Cálculo I / Análisis Matemático I
Resumen de Teoría - Parcial 1

Función: definición

Función: definición

Definición

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E.

En símbolos

Definición

$f : D \to E$ es una **función** si

$$\forall x \in D, \exists! y \in E : y = f(x).$$

Dominio y Rango de una función

Remark

Sea f una función

- El conjunto D es el *dominio* de f, denotado por $dom(f)$. A un elemento arbitrario del dominio se los denomina como variable independiente.
- El *rango* de f es un subconjunto de E, denotado $rank(f)$. A un elemento arbitrario del dominio se los denomina como variable dependiente.

Definición

f es una función definida por secciones si

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \in I_1 \\ g_2(x) & \text{si } x \in I_2 \\ \vdots & \\ g_n(x) & \text{si } x \in I_n \end{cases}, \text{ con } \bigcap_{i=1}^{n} I_i = \emptyset.$$

donde g_i son funciones en I_i, para $i = 1, 2, \ldots, n$

$$dom(f) = \bigcup_{i=1}^{n} I_i$$

$$rango(f) = \bigcup_{i=1}^{n} rango(g_i)$$

Definición

Sea f una función. f es una **función par** si

$$f(-x) = f(x), \quad \forall x \in dom(f)$$

.

Definición

Sea f una función. f es una **función impar** si

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in dom(f)$$

.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Definición

Una función f se llama **creciente** sobre un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2), \text{ con } x_1, x_2 \in I \text{ y } x_1 < x_2.$$

Se llama **decreciente** sobre I si

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ con } x_1, x_2 \in I \text{ y } x_1 < x_2.$$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Definición

Una función f se llama **creciente** sobre un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2), \text{ con } x_1, x_2 \in I \text{ y } x_1 < x_2.$$

Se llama **decreciente** sobre I si

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ con } x_1, x_2 \in I \text{ y } x_1 < x_2.$$

- Decimos que una función f es lineal, cuando su gráfica es una recta. Es decir, una forma de escribir f es

$$f(x) = mx + b$$

donde m es la pendiente de la recta y b la intersección con el eje y.

- Una función P se llama polinomial si

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

donde n es un número entero no negativo y $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes llamadas coeficientes de la polinomial.

Se llama función potencia a una función de la forma $f(x) = x^a$, donde a es una constante.

i: $a = n$, donde n es un número entero positivo.

ii: $a = \frac{1}{n}$, donde n es un número entero positivo.

iii: $a = -1$, donde n es un número entero positivo. Se la conoce como función recíproca.

Tipos de Funciones 3

- Una función f se llama función algebraica si puede construirse utilizando operaciones algebraicas (como suma, resta, multiplicación, división y tomando raíces) comenzando con las polinomiales.
- Las funciones exponenciales son funciones de la forma

$$f(x) = a^x,$$

donde $a > 0$

- Las funciones logarítmicas son funciones de la forma

$$f(x) = \log_a x,$$

donde $a > 0$.

Tipos de Funciones 3

Las funciones trigonométricas son:

- $f(x) = \sin(x)$.
- $f(x) = \cos(x)$.
- $f(x) = \tan(x)$.

Identidades trigonométricas

- $\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$
- $\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$
- $\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)}$
- $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$
- $\sin(\theta + 2\pi) = \sin(\theta), \quad \cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$
- $\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$

Sea $c > 0$.

1) $g(x) = f(x) + c$, desplaza c unidades hacia arriba la gráfica de $f(x)$.

2) $g(x) = f(x) - c$, desplaza c unidades hacia abajo la gráfica de $f(x)$.

3) $g(x) = f(x + c)$, desplaza c unidades hacia la izquierda la gráfica de $f(x)$.

4) $g(x) = f(x - c)$, desplaza c unidades hacia la derecha la gráfica de $f(x)$.

Operaciones básicas:

- $f(x) + g(x) = (f + g)(x)$.
- $f(x) - g(x) = (f - g)(x)$.
- $f(x)g(x) = (f \cdot g)(x)$.
- $\frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$.

Dominio:

- $Dom(f + g) = \{x | x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}$.
- $Dom(f - g) = \{x | x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}$.
- $Dom(f \cdot g) = \{x | x \in Dom(f) \cap Dom(g)\}$.
- $Dom\left(\frac{f}{g}\right) = \{x | x \in Dom(f) \cap Dom(g) \wedge g(x) \neq 0\}$.

Composición

Definición

Dadas dos funciones f y g. La función compuesta $f \circ g$ (también llamada **composición** de f y g) se define como

$$f(g(x)) = (f \circ g)(x),$$

donde $Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) | g(x) \in Dom(f)\}$

Inyectividad

Definición

Una función f se llama **inyectiva** (o uno a uno) si para todo $x_1, x_2 \in Dom(f)$ se cumple que

$$f(x_1) \neq f(x_2), \qquad \text{cuando } x_1 \neq x_2$$

Definición

Sea f una función inyectiva (uno a uno). La **función inversa** de f, denotada f^{-1}, es la función definida por

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y, \quad \forall y \in Rango(f).$$

Donde

- $Dom(f^{-1}) = Rango(f)$,
- $Rango(f^{-1}) = Dom(f)$.

Función inversa

Remark

- El -1 de f^{-1} no es un exponente, es solo una notación. Es decir, f^{-1} no es $\frac{1}{f(x)}$.
- La variable independiente de f^{-1} es x. Es decir, cuando nuestra función principal sea f^{-1}, la notación usual será

$$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x.$$

- Debido que f^{-1} es la función inversa de f, es facil ver

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= (f^{-1} \circ f)(x) = x \qquad && \forall x \in Dom(f) \\ f(f^{-1}(x)) &= (f \circ f^{-1})(x) = x \qquad && \forall x \in Dom(f^{-1}) \end{aligned}$$

Funciones exponenciales

Definición

Una función exponencial es de la forma

$$f(x) = a^x,$$

donde $a > 0$.

Casos del exponente de operaciones algebraicas:

- $x = n$, con $n \in \mathbb{Z}^+$: $\quad a^x = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$.
- $x = 0$: $\quad a^0 = 1$.
- $x \in \mathbb{Q}$, de la forma $x = \frac{p}{q}$, donde $p, q \in \mathbb{Z}$ y $q > 0$:

$$a^x = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

Clasificaremos las funciones exponenciales $f(x) = a^x$ en tres tipos:

a) Cuando $0 < a < 1$. En este caso la función exponencial decrece.

b) Cuando $a = 1$. En este caso la función es una constante.

c) Cuando $a > 1$. En este caso la función exponencial crece.

Dominio y Rango de las funciones exponenciales

Propiedades

Sea $f(x) = a^x$. Si $a = 1$

- $Dom(f) = \mathbb{R}$.
- $Rango(f) = [1, 1] = \{1\}$.

Si $a > 0$ y $a \neq 1$

- $Dom(f) = \mathbb{R}$.
- $Rango(f) = (0, \infty) = \{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$.

Funciones exponenciales

Tenemos las siguientes propiedades de exponenciales ya conocidas

Propiedades

Sea $a > 0$, $b > 0$ y $x, y \in \mathbb{R}$.

1. $a^{x+y} = a^x a^y$.
2. $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$.
3. $(a^x)^y = a^{xy}$.
4. $(ab)^x = a^x b^x$.

Definición

Una **función logarítmica con base** a, denotada por $\log_a$, se define como la función inversa de una función exponencial de base a, con $a > 0$ y $a \neq 1$. Es decir

$$\log_a(x) = y \iff a^y = x.$$

Así, tenemos:

$$\log_a(a^x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$a^{\log_a(x)} = x \qquad \forall x > 0.$$

Propiedades

Si x e y son números positivos, entonces

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
3. $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$, con $r \in \mathbb{R}$.

Remark

Sea $f(x) = \log_a(x)$. Es claro que

- $Dom(f) = (0, \infty)$.
- $Rango(f) = \mathbb{R}$

debido a que es la función inversa de $g(x) = a^x$, con $a \neq 1$

Remark

Cuando $a = e = 2.71828\ldots$, tenemos que:

- $\log_e(x) = \ln(x)$
- $\ln(x) = y \iff e^y = x$

Propiedades

Para todo número positivo a distinto de 1, tenemos

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Límite - Definición intuitiva

Definición

Supongamos que $f(x)$ está definida cuando x está cerca del número a. (Esto significa que f está definida en algún intervalo abierto que contiene a a, excepto posiblemente en a misma.) Entonces escribimos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

y decimos que “el límite de $f(x)$, cuando x tiende a a, es igual a L” si podemos hacer que los valores de $f(x)$ estén arbitrariamente cercanos a L (tan cercanos a L como queramos), tomando valores de x suficientemente cerca de a (por ambos lados de a), pero no iguales a a.

Límite - Definición formal

Definición

Sea f la función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma. Entonces, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiene a a es L, y lo expresamos como

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para cada número $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ tal que si

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definición

Cuando escribimos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

estamos diciendo que el límite izquierdo de $f(x)$ cuando x se aproxima a a (o el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a por izquierda) es igual a L si podemos hacer que los valores de $f(x)$ se acerquen arbitrariamente a L, tanto como queramos, tomando x suficientemente cercanos a a, pero menores que a.

El límite por derecha

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

se define de manera similar

Theorem

Sea f la función definida sobre algún intervalo abierto que contiene el número a, excepto posiblemente en a misma.

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Remark

Con esto, podemos concluir que:

- Existe el límite de $g(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ cuando x se aproxima a 1, y es $\frac{1}{2}$. Es decir $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2} = \frac{1}{2}$
- El límite de $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ 3-x & \text{si } x < 1 \end{cases}$ cuando x tiende a 1 no existe .

Límites infinitos - definición

Definición

Sea f una función definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en la misma a. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser arbitrariamente grandes (tan grandes como queramos), tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual que a.

De manera análoga definimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

Límites infinitos - definición

Definición

Sea f una función definida por ambos lados de a, excepto posiblemente en la misma a. Entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden ser negativos arbitrariamente grandes (tan grandes como queramos), tomando x suficientemente cerca de a, pero no igual que a.

De manera análoga definimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Remark

Esto no quiere decir que estemos considerando a ∞ o $-\infty$ como un número. Tampoco significa que el límite existe. Simplemente expresa la forma particular en que el límite no existe.

Definición

La recta $x = a$ se llama **asíntota vertical** de la curva $y = f(x)$ si al menos nuna de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty.$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty.$
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty.$

Propiedades

Si c es una constante y existen los límites

$$\lim_{x \to a} f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to a} g(x)$$

, entonces

1. $\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$.
2. $\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$.
3. $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$.
4. $\lim_{x \to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$.
5. $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, siempre que $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$.

Propiedades

Si c es una constante, sabiendo que existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y utilizando la propiedades anteriores, tenemos que

1. $[\lim_{x \to a} f(x)]^n = \lim_{x \to a} f(x)^n$, donde n es un entero positivo
2. $\lim_{x \to a} c = c$.
3. $\lim_{x \to a} x = a$.
4. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$.
5. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$, donde n es un entero positivo. (Si n es par, suponemos que $a > 0$)
6. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$, donde n es un entero positivo. (Si n es par, suponemos que $\lim_{x \to a} > 0$)

Límite

Theorem

Si f es un función polinomial o una función racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Theorem

Si $f(x) = g(x)$ cuando $x \neq a$, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x).$$

siempre que el límite exista.

Theorem

Si $f(x) \leq g(x)$ *cuando* x *tiende a* a *(excepto posiblemente en* $x = a$*) y los límites de* f *y* g *existen cuando* x *tiende a* a*, entonces*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

Theorem (Teorema de la compresión)

Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *cuando* x *tiende a* a *(excepto posiblemente en* $x = a$*) y*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

entonces

$$\lim_{x \to a} g(x) = L.$$

Límite al infinito

Definición

Sea f una función definida sobre algún intervalo (a, ∞). Entonces

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden aproximarse arbitrariamente a L tanto como desee, eligiendo a x suficientemente grande.

Definición

Sea f una función definida sobre algún intervalo $(-\infty, a)$. Entonces

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que los valores de $f(x)$ pueden aproximarse arbitrariamente a L haciendo que x sea negativa y suficientemente grande en magnitud.

Continuidad - Definición

Definición

Una función f es **continua en** $x = a$ si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Remark

Es decir, para que una función sea continua debe cumplir

- $a \in Dom(f)$. ($f(a)$ esta definida.)
- existe $\lim_{x \to a} f(x)$.
- $f(a) = \lim_{x \to a} f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x)$.

Discontinuidad

existen 3 tipos de discontinuidades:

- Discontinuidad evitable o removible.
- Discontinuidad infinita.
- Discontinuidad de salto.

Continuidad lateral y en un intervalo

Definición

Una función f es continua por la derecha de $x = a$ si

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

y f es continua por la izquierda de $x = a$ si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

Definición

Una función f es **continua sobre un intervalo** si es continua en cada número en el intervalo. (Si f está definida sólo en un lado de un punto extremo del intervalo, entendemos por continua en el punto extremo, como continua por la derecha o continua por la izquierda.)

Prop. de continuidad

Theorem

Si f y g son continuas en $x = a$ y c es una constante, entonces las siguientes funciones son también continuas en $x = a$:

- $f + g$
- $f - g$
- cf
- fg
- $\frac{f}{g}$, *si* $g(a) \neq 0$

Prop. de continuidad

Theorem

- *Cualquier función polinomial es continua en todo su dominio; es decir, es continua sobre* $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.
- *Cualquier función racional es continua siempre que esté definida; esto es, es continua en su dominio.*

Continuidad de funciones conocidas

Theorem

Los siguientes tipos de funciones son continuas en todo número de sus dominios:

- *funciones polinomiales*
- *funciones racionales*
- *funciones raíz*
- *funciones trigonométricas*
- *funciones trigonométricas inversas*
- *funciones exponenciales*
- *funciones logarítmicas*

Continuidad de funciones compuestas

Theorem

Si f *es continua en* b *y* $\lim_{x \to a} g(x) = b$, *entonces*

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(b)$$

Theorem

Si g *es continua en* a *y* f *es continua en* $g(a)$, *entonces* $f \circ g$ *es continua en* a.

Theorem

Suponga que f es continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$.

Definición

La **derivada de una función** f **en** a, denotada $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre que el límite exista.

también se puede ver como

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

haciendo $h = x - a$

Definición

Una función es **derivable en** $x = a$ si $f'(a)$ existe. Es **derivable sobre un intervalo abierto** si es derivable en cada número del intervalo.

Theorem

Si f es derivable en $x = a$, entonces f es continua en $x = a$.

Remark

Una función no es derivable en $x = a$ cuando:

- no existe el límite $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
- no es continua en $x = a$.

Remark

A la derivada se la puede denotar:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

Derivadas de funciones básicas

Theorem

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Si n es un numero real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Theorem

Si f y g son derivables y c es una constante, entonces

1) $$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$
2) $$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

Reglas de derivación

Theorem

Si f y g son derivables y c es una constante, entonces

3) $\dfrac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$

4) $\dfrac{d}{dx}(f(x)g(x)) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$

5) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x)^2)}$

Theorem

Toda función polinomial es derivable, y su derivada es

$$\frac{d}{dx}\left(c_n x^n + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0\right) = c_n n x^{n-1} + \cdots + c_2 2x + c_1$$

Derivadas de funciones conocidas

Theorem

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x)$$