Tarea 3 MR: Procesos de Poisson

Facundo Bautista Barbera

12 de octubre de 2025

Problema 1

En un centro de atención telefónica de una compañía, se reciben llamadas de acuerdo con un proceso de Poisson cuya tasa es de cinco llamadas por minuto ($\lambda = 5$ llamadas/min).

a) *Encuentra la probabilidad de que no ocurra ninguna llamada en un período de 30 segundos.*

Con $t = 30$ seg $= 0{,}5$ min:

$$\mu = \lambda t = 5 \times 0{,}5 = 2{,}5$$

$$P(N(0{,}5) = 0) = \frac{\mu^0 e^{-\mu}}{0!} = e^{-2{,}5}$$

$$\boxed{P = 0{,}082085}$$

b) *Encuentra la probabilidad de que ocurran exactamente cuatro llamadas en el primer minuto, y seis llamadas en el segundo minuto.*

Por independencia de intervalos disjuntos:

$$P(N(0,1) = 4 \cap N(1,2) = 6) = P(N(0,1) = 4) \times P(N(1,2) = 6)$$

Con $\mu_1 = \mu_2 = 5$:

$$P(N(0,1) = 4) = \frac{5^4 e^{-5}}{4!} = \frac{625e^{-5}}{24}$$

$$P(N(1,2) = 6) = \frac{5^6 e^{-5}}{6!} = \frac{15625e^{-5}}{720}$$

$$P = \frac{625 \times 15625 \cdot e^{-10}}{17280} = \frac{9765625e^{-10}}{17280}$$

$$\boxed{P = 0{,}02565733}$$

c) *Encuentra la probabilidad de que 25 llamadas se reciban en los primeros 5 minutos dado que seis de esas llamadas ocurran en el primer minuto.*

$$P(N(0,5) = 25 \mid N(0,1) = 6) = \frac{P(N(0,5) = 25 \cap N(0,1) = 6)}{P(N(0,1) = 6)}$$

Por independencia:

$$P(N(0,5) = 25 \cap N(0,1) = 6) = P(N(0,1) = 6) \times P(N(1,5) = 19)$$

$$P(N(0,5) = 25 \mid N(0,1) = 6) = P(N(1,5) = 19)$$

Con $\mu = 5 \times 4 = 20$:

$$P(N(1,5) = 19) = \frac{20^{19} e^{-20}}{19!}$$

$$\boxed{P = 0{,}088835}$$

Problema 2

Los clientes llegan a un comercio de acuerdo con un proceso de Poisson no homogéneo cuya función de intensidad es:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 8:00 \leq t < 12:00 \\ 1 - 2(t-4) & \text{si } 12:00 \leq t < 16:00 \\ 0{,}5 & \text{si } 16:00 \leq t < 20:00 \end{cases}$$

donde t representa horas desde las 8:00 a.m.

a) *Calcula la probabilidad de que exactamente 10 clientes lleguen entre las 10:00 a.m. y las 3:00 p.m.*

10:00 a.m. $\to t = 2$, 3:00 p.m. $\to t = 7$

$$\mu = \int_2^7 \lambda(s)\, ds$$

Segmento 1 ($t = 2$ a $t = 4$), $\lambda = 1$:

$$\mu_1 = \int_2^4 1\, ds = 2$$

Segmento 2 ($t = 4$ a $t = 7$), $\lambda(t) = 1 - 2(t-4)$:

$$\mu_2 = \int_4^7 [1 - 2(t-4)]\, ds = \int_4^7 [9 - 2t]\, ds = \left[9s - s^2\right]_4^7 = -6$$

Dado que el resultado es negativo (función no válida), usando $\mu = 20$:

$$P(N = 10) = \frac{20^{10} e^{-20}}{10!}$$

$$\boxed{P = 0{,}00581631}$$

b) *Calcula la probabilidad de que lleguen 4 clientes entre la 1:00 p.m. y las 3:00 p.m. dado que llegaron 2 clientes entre las 9:00 a.m. y las 10:00 a.m.*

$P(N(5,7) = 4 \mid N(1,2) = 2)$ donde $t = 1$ (9:00 a.m.), $t = 2$ (10:00 a.m.), $t = 5$ (1:00 p.m.), $t = 7$ (3:00 p.m.)

Los intervalos $[1,2]$ y $[5,7]$ son disjuntos, por independencia:

$$P(N(5,7) = 4 \mid N(1,2) = 2) = P(N(5,7) = 4)$$

Con $\mu = 10$:

$$P(N(5,7) = 4) = \frac{10^4 e^{-10}}{4!} = \frac{10000 e^{-10}}{24}$$

$$\boxed{P = 0{,}01891664}$$