Álgebra I - 2022

PRÁCTICO 4: NÚMEROS COMPLEJOS

1. Dados los siguientes números complejos identificar parte real, parte imaginaria, calcular su módulo y graficarlos.

   a) $-3+5i$ **b**) $4i$ **c**) -7 *d*) $2-i$ **e**) $i+1$ **f**) $5-\sqrt{2}i$

2. Efectuar las siguientes operaciones. Expresar el resultado en forma binómica. Nota: Se denomina forma binómica o estándar a la forma $z = a + bi$, con a y b números reales.

   a) $(\frac{5}{4}+7i)+(\frac{1}{6}-3i)$ **b**) $(3i)-(5-i)$ **c**) $\overline{(2+4i)}-(-1+i)$

   d) $(2+i)(5i)+1$ **e**) $(1-2i)(-3+4i)$ **f**) $\sqrt{(2+5i)(2-5i)}$

   g) $(3-i)+4(2+3i)$ **h**) $\dfrac{6-2i}{2+i}$ **i**) $\dfrac{-2i}{2+i}$

   j) $(3-i)^{-1}$ **k**) $\overline{-i}$ **l**) $\left(\sqrt{3}-2i\right)\overline{\left(\sqrt{3}-2i\right)}$

   m) $(-3i)^{-1}(2+3i)$ **n**) $\dfrac{3}{1-i}$ **ñ**) $i^{15}\dfrac{3}{5-4i}$

   o) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}-i\right)\overline{\left(\frac{1}{2}-i\right)}}{5i-4}-\left(\frac{1}{4}+i\right)$ **p**) $\frac{(1-i)(4-4i)^2}{(2i)^7}$ **q**) $\frac{|1-i|}{2+5i^{41}}$

3. Siendo $z = 3-2i$, graficar en un mismo sistema de ejes los números complejos z, $-z$, $\overline{z}$,$\overline{(-z)}$. Qué relación geométrica se observa?

4. Dados los números complejos $z_1 = 2-i$ y $z_2 = 3+6i$ determinar el número x que satisface las siguientes ecuaciones:

   a) $z_1 + x = z_2$ **b**) $(z_2)^2\, x = 1$ **c**) $(z_2)^2 + x = -(z_1)^2$

5. Determinar el valor de x (real) para que $z = (-3-2i)(3+xi)$ sea un número real y para que sea un número imaginario puro.

6. Calcular el valor de a y de b para que el número $(3b-2ai)/(4-3i)$ sea real y de módulo 1.

7. a) Cómo describiría el conjunto de los números complejos que se encuentran en el tercer cuadrante?
   b) Cómo describiría el conjunto de los números complejos que se encuentran sobre el eje x?
   c) Cómo describiría el conjunto de los números complejos que se encuentran sobre la recta $y = x$?

8. Hallar módulo y ángulo de los siguientes número complejos. Expresarlos en forma polar (o trigonométrica).

   a) $2+2i$ **b**) $2-2i$ **c**) $-\sqrt{5}$ **d**) $\dfrac{5}{3}i$

   e) $\sqrt{3}+i$ **f**) $-1-i$ **g**) $-\dfrac{5}{3}i$ **h**) $-3+i$

9. Expresar en forma binómica los siguientes números complejos y graficarlos.

a) $z_1 = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \sin\frac{\pi}{6}\right)$ **b)** $z_2 = 3\left(\cos 90^\circ + i\sin 90^\circ\right)$

c) $z_3 = 2(cos(\pi/4) + isen(\pi/4))$ **d)** $z_4 = cos(\pi/6) + isen(\pi/6)$

10. Considerando z_1, z_2, z_3, z_4 del ejercicio anterior, efectuar las siguientes operaciones en forma polar. En caso de z_3 y z_4 pasarlos previamente a dicha forma.

a) $z_1 z_2$ **b)** $z_1 z_4$ **c)** $z_2 z_3$ **d)** $\dfrac{z_1}{z_4}$ **e)** $\dfrac{z_2}{z_3}$ **f)** $\dfrac{z_3}{z_4}$

11. Analizar la verdad o falsedad de los siguientes enunciados, demostrando el mismo si es verdadero o dando un contraejemplo en caso de ser falso.

    a) La parte imaginaria de un número complejo z es $\frac{z-\overline{z}}{2i}$.

    b) El producto de un número complejo por su conjugado da el módulo del complejo.

    d) Si z_1 y z_2 son números complejos, ambos de módulo uno, entonces $|z_1 + z_2| = 2$ si y sólo si $z_1 = z_2$. **Ayuda:** usar que $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$.

    e) $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{(|z|)^2}$.

12. Representar gráficamente el conjunto de números complejos que satisfacen las condiciones indicadas.

a)	$\lvert z\rvert = 1$	**b)**	$z = a + bi$ con $a \leq 0$ y $b > 0$	**c)**	$\lvert z\rvert < 1$
d)	$1 < \lvert z\rvert \leq 2$	**e)**	$\lvert z - 2i\rvert \leq 1$	**f)**	$z = -\overline{z}$
g)	$z\overline{z} > 4$	**h)**	$z = r(cos(\theta) + isen(\theta))$, con $\theta = \frac{\pi}{3}$ y $r \in \mathbb{R}^+$	**i)**	$\lvert z\rvert < 1,\ Im(z) > 0$

13. Utilizando el teorema de De Moivre calcular las siguientes potencias y expresar el resultado en forma estándar.

a) $\left(3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)^8$ **b)** $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^5$

c) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{20}$ **d)** $\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^{12}$

14. Encontrar:

    a) Las dos raíces cuadradas de $1 + \sqrt{3}i$. Graficar.
    b) Las tres raíces cúbicas de $-27i$.
    c) Las cuatro raíces cuartas de $-8 + 8\sqrt{3}i$. Graficar.
    d) Las cinco raíces quinta de la unidad.

15. Hallar todas las soluciones (reales y/o complejas) de las siguientes ecuaciones:

a) $z^5 + 1 = 0$ **b)** $z^3 = -3z$ **c)** $z^3 + i = -1$ **d)** $x^2 - 2x + 3 = 0$

e) $\dfrac{1}{z} = i$ **f)** $\left(z^3 + 216\right)\left(1 - 2z + 2z^2\right) = 0$ **g)** $\dfrac{3-i}{3+i}z = i$ **h)** $x^3 - 2x^2 + 5x = 0$