

# Capítulo 2

## Conjuntos

### 2.1 Introducción

El concepto de conjunto, de singular importancia en la ciencia matemática y objeto de estudio de una de sus disciplinas más recientes, está presente, aunque en forma informal, desde los primeros años de formación del hombre. Desde el momento que el ser humano tomó entre sus manos un puñado de piedras u observó un grupo de animales, tomó conocimiento del "conjunto". Sin embargo, por tratarse de conceptos matemáticos debemos fijar con exactitud el significado de cada término para no dar lugar a contradicciones o interpretaciones erróneas.

### 2.2 Determinación de conjuntos

#### 2.2.1 Lenguaje Simbólico - Notación

Para representar los conjuntos, los elementos y la relación de pertenencia, mediante símbolos, tendremos en cuenta las siguientes convenciones:

- a) Los **conjuntos** se designan con letras mayúsculas: **A; B; C....**
- b) Los **elementos** que forman el conjunto se encierran entre llaves: **{ ... }**
- c) Los **elementos** se designan con letras minúsculas: **a, b, c, ....x, y....**
- d) Para indicar que un elemento **pertenece** al conjunto se escribe el signo  $\in$ . Para indicar que un elemento **no pertenece** a cierto conjunto, se escribe el signo  $\notin$ .

Entonces, si tenemos un conjunto A formado por los elementos a, b y c, escribimos:

$$A = \{ a , b , c \}$$

En este caso, al escribir en forma detallada todos los elementos que forman el conjunto, se dice que el conjunto está definido por **Extensión**.

Así, por ejemplo, podemos definir por extensión al conjunto B formado por los elementos 1, 2 y 3, del siguiente modo:

$$B = \{ 1 , 2 , 3 \}$$

Sin embargo, al observar que dicho conjunto está formado por los números naturales menores a 4 podemos, definir este conjunto mencionando esa característica que define sus elementos. De este modo, representamos:

$$B = \{ x \in \mathbf{N} / x < 4 \}$$

Donde **N** representa el conjunto de los números naturales.

Cuando definimos un conjunto en base a la propiedad que caracteriza a sus elementos decimos que está definido por **Comprensión**.

De este modo, podemos dar la siguiente:

#### **Definición:**

Un conjunto se determina por **extensión si y sólo si se enumeran todos** los elementos que lo constituyen.

Un conjunto se define por **comprensión, si y sólo si se da la propiedad** que caracteriza a sus elementos.

Se denomina Universo o Conjunto Universal al conjunto de todos los elementos que intervienen en el tema de que se trata y se representa siempre por la letra U.

Así, el conjunto de los elementos del universo U que verifican la propiedad expresada por la función proposicional P(x) se indica:

$$A = \{ x \in U / P(x) \}$$

o bien, si el Universo U está sobrentendido o ya ha sido declarado: se indica como

$$A = \{ x / P(x) \}$$

y se lee "A es el conjunto formado por los elementos x, tales que cumplen o poseen las propiedades expresadas por P(x).

P(x) es una función proposicional y un objeto pertenece al conjunto **si y sólo si** verifica la propiedad P, esto es:  $a \in A \Leftrightarrow P(a)$  es **V** y en consecuencia  $a \notin A \Leftrightarrow P(a)$  es **F**

### 2.2.2 Lenguaje Gráfico - Diagramas

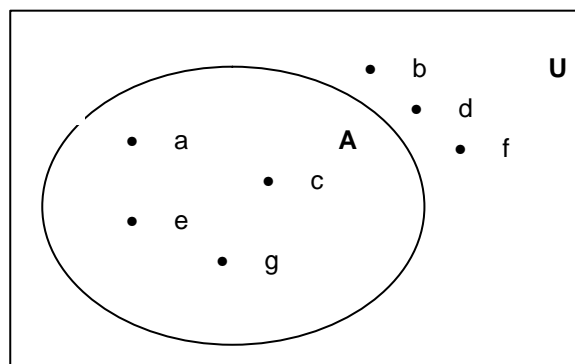
Existe una forma de representar gráficamente los conjuntos mediante los denominados diagramas de Venn. Para dicha forma de representación se fijan también algunas convenciones, a saber:

- Los conjuntos se representan por una curva simple cerrada.
- Los elementos que pertenecen al conjunto se representan por puntos interiores a la curva.
- Los elementos que no pertenecen al conjunto se representan por puntos exteriores a la curva.
- Ningún punto se representa sobre la curva.
- El conjunto Universal se representa por un rectángulo que contiene a todos los conjuntos de que se trate.

**Ejemplo:**

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$\begin{array}{lll} a = 2 & d = 5 & g = 8 \\ b = 3 & e = 6 & \\ c = 4 & f = 7 & \end{array}$$



### 2.2.3 Conjuntos infinitos

Supongamos el siguiente conjunto definido por comprensión:

$$A = \{ \text{números enteros pares} \} = \{ x \in \mathbb{Z} / x = k \cdot 2 \}$$

Nos resulta imposible enumerar los elementos del conjunto pues no tiene un último elemento, decimos entonces que dicho conjunto es un **conjunto infinito** y no se puede determinar por extensión sino sólo por comprensión.

$$A = \{ x \in \mathbb{Z} / x = 2k \} \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$$

### 2.2.4 Conjuntos especiales

Vamos a extender ahora nuestra noción intuitiva de conjunto a los casos de carencia de elementos y de unicidad de elementos, mediante la introducción de los conjuntos vacío y unitario.

Un conjunto Vacío es aquel que carece de elementos.

Un conjunto Unitario es el que tiene un elemento único.

El Conjunto vacío está caracterizado por una propiedad o función proposicional que se convierte en proposición falsa cualquiera sea el valor de  $x$ . Designaremos con el símbolo  $\emptyset$  al conjunto vacío, y podemos definirlo simbólicamente así:

$$\emptyset = \{ x / x \neq x \}$$

En este caso, la propiedad relativa a  $x$  es  $P(x) : x \neq x$ , la cual resulta falsa cualquiera que sea  $x$ . Supongamos el siguiente conjunto definido por comprensión:

$$A = \{ x \text{ son los meses de 32 días} \}$$

Si intentáramos definir dicho conjunto por extensión, enseguida nos daríamos cuenta que no existe ningún elemento que cumpla con la característica enunciada. Por lo tanto, dicho conjunto es vacío.

Supongamos ahora al siguiente conjunto definido por comprensión:

$$A = \{ x / x \text{ son los meses de 28 días} \}$$

En este caso, al definirlo por extensión encontraremos que existe un solo elemento que cumple con esa condición (Febrero). Definimos, entonces, al **Conjunto Unitario** cuyo único elemento es **a**, escribiendo:

$$A = \{ a \} = \{ x / x = a \}$$

*Ejemplo.*

Determinar simbólicamente y por extensión el siguiente conjunto definido por comprensión:

A es el conjunto de los números Enteros cuyo cuadrado es igual a 1.

En este caso la propiedad que caracteriza a los elementos de A es:

$$P(x) : x^2 = 1$$

Entonces:  $A = \{ x \in \mathbf{Z} / x^2 = 1 \}$  y la determinación por extensión es:  $A = \{ 1, -1 \}$

En este caso, **Z** representa al conjunto de los números Enteros. Las notaciones usuales para caracterizar los conjuntos numéricos son:

- N** Conjunto de los números naturales
- Z** Conjunto de los números enteros
- R** Conjunto de los números reales
- Q** Conjunto de los números racionales
- C** Conjunto de los números complejos

## 2.3 Inclusión

### 2.3.1 Concepto

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos, si cada elemento de  $A$  es elemento de  $B$  diremos que  $A$  está incluido en  $B$ , o bien que  $A$  es parte de  $B$ , o que  $A$  es un subconjunto de  $B$ , y lo escribimos  $A \subset B$ .

**Definición:**

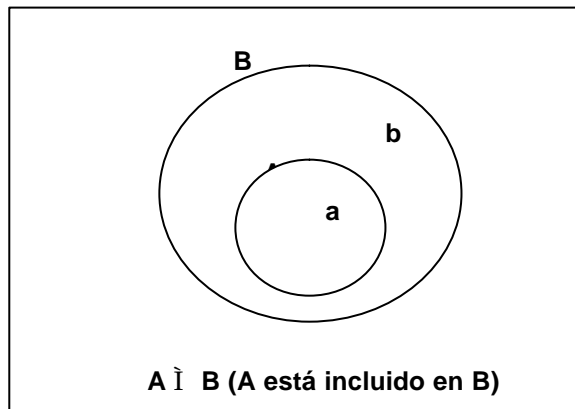
Un conjunto  $A$  está incluido en otro conjunto  $B$  si cada elemento del conjunto  $A$  pertenece, también, al conjunto  $B$ .

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$$

A menudo será necesario demostrar que un conjunto es parte de otro entonces, de acuerdo a la definición, será suficiente demostrar que cualquier elemento del primero pertenece al segundo.

Asimismo, teniendo en cuenta la equivalencia entre una implicación y la contra recíproca, la definición anterior puede expresarse así:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x : x \notin B \Rightarrow x \notin A$$



Además, considerando la equivalencia entre  $p \Rightarrow q$  y  $\sim(p \wedge \sim q)$ , podemos traducir la misma definición como sigue:

$$A \subset B \Leftrightarrow \exists x / x \in A \wedge x \notin B \text{ es (F)}$$

Sobreentendiendo el cuantificador universal, escribiremos

$$A \subset B \Leftrightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$$

En el dibujo de arriba vemos que, efectivamente, el elemento  $a$  es parte del conjunto  $A$  y lo es, a su vez, del conjunto  $B$ . Podemos afirmar, entonces, que  $A \subset B$ . Ahora bien, vemos que  $b$  está incluido en  $B$  pero no en  $A$ . Decimos, entonces que un conjunto  $A$  está *estrictamente incluido* en  $B$  si todo elemento de  $A$  está incluido en  $B$ , pero existe al menos un elemento de  $B$  que no existe en  $A$ .

**Ejemplo.**

Sean los conjuntos:

$A = \{ \text{libros de matemática de mi colección} \}$

$B = \{ \text{Libros de mi colección} \}$

Está claro que los libros de matemática están incluidos en mi colección. Podemos decir, aquí, que A está incluido en B ( $A \subset B$ ), es decir que mis libros de matemática son un subconjunto de mi colección de libros.

### 2.3.2 Propiedades de la inclusión

#### 1) *Propiedad reflexiva:*

Todo conjunto está incluido en sí mismo

$$A \subset A$$

#### 2) *Igualdad:*

Nos resulta sencillo darnos cuenta que dos conjuntos son iguales si tienen los mismos elementos. Volviendo al ejemplo anterior, supongamos ahora que todos los libros de mi colección son de matemática, entonces, que  $A \subset B$ , pero a su vez  $B \subset A$  y llegamos a la conclusión de que ambos conjuntos son iguales.

En símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Dos conjuntos A y B son iguales si y sólo el conjunto A está incluido en B y éste, a su vez, está incluido en A:

#### 3) *Propiedad transitiva:*

Si un conjunto A está incluido en otro conjunto B y éste, a su vez, está incluido en otro conjunto C, entonces el conjunto A está incluido en el conjunto C.

$$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

### 2.3.3 Caracterización del conjunto vacío

#### *Propiedad I)*

Supongamos el conjunto  $B = \emptyset$

¿Podemos decir que B está incluido en cualquier otro conjunto A?

Veamos:

Si  $B \subset A \Rightarrow$  todo elemento de B pertenece a A

Es decir: No existe ningún elemento de B que no pertenezca a A.

y como: No existe ningún elemento de  $\emptyset$  que no pertenezca a A

Llegamos a la conclusión:  $\emptyset \subset A$

Y como esta demostración es válida cualquiera sea A, llegamos a la siguiente conclusión:

---

**El conjunto vacío está incluido en todo conjunto.**

---

#### *Propiedad II)*

Dado que carece de elementos que lo distingan, el conjunto vacío es siempre el mismo, por ello decimos **el conjunto vacío** y no **un conjunto vacío**.

En resumen

---

**El conjunto vacío es único**

---

¿Cómo podemos demostrarlo? Pues bien, supongamos que existiera otro conjunto vacío al que llamamos  $\emptyset'$ . De acuerdo a la propiedad I enunciada más arriba, podemos decir que:

$$\emptyset \subset \emptyset' \wedge \emptyset' \subset \emptyset \text{ por lo tanto, por definición de igualdad: } \emptyset = \emptyset'$$

## 2.4 Conjunto de partes

Supongamos el siguiente conjunto

$$A = \{\text{libros de mi colección}\}$$

¿Cuántos subconjuntos de A puedo formar sabiendo que en mi colección hay libros de matemática, historia y castellano? No olvidemos que el mismo conjunto A y el conjunto vacío son subconjuntos de A. Entonces los subconjuntos de A son:

$$\left. \begin{array}{l} \{\text{Libros de mi colección}\} \\ \{\text{Libros de matemática}\} \\ \{\text{Libros de historia}\} \\ \{\text{Libros de castellano}\} \\ \emptyset \end{array} \right\} \text{ En total suma 5 subconjuntos.}$$

El conjunto de partes de A se llama Potencial de A y se anota  $P(A)$ , entonces, en este caso particular tenemos:

$$P(A) = \{ \{\text{Libros de mi colección}\}, \{\text{Libros de matemática}\}, \{\text{Libros de historia}\}, \{\text{Libros de castellano}\}, \emptyset \}$$

Podemos dar, entonces, la siguiente

### ***Definición:***

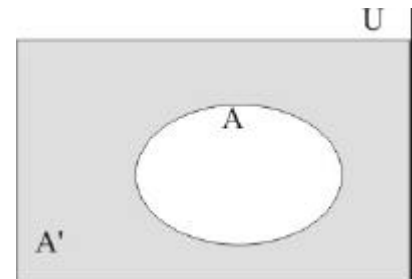
Un conjunto de partes de A es el conjunto cuyos elementos son todos los posibles subconjuntos de A.

$$P(A) = \{ X / X \subset A \}$$

## 2.5 Complementación de conjuntos

### 2.5.1 Concepto

Dado un Referencial o Universo  $U$  y un conjunto  $A$ , queda determinado otro conjunto formado por todos los elementos del Universo que no pertenecen a  $A$ . Se llama **Complemento** de  $A$  y se designa  $A'$  ó  $A^c$  (es el área grisada del dibujo)



#### **Definición:**

Complemento de  $A$  es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a  $U$  y no pertenecen a  $A$ .

$$A' = \{ x / x \in U \wedge x \notin A \}$$

#### **Ejemplo.**

Sea  $A = \{ \text{Libros de mi biblioteca que son de matemáticas} \}$

Sobreentendemos que en este caso el Referencial o universal es el conjunto de libros de mi biblioteca. Por lo tanto, el complemento del conjunto  $A$  es el conjunto total de libros de mi biblioteca excepto aquellos que son de matemática, es decir:

$$A' = \{ \text{Libros de mi biblioteca que no son de matemática} \}$$

## 2.6 Intersección de conjuntos

### 2.6.1 Concepto

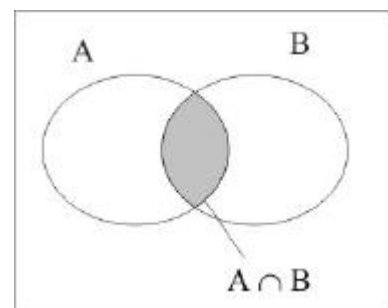
Supongamos los conjuntos:

$A = \{ \text{Libros propios presentes en tu biblioteca} \}$

$B = \{ \text{Libros de matemática tuyos} \}$

y que un compañero te pidió prestado algunos libros de matemáticas. En este caso, el Universo en el cual vas a buscar sería el total de libros que tenés en tu casa.

Ahora bien, como vos también tenés libros prestados por otros, sólo le podrás prestar aquellos que son de tu propiedad. Por lo tanto, los libros que vas a buscar deben cumplir dos condiciones: pertenecer al conjunto  $A$  y pertenecer al conjunto  $B$ . Por lo tanto, estos elementos forman un nuevo conjunto que se llama Intersección entre los conjuntos  $A$  y  $B$ .



**Definición:**

Intersección de dos conjuntos A y B se llama al conjunto formado por aquellos elementos que pertenecen a A y pertenecen a B.

$$A \cap B = \{x \in U / x \in A \wedge x \in B\}$$

La intersección entre dos conjuntos es una operación binaria, pues a partir de dos conjuntos se obtiene un tercero.

La propiedad que caracteriza a los elementos de la intersección es la de pertenecer simultáneamente a los dos conjuntos, y se establece en términos de la **conjunción**.

La definición de intersección establece:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

Si la intersección de dos conjuntos es vacía dichos conjuntos se llaman **disjuntos**.

$$A \text{ y } B \text{ son disjuntos} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

**Ejemplo.**

$$A = \{\text{números pares}\} \quad B = \{\text{números impares}\}$$

$$A \cap B = \emptyset \text{ pues no existe ningún número que sea par e impar a la vez.}$$

## 2.7 Unión de conjuntos

Concepto

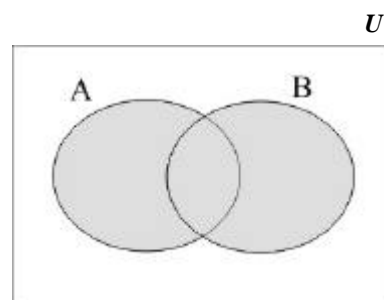
**Definición:**

Se llama unión o reunión de dos conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A, o a B o a ambos.

$$A \cup B = \{x \in U / x \in A \vee x \in B\}$$

La unión de dos conjuntos, lo mismo que la intersección, es una operación binaria definida en el conjunto de partes de  $U$ .

De acuerdo con la definición, podemos escribir:





$$a \in A \cup B \Leftrightarrow a \in A \vee a \in B$$

El "o" utilizado es incluyente, y pertenecen a la unión aquellos elementos de U para los cuales es verdadera la disyunción; entonces un elemento pertenece a la unión si y sólo si pertenece a alguno de los dos conjuntos o a ambos.

## 2.8 Diferencia

### 2.8.1 Concepto

Definimos la diferencia de conjuntos del siguiente modo:

***Definición:***

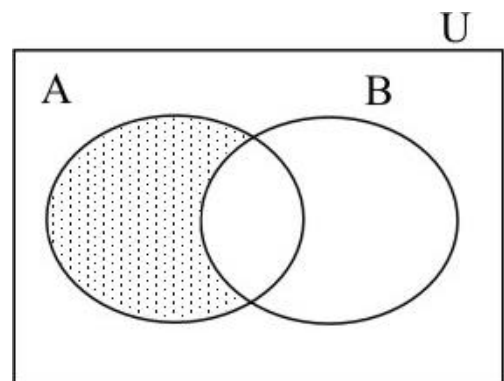
Se llama diferencia entre un conjunto A y otro conjunto B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B.

$$A - B = \{ x \in U / x \in A \vee x \notin B \}$$

Asimismo, podemos definir la diferencia entre dos conjuntos como la intersección del primero con el complemento del segundo, es decir:

$$\begin{aligned} A - B &= \{ x / x \in A \wedge x \notin B \} = \\ &= \{ x / x \in A \wedge x \in B' \} = A \cap B' \end{aligned}$$

La representación mediante diagrama de Venn es la que vemos al lado.



## 2.9 Diferencia simétrica

### 2.9.1 Concepto

Definimos la diferencia simétrica del siguiente modo:

***Definición:***

Se llama diferencia simétrica entre un conjunto A y otro conjunto B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B pero no ambos.

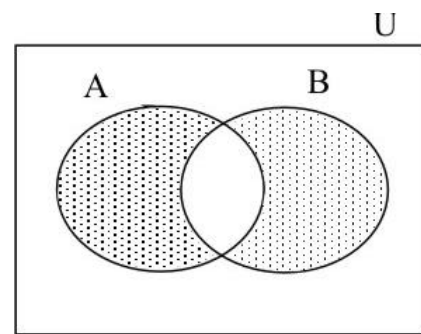
$$A \triangle B = \{ x \in U / x \in A \vee x \in B \text{ pero } x \notin A \cap B \}$$

Asimismo, podemos determinar la diferencia simétrica entre los conjuntos A y B como la unión de los conjuntos  $A - B$  y  $B - A$ . En símbolos:

$$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$$

Podemos, también, identificarlo como:

$$A \triangle B = (A \cap B') \cup (B \cap A')$$



## 2.10 Propiedades de las operaciones con conjuntos

### 2.10.1 Propiedad asociativa

Recordemos que se dice que una operación es asociativa cuando el resultado no depende de la forma de asociación. Recordemos también que, de tal modo, puede prescindirse del uso de paréntesis. Veamos ahora qué operaciones con conjuntos gozan de la propiedad asociativa:

#### a) Unión:

La Unión goza de la propiedad asociativa

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

#### b) Intersección:

La intersección de conjuntos es, también, asociativa

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

#### c) Diferencia:

La diferencia de conjuntos **no** es asociativa

$$(A - B) - C \neq A - (B - C)$$

## 2.11 Propiedad conmutativa

### 2.11.1

Decimos que una operación es conmutativa cuando el resultado no depende de la ubicación de los elementos que intervienen.

#### d) Unión:

La Unión goza de la propiedad conmutativa

$$A \cup B = B \cup A$$

e) **Intersección:**

La intersección de conjuntos es, también, conmutativa

$$A \cap B = B \cap A$$

f) **Diferencia:**

La diferencia de conjuntos **no** es conmutativa

$$A - B \neq B - A$$

---

NOTA IMPORTANTE:

Este apunte está incompleto pues faltan algunos temas que se darán en clase y que incorporaré próximamente.