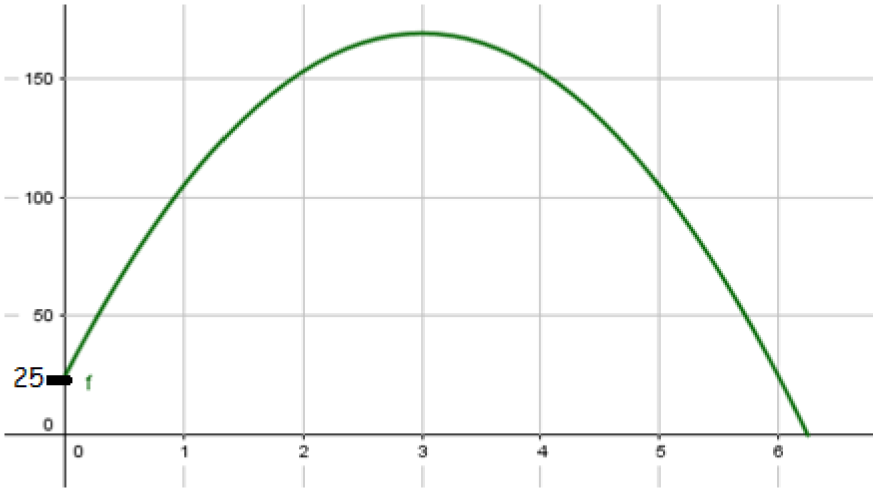
-Buscamos los vértices:

$$Vx = \frac{-b}{2.a}$$
$$Vx = \frac{-96}{2.(-16)}$$
$$Vx = 3$$

$$Vy = -16 \cdot 32^2 + 96 \cdot 32 + 25$$
$$Vy = 169$$

- Buscamos la ordenada al origen:

$$s(0) = -16.0^2 + 96.0 + 25$$
$$s(0) = 25$$



a) Calcular en qué instante llega la piedra al suelo.

La piedra llega al suelo en **el instante** $x = \frac{25}{4}$ **(6,25 segundos).**

b) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra va hacia arriba?

En el intervalo de **crecimiento (0,3)**

c) ¿En qué instante la piedra comienza a decaer?

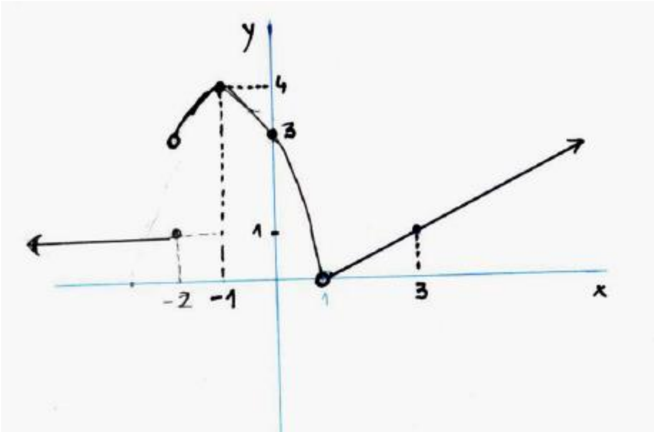
En el intervalo de **decrecimiento** $\left(3, \frac{25}{4}\right)$

d) Calcular en que instante la piedra alcanza la máxima altura y cuál es dicha altura.

El instante en que la piedra alcanza la altura máxima, corresponde con el **Vx= 3 segundos.**

La altura máxima corresponde con el **Vy=169 metros**

36) Este es el gráfico correspondiente a la función *f: D → R*



De acuerdo a los datos que se dan en el gráfico:

a) Expresar analíticamente la función.

-La primera parte de la gráfica corresponde a una función constante, con lo cual su pendiente es nula y su ordenada al origen corresponde a b=1.

Con lo cual: **y=-2.**

La restricción es **menor o igual a -2** → $(-\infty,-2)$

-La segunda parte de la gráfica corresponde a una función cuadrática. Como dato tenemos dos puntos. El primero de ellos (-1,4) corresponde al vértice y el segundo corresponde con su ordenada al origen b=3 (0,3).

Expresemos la forma canónica de la función:

$$f(x) = a \cdot (x - Vx)^2 + Vy$$
$$f(x) = a \cdot (x+1)^2 + 4$$
$$3 = a \cdot (0+1)^2 + 4$$
$$3 = a + 4$$
$$3 - 4 = a$$
$$-1 = a$$

Entonces resulta:

$$f(x) = -1 \cdot (x+1)^2 + 4$$

La restricción corresponde al intervalo -2<x<1

-La tercera y última parte de la gráfica corresponde a una función lineal que pasa por los puntos (1,0) y (3,1), con lo cual, comencemos por hallar su pendiente:

$$a = \frac{1-0}{3-1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} &y = a.x + b \\ &0 = \frac{1}{2}.1 + b \\ &0 - \frac{1}{2} = b \\ &-\frac{1}{2} = b \end{aligned}$$

La ecuación resulta:

$$y = \frac{1}{2}.x - \frac{1}{2}$$

La restricción corresponde al intervalo $(1,+\infty)$

$$f(x) = \begin{cases} -2 & si \quad x \leq -2 \\ -(x+1)^2 + 4 & si \quad -2 < x < 1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

b) Hallar el dominio.

Dom f(x)= $R - \{1\}$

c) Hallar las raíces.

No tiene

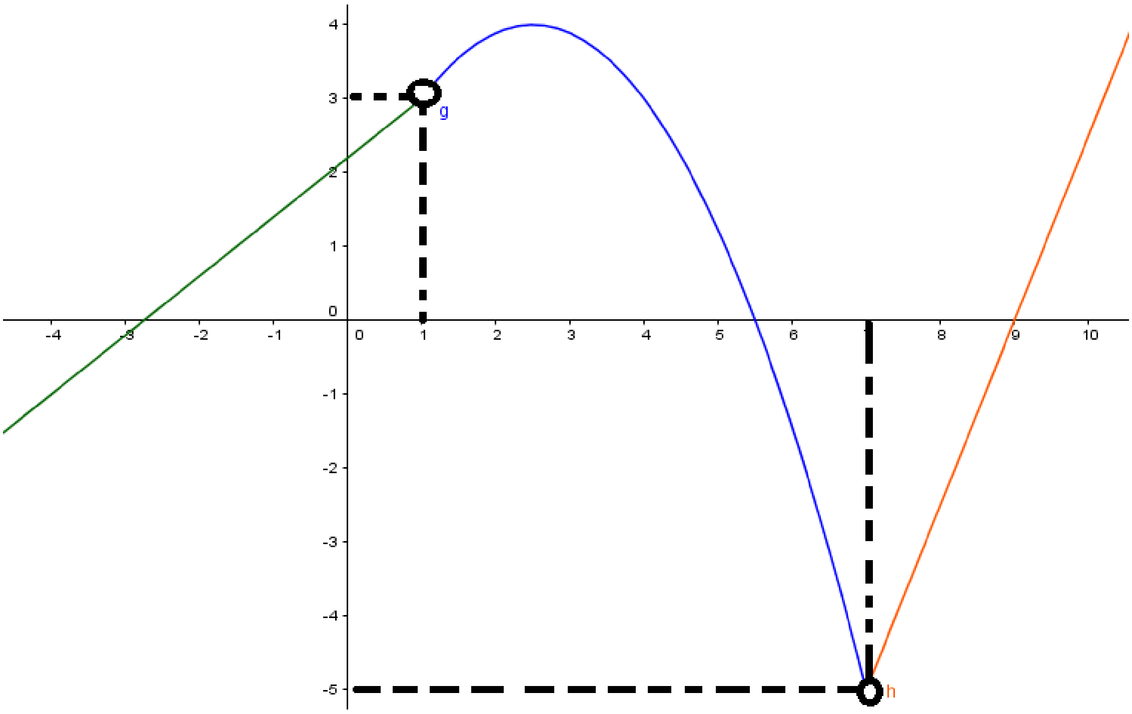
d) Hallar la imagen.

$\mathrm{Im}\, f(x) = (0,+\infty)$

37)

Dada la función $f(x)=\begin{cases} \frac{4}{5}x+\frac{11}{5} & si\ x<1 \\ -\frac{4}{9}x^2+\frac{20}{9}x+\frac{11}{9} & si\ 1<x<7 \\ \frac{5}{2}x-\frac{45}{2} & si\ x>7 \end{cases}$

a) Grafique la función e indique claramente su dominio. Justifique.



Dom= R-{1,7}

b) Calcule sus raíces analíticamente. Justifique.

Las raíces corresponden a cada una de las parte de la gráfica:

Primera parte: FUNCIÓN LINEAL

Igualamos a cero la función

$$\frac{4}{5}x+\frac{11}{5}=0$$

$$\frac{4}{5}x=0-\frac{11}{5}$$

$$x=-\frac{11}{5}:\frac{4}{5}$$

$$x=-\frac{11}{4}$$

Segunda parte: FUNCIÓN CUADRÁTICA
Aplicamos la fórmula resolvente.

$$-\frac{4}{9}x^2+\frac{20}{9}x+\frac{11}{9}=0$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$$

$$x=\frac{-\frac{20}{9}\pm\sqrt{\left(\frac{20}{9}\right)^2-4.\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{11}{9}}}{2.\left(-\frac{4}{9}\right)}$$

$$x=\frac{-\frac{20}{9}\pm\sqrt{\frac{400}{81}+\frac{176}{81}}}{-\frac{8}{9}}$$

$$x=\frac{-\frac{20}{9}\pm\sqrt{\frac{576}{81}}}{-\frac{8}{9}}$$

$$x=\frac{-\frac{20}{9}\pm\frac{24}{9}}{-\frac{8}{9}}$$

$$x=\frac{-\frac{20}{9}+\frac{24}{9}}{-\frac{8}{9}} \qquad x=\frac{-\frac{20}{9}-\frac{24}{9}}{-\frac{8}{9}}$$

$$x=-\frac{1}{2} \qquad x=\frac{11}{2}$$

En este caso, **la única raíz posible es** $x=\frac{11}{2}$

Tercer parte: FUNCIÓN LINEAL
Igualamos a cero la función.

$$\frac{5}{2}x-\frac{45}{2}=0$$

$$\frac{5}{2}x=0+\frac{45}{2}$$

$$x=\frac{45}{2}:\frac{5}{2}$$

$$x=9$$

c) Indique cuál es la imagen.

Para poder responder a este punto, debemos averiguar donde se produce la discontinuidad del gráfico en el eje de ordenadas. Para ello, reemplazamos x=1 y x=7 en alguna de las funciones:

Para x=1, podemos reemplazar en la primera función lineal.

$$f(x) = \frac{4}{5}x + \frac{11}{5}$$
$$f(1) = \frac{4}{5} \cdot 1 + \frac{11}{5}$$
$$f(1) = 3$$

El punto es (1,3)

Para x=7 podemos reemplazar en la segunda función lineal.

$$f(x) = \frac{5}{2}x - \frac{45}{2}$$
$$f(x) = \frac{5}{2} \cdot 7 - \frac{45}{2}$$
$$f(x) = -5$$

El punto es (7,-5)

Con lo cual, la imagen es R-{3,-5}

d) ¿Cómo puede redefinirla para que su dominio sea todo R.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{5}x + \frac{11}{5} & si \quad x < 1 \\ -\frac{4}{9}x^2 + \frac{20}{9}x + \frac{11}{9} & si \quad 1 \le x < 7 \\ \frac{5}{2}x - \frac{45}{2} & si \quad x \ge 7 \end{cases}$$