Técnicas de Diseño de Algoritmos (Ex Algoritmos y Estructuras de Datos III)

Primer cuatrimestre 2024

(bienvenidos!)

Programa

1. Repaso de Complejidad Computacional, fuerza Bruta y backtracking
2. Programación Dinámica
3. Dividir y Conquistar
4. Algoritmos Golosos
5. Introducción a la teoría de grafos y algoritmos sobre grafos
6. Problema de árbol generador mínimo
7. Problema de camino mínimo
8. Problemas de flujo en redes

Bibliografía

1. Jon Kleinberg and Eva Tardos, *Algorithm Design*, Pearson Education Limited, 2005.
2. Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest and Clifford Stein, *Introduction To Algorithms (Fourth Edition)*, MIT Press, 2022.

Régimen de cursada

- Cursada:
  1. Lunes: clases teóricas.
  2. Miércoles: clases prácticas.
- Evaluaciones:
  1. Dos parciales (individuales). Cada parcial tiene su correspondiente recuperatorio al final del cuatrimestre. Se aprueba con 5 (cinco) cada uno de los parciales.
  2. TPs: ejercicios semanales (individuales). Se deben aprobar al menos 50 % del total de los ejercicios.
  3. Se promocionan si aprueban tanto los parciales como los TPs. La nota de la promoción es el promedio de las notas de los parciales.

Complejidad computacional: Las reglas del juego

- En el contexto de la teoría de complejidad computacional, llamamos problema a la descripción de los datos de entrada y la respuesta a proporcionar para cada dato de entrada.
- Una instancia de un problema es un juego válido de datos de entrada.
- Ejemplo:
  1. **Entrada:** Un número n entero no negativo.
  2. **Salida:** ¿El número n es primo?
- En este ejemplo, una instancia está dada por un número entero no negativo.

Complejidad computacional: Las reglas del juego

- Suponemos una Máquina RAM (*random access memory*).
  1. La memoria está dada por una sucesión de celdas numeradas. Cada celda puede almacenar un valor de b bits.
  2. Supondremos habitualmente que el tamaño b en bits de cada celda está fijo, y suponemos que todos los datos individuales que maneja el algoritmo se pueden almacenar con b bits.
  3. Se tiene un programa imperativo no almacenado en memoria, compuesto por asignaciones y las estructuras de control habituales.
  4. Las asignaciones pueden acceder a celdas de memoria y realizar las operaciones estándar sobre los tipos de datos primitivos habituales.

Complejidad computacional: Las reglas del juego

- Cada instrucción tiene un tiempo de ejecución asociado.
  1. El acceso a cualquier celda de memoria, tanto para lectura como para escritura, es $O(1)$.
  2. Las asignaciones y el manejo de las estructuras de control se realiza en $O(1)$.
  3. Las operaciones entre valores lógicos son $O(1)$.

- Las operaciones entre enteros/reales dependen de b:
  1. Las sumas y restas son $O(b)$.
  2. Las multiplicaciones y divisiones son $O(b \log b)$.

$\Rightarrow$ Si b está fijo, estas operaciones son $O(1)$. En cambio, si no se puede suponer esto, entonces hay que contemplar que el costo de estas operaciones depende de b.

Complejidad computacional: Las reglas del juego

- **Tiempo de ejecución de un algoritmo A:**
  $T_A(I) =$ suma de los tiempos de ejecución de las instrucciones realizadas por el algoritmo con la *instancia* I.
- Dada una instancia I, definimos $|I|$ como la cantidad de bits necesarios para almacenar los datos de entrada de I.
  1. Si b está fijo y la entrada ocupa n celdas de memoria, entonces $|I| = bn = O(n)$.
- **Complejidad de un algoritmo A:**
  $f_A(n) = \max_{I:|I|=n} T_A(I)$.

Repaso: Notación O

Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, decimos que:

- $f(n) = O(g(n))$ si existen $c \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) \leq c\, g(n)$ para todo $n \geq n_0$.
- $f(n) = \Omega(g(n))$ si existen $c \in \mathbb{R}_+$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) \geq c\, g(n)$ para todo $n \geq n_0$.
- $f(n) = \Theta(g(n))$ si $f = O(g(n))$ y $f = \Omega(g(n))$.

Repaso: Notación O

- Si un algoritmo es $O(n)$, se dice lineal.
- Si un algoritmo es $O(n^2)$, se dice cuadrático.
- Si un algoritmo es $O(n^3)$, se dice cúbico.
- Si un algoritmo es $O(n^k)$, $k \in \mathbb{N}$, se dice polinomial.
- Si un algoritmo es $O(\log n)$, se dice logarítmico.
- Si un algoritmo es $O(d^n)$, $d \in \mathbb{R}_{>1}$, se dice exponencial.

- Cualquier función exponencial es *peor* que cualquier función polinomial: Si $k \in \mathbb{R}_{>1}$ y $d \in \mathbb{N}$ entonces k^n no es $O(n^d)$.

- La función logarítmica es *mejor* que la función lineal (no importa la base), es decir $\log n$ es $O(n)$ pero no a la inversa.

Problemas bien resueltos

Convención. Los algoritmos polinomiales se consideran satisfactorios (cuanto menor sea el grado, mejor), y los algoritmos supra-polinomiales se consideran no satisfactorios.

No obstante ...

- Si los tamaños de instancia son pequeños, ¿es tan malo un algoritmo exponencial?
- ¿Cómo se comparan $O(n^{85})$ con $O(1{,}001^n)$?
- ¿Puede pasar que un algoritmo de peor caso exponencial sea eficiente en la práctica? ¿Puede pasar que en la práctica sea *el mejor*?
- ¿Qué pasa si no encuentro un algoritmo polinomial?

Problemas de optimización

- Un problema de optimización consiste en encontrar la mejor solución dentro de un conjunto:

$$z^* \;=\; \max_{x \in S} f(x) \quad \text{o bien} \quad z^* \;=\; \min_{x \in S} f(x)$$

- La función $f : S \to \mathbb{R}$ se denomina función objetivo del problema.
- El conjunto S es la región factible y los elementos $x \in S$ se llaman soluciones factibles.
- El valor $z^* \in \mathbb{R}$ es el valor óptimo del problema, y cualquier solución factible $x^* \in S$ tal que $f(x^*) = z^*$ se llama un óptimo del problema.

Problemas de optimización combinatoria

- Un problema de optimización combinatoria es un problema de optimización cuya región factible es un conjunto definido por consideraciones combinatorias (!).
- La combinatoria es la rama de la matemática discreta que estudia la construcción, enumeración y existencia de configuraciones de objetos finitos que satisfacen ciertas propiedades.
- Por ejemplo, regiones factibles dadas por todos los subconjuntos/permutaciones de un conjunto finito de elementos (posiblemente con alguna restricción adicional), todos los caminos en un grafo, etc.

Algoritmos de fuerza bruta

- Un algoritmo de fuerza bruta para un problema de optimización combinatoria consiste en generar todas las soluciones factibles y quedarse con la mejor.
  1. Se los suele llamar también algoritmos de búsqueda exhaustiva o generate and test.
  2. Se trata de una técnica trivial pero muy general.
  3. Suele ser fácil de implementar, y es un algoritmo exacto: si hay solución, siempre la encuentra.
- El principal problema de este tipo de algoritmos es su complejidad. Habitualmente, un algoritmo de fuerza bruta tiene una complejidad exponencial.

Ejemplo: El problema de la mochila

Datos de entrada:

- Capacidad $C \in \mathbb{Z}_+$ de la mochila (peso máximo).
- Cantidad $n \in \mathbb{Z}_+$ de objetos.
- Peso $p_i \in \mathbb{Z}_+$ del objeto i, para $i = 1, \dots, n$.
- Beneficio $b_i \in \mathbb{Z}_+$ del objeto i, para $i = 1, \dots, n$.

Problema: Determinar qué objetos debemos incluir en la mochila sin excedernos del peso máximo C, de modo tal de maximizar el beneficio total entre los objetos seleccionados.

Ejemplo: El problema de la mochila

- ¿Cómo es un algoritmo de fuerza bruta para el problema de la mochila?
- ¿Cómo se implementa este algoritmo?

```
MOCHILA(S ⊆ {1, ..., n}, k : ℤ)
if k = n + 1 then
    if peso(S) ≤ C ∧ beneficio(S) > beneficio(B) then
        B ← S
    end if
else
    MOCHILA(S ∪ {k}, k + 1);
    MOCHILA(S, k + 1);
end if
```

- Iniciamos la recursión con $B \leftarrow \emptyset$; $\textsc{Mochila}(\emptyset,\ 1)$.
- ¿Cuál es la complejidad computacional de este algoritmo?

Ejemplo: El problema de la mochila

- **Idea.** Podemos interrumpir la recursión cuando el subconjunto actual excede la capacidad de la mochila!

$\textsc{Mochila}(S \subseteq \{1, \ldots, n\},\ k : \mathbb{Z})$

if $k = n + 1$ **then**
    if $\text{peso}(S) \leq C \wedge \text{beneficio}(S) > \text{beneficio}(B)$ **then**
        $B \leftarrow S$
    end if
else if $\text{peso}(S) \leq C$ **then**
    $\textsc{Mochila}(S \cup \{k\},\ k + 1)$;
    $\textsc{Mochila}(S,\ k + 1)$;
end if

- Con este agregado, decimos que tenemos un backtracking.
- ¿Cuál es la complejidad computacional de este algoritmo?

Ejemplo: El problema de la mochila

- Podemos implementar alguna otra poda?

$\textsc{Mochila}(S \subseteq \{1, \dots, n\},\ k : \mathbb{Z})$

---

if $k = n + 1$ **then**
  if peso$(S) \leq C \wedge$ beneficio$(S) >$ beneficio(B) **then**
    $B \leftarrow S$
  end if
else if peso$(S) \leq C \wedge$ benef$(S) + \sum_{i=k+1}^{n} b_i >$ benef(B)
then
  $\textsc{Mochila}(S \cup \{k\},\ k + 1)$;
  $\textsc{Mochila}(S,\ k + 1)$;
end if

- Este tipo de algoritmos se denomina habitualmente branch and bound.

Backtracking

Idea: Recorrer sistemáticamente todas las posibles configuraciones del espacio de soluciones de un problema computacional, eliminando las configuraciones parciales que no puedan completarse a una solución.

- Habitualmente, utiliza un vector $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ para representar una solución candidata, cada a_i pertenece un dominio/conjunto ordenado y finito A_i.
- El espacio de soluciones es el producto cartesiano $A_1 \times \ldots \times A_n$.

Backtracking

- En cada paso se extienden las soluciones parciales $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $k < n$, agregando un elemento más, $a_{k+1} \in S_{k+1} \subseteq A_{k+1}$, al final del vector a. Las nuevas soluciones parciales son sucesores de la anterior.
- Si S_{k+1} es vacío, se *retrocede* a la solución parcial $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$.
- Se puede pensar este espacio como un árbol dirigido, donde cada vértice representa una solución parcial y un vértice x es hijo de y si la solución parcial x se puede extender desde la solución parcial y.
- Permite descartar configuraciones antes de explorarlas (podar el árbol).

Backtracking: Todas las soluciones

```
algoritmo BT(a, k)
    si a es solución entonces
        procesar(a)
        retornar
    sino
        para cada a' ∈ Sucesores(a, k)
            BT(a', k + 1)
        fin para
    fin si
    retornar
```

Backtracking: Una solución

```
algoritmo BT(a,k)
    si a es solución entonces
        sol ← a
        encontro ← true
    sino
        para cada a' ∈ Sucesores(a,k)
            BT(a', k+1)
            si encontro entonces
                retornar
            fin si
        fin para
    fin si
    retornar
```

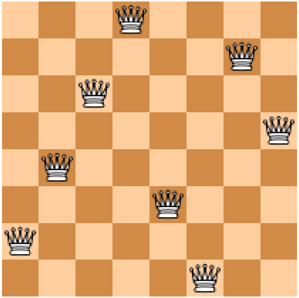
Backtracking - Resolver un *sudoku*

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

El problema de resolver un *sudoku* se resuelve en forma muy eficiente con un algoritmo de *backtracking* (no obstante, el peor caso es exponencial!).

Fuerza bruta - Problema de las n damas



Problema: Ubicar n damas en un tablero de ajedrez de $n \times n$ casillas, de forma que ninguna dama amenace a otra.

Fuerza bruta - Problema de las n damas

- Solución por **fuerza bruta**: hallar todas las formas posibles de colocar n damas en un tablero de $n \times n$ y luego seleccionar las que satisfagan las restricciones.
- Un algoritmo de fuerza bruta (también llamado de búsqueda exhaustiva) analiza todas las posibles "configuraciones", lo cual habitualmente implica una complejidad exponencial.
- Por ejemplo, para $n = 8$ una implementación directa consiste en generar todos los subconjuntos de casillas.

$$2^{64} = 18,446,744,073,709,551,616 \text{ combinaciones!}$$

- Sabemos que dos damas no pueden estar en la misma casilla.

$$\binom{64}{8} = 4,426,165,368 \text{ combinaciones.}$$

Fuerza bruta - Problema de las n damas

- Sabemos que cada columna debe tener exactamente una dama. Cada solución parcial puede estar representada por $(a_1, \ldots, a_k)$, $k \leq 8$, con $a_i \in \{1, \ldots, 8\}$ indicando la fila de la dama que está en la columna i.

  Tenemos ahora $8^8 = 16,777,216$ combinaciones.

- Adicionalmente, cada fila debe tener exactamente una dama.

  Se reduce a $8! = 40,320$ combinaciones.

- Esto está mejor, pero se puede mejorar observando que no es necesario analizar muchas de estas combinaciones (¿por qué?).