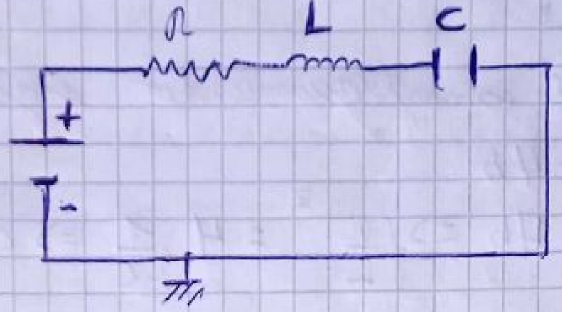
Facundo castorelli

HOJA N° 1

FECHA 23/1/23

Parte C

Ejercicio C4:



Circuito en serie

$V_i(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$ donde $I_R = I_L = I_C = I$

$V_i = I \cdot R + L \cdot \dot{I} + V_C$

$V_i = \dot{V}_C \cdot C \cdot R + L \cdot \ddot{V}_C \cdot C + V_C$

$V_i = L \cdot C \cdot \ddot{V}_C + C \cdot R \cdot \dot{V}_C + 1 \cdot V_C$ con $a = L \cdot C$, $b = C \cdot R$, $d = 1$

De manera matricial: Aplico simplificación como $\dot{V}_C = Z$, $\ddot{V}_C = \dot{Z}$

De la EDO despejo $\ddot{V}_C$ $\Rightarrow$ $\ddot{V}_C(t) = \frac{1}{L \cdot C} \cdot V_i(t) - \frac{1}{LC} \cdot V_C(t) - \dot{V}_C \cdot \frac{R}{L}$

Planteo los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = \frac{1}{LC} \cdot V_i(t) - \frac{1}{LC} V_C(t) - \frac{R}{L} \cdot Z(t) \\ Z(t) = \dot{V}_C(t) \end{cases}$$

- Por otro lado $\begin{bmatrix} \dot{V}_C \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1/a & -b/a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_C \\ Z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/a \end{bmatrix}$

- EDO normalizada $\frac{V_i}{LC} = \ddot{V}_C + \frac{R}{L} \cdot \dot{V}_C + \frac{V_C}{LC}$, $a = \frac{R}{L}$, $b = \frac{1}{LC}$

Resolución de la EDO: V_i es un escalón $\Rightarrow$ $V_i(t) = u(t) = 1 = cte$ para $t > 0$ Esto es como si ingresara una señal continua

- Busco $V_{C,SG}(t) = V_{C,SH}(t) + V_{C,SP}(t)$

Obtengo la $V_{C,SH}(t)$ a partir de estudiar la "ecuación característica" la cual se obtiene al igualar a 0 la EDO debido a la independen-

NOTA

ción de la homogénea respecto de la entrada $v_i(t)$. Esta ecuación es:

$$0 = \lambda^2 + a\cdot\lambda + b \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}$$

estudio 3 casos de amortiguamiento según lo que sucede con a^2-4b

· Caso 1: $a^2 = 4b \Rightarrow \left(\frac{R}{L}\right)^2 = 4 \cdot \frac{1}{LC} \Rightarrow C = 0{,}5,\ L = 2,\ R = 4$

Amortiguamiento crítico

Obtengo una única raíz real doble

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\frac{R}{L} \pm 0}{2} = \frac{-4}{2\cdot 2} = -1$$

$$\Rightarrow V_{c,SH}(t) = K_1 \cdot e^{\lambda t} + K_2 \cdot t \cdot e^{\lambda t} = \boxed{K_1 \cdot e^{-t} + K_2 \cdot t \cdot e^{-t}}$$

Obtengo la $V_{c,SP}(t) \Rightarrow$ Propongo $V_{c,SP}(t) = A$ ya que $V_i(t)$ es $u(t) = 1 =$ cte para $t >$. Luego reemplazo en EDO original:

$$\frac{V_i(t)}{L \cdot C} = \ddot{V}_c(t) + \frac{R}{L} \cdot \dot{V}_c(t) + \frac{1}{CL} \cdot V_c(t)$$

$$\frac{1}{0{,}5\cdot 2} = \underbrace{0}_{\ddot{V}_c} + \frac{4}{2} \cdot \underbrace{0}_{\dot{V}_c} + \frac{1}{0{,}5\cdot 2} \cdot A$$

$$1 = A$$

Luego queda: $V_{c,SG}(t) = V_{c,SH}(t) + V_{c,SP}(t) = K_1 \cdot e^{-t} + K_2 \cdot t \cdot e^{-t} + 1$

y busco K_1 y K_2 a partir de estudiar las condiciones iniciales nulas por enunciado: $V_{c,SG}(t=0) = 0$, $\dot{V}_{c,SG}(t=0) = 0$

NOTA

Facundo Castorelli

HOJA Nº 2

FECHA 23/10/23

$$V_{c,sg}(t) = K_1 e^{-t} + K_2\, t\, e^{-t} + 1$$

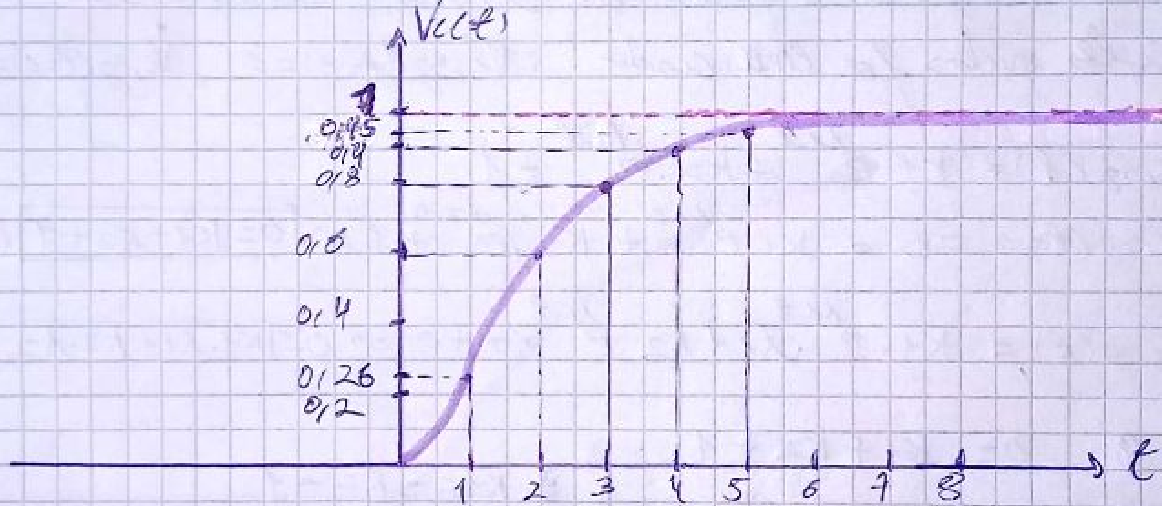
$$V_{c,sg}(t=0) = 0 = K_1 \cdot e^{-0} + K_2 \cdot 0 \cdot e^{-0} + 1 \Rightarrow \boxed{-1 = K_1}$$

$$\dot{V}_{c,sg}(t) = K_1 \cdot e^{-t}(-1) + K_2\left[1 \cdot e^{-t} + t \cdot e^{-t} \cdot (-1)\right] + 0$$

$$\dot{V}_{c,sg}(t=0) = 0 = K_1 \cdot e^{-0}(-1) + K_2\left[1 \cdot e^{-0} + 0 \cdot e^{-0}(-1)\right] + 0$$

$$\dot{V}_{c,sg}(t=0) = 0 = -K_1 + K_2 \Rightarrow 0 = -1 \cdot (-1) K_1 + K_2 \Rightarrow \boxed{-1 = K_2}$$

Finalmente: $\boxed{V_c(t) = -1 \cdot e^{-t} - 1 \cdot t \cdot e^{-t} + 1}$



Caso 2:

$$a^2 > 4b \Rightarrow \left(\frac{R}{L}\right)^2 > 4 \cdot \frac{1}{C \cdot L} \Rightarrow C = 0{,}5,\ L = 2,\ R = 6$$

Sobreamortiguado:

Obtengo dos raíces reales y distintas:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{C \cdot L}}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2},\quad \lambda_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow V_{c,sA}(t) = K_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + K_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} = \boxed{K_1 e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2} t} + K_2 \cdot e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2} t}}$$

NOTA

Obtengo la $V_{C,SP}(t)$ => propongo $V_{C,SP}(t)=A$ ya que $V_i(t)=u(t)=1=cte$ para $t>0$. Luego reemplazo en EDO singular:

$$\frac{V_i(t)}{C.L} = \ddot{V}_C(t) + \frac{R}{L}\dot{V}_C(t) + \frac{1}{CL}\cdot V_C(t)$$

$$\frac{1}{0,5\cdot 2} = \underbrace{0}_{\ddot{V}_C} + \frac{6}{2}\cdot\underbrace{0}_{\dot{V}_C} + \frac{1}{0,5\cdot 2}\cdot A$$

$$1 = A$$

Luego queda: $\boxed{V_{C,SG}(t) = V_{C,SH}(t) + V_{C,SP}(t) = K_1\cdot e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}t} + K_2\cdot e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}t} + 1}$

y busco K_1 y K_2 a partir de estudiar condiciones iniciales nulas por enunciado: $V_{C,SG}(t=0)=0$, $\dot{V}_{C,SG}(t=0)=0$

$$\therefore V_{C,SG}(t) = K_1\cdot e^{\lambda_1\cdot t} + K_2\cdot e^{\lambda_2\cdot t} + 1$$

$$V_{C,SG}(t=0) = 0 = K_1\cdot e^{\lambda_1\cdot 0} + K_2\cdot e^{\lambda_2\cdot 0} + 1 \Rightarrow \boxed{0 = K_1 + K_2 + 1} \; (1)$$

$$\dot{V}_{C,SG}(t) = K_1\cdot e^{\lambda_1\cdot t}\cdot\lambda_1 + K_2\cdot e^{\lambda_2\cdot t}\cdot\lambda_2 + 0 \Rightarrow 0 = \boxed{K_1\cdot\lambda_1 + K_2\cdot\lambda_2} \; (2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & 0 = K_1 + K_2 + 1 \\ (2) & 0 = K_1\cdot\lambda_1 + K_2\cdot\lambda_2 \end{array}\right\} (3)\; K_1 = -K_2 - 1$$

(3) en (2) =>

$$0 = (-K_2 - 1)\lambda_1 + K_2\lambda_2$$

$$0 = -K_2\lambda_1 - 1\cdot\lambda_1 + K_2\cdot\lambda_2$$

$$0 = K_2(-\lambda_1 + \lambda_2) - 1\cdot\lambda_1$$

$$1\cdot\lambda_1 = K_2(-\lambda_1 + \lambda_2)$$

$$\frac{\lambda_1}{-\lambda_1 + \lambda_2} = K_2$$

$$\frac{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}{-\frac{-3+\sqrt{5}}{2} + \frac{-3-\sqrt{5}}{2}} = \boxed{K_2 = \frac{-5+3\sqrt{5}}{10}}$$

NOTA

Facundo Castorelli

HOJA Nº 3

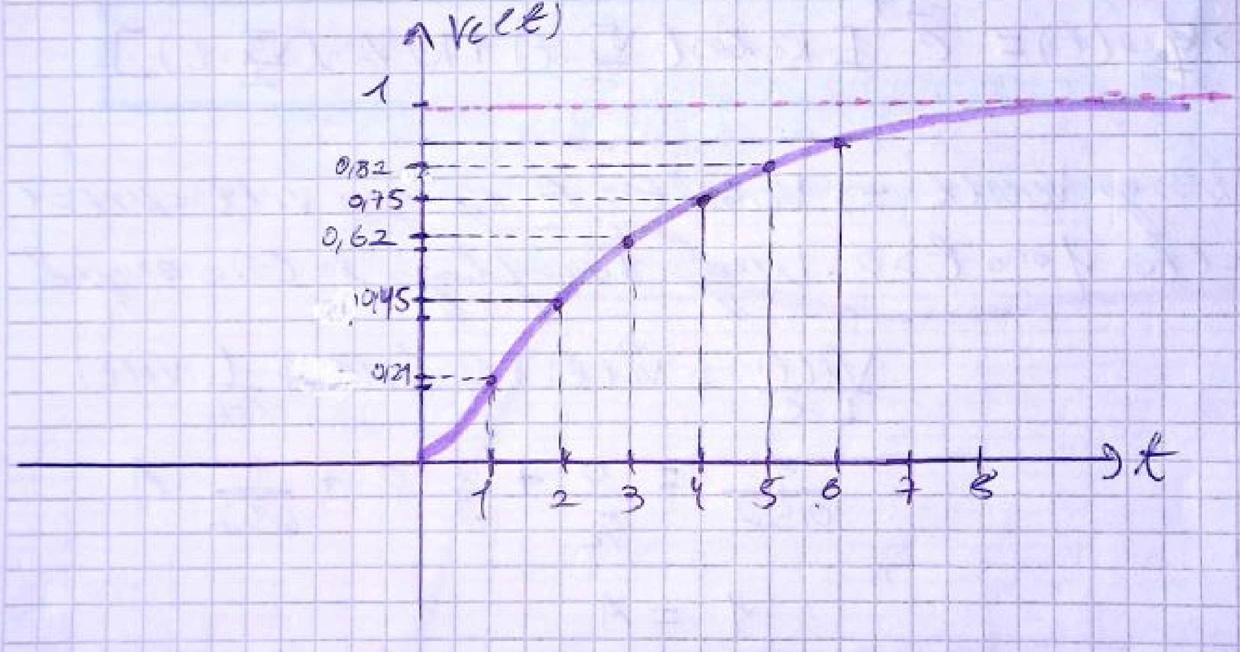
FECHA

K_2 en ① $\Rightarrow K_1 = -K_2 - 1$

$$K_1 = -\frac{-5+3\sqrt{5}}{10} - 1$$

$$\boxed{K_1 = \frac{-5-3\sqrt{5}}{10}}$$

Finalmente: $\boxed{V_C(t) = \frac{-5-3\sqrt{5}}{10} e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \cdot t} + \frac{-5+3\sqrt{5}}{10} e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \cdot t} + 1}$



Caso 3: $a^2 < 4 \cdot b \Rightarrow \left(\frac{R}{L}\right)^2 < 4 \cdot \frac{1}{CL} \Rightarrow C=0,5; L=2; R=2$

Subamortiguada

Obtengo dos raíces complejas conjugadas:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{CL}}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

NOTA

Usando la calculadora en complejos:

$$\lambda 1 = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = Z1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\lambda 2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = Z2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$\Rightarrow V_{c,SH}(t) = k1 \cdot e^{\lambda 1 t} + k2 \cdot e^{\lambda 2 \cdot t} = k1 \cdot e^{z1 \cdot t} + k2\, e^{z2 t}$$

y aplicamos la igualdad de Euler

$$\Rightarrow V_{c,SH}(t) = e^{\mu \cdot t} \left[k1 \cos(|V| \cdot t) + k2 \operatorname{sen}(|V| \cdot t) \right]$$

con $\mu = -\frac{a}{2} = \frac{-\frac{R}{L}}{2} = -\frac{1}{2}$, $V = \frac{\sqrt{a^2-4b}}{2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{CL}}}{2} = \frac{\sqrt{-3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$$\boxed{\Rightarrow V_{c,SH}(t) = e^{-\frac{1}{2} t} \left[k1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right) + k2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right) \right]}$$

Obtengo $V_{c,SP}(t) \Rightarrow V_{c,SP}(t) = A$ ya que $v_i(t) = u(t) = 1$ = cte para $t > 0$. Luego reemplazo en ED original

$$\frac{V_i(t)}{L \cdot C} = \ddot{V_c}(t) + \frac{R}{L} \cdot \dot{V_c}(t) + \frac{1}{C \cdot L} V_c(t)$$

$$\frac{1}{0{,}5 \cdot 2} = \underbrace{0}_{\ddot{V_c}} + \frac{2}{2} \cdot 0 + \frac{1}{0{,}5 \cdot 2} \cdot A$$

$$1 = A$$

Luego queda: $V_{c,SG}(t) = V_{c,SH}(t) + V_{c,SP}(t)$

$$\boxed{V_{c,SG}(t) = e^{-\frac{1}{2} t} \left[k1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + k2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right) \right] + 1}$$

y busco $k1$ y $k2$ a partir de establecer las condiciones iniciales por enunciado: $V_{c,SG}(t=0) = 0$, $\dot{V}_{c,SG}(t=0) = 0$

NOTA

Facundo Castorelli

HOJA Nº 4

FECHA 23/10/23

$$V_{c,sg}(t) = e^{-0,5 \cdot t}\left[K_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right) + K_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right)\right] + 1$$

$$V_{c,sg}(t=0) = e^{-0,5 \cdot 0}\left[K_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0\right) + K_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0\right)\right] + 1$$

$$0 = K_1 + 1$$

$$\boxed{-1 = K_1}$$

$$\dot{V}_{c,sg}(t) = e^{-0,5 \cdot t}(0,5) \cdot \left[-K_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + K_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right] + 0$$

$$\dot{V}_{c,sg}(t=0) = 0 = e^{-0,5 \cdot 0}(0,5)\left[-K_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + K_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot K_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{0 = K_2}$$

Finalmente $\boxed{V_c(t) = -e^{-0,5t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right) + 1}$