ÁLGEBRA LINEAL

Octava edición

PEARSON Prentice Hall®

Bernard Kolman ■ David R. Hill

CONTENIDO

Prefacio xi
Al estudiante xix

1 Ecuaciones lineales y matrices 1

1.1 Sistemas lineales 1
1.2 Matrices 10
1.3 Producto punto y multiplicación de matrices 21
1.4 Propiedades de las operaciones con matrices 39
1.5 Transformaciones matriciales 52
1.6 Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales 62
1.7 La inversa de una matriz 91
1.8 Factorización LU (opcional) 107

2 Aplicaciones de ecuaciones lineales y matrices (opcional) 119

2.1 Introducción a la teoría de códigos 119
2.2 Teoría de gráficas 125
2.3 Creación de gráficos por computadora 135
2.4 Circuitos eléctricos 144
2.5 Cadenas de Markov 149
2.6 Modelos económicos lineales 159
2.7 Introducción a wavelets (ondeletas u onditas) 166

3 Determinantes 182

3.1 Definición y propiedades 182
3.2 Desarrollo por cofactores y aplicaciones 196
3.3 Determinantes desde un punto de vista computacional 210

4 Vectores en R^n 214

4.1 Vectores en el plano 214
4.2 n-vectores 229
4.3 Transformaciones lineales 247

5 Aplicaciones de vectores en R^2 y R^3 (opcional) 259

5.1 Producto cruz en R^3 259
5.2 Rectas y planos 264

6 Espacios vectoriales reales 272

6.1 Espacios vectoriales 272
6.2 Subespacios 279
6.3 Independencia lineal 291
6.4 Bases y dimensión 303
6.5 Sistemas homogéneos 317
6.6 El rango de una matriz y sus aplicaciones 328
6.7 Coordenadas y cambio de base 340
6.8 Bases ortonormales en R^n 352
6.9 Complementos ortogonales 360

7 Aplicaciones de espacios vectoriales reales (opcional) 375

7.1 Factorización QR 375
7.2 Mínimos cuadrados 378
7.3 Algo más sobre codificación 390

8 Valores propios, vectores propios y diagonalización 408

8.1 Valores propios y vectores propios 408
8.2 Diagonalización 422
8.3 Diagonalización de matrices simétricas 433

9 Aplicaciones de valores propios y vectores propios (opcional) 447

9.1 La sucesión de Fibonacci 447
9.2 Ecuaciones diferenciales 451
9.3 Sistemas dinámicos 461
9.4 Formas cuadráticas 475
9.5 Secciones cónicas 484
9.6 Superficies cuádricas 491

10 Transformaciones lineales y matrices 502

10.1 Definiciones y ejemplos 502
10.2 El núcleo y la imagen de una transformación lineal 508
10.3 La matriz de una transformación lineal 521
10.4 Introducción a fractales (opcional) 536

11 Programación lineal (opcional) 558

11.1 El problema de la programación lineal; solución geométrica 558
11.2 El método símplex 575
11.3 Dualidad 591
11.4 Teoría de juegos 598

12 MATLAB para álgebra lineal 615

12.1 Entrada y salida en MATLAB 616
12.2 Operaciones matriciales con MATLAB 620
12.3 Potencias de matrices y algunas matrices especiales 623
12.4 Operaciones elementales por fila con MATLAB 625
12.5 Inversas de matrices en MATLAB 634
12.6 Vectores en MATLAB 635
12.7 Aplicaciones de las combinaciones lineales en MATLAB 637
12.8 Transformaciones lineales en MATLAB 640
12.9 Resumen de comandos de MATLAB 643

APÉNDICE A Número complejos A1

A-1 Número complejos A1
A-2 Números complejos en álgebra lineal A9

APÉNDICE B Instrucción adicional A19

B-1 Espacios con producto interno (requiere conocimientos de cálculo) A19
B-2 Transformaciones lineales invertibles y compuestas A30

Glosario para álgebra lineal A39

Respuestas A45

Índice I1

PREFACIO

Material incluido

Este libro presenta una introducción al álgebra lineal y a algunas de sus aplicaciones importantes. Está pensado para alumnos de nivel medio y avanzado, y cubre más material del que se requeriría para impartir un curso semestral o trimestral. Omitiendo algunas secciones, es posible:abarcar en un semestre o en un trimestre los elementos esenciales del álgebra lineal (incluyendo los valores y vectores propios), enseñar cómo utilizar la computadora en problemas de álgebra lineal, y dedicar algún tiempo a varias aplicaciones relacionadas con el tema. Si se toma en cuenta que existe gran cantidad de aplicaciones de álgebra lineal en disciplinas como matemáticas, física, biología, química, ingeniería, estadística, economía, finanzas, psicología y sociología, no resulta exagerado afirmar que esta materia es una de las que más impacto tendrá en la vida de los estudiantes. Por otro lado, el contenido de esta obra puede utilizarse también en un curso de álgebra lineal con duración de un año, o para impartir un segundo curso del tema con hincapié en las aplicaciones. Al final del prefacio proponemos cierto ritmo para estudiar el material básico. El nivel y el ritmo del curso se pueden modificar fácilmente, variando el tiempo que se invierta en el material teórico y en las aplicaciones. Contar con conocimientos de cálculo diferencial e integral no es un requisito; sin embargo, se incluyen varios ejemplos y ejercicios en que se utilizan ciertos aspectos básicos de cálculo, a los que añadimos la nota "Requiere conocimientos de cálculo".

En el texto se subrayan los aspectos computacionales y geométricos de la materia, manteniendo la abstracción en un nivel mínimo. De acuerdo con lo anterior, en ocasiones omitiremos las demostraciones de algunos teoremas, difíciles o poco provechosas, a la vez que ampliaremos su ilustración mediante ejemplos. Las demostraciones tienen el nivel adecuado para el estudiante. También hemos centrado nuestra atención en las áreas esenciales del álgebra lineal; el libro no pretende describir la materia en forma exhaustiva.

Novedades en la octava edición

Nos complace mucho la amplia aceptación que han tenido las primeras siete ediciones de esta obra. El éxito alcanzado por el movimiento para la reforma del cálculo realizado en Estados Unidos durante los últimos años, dio lugar a que se hayan comenzado a gestar ideas para mejorar la enseñanza del álgebra lineal. El **grupo de estudio del programa de álgebra lineal** y otros de carácter similar han hecho varias recomendaciones en este sentido. Al preparar esta edición, las hemos tomado en cuenta, así como las sugerencias de profesores y estudiantes. Aunque realizamos muchos cambios en esta edición, nuestro objetivo sigue siendo el mismo que en las anteriores:

> **desarrollar un libro de texto que ayude al maestro a enseñar y al estudiante a aprender las ideas básicas del álgebra lineal, así como a comprender algunas de sus aplicaciones.**

Para lograrlo, esta edición incluye las características siguientes:

- Se agregaron estas nuevas secciones:
  - Sección 1.5, *Transformaciones matriciales*: introduce, desde muy temprano, algunas aplicaciones geométricas.
  - Sección 2.1, *Introducción a la teoría de códigos*: junto con un material de apoyo sobre matrices binarias que se presenta a lo largo de los primeros seis capítulos, esta nueva sección proporciona una introducción a los conceptos básicos de la teoría de códigos.
  - Sección 7.3, *Algo más sobre codificación*: desarrolla algunos códigos sencillos y sus propiedades básicas relacionadas con el álgebra lineal.
- Se agregó más material geométrico.
- También se añadieron ejercicios nuevos a todos los niveles. Algunos de ellos corresponden al tipo de respuesta abierta —lo que permite explorar con más amplitud un tema y realizar nuevos hallazgos—, mientras que otros son de desarrollo.
- Se agregaron más ilustraciones.
- Se actualizaron los archivos M de MATLAB a versiones más recientes.
- Al final de cada sección se agregó un listado de términos clave, lo que refleja nuestro interés en desarrollar aún más las habilidades de comunicación.
- En las preguntas de falso/verdadero se pide al estudiante que justifique su respuesta, lo que da una oportunidad adicional para exploración y redacción.
- Al repaso acumulativo de los primeros diez capítulos se agregaron 25 preguntas de falso/verdadero.
- Además se añadió un glosario, característica totalmente nueva en esta edición.

Ejercicios

Los ejercicios se agrupan en tres clases. Los de la primera, *Ejercicios*, son de rutina. En la segunda, *Ejercicios teóricos*, incluimos los que cubren las lagunas de algunas demostraciones y amplían el material tratado en el texto. Algunos de ellos piden una solución oral. En esta era de la tecnología, es particularmente importante escribir con cuidado y precisión, y estos ejercicios ayudarán al estudiante a mejorar esta habilidad, además de elevar el nivel del curso y plantear retos a los alumnos más dotados y con más interés. La tercera clase, *Ejercicios con MATLAB* (ML) consta de ejercicios preparados por David R. Hill para resolverse con ayuda de MATLAB o de algún otro paquete de software matemático.

Las respuestas a los ejercicios numéricos impares y los ejercicios ML aparecen al final del libro. Al término del capítulo 10 se da un repaso acumulativo del material básico de álgebra lineal presentado hasta allí, el cual consiste en 100 preguntas de falso/verdadero (las respuestas se dan al final del texto).

Presentación

La experiencia nos ha enseñado que los conceptos abstractos deben presentarse de manera gradual y basarse en fundamentos firmes. Por lo tanto, comenzamos el estudio del álgebra lineal con el tratamiento de las matrices como simples arreglos de números que surgen de manera natural en la solución de sistemas de ecuaciones lineales, un problema familiar para el estudiante. En cada nueva edición nos hemos preocupado por perfeccionar los aspectos pedagógicos de la exposición. Las ideas abstractas se han equilibrado cuidadosamente, y acentúan los aspectos geométricos y de cálculo de la materia.

Temario

El capítulo 1 aborda las matrices y sus propiedades. La sección 1.5 *Transformaciones matriciales*, nueva en esta edición, proporciona una introducción a este importante tema. Este capítulo consiste en dos partes: en la primera se analizan las matrices y los sistemas lineales; en la segunda se comentan las soluciones de sistemas lineales. El capítulo 2, cuyo estudio es opcional, está dedicado al análisis de aplicaciones de ecuaciones lineales y matrices en áreas como la teoría de códigos, la creación de gráficos por computadora, la teoría de gráficas, los circuitos eléctricos, las cadenas de Markov, los modelos lineales en economía, y las *wavelets*. En la sección 2.1, *Introducción a la teoría de códigos* —también nueva en esta edición—, se desarrollan los fundamentos para introducir un poco de material de la teoría de códigos. Para mantener la discusión de estos temas en un nivel elemental, ha sido necesario abundar en detalles técnicos. El capítulo 3 presenta brevemente las propiedades básicas de las determinantes. El capítulo 4 plantea el tema de los vectores en R^n, además de explicar los vectores en el plano y ofrecer una introducción a las transformaciones lineales. El capítulo 5, cuya lectura es opcional, proporciona una oportunidad de explorar algunos de los muchos conceptos geométricos relacionados con vectores en R^2 y R^3; por conveniencia, limitamos nuestra atención a las áreas de producto cruz en R^3, y rectas y planos.

En el capítulo 6 llegamos a un concepto más abstracto, el de espacio vectorial. La abstracción en este capítulo se maneja con más sencillez una vez que se ha cubierto el material sobre vectores en R^n. El capítulo 7 (opcional) presenta tres aplicaciones de espacios vectoriales reales: la factorización QR, mínimos cuadrados y, en la sección 7.3, *Algo más sobre codificación* —nueva en esta edición—, una introducción a algunos códigos sencillos. El capítulo 8, que versa sobre valores propios (eigenvalores) y vectores propios (eigenvectores), constituye el punto culminante del curso, y ahora se presenta en tres secciones para facilitar la enseñanza; en este capítulo se desarrolla cuidadosamente la diagonalización de matrices simétricas.

El capítulo 9, de estudio opcional, aborda diversas aplicaciones de valores y vectores propios. Éstas incluyen sucesiones de Fibonacci, ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos, formas cuadráticas, secciones cónicas y superficies cuádricas. El capítulo 10 cubre las transformaciones lineales y matrices. La sección 10.4 (opcional), *Introducción a fractales,* analiza una aplicación de ciertas transformaciones no lineales. El capítulo 11 (opcional) se ocupa de la programación lineal, una importante aplicación del álgebra lineal. La sección 11.4 presenta las ideas básicas de la teoría de juegos. El capítulo 12 proporciona una breve introducción a MATLAB (abreviatura de MATRIX LABORATORY), un paquete de software muy útil para realizar cálculos de álgebra lineal en computadora (vea la descripción más adelante).

El apéndice A presenta de manera breve pero completa los números complejos y su uso en álgebra lineal. El apéndice B toca otros dos temas avanzados del álgebra lineal: los espacios con producto interno, la composición de transformaciones lineales y las transformaciones lineales invertibles.

Aplicaciones

Casi todas las aplicaciones son completamente independientes; pueden abordarse después de terminar todo el material introductorio de álgebra lineal en el curso, o bien estudiarse tan pronto como se termine de desarrollar el material necesario para una aplicación en particular. En el caso de la mayoría de las aplicaciones se da una *Vista preliminar de una aplicación* en lugares adecuados de libro, cuyo propósito es indicar cómo proporcionar una aplicación inmediata del material que se acaba de estudiar. El diagrama que aparece al final de este prefacio proporciona los requisitos de cada una de las aplicaciones, y la *Vista preliminar de una aplicación* será útil para decidir cuál aplicación estudiar y cuándo hacerlo.

Algunas de las secciones en los capítulos 2, 5, 7, 9 y 11 también pueden utilizarse como proyectos independientes para los estudiantes. La experiencia en el aula a partir de este enfoque ha demostrado una reacción favorable de los estudiantes. Por lo tanto, el profesor puede ser muy selectivo, tanto en la elección del material como en el método de estudio de estas aplicaciones.

Material al final de los capítulo

Cada capítulo contiene un resumen de *Ideas clave para el repaso*, un conjunto de ejercicios complementarios (las respuestas de todos los ejercicios impares aparecen al final del libro), y un examen del capítulo (todas las respuestas aparecen al final del libro).

Software MATLAB

Aunque los ejercicios ML pueden resolverse usando diferentes paquetes de software, a nuestro juicio MATLAB es el más apropiado para este propósito. MATLAB es un paquete de software versátil y poderoso, cuya piedra angular son sus capacidades para álgebra lineal. MATLAB incorpora rutinas de cálculo de calidad profesional, muy útiles en álgebra lineal. El código de programación de MATLAB está escrito en lenguaje C, y ha ido mejorando en cada nueva versión del software. MATLAB está disponible de The Math Works, Inc., 24 Prime Park Way, Natick, MA 01760, [(508) 653-1415], dirección de correo electrónico: **`info@mathworks.com`**; este libro no incluye el programa ni las rutinas de comandos desarrolladas para la resolución de los ejercicios ML. La versión de MATLAB para el estudiante incluye también una versión de *Maple*, proporcionado así una capacidad de cálculo simbólico.

El capítulo 12 de esta edición incluye una breve introducción a las capacidades de MATLAB para resolver problemas de álgebra lineal. Aunque MATLAB permite la creación de programas para implementar muchos algoritmos matemáticos, es preciso aclarar *que en este libro no se pide al lector que escriba programas, sino simplemente que use MATLAB* (*o algún otro paquete de software comparable*) *para resolver problemas numéricos específicos.* Aproximadamente 24 archivos (M) han sido desarrollados para que el alumno los utilice con los ejercicios ML en este libro; el material correspondiente está disponible en el sitio Web de Prentice Hall, **`www.pearsoneducacion.net/kolman`**. Estos archivos M están diseñados para transformar muchas de las capacidades de MATLAB en función de las necesidades del curso. Esto proporciona una herramienta pedagógica que permite al estudiante razonar los pasos para la resolución de un problema, dejando a MATLAB la responsabilidad de realizar cálculos que, por su complejidad, podrían resultar tediosos. Sin duda, éste es el papel ideal de MATLAB (o de cualquier otro paquete de software) al iniciar un curso de álgebra lineal. Por otra parte, la introducción a una potente herramienta como MATLAB al inicio de la carrera universitaria, abre el camino a otros tipos de software que serán de gran ayuda para el estudiante en cursos posteriores, especialmente en ciencias e ingenierías.

Material complementario

Manual de soluciones para el profesor (0-13-143742-9). Contiene las respuestas a todos los ejercicios de número par, y soluciones a todos los ejercicios teóricos está disponible en inglés (sólo para el profesor) solicítelo al representante de Pearson Educación.

Lecturas obligatorias para comprender las aplicaciones

Sección 2.1	Material sobre bits en el capítulo 1
Sección 2.2	Sección 1.4
Sección 2.3	Sección 1.5
Sección 2.4	Sección 1.6
Sección 2.5	Sección 1.6
Sección 2.6	Sección 1.7
Sección 2.7	Sección 1.7
Sección 5.1	Sección 4.1 y Capítulo 3
Sección 5.2	Secciones 4.1 y 5.1
Sección 7.1	Sección 6.8
Sección 7.2	Secciones 1.6, 1.7, 4.2, 6.9
Sección 7.3	Sección 2.1
Sección 9.1	Sección 8.2
Sección 9.2	Sección 8.2
Sección 9.3	Sección 9.2
Sección 9.4	Sección 8.3
Sección 9.5	Sección 9.4
Sección 9.6	Sección 9.5
Sección 10.4	Sección 8.2
Secciones 11.1-11.3	Sección 1.6
Sección 11.4	Secciones 11.1 – 11.3

A los usuarios de las ediciones anteriores:

Durante los 29 años de vida de las siete ediciones anteriores de esta obra, el libro se ha utilizado principalmente para el curso de álgebra lineal de segundo año de licenciatura. Este curso cubrió lo básico de álgebra lineal y utilizó el tiempo extra disponible para el estudio de aplicaciones seleccionadas del tema. *En esta nueva edición no hemos cambiado el fundamento estructural para la enseñanza del material esencial de álgebra lineal. Por lo tanto, este material puede enseñarse exactamente de la misma manera que antes.* La ubicación de las aplicaciones, con mayor cohesión y unificada con propósitos pedagógicamente estratégicos, junto con nuevas aplicaciones y otros materiales, facilitará sin duda la impartición de un curso más rico y más variado.

Agradecimientos

Nos complace expresar nuestro agradecimiento a las siguientes personas, que revisaron exhaustivamente el manuscrito de la primera edición: William Arendt, University of Missouri, y David Shedler, Virginia Commonwealth University. En la segunda edición: Gerald E. Bergum, South Dakota State University; Jame O. Brooks, Villanova University; Frank R. DeMeyer, Colorado State University; Joseph Malkevitch, York College de la City University de New York; Harry W. McLaughlin, Rensselaer Polytechnic Institute; y Lynn Arthur Steen, St. Olaf's College. De la tercera edición: Jerry Goldman, DePaul University; David R. Hill, Temple University; Allan Krall, The Pennsylvania State University en University Park; Stanley Lukawecki, Clemson University; David Royster, The University of North Carolina; Sandra Welch, Stephen F. Austin State University; y Paul Zweir, Calvin College.

De la cuarta edición: William G. Vick, Broome Community College; Carrol G. Wells, Western Kentucky University; Andre L. Yandl, Seattle University; y Lance L. Littlejohn, Utah State University. De la quinta edición: Paul Been, Indiana University-South Bend; John Broughton, Indiana University of Pennsylvania; Michael Gerahty, University of Iowa; Philippe Loustaunau, George Mason University; Wayne McDaniels, University of Missouri; y Larry Runyan, Shoreline Community College. De la sexta edición: Daniel D. Anderson, University of Iowa; Jürgen Gerlach, Radford University; W. L. Golik, University of Missouri en St. Louis; Charles Heuer, Concordia College; Matt Insall, University of Missouri en Rolla; Irwin Pressman, Carleton University; y James Snodgrass, Xavier University. De la séptima edición: Ali A. Daddel, University of California-Davis; Herman E. Gollwitzer, Drexel University; John Goulet, Worcester Polytechnic Institute; J. D. Key, Clemson University; John Mitchell, Rensselaer Polytechnic Institute; y Karen Schroeder, Bentley College.

De la octava edición: Juergen Gerlach; Radford University; Lanita Presson, University of Alabama, Huntsville; Tomaz Pisanski, Colgate University; Mike Daven, Mount Saint Mary College; David Goldberg, Purdue University; y Aimee J. Ellington, Virginia Commonwealth University.

Agradecemos también a Vera Pless, de la University de Illinois en Chicago, por su revisión crítica del material acerca de teoría de códigos.

También queremos dar las gracias a las siguientes personas, por la ayuda que brindaron en ciertas partes del manuscrito: Thomas I. Bartlow, Robert E. Beck y Michael L. Levitan, de Villanova University; Robert C. Busby, Robin Clark, el finado Charles S. Duris, Herman E. Gollwitzer, Miltin Schwartz y el finado John H. Staib, de Drexel University; Avi Vardi, Seymour Lipschutz, Temple University; Oded Kariv, Technion, Israel Institute of Technology; William F. Trench, Trinity University; y Alex Stanoyevitch, University of Hawaii; y nuestro agradecimiento, asimismo, a todos los maestros y estudiantes de Estados Unidos y de otros países, que han compartido con nosotros sus experiencias con el libro y nos han ofrecido útiles sugerencias.

Las diversas sugerencias, los comentarios y las críticas de estas personas han mejorado mucho la obra. Para todos, una sincera expresión de gratitud.

Agradecemos también a Dennis R. Kletzing, de la Stetson University, quien realizó la tipografía de todo el original del *Manual de soluciones para el estudiante* y del *Manual de respuestas*. Dennis encontró varios errores y obró milagros en muy poco tiempo. Fue un placer trabajar con él.

Nuestra gratitud a Dennis Kletzing, de la Stetson University, y a Nina Edelman y Kathy O'Hara, de la Temple University, por preparar el *Manual de soluciones para el estudiante.*

También debemos agradecer a Nina Edelman, Temple University, quien junto con Lilian Brady, hicieron una lectura crítica de las galeras, y a Blaise deSesa por su ayuda en la edición y la verificación de las soluciones a los ejercicios.

Por último, una sincera expresión de agradecimiento a Jeanne Audino, editora de producción, quien con paciencia y experiencia guió este libro desde su concepción hasta su publicación; a George Lobell, editor ejecutivo, y a todo el equipo de Prentice Hall por su entusiasmo, interés y cooperación constantes durante las etapas de concepción, diseño, producción y mercadeo de esta edición.

Bernard Kolman
bkolman@mcs.drexel.edu

David R. Hill
hill@math.temple.edu

AL ESTUDIANTE

Es muy probable que este curso sea muy diferente a cualquier otro de matemáticas que haya estudiado hasta ahora, por lo menos en dos sentidos importantes. Primero, es posible que constituya su primera experiencia en materia de abstracción; en segundo lugar, es un curso de matemáticas que puede tener gran impacto en su vocación profesional.

A diferencia de otros cursos de matemáticas, éste no le dará una serie de técnicas aisladas de cálculo para resolver ciertos tipos de problemas. En lugar de ello, desarrollaremos un núcleo de material, denominado álgebra lineal, introduciendo ciertas definiciones y creando procedimientos para la determinación de propiedades y la demostración de teoremas. Esta última es una habilidad que toma tiempo dominar, por lo que al principio sólo esperamos que lea y entienda las comprobaciones que se incluyen en el libro; conforme avance en el curso, sin embargo, será capaz de realizar algunas demostraciones sencillas por su propia cuenta. Poco a poco lo introduciremos a la abstracción, aunque manteniendo la exigencia a este respecto en el mínimo, e ilustrando ampliamente cada idea abstracta con ejemplos numéricos y aplicaciones. Si bien hará muchos cálculos, el objetivo de casi todos los problemas no es solamente obtener la respuesta “correcta”, sino que entienda y explique cómo obtener la respuesta e interpretar el resultado.

El álgebra lineal se utiliza diariamente para resolver problemas en otras áreas de matemáticas, física, biología, ingeniería, estadística, economía, finanzas, psicología y sociología. Entre las aplicaciones que utilizan álgebra lineal están la transmisión de información, el desarrollo de efectos especiales en películas y vídeo, la grabación de sonido, el desarrollo de motores (o máquinas) de búsqueda en Internet, y el análisis económico. Como podrá ver, el álgebra lineal nos afecta profundamente. En este libro se incluyen aplicaciones seleccionadas y, si hay tiempo suficiente, algunas de ellas podrán abordarse con más amplitud a lo largo del curso. Además, muchas de las aplicaciones pueden usarse como proyectos de estudio autodidacta.

Hay tres tipos de ejercicios en esta obra: primero, los ejercicios computacionales. Estos ejercicios, así como sus números han sido cuidadosamente seleccionados de manera de casi todos ellos pueden realizarse fácilmente a mano. Cuando se le pida que utilice álgebra lineal en aplicaciones reales, encontrará que el tamaño de los problemas es mucho más grande, y que los números involucrados no siempre son sencillos. Éste no es un impedimento, ya que es casi seguro que emplee algún tipo de software para resolverlos. Una muestra de este tipo de programas se provee para el tercer tipo de ejercicios, diseñados para resolverse por medio de una computadora y MATLAB, una poderosa herramienta de software que tiene como base las matrices y que se utiliza ampliamente en la industria. La segunda categoría está compuesta por ejercicios teóricos. En algunos de éstos es probable que se le pida demostrar un resultado o analizar una idea. La capacidad de obtener una respuesta no siempre es suficiente en el mundo actual; muchas veces se le pedirá que prepare un informe en donde se analice la solución y se justifiquen los pasos que le llevaron a ella, así como interpretar los resultados.

Estos tipos de ejercicios le darán experiencia en la redacción de textos relacionados con las matemáticas; esta disciplina utiliza palabras, no sólo símbolos.

Recomendaciones para aprender álgebra lineal

- Lea el libro lentamente, y tenga lápiz y papel a mano. Quizá tenga que leer una sección en particular más de una vez. Deténgase a verificar los pasos marcados con "verifique" en el texto.
- Asegúrese de realizar su tarea de manera oportuna. Si espera hasta que los problemas le sean explicados en clase, no aprenderá a resolverlos por usted mismo. Aun cuando no pueda terminar un problema, inténtelo: de esta manera le será más fácil comprenderlo cuando se le analice en clase. Tal vez le sea útil trabajar con otros estudiantes el material cubierto en clase y algunos problemas de tarea.
- Asegúrese de preguntar tan pronto como algo no le quede claro. Cuando se construye una casa, lo primero que se coloca son los cimientos; el estudio del álgebra lineal sigue el mismo principio: en este curso cada idea abstracta tiene como base una serie de conceptos desarrollados previamente. Si alguno de tales conceptos le resulta confuso o sencillamente incomprensible, sus conocimientos serán insuficientes para entender las ideas subsecuentes.
- Haga uso de los recursos pedagógicos que proporciona este libro. Al final de cada sección se presenta una lista de términos clave; al final de cada capítulo se ofrece una lista de ideas clave para repasar, ejercicios complementarios y un examen del capítulo. Al final de los primeros diez capítulos (que completan el núcleo del material de álgebra lineal de que se compone el curso) se hace un repaso que consiste en 100 preguntas de falso/verdadero, en las que le pedimos que justifique su respuesta. Por último, al final del libro aparece un glosario de términos relacionados con el álgebra lineal.

Estamos seguros de que su esfuerzo por aprender álgebra lineal se verá ampliamente recompensado en otros cursos y a lo largo de su carrera profesional.

Le deseamos mucho éxito en su estudio del álgebra lineal.

Bernard Kolman

David R. Hill

Álgebra lineal

CAPÍTULO 1

ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

1.1 SISTEMAS LINEALES

Una gran cantidad de los problemas que se presentan en las ciencias naturales y sociales, así como en ingeniería y en ciencias físicas, tienen que ver con ecuaciones que relacionan a dos conjuntos de variables. Una ecuación del tipo

$$ax = b,$$

que expresa la variable b en términos de la variable x y la constante a, se denomina **ecuación lineal**. Aquí se utiliza la palabra *lineal* porque la gráfica de la ecuación anterior es una línea recta. De manera análoga, la ecuación

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{1}$$

que expresa b en términos de las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y las constantes conocidas $a_1, a_2, \ldots, a_n$, se denomina **ecuación lineal**. En muchas aplicaciones se nos dan b y las constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y se nos dice que debemos determinar los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, denominados **incógnitas**, que satisfacen la ecuación (1).

Una **solución** de una ecuación lineal (1) es una sucesión de n números $s_1, s_2, \ldots, s_n$ que tienen la propiedad de satisfacer (1) cuando $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ se sustituyen en (1).

En consecuencia, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ y $x_3 = -4$ es una solución de la ecuación lineal

$$6x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -13,$$

ya que

$$6(2) - 3(3) + 4(-4) = -13.$$

Ésta no es la única solución para la ecuación lineal dada, ya que $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -7$ también lo es.

De manera más general, un **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$** —al que podemos llamar simplemente **sistema lineal**—, es un conjunto de m ecuaciones lineales, cada una con n incógnitas. Un sistema lineal puede denotarse sin problema mediante

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{2}$$

Los dos subíndices, i y j, se utilizan como sigue. El primer subíndice, i, indica que estamos trabajando con la i-ésima ecuación, mientras que el segundo subíndice, j, está asociado con la j-ésima variable xj. Así, la i-ésima ecuación es

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i.$$

En (2), las a_{ij} son constantes conocidas. Dados los valores de $b_1, b_2, \ldots, b_m$, queremos determinar los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfagan cada ecuación en (2).

Una **solución** del sistema lineal (2) es una sucesión de n números $s_1, s_2, \ldots, s_n$, que tiene la propiedad de que cada ecuación en (2) se satisface cuando $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ se sustituyen en (2).

Para encontrar las soluciones del sistema lineal, usaremos una técnica denominada **método de eliminación**. Esto es, eliminamos algunas de las incógnitas sumando un múltiplo de una ecuación a otra ecuación. Casi todos los lectores habrán tenido alguna experiencia con esta técnica en cursos de álgebra en niveles básicos, aunque lo más seguro es que haya sido con la restricción de hacerlo con sistemas lineales en los que $m = n$, es decir, sistemas lineales con tantas ecuaciones como incógnitas. En este curso ampliaremos este panorama, poniendo en práctica el método citado tratando con sistemas en los que tenemos $m = n$, $m < n$ y $m > n$. En realidad, existe una gran cantidad de aplicaciones en que $m \neq n$. Si nuestro problema involucra dos, tres o cuatro incógnitas, solemos escribir x, y, z y w. En esta sección utilizaremos el método de eliminación como se estudió en cursos básicos, y en la sección 1.5 lo haremos de manera mucho más sistemática.

EJEMPLO 1

El director de un fondo de inversión tiene \$100,000 para invertir. Las reglas del fondo establecen que la inversión debe hacerse tanto en certificados de depósito (CD), como a largo plazo. El objetivo del director es obtener un rendimiento de \$7,800 sobre las inversiones al cabo de un año. Los CD elegidos tienen un rendimiento de 5% anual, mientras que el bono ofrece 9% al año. El director determina cómo sigue la cantidad x que debe invertir en los CD, y la cantidad y que dedicará a comprar bonos:

Como la inversión total es de \$100,000, debemos tener $x + y = 100{,}000$. Toda vez que el rendimiento deseado es de \$7,800, obtenemos la ecuación $0.05x + 0.09y = 7{,}800$. Por lo tanto, tenemos el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + \quad\; y &= 100{,}000 \\ 0.05x + 0.09y &= \quad 7{,}800. \end{aligned} \tag{3}$$

Para eliminar x, sumamos (-0.05) veces la primera ecuación a la segunda, para obtener

$$\begin{aligned} x + \quad y &= 100{,}000 \\ 0.04y &= \quad 2{,}800, \end{aligned}$$

en donde la segunda ecuación no tiene término x; en otras palabras, hemos eliminado la incógnita x. Después despejamos y en la segunda ecuación, para obtener

$$y = 70{,}000,$$

y sustituyendo y en la primera ecuación de (3), obtenemos

$$x = 30{,}000.$$

Para comprobar que $x = 30{,}000$, $y = 70{,}000$ es una solución de (3), verificamos que estos valores de x y y satisfagan *cada una* de las ecuaciones del sistema lineal dado. En consecuencia, el director del fondo debe invertir \$30,000 en los CD y \$70,000 en bonos a largo plazo. ■

EJEMPLO 2 Considere el sistema lineal

$$\begin{aligned} x - 3y &= -7 \\ 2x - 6y &= 7. \end{aligned} \tag{4}$$

Nuevamente decidimos eliminar x. Para ello, sumamos (-2) veces la primera ecuación a la segunda, y obtenemos

$$\begin{aligned} x - 3y &= -7 \\ 0x + 0y &= 21 \end{aligned}$$

cuya segunda ecuación no tiene sentido. Esto significa que la solución del sistema lineal (4) es el conjunto vacío; en términos prácticos, podemos decir que el sistema no tiene solución, es un conjunto vacío. Podríamos haber obtenido la misma conclusión observando que en (4) el lado izquierdo de la segunda ecuación es igual a dos veces el lado izquierdo de la primera ecuación, pero el lado derecho de la segunda ecuación no es dos veces el lado derecho de la primera ecuación. ■

EJEMPLO 3 Considere el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 2x - 3y + 2z &= 14 \\ 3x + y - z &= -2. \end{aligned} \tag{5}$$

Para eliminar x, sumamos (-2) veces la primera ecuación a la segunda y (-3) veces la primera ecuación a la tercera, lo que da por resultado

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ -7y - 4z &= 2 \\ -5y - 10z &= -20. \end{aligned} \tag{6}$$

Después eliminamos y como sigue, con ayuda de la segunda ecuación en (6). Multiplicamos la tercera ecuación de (6) por $\left(-\frac{1}{5}\right)$, para obtener

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ -7y - 4z &= 2 \\ y + 2z &= 4. \end{aligned}$$

Luego intercambiamos la segunda y tercera ecuaciones, lo que nos da

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ y + 2z &= 4 \\ -7y - 4z &= 2. \end{aligned} \tag{7}$$

Ahora sumamos 7 veces la segunda ecuación a la tercera, para obtener

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ y + 2z &= 4 \\ 10z &= 30. \end{aligned}$$

Al multiplicar la tercera ecuación por $\frac{1}{10}$, tenemos

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ y + 2z &= 4 \\ z &= 3. \end{aligned} \tag{8}$$

Sustituyendo $z = 3$ en la segunda ecuación de (8), encontramos que $y = -2$. Al sustituir estos valores de z y y en la primera ecuación de (8), obtenemos $x = 1$. Para comprobar que $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$ es una solución de (5), verificamos que estos valores de x, y y z satisfagan *cada una* de las ecuaciones del sistema. En consecuencia, $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$ es una solución para el sistema lineal. La importancia del procedimiento radica en el hecho de que los sistemas lineales (5) y (8) tienen exactamente las mismas soluciones. El sistema (8) tiene la ventaja de que puede resolverse con mucha facilidad, dando los valores anteriores para x, y y z. ■

EJEMPLO 4 Considere el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -4 \\ 2x + y - 3z &= 4. \end{aligned} \tag{9}$$

Para eliminar x, sumamos (-2) veces la primera ecuación a la segunda y obtenemos

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -4 \\ -3y + 3z &= 12. \end{aligned} \tag{10}$$

Despejamos y en la segunda ecuación en (10) para obtener

$$y = z - 4,$$

donde z puede ser cualquier número real. Entonces, con base en la primera ecuación de (10),

$$\begin{aligned} x &= -4 - 2y + 3z \\ &= -4 - 2(z - 4) + 3z \\ &= z + 4. \end{aligned}$$

Por lo tanto, una solución para el sistema lineal (9) es

$$\begin{aligned} x &= r + 4 \\ y &= r - 4 \\ z &= r, \end{aligned}$$

donde r es cualquier número real. Esto significa que el sistema lineal (9) tiene un número infinito de soluciones. Cada vez que asignamos un valor a r, obtenemos otra solución para (9). En consecuencia, si $r = 1$, entonces

$$x = 5, \quad y = -3 \quad \text{y} \quad z = 1$$

es una solución, mientras que si $r = -2$, entonces

$$x = 2, \quad y = -6 \quad \text{y} \quad z = -2$$

es otra solución. ■

EJEMPLO 5 Considere el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ 2x - 2y &= -4 \\ 3x + 5y &= 26. \end{aligned} \tag{11}$$

Una vez más, para eliminar x sumamos (-2) veces la primera ecuación a la segunda y (-3) veces la primera ecuación a la tercera, obteniendo

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ -6y &= -24 \\ -y &= {-4}. \end{aligned}$$

Multiplicando la segunda ecuación por $\left(-\frac{1}{6}\right)$ y la tercera por (-1), tenemos

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ y &= 4 \\ y &= 4, \end{aligned} \tag{12}$$

que tiene las mismas soluciones que (11). Al sustituir $y = 4$ en la primera ecuación de (12), obtenemos $x = 2$. Por lo tanto, $x = 2$, $y = 4$ es una solución para (11). ■

EJEMPLO 6 Considere el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ 2x - 2y &= -4 \\ 3x + 5y &= 20. \end{aligned} \tag{13}$$

Para eliminar x, sumamos (-2) veces la primera ecuación a la segunda y (-3) veces la primera ecuación a la tercera, lo que nos da

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ -6y &= -24 \\ -y &= -10. \end{aligned}$$

Al multiplicar la segunda ecuación por $\left(-\frac{1}{6}\right)$ y la tercera por (-1), obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ y &= 4 \\ y &= 10, \end{aligned} \tag{14}$$

que no tiene solución. Como (14) y (13) tienen las mismas soluciones, concluimos que (13) no tiene solución.

Estos ejemplos sugieren que un sistema lineal puede tener una solución (es decir, una única solución), no tener solución, o un número infinito de soluciones. ■

Hemos visto que el método de eliminación consiste de la realización repetida de las operaciones siguientes:

1. Intercambiar dos ecuaciones.
2. Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
3. Sumar un múltiplo de una ecuación a la otra.

No es difícil demostrar (ejercicios T.1 a T.3) que el método de eliminación proporciona otro sistema lineal que tiene exactamente las mismas soluciones que el sistema dado. El nuevo sistema lineal puede resolverse después sin dificultad.

Como quizá haya notado, hasta el momento, hemos descrito el método de eliminación únicamente en términos generales, de manera que no hemos indicado regla alguna para seleccionar las incógnitas que serán eliminadas. Antes de proporcionar una descripción sistemática del método de eliminación en la siguiente sección, hablaremos del concepto de matriz, lo que nos ayudará a simplificar en gran medida nuestra notación, permitiéndonos desarrollar herramientas para resolver muchos problemas importantes.

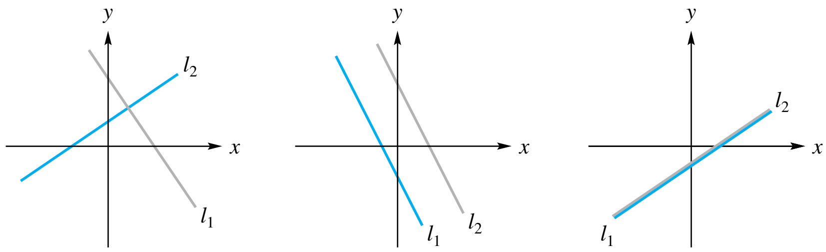
Considere ahora un sistema lineal con las incógnitas x y y;

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y &= c_1 \\ b_1x + b_2y &= c_2. \end{aligned} \tag{15}$$

La gráfica de cada una de estas ecuaciones es una línea recta, que denotamos mediante l_1 y l_2, respectivamente. Si $x = s_1$, $y = s_2$ es una solución del sistema lineal (15), entonces el punto (s_1, s_2) pertenece a ambas rectas, l_1 y l_2. De manera recíproca, si el punto (s_1, s_2) está en ambas rectas, l_1 y l_2, entonces $x = s_1$, $y = s_2$ es una solución para el sistema lineal (15). (Vea la figura 1.1.) En consecuencia, hemos llegado a las mismas tres posibilidades mencionadas, siguiendo una alternativa geométrica:

1. El sistema tiene una solución única; esto es, las rectas l_1 y l_2 se intersecan exactamente en un punto.
2. El sistema no tiene solución; es decir, las rectas l_1 y l_2 no se intersecan.
3. El sistema tiene un número infinito de soluciones; en otras palabras, las rectas l_1 y l_2 coinciden.

Figura 1.1 ►



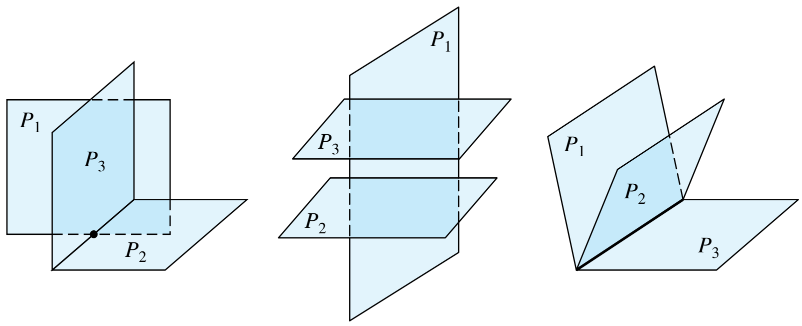
(a) Una única solución (b) No hay solución (c) Una infinidad de soluciones

Ahora, consideremos un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, x, y y z:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned} \tag{16}$$

La gráfica de cada una de estas ecuaciones es un plano, y se denota con P_1, P_2 y P_3, respectivamente. Como en el caso de un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, el sistema lineal en (16) puede tener una solución única, no tener solución o tener una infinidad de soluciones. Estas situaciones se ilustran en la figura 1.2. Para comprender de forma más concreta algunos de los casos posibles, piense en que las paredes (planos) de una habitación se intersecan en un único punto: una esquina de la habitación; de esta manera, el sistema lineal tiene una solución única. Ahora piense en los planos como si se tratara de las páginas de un libro. Cuando el libro se sostiene abierto, tres de sus páginas se intersecan en una línea recta (el lomo); en este caso, el sistema lineal tiene un número infinito de soluciones. Por otra parte, cuando se cierra el libro, aparentemente las tres páginas son paralelas y no se intersecan, por lo que podemos decir que el sistema lineal no tiene solución.

Figura 1.2 ▶



(a) Una única solución (b) No hay solución (c) Una infinidad de soluciones

EJEMPLO 7 **(Planeación de producción)** Un fabricante produce tres tipos diferentes de productos químicos: A, B y C. Cada producto debe pasar por dos máquinas de procesamiento: X y Y. La manufactura del producto requiere los tiempos siguientes en las máquinas X y Y:

1. Una tonelada de A requiere 2 horas en la máquina X y 2 horas en la máquina Y.

2. Una tonelada de B requiere 3 horas en la máquina X y 2 horas en la máquina Y.

3. Una tonelada de C requiere 4 horas en la máquina X y 3 horas en la máquina Y.

La máquina X está disponible durante 80 horas a la semana, y la máquina Y puede utilizarse 60 horas a la semana. Como la gerencia no quiere que las costosas máquinas X y Y estén ociosas, le gustaría saber cuántas toneladas debe manufacturar de cada producto, de modo que las máquinas se utilicen a su capacidad total. Daremos por sentado que el fabricante puede vender todos los productos que se manufacturen.

Para resolver este problema, denotamos con x_1, x_2 y x_3, respectivamente, el número de toneladas de productos A, B y C que se fabricarán. El número de horas que la máquina X será utilizada es

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3,$$

que debe ser igual a 80. Por lo tanto, Así tenemos que

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 80.$$

De manera similar, el número de horas que empleará la máquina Y es 60, por lo que tenemos

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 60.$$

Desde el punto de vista matemático, nuestro problema consiste en determinar los valores no negativos de x_1, x_2 y x_3 tales que

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 80. \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 60. \end{aligned}$$

Este sistema lineal tiene un número infinito de soluciones. Siguiendo el método del ejemplo 4, vemos que todas las soluciones están dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{20 - x_3}{2} \\ x_2 &= 20 - x_3 \\ x_3 &= \text{cualquier número real tal que } 0 \leq x_3 \leq 20, \end{aligned}$$

toda vez que debemos tener $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ y $x_3 \geq 0$. Cuando $x_3 = 10$, tenemos

$$x_1 = 5, \qquad x_2 = 10, \qquad x_3 = 10$$

mientras que

$$x_1 = \tfrac{13}{2}, \qquad x_2 = 13, \qquad x_3 = 7$$

cuando $x_3 = 7$. Observe que una solución es tan buena como la otra. Ninguna es mejor, a menos que se nos diera más información o se nos plantearan algunas restricciones. ■

Términos clave

Ecuación lineal
Incógnitas
Solución de una ecuación lineal
Sistema lineal
Solución de un sistema lineal
Método de eliminación
Solución única
Sin solución
Infinidad de soluciones
Manipulación de un sistema lineal

1.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 14, resuelva el sistema lineal dado por medio del método de eliminación.

1. $$\begin{aligned} x + 2y &= 8 \\ 3x - 4y &= 4. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} 2x - 3y + 4z &= -12 \\ x - 2y + z &= -5 \\ 3x + y + 2z &= 1. \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 2 \\ 4x + 2y + 2z &= 8 \\ x - y + z &= 4. \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 3x + 3y &= 10. \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= -12 \\ 2x - 3y - 4z &= 15 \\ 3x + 4y + 5z &= -8. \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x + y - 2z &= 5 \\ 2x + 3y + 4z &= 2. \end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned} x + 4y - z &= 12 \\ 3x + 8y - 2z &= 4. \end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned} 3x + 4y - z &= 8 \\ 6x + 8y - 2z &= 3. \end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned} x + y + 3z &= 12 \\ 2x + 2y + 6z &= 6. \end{aligned}$$

10. $$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x - y &= 5 \\ 3x + 4y &= 2. \end{aligned}$$

11. $$\begin{aligned} 2x + 3y &= 13 \\ x - 2y &= 3 \\ 5x + 2y &= 27. \end{aligned}$$

12. $$\begin{aligned} x - 5y &= 6 \\ 3x + 2y &= 1 \\ 5x + 2y &= 1. \end{aligned}$$

13. $$\begin{aligned} x + 3y &= -4 \\ 2x + 5y &= -8 \\ x + 3y &= -5. \end{aligned}$$

14. $$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 6 \\ 2x - y + 2z &= -8 \\ 3x - y + z &= -7. \end{aligned}$$

15. Dado el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ 4x - 2y &= t, \end{aligned}$$

(a) determine un valor de t para que el sistema tenga una solución.

(b) determine un valor de t para que el sistema no tenga solución.

(c) ¿Cuántos valores diferentes de t pueden seleccionarse en la parte (b)?

16. Dado el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 0 \\ x - 4y + 5z &= 0, \end{aligned}$$

(a) verifique que $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $z_1 = -1$ es una solución.

(b) verifique que $x_2 = -2$, $y_2 = 2$, $z_2 = 2$ es una solución.

(c) ¿$x = x_1 + x_2 = -1$, $y = y_1 + y_2 = 1$ y $z = z_1 + z_2 = 1$ es una solución del sistema lineal?

(d) ¿$3x$, $3y$, $3z$, donde x, y y z son como en la parte (c), es una solución del sistema lineal?

17. Resuelva el sistema lineal siguiente sin utilizar el método de eliminación

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= -5 \\ 3y + z &= 7 \\ z &= 4. \end{aligned}$$

18. Resuelva el sistema lineal siguiente sin utilizar el método de eliminación

$$\begin{aligned} 4x &= 8 \\ -2x + 3y &= -1 \\ 3x + 5y - 2z &= 11. \end{aligned}$$

19. ¿Existe un valor de r tal que $x = 1$, $y = 2$, $z = r$ sea una solución del siguiente sistema lineal? De ser así, determínelo

$$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 11 \\ x - y + 2z &= -7 \\ 4x + y - 2z &= 12. \end{aligned}$$

20. ¿Existe un valor de r tal que $x = r$, $y = 2$, $z = 1$ sea una solución del siguiente sistema lineal? De ser así, determínelo

$$\begin{aligned} 3x \qquad - 2z &= 4 \\ x - 4y + z &= -5 \\ -2x + 3y + 2z &= 9. \end{aligned}$$

21. Diga cuál es el número de puntos que están simultáneamente en los tres planos que se muestran en cada inciso de la figura 1.2.

22. Diga cuál es el número de puntos que están simultáneamente en los tres planos que se muestran en cada inciso de la figura 1.3.

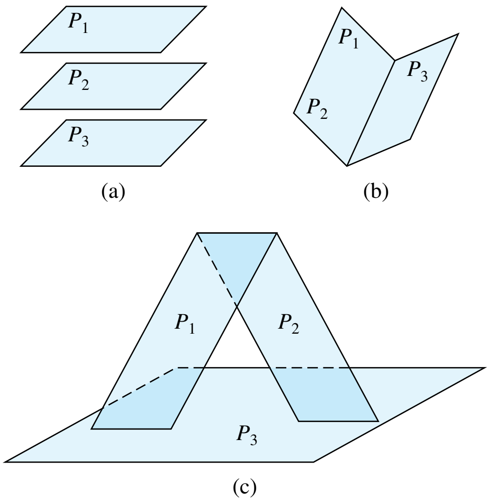


Figura 1.3 ▲

23. Una refinería produce gasolina con azufre y sin azufre. Para producir cada tonelada de gasolina sin azufre 5 minutos en la planta mezcladora y 4 minutos en la planta de refinación, mientras que cada tonelada de gasolina con azufre requiere 4 minutos en la planta mezcladora y 2 minutos en la planta de refinación. Si la planta mezcladora está disponible 3 horas y la de refinación 2 horas, ¿cuántas toneladas de cada tipo de gasolina deben producirse de modo que las plantas operen a toda su capacidad?

24. Un fabricante produce dos tipos de plásticos: regular y especial. La producción de cada tonelada de plástico regular requiere dos horas en la planta A y 5 horas en la planta B; para producir cada tonelada de plástico especial se necesitan 2 horas en la planta A y 3 horas en la planta B. Si la planta A está disponible 8 horas diarias y la planta B 15 horas al día, ¿cuántas toneladas de cada tipo de plástico pueden producirse diariamente de modo que ambas plantas se utilicen al máximo de su capacidad?

25. Un nutriólogo prepara una dieta que consiste en los alimentos A, B y C. Cada onza del alimento A contiene 2 unidades de proteína, 3 unidades de grasa y 4 unidades de carbohidratos. Cada onza del alimento B contiene 3 unidades de proteínas, 2 unidades de grasa y 1 unidad de carbohidratos. Por su parte, cada onza del alimento C contiene 3 unidades de proteínas, 3 unidades de grasa y 2 unidades de carbohidratos. Si la dieta debe proporcionar exactamente 25 unidades de proteínas, 24 unidades de grasa y 21 unidades de carbohidratos, ¿cuántas onzas de cada tipo de alimento deben utilizarse?

26. Un fabricante produce reveladores de película de 2, 6 y 9 minutos. La fabricación de cada tonelada del revelador de 2 minutos requiere 6 minutos en la planta A y 24 minutos en la planta B. Para manufacturar cada tonelada del revelador de 6 minutos son necesarios 12 minutos en la planta A y 12 minutos en la planta B. Por último, para producir cada tonelada del revelador de 9 minutos se utiliza 12 minutos la planta A y 12 minutos la planta B. Si la planta A está disponible 10 horas al día y la planta B 16 horas diarias, ¿cuántas toneladas de cada tipo de revelador de película pueden producirse de modo que las plantas operen a toda su capacidad?

27. Suponga que los tres puntos $(1,-5)$, $(-1, 1)$ y $(2, 7)$ están en la parábola $p(x) = ax^2 + bx + c$.

(a) Determine un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas que deba resolverse para determinar a, b y c.

(b) Resuelva el sistema lineal que obtuvo en la parte (a) para a, b y c.

28. Una herencia de $24,000 se dividió en tres fideicomisos; el segundo fideicomiso recibió el doble del primero. Los tres fideicomisos pagan una tasa de interés de 9, 10 y 6% anual, respectivamente; al final del primer año, el rendimiento total fue de $2,210. ¿Cuánto se invirtió en cada fideicomiso?

Ejercicios teóricos

T.1. Demuestre que el sistema lineal que se obtiene al intercambiar dos ecuaciones en (2) tiene exactamente las mismas soluciones que (2).

T.2. Demuestre que el sistema lineal obtenido al remplazar una ecuación en (2) por un múltiplo constante de la ecuación diferente de cero, tiene exactamente las mismas soluciones que (2).

T.3. Demuestre que el sistema lineal que se obtiene al remplazar una ecuación en (2) por ella misma más un múltiplo de otra ecuación en (2) tiene exactamente las mismas soluciones que (2).

T.4. ¿El sistema lineal

$$\begin{aligned} ax + by &= 0 \\ cx + dy &= 0 \end{aligned}$$

siempre tiene solución para cualesquiera valores de a, b, c y d?

1.2 MATRICES

Si analizamos el método de eliminación descrito en la sección 1.1, observaremos lo siguiente. Al realizar los pasos necesarios, sólo modificamos los números que aparecen junto a las incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. En consecuencia, podríamos buscar una forma de escribir un sistema lineal sin tener que mantener las incógnitas. En esta sección definiremos un objeto, una matriz, que nos permite hacer precisamente eso: escribir sistemas lineales de una manera compacta que facilite la automatización del método de eliminación en una computadora, dándonos un procedimiento rápido y eficaz para determinar las soluciones. Su uso, sin embargo, no nos proporciona solamente la oportunidad de contar con una notación conveniente, sino también —como veremos a continuación— resolver sistemas de ecuaciones lineales y otros problemas computacionales de manera rápida y eficiente, desarrollando operaciones sobre las matrices y trabajando con ellas de acuerdo con las reglas que cumplen. Por supuesto, como debe hacer cualquier buena definición, la del concepto de matriz no sólo permite mirar de otra forma los problemas existentes, sino que, además, da lugar a muchas nuevas preguntas, algunas de las cuales estudiaremos en este libro.

DEFINICIÓN Una **matriz** A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números reales (o complejos) ordenados en m **filas** (renglones) horizontales y n **columnas** verticales:

$$A = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. & \leftarrow \text{fila (renglón) } i \\ \qquad\qquad\qquad\quad \text{columna } j & \end{array} \tag{1}$$

La ***i*-ésima fila** de A es

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \qquad (1 \leq i \leq m);$$

La ***j*-ésima columna** de A es

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Diremos que A es ***m* por *n*** (que se escribe $\boldsymbol{m \times n}$). Si $m = n$, decimos que A es una **matriz cuadrada de orden *n***, y que los números $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ forman la **diagonal principal** de A. Nos referimos al número a_{ij}, que está en la i-ésima fila (renglón) y la j-ésima columna de A, como el ***i*, *j*-ésimo elemento** de A, o la **entrada (*i*, *j*)** de A, y solemos escribir (1) como

$$A = [a_{ij}].$$

Para simplificar, en este libro restringiremos nuestra atención (salvo en el apéndice A) al análisis de las matrices cuyas entradas son números reales. Sin embargo, también se estudian las matrices con entradas complejas, mismas que tienen gran importancia en muchas aplicaciones.

EJEMPLO 1 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces, A es una matriz de 2×3 con $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$, $a_{22} = 0$ y $a_{23} = 1$; B es una matriz de 2×2, con $b_{11} = 1$, $b_{12} = 4$, $b_{21} = 2$ y $b_{22} = -3$; C es una matriz de 3×1, con $c_{11} = 1$, $c_{21} = -1$ y $c_{31} = 2$; D es una matriz de 3×3; E es una matriz de 1×1, y F es una matriz de 1×3. En D, los elementos $d_{11} = 1$, $d_{22} = 0$ y $d_{33} = 2$ forman la diagonal principal. ■

Por conveniencia, en los ejemplos y ejercicios ilustrativos de los capítulos 1 a 7 centramos gran parte de nuestra atención en matrices y expresiones que sólo tienen números reales. Por otra parte, aunque aparecen en algunos ejemplos de los capítulos 8 y 9, es en el apéndice A donde puede encontrarse una introducción a los números complejos y a sus propiedades, así como ejemplos y ejercicios que muestran cómo se utilizan estos números en álgebra lineal.

Las matrices de $1 \times n$ o $n \times 1$ también se denominan un ***n*-vectores**, y lo denotaremos mediante letras minúsculas en negritas. Cuando se sobreentienda el valor de n, nos referiremos a los n-vectores sólo como **vectores**. En el capítulo 4 analizaremos los vectores a detalle.

EJEMPLO 2 $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ es un 4-vector y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ es un 3-vector. ■

Si todas las entradas de un n-vector son iguales a cero, se denota con $\mathbf{0}$.

Observe que si A es una matriz de $n \times n$, los renglones de A son matrices de $1 \times n$. El conjunto de todos los n-vectores con entradas reales se denota con R^n. De manera similar, el conjunto de todos los n-vectores con entradas complejas se denota mediante C^n. Como se indicó anteriormente, en los primeros siete capítulos de este libro trabajaremos casi por completo con vectores en R^n.

EJEMPLO 3 **(Despliegue de valores en forma de tabla)** La matriz siguiente proporciona las distancias entre las ciudades indicadas (en millas terrestres).

	Londres	Madrid	Nueva York	Tokio
Londres	0	785	3,469	5,959
Madrid	785	0	3,593	6,706
Nueva York	3,469	3,593	0	6,757
Tokio	5,959	6,706	6,757	0

■

EJEMPLO 4 **(Producción)** Suponga que un fabricante tiene cuatro plantas, en cada una de las cuales se manufacturan tres productos. Si denotamos con a_{ij} el número de unidades del producto i elaboradas por la planta j en una semana, la matriz de 4×3

	Producto 1	Producto 2	Producto 3
Planta 1	560	340	280
Planta 2	360	450	270
Planta 3	380	420	210
Planta 4	0	80	380

proporciona la producción semanal del fabricante. Por ejemplo, en una semana, la planta 2 produce 270 unidades del producto 3. ■

EJEMPLO 5

La tabla siguiente, en donde se lista el factor de congelación del viento, muestra cómo una combinación de la temperatura y la velocidad del viento hace que un cuerpo se sienta más frío que la temperatura real. Por ejemplo, cuando la temperatura es de 10 °F y el viento es de 15 millas por hora, el cuerpo pierde la misma cantidad de calor que la que perdería si la temperatura fuera de −18 °F sin viento.

	°F					
mph	15	10	5	0	−5	−10
5	12	7	0	−5	−10	−15
10	−3	−9	−15	−22	−27	−34
15	−11	−18	−25	−31	−38	−45
20	−17	−24	−31	−39	−46	−53

Esta tabla puede representarse como la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 12 & 7 & 0 & -5 & -10 & -15 \\ 10 & -3 & -9 & -15 & -22 & -27 & -34 \\ 15 & -11 & -18 & -25 & -31 & -38 & -45 \\ 20 & -17 & -24 & -31 & -39 & -46 & -53 \end{bmatrix}.$$

■

EJEMPLO 6

Con el sistema lineal considerado en el ejemplo 5 de la sección 1.1,

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \\ 2x - 2y &= -4 \\ 3x + 5y &= 26, \end{aligned}$$

podemos asociar las matrices siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ -4 \\ 26 \end{bmatrix}.$$

En la sección 1.3, llamaremos A a la matriz de coeficientes del sistema lineal. ■

DEFINICIÓN

Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$, en donde cada término fuera de la diagonal principal es igual a cero, es decir, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, es una **matriz diagonal**.

EJEMPLO 7

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad H = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

son matrices diagonales. ■

DEFINICIÓN Una matriz diagonal $A = [a_{ij}]$, en donde todos los términos de la diagonal principal son iguales, es decir, $a_{ij} = c$ para $i = j$ y $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, es una **matriz escalar**.

EJEMPLO 8 Las siguientes son matrices escalares:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad J = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

■

Los motores de búsqueda para localización y recuperación de información en Internet, utilizan matrices para seguir el rastro de las ubicaciones en donde ésta se encuentra, el tipo de información que se halla en cada ubicación, las palabras clave que aparecen en ellas, e incluso la manera en que los sitios Web se vinculan entre sí con otros. En gran medida, la eficacia de Google© estriba en la manera en que utiliza las matrices para determinar cuáles sitios están referenciados en otros sitios. Esto es, en lugar de mantener de manera directa el rastro del contenido de la información de una página Web real o de un tema de búsqueda individual, la estructura de la matriz de Google determina las páginas Web que coinciden con el tema de búsqueda, y luego presenta una lista de tales páginas en un orden de “importancia”.

Suponga que existen n páginas Web accesibles durante cierto mes. Una manera sencilla de comprender las matrices que conforman el esquema de Google, consiste en imaginar una matriz A de $n \times n$, denominada “matriz de conectividad”, la cual sólo contiene ceros al principio. Para construir las conexiones se procede como sigue. Cuando se detecta que el sitio Web j está vinculado con el sitio Web i, la entrada a_{ij} se hace igual a uno. Como n es muy grande —su valor se calculaba en alrededor de 3 mil millones en diciembre de 2002—, casi todas las entradas de la matriz de conectividad A son cero. (Las matrices como ésta se denominan esparcidas, ralas o poco densas.) Si la fila (renglón) i de A contiene muchos unos, significa que existen muchos sitios vinculados al sitio i. El software que controla el motor de búsqueda de Google considera que los sitios que están vinculados con muchos otros son más “importantes” (en otras palabras, les da una calificación más alta). Por lo tanto, tales sitios aparecerían al principio de la lista de resultados de búsqueda que generaría Google cuando el usuario solicitara temas relacionados con la información del sitio i. Ya que Google actualiza su matriz de conectividad cada mes, n aumenta con el paso del tiempo, al agregarse nuevos enlaces y sitios.

La técnica fundamental que utiliza Google© para calificar los sitios, emplea conceptos de álgebra lineal que están fuera del alcance de este curso. Información adicional sobre el tema puede encontrarse en las fuentes siguientes.

1. Berry, Michael W. y Murray Browne. *Understanding Search Engines—Mathematical Modeling and Text Retrieval*. Filadelfia: Siam, 1999.

2. www.google.com/technology/index.html

3. Moler, Cleve. “The World’s Largest Matrix Computation: Google’s Page Rank Is an Eigenvector of a Matrix of Order 2.7 Billion”, MATLAB *News and Notes*, octubre de 2002, páginas 12-13.

En matemáticas, siempre que se presenta un nuevo objeto es preciso definir cuando dos de ellos son iguales. Por ejemplo, en el conjunto de todos los números racionales, decimos que los números $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ son iguales, aunque no se representen de la misma manera. Lo que tenemos en mente es la definición según la cual $\frac{a}{b}$ es igual a $\frac{c}{d}$ cuando $ad = bc$. De acuerdo con esto, tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN Dos matrices de $m \times n$, $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$, son **iguales** si $a_{ij} = b_{ij}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, es decir, si los elementos correspondientes son iguales.

EJEMPLO 9 Las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & w \\ 2 & x & 4 \\ y & -4 & z \end{bmatrix}$$

son iguales si $w = -1$, $x = -3$, $y = 0$ y $z = 5$. ■

A continuación definiremos varias operaciones que producirán nuevas matrices a partir de otras. Estas operaciones son útiles en las aplicaciones que involucran matrices.

SUMA DE MATRICES

DEFINICIÓN Si $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ son matrices de $m \times n$, la **suma** de A y B da por resultado la matriz $C = [c_{ij}]$ de $m \times n$, definida por

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (\text{i} \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n).$$

Es decir, C se obtiene sumando los elementos correspondientes de A y B.

EJEMPLO 10 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+2 & 4+(-4) \\ 2+1 & -1+3 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

■

Observe que la suma de las matrices A y B sólo se define cuando A y B tienen el mismo número de filas (renglones) y el mismo número de columnas; es decir, sólo cuando A y B son del mismo tamaño.

> establecemos la convención, al escribir $A + B$ entendemos que A y B tienen el mismo tamaño.

Hasta el momento, la suma de matrices sólo se ha definido para dos matrices. En ocasiones, sin embargo, nuestro trabajo exigirá que sumemos más de dos matrices. El teorema 1.1 de la sección siguiente muestra que la suma de matrices satisface la propiedad asociativa. $A + (B + C) = (A + B) + C$. En la sección 1.4 se consideran más propiedades de las matrices, mismas que son similares a que satisfacen los números reales.

EJEMPLO 11 **(Producción)** Un fabricante de cierto producto realiza tres modelos, A, B y C. Algunas partes artes de cada uno se elaboran en la fábrica F_1, ubicada en de Taiwán, y después se terminan en la fábrica F_2, de Estados Unidos. El costo total de cada producto consta de los costos de manufactura y de embarque. En consecuencia, los costos (en dólares) de cada fábrica pueden describirse mediante las matrices F_1 y F_2 de 3×2:

$$F_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Costo de manufactura} & \text{Costo de embarque} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 32 & 40 \\ 50 & 80 \\ 70 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Modelo A} \\ \text{Modelo B} \\ \text{Modelo C} \end{array}$$

$$F_2 = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{Costo de manufactura} & \text{Costo de embarque}\end{array}\\ \begin{bmatrix} 40 & 60 \\ 50 & 50 \\ 130 & 20 \end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l} \\ \text{Modelo A} \\ \text{Modelo B} \\ \text{Modelo C}\end{array}$$

La matriz $F_1 + F_2$ proporciona los costos totales de manufactura y embarque de cada producto. Así, los costos totales de un producto del modelo C son \$200 y \$40, respectivamente. ■

MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

DEFINICIÓN Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $m \times n$ y r es un número real, el **múltiplo escalar** de A por r, rA, es la matriz $B = [b_{ij}]$ de $m \times n$, donde

$$b_{ij} = ra_{ij} \qquad (\text{i} \le i \le m,\ 1 \le j \le n).$$

Es decir, B se obtiene multiplicando cada elemento de A por r.

Si A y B son matrices de $m \times n$, escribimos A $+(-1)B$ como $A - B$, y denominamos a esto **diferencia** de A y B.

EJEMPLO 12 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A - B = \begin{bmatrix} 2-2 & 3+1 & -5-3 \\ 4-3 & 2-5 & 1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

■

EJEMPLO 13 Sea $\mathbf{p} = [18.95 \quad 14.75 \quad 8.60]$ un 3-vector que representa los precios actuales de tres artículos almacenados en una bodega. Suponga que el almacén anuncia una venta en donde cada uno de estos artículos tiene un descuento de 20 por ciento.

(a) Determine un 3-vector que proporcione el cambio en el precio de cada uno de los tres artículos.

(b) Determine un 3-vector que proporcione los precios nuevos de los artículos.

Solución (a) Como el precio de cada artículo se reduce 20%, el 3-vector

$$\begin{aligned} 0.20\mathbf{p} &= \begin{bmatrix}(0.20)18.95 & (0.20)14.75 & (0.20)8.60\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}3.79 & 2.95 & 1.72\end{bmatrix} \end{aligned}$$

proporciona la reducción de los precios para los tres artículos.

(b) Los precios nuevos de los artículos están dados mediante la expresión

$$\begin{aligned} \mathbf{p} - 0.20\mathbf{p} &= \begin{bmatrix}18.95 & 14.75 & 8.60\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}3.79 & 2.95 & 1.72\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}15.16 & 11.80 & 6.88\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Observe que esta expresión también puede escribirse como

$$\mathbf{p} - 0.20\mathbf{p} = 0.80\mathbf{p}.$$

■

Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ son matrices de $m \times n$ y $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son números reales, entonces una expresión de la forma

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_kA_k \tag{2}$$

se denomina **combinación lineal** de $A_1, A_2, \ldots, A_k$, y $c_1, c_2, \ldots, c_k$ se llaman **coeficientes**.

EJEMPLO 14 (a) Si

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix},$$

entonces $C = 3A_1 - \frac{1}{2}A_2$ es una combinación lineal de A_1 y A_2. Por medio de la multiplicación por un escalar y la suma de matrices, podemos calcular C:

$$\begin{aligned} C &= 3\begin{bmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -10 & \frac{27}{2} \\ 3 & 8 & \frac{21}{2} \\ \frac{7}{2} & -5 & -\frac{21}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b) $2[3 \quad -2] - 3[5 \quad 0] + 4[-2 \quad 5]$ es una combinación lineal de $[3 \quad -2]$, $[5 \quad 0]$ y $[-2 \quad 5]$. Puede calcularse (verifíquelo) para obtener $[-17 \quad 16]$.

(c) $-0.5\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} + 0.4\begin{bmatrix} 0.1 \\ -4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0.1 \\ -4 \\ 0.2 \end{bmatrix}$.

Puede calcularse para obtener (verifíquelo) $\begin{bmatrix} -0.46 \\ 0.4 \\ 3.08 \end{bmatrix}$. ■

LA TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

DEFINICIÓN Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $m \times n$, la matriz $A^T = \left[a_{ij}^T\right]$ de $n \times m$, donde

$$a_{ij}^T = a_{ji} \qquad (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$$

es la **transpuesta** de A. En consecuencia, las entradas en cada fila de A^T son las entradas correspondientes en la columna de A.

EJEMPLO 15 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B^T = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad D^T = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad E^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

■

MATRICES DE BINARIAS (OPCIONAL)

En gran parte de nuestro trabajo con álgebra lineal utilizaremos matrices y vectores cuyas entradas son números reales o complejos. Por lo que los cálculos, como combinaciones lineales, se determinan utilizando propiedades de las matrices y la aritmética estándar de base 10. Sin embargo, el continuo desarrollo de la tecnología de cómputo ha traído al primer plano el uso de la representación binaria (base 2) de la información. En casi todas las aplicaciones de cómputo, como juegos de vídeo, comunicaciones mediante fax, transferencia electrónica de dinero, comunicaciones satelitales, DVD o la generación de música en CD, la matemática subyacente es invisible y por completo transparente para el espectador o el usuario. La información codificada en representación binaria está tan extendida y desempeña un papel tan importante que estudiaremos brevemente algunas de sus características. Iniciaremos con un análisis general de la suma y multiplicación binarias, y luego hablaremos de una clase especial de matrices binarias, que tiene un lugar clave en la teoría de la información y la comunicación.

La representación binaria de la información sólo utiliza dos símbolos, 0 y 1. La información está codificada en términos de 0 y 1 en una cadena de **bits***. Por ejemplo, en lenguaje binario, el número decimal 5 se representa mediante la cadena 101, que se interpreta en términos de base 2 como sigue:

$$5 = 1(2^2) + 0(2^1) + 1(2^0).$$

Los coeficientes de las potencias de 2 determinan la cadena de bits, 101, que proporciona la representación binaria de 5.

Al igual que utilizamos aritmética de base 10 cuando tratamos con números reales y complejos, en otros escenarios empleamos aritmética de base 2, es decir, aritmética binaria. La tabla 1.1 muestra la estructura de la suma binaria, y la tabla 1.2 la estructura de la multiplicación binaria.

Tabla 1.1

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Tabla 1.2

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Las propiedades de la aritmética binaria permiten la representación de combinaciones de números reales en forma binaria, suele estudiarse en cursos básicos de ciencias de la computación, o en cursos de matemáticas finitas o discretas. No desviaremos nuestra atención para analizar tales temas en este momento. En cambio, nuestro objetivo se centrará en un tipo particular de matrices y vectores cuyas entradas son dígitos binarios. Esta clase de matrices y vectores es importante en el estudio de la teoría de la información y en el campo de matemáticas de *códigos de corrección de errores* (también llamado *teoría de codificación*).

*Un bit es un dígito binario (del inglés binary digit); esto es, un 0 o un 1.

DEFINICIÓN

Una **matriz binaria**[†] de $m \times n$, es una matriz en que todas las entradas son bits. Esto es, cada una de sus entradas es ya sea 0 o 1.

Un ***n*-vector** (o **vector**) binario es una matriz de $1 \times n$ o de $n \times 1$, todas cuyas entradas son bits.

EJEMPLO 16

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ es una matriz binaria de 3×3. ■

EJEMPLO 17

$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un 5-vector binario, y $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es un 4-vector binario. ■

Las definiciones de suma de matrices y multiplicación por un escalar se aplican también a las matrices binarias, siempre y cuando utilicemos aritmética binaria (de base 2) para todos los cálculos, y 0 y 1 como únicos escalares posibles.

EJEMPLO 18

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Por medio de la definición de la suma de matrices y con ayuda de la tabla 1.1, tenemos

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+1 \\ 1+0 & 1+1 \\ 0+1 & 1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Las combinaciones lineales de matrices binarias o n-vectores binarios son muy fáciles de calcular con ayuda de las tablas 1.1 y 1.2, si se toma en cuenta el hecho de que los únicos escalares son 0 y 1.

EJEMPLO 19

Sean $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3 &= 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1+0)+1 \\ (0+0)+1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+1 \\ 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

De acuerdo con la tabla 1.1, tenemos que $0 + 0 = 0$ y $1 + 1 = 0$. Por lo tanto, el inverso aditivo de 0 es 0 (como es usual), y el inverso aditivo del 1 es 1. De aquí que, para calcular la diferencia de matrices binarias A y B, procedemos como sigue:

$$A - B = A + (\text{inverso de } 1)\ B = A + 1B = A + B.$$

Como podemos ver, la diferencia de matrices binarias no aporta nada nuevo a las relaciones algebraicas entre matrices binarias.

[†]Las matrices binarias también se llaman **matrices booleanas**.

Términos clave

Matriz
Filas (renglones)
Columnas
Tamaño de una matriz
Matriz cuadrada
Diagonal principal de una matriz
Elemento (o entrada) de una matriz
ij-ésimo elemento
entrada (i, j)
n-vector (o vector)
Matriz diagonal
Matriz escalar
0, vector cero
R^n, el conjunto de todos los n-vectores
Google©
Matrices iguales
Suma de matrices
Múltiplo escalar
Múltiplo escalar de una matriz
Diferencia de matrices
Combinación lineal de matrices
Transpuesta de una matriz
Bit
Matriz binaria (o booleana)
Matriz triangular superior
Matriz triangular inferior

1.2 Ejercicios

1. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(a) ¿Cuáles son los valores de a_{12}, a_{22}, a_{23}?
(b) ¿Cuáles son los valores de b_{11}, b_{31}?
(c) ¿Cuáles son los valores de c_{13}, c_{31}, c_{33}?

2. Si

$$\begin{bmatrix} a+b & c+d \\ c-d & a-b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 2 \end{bmatrix},$$

determine *a, b, c* y *d.*

3. Si

$$\begin{bmatrix} a+2b & 2a-b \\ 2c+d & c-2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix},$$

determine *a, b, c* y *d.*

En los ejercicios 4 a 7, sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$\text{y} \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. De ser posible, calcule la combinación lineal que se indica en cada caso:

(a) $C + E$ y $E + C$
(b) $A + B$
(c) $D - F$
(d) $-3C + 5O$
(e) $2C - 3E$
(f) $2B + F$

5. De ser posible, calcule la combinación lineal que se indica en cada caso:

(a) $3D + 2F$
(b) $3(2A)$ y $6A$
(c) $3A + 2A$ y $5A$
(d) $2(D + F)$ y $2D + 2F$
(e) $(2 + 3)D$ y $2D + 3D$
(f) $3(B + D)$

6. De ser posible, calcule:

(a) A^T y $(A^T)^T$
(b) $(C + E)^T$ y $C^T + E^T$
(c) $(2D + 3F)^T$
(d) $D - D^T$
(e) $2A^T + B$
(f) $(3D - 2F)^T$

7. De ser posible, calcule:

(a) $(2A)^T$
(b) $(A - B)^T$
(c) $(3B^T - 2A)^T$
(d) $(3A^T - 5B^T)^T$
(e) $(-A)^T$ y $-(A^T)$
(f) $(C + E + F^T)^T$

8. ¿La matriz $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de las matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$? Justifique su respuesta.

9. ¿La matriz $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de las matrices $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$? Justifique su respuesta.

10. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si λ es un número real, calcule $\lambda I_3 - A$.

Los ejercicios 11 a 15 tienen que ver con matrices binarias.

11. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, y

$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule cada una de las expresiones siguientes:

(a) $A + B$ (b) $B + C$ (c) $A + B + C$

(d) $A + C^T$ (e) $B - C$.

12. Sean $A + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, y

$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule cada una de las expresiones siguientes:

(a) $A + B$ (b) $C + D$ (c) $A + B + (C + D)^T$

(d) $C - B$ (e) $A - B + C - D$.

13. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Determine B de manera que $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Determine C de manera que $A + C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

14. Sea $\mathbf{u} = [1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]$. Determine el 4-vector $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0]$.

15. Sea $\mathbf{u} = [0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1]$. Determine el 4-vector $\mathbf{v}$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1]$.

Ejercicios teóricos

T.1. Demuestre que la suma y la diferencia de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

T.2. Demuestre que la suma y la diferencia de dos matrices escalares es una matriz escalar.

T.3. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & d & e \\ e & e & f \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $A - A^T$.

(b) Calcule $A + A^T$.

(c) Calcule $(A + A^T)^T$.

T.4. Sea *0* la matriz de $n \times n$ tal que todas sus entradas son cero. Demuestre que si k es un número real y A es una matriz de $n \times n$ tal que $kA = O$, entonces $k = 0$ o $A = O$.

T.5. Una matriz $A = [a_{ij}]$ se denomina **triangular superior** si $a_{ij} = 0$ para $i > j$. Se llama **triangular inferior** si $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior
(Los elementos que están debajo de la diagonal principal son cero.)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior
(Los elementos que están arriba de la diagonal principal son cero.)

(a) Demuestre que la suma y la diferencia de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior.

(b) Demuestre que la suma y la diferencia de dos matrices triangulares inferiores es una matriz triangular inferior.

(c) Demuestre que si una matriz es al mismo tiempo triangular superior y triangular inferior, entonces es una matriz diagonal.

T.6. (a) Demuestre que si A es una matriz triangular superior, entonces A^T es triangular inferior.

(b) Demuestre que si A es una matriz triangular inferior, entonces A^T es triangular superior.

T.7. Si A es una matriz de $n \times n$, ¿cuáles son las entradas de la diagonal principal de $A - A^T$? Justifique su respuesta.

T.8. Si $\mathbf{x}$ es un n-vector, demuestre que $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$.

Los ejercicios T.9 a T.18 tienen que ver con matrices binarias.

T.9. Haga una lista de todos los posibles 2-vectores binarios. ¿Cuántos hay?

T.10. Haga una lista de todos los posibles 3-vectores binarios. ¿Cuántos hay?

T.11. Haga una lista de todos los posibles 4-vectores binarios. ¿Cuántos hay?

T.12. ¿Cuántos 5-vectores binarios hay? ¿Cuántos n-vectores binarios existen?

T.13. Haga una lista de todas las posibles matrices binarias de 2×2. ¿Cuántas hay?

T.14. ¿Cuántas matrices binarias de 3×3 hay?

T.15. ¿Cuántas matrices binarias de $n \times n$ existen?

T.16. Represente con 0 la palabra OFF y con 1 la palabra ON (los términos de muchos aparatos electrónicos para "apagado" y "encendido", respectivamente), y sea

$$A = \begin{bmatrix} \text{ON} & \text{ON} & \text{OFF} \\ \text{OFF} & \text{ON} & \text{OFF} \\ \text{OFF} & \text{ON} & \text{ON} \end{bmatrix}.$$

Determine la matriz B de ON/OFF tal que $A + B$ sea una matriz con cada entrada igual a OFF.

T.17. Represente con 0 la palabra OFF y con 1 la palabra ON, y sea

$$A = \begin{bmatrix} \text{ON} & \text{ON} & \text{OFF} \\ \text{OFF} & \text{ON} & \text{OFF} \\ \text{OFF} & \text{ON} & \text{ON} \end{bmatrix}.$$

Determine la matriz B de ON/OFF tal que $A + B$ sea una matriz con cada entrada igual a ON.

T.18. Un interruptor de luz normal tiene dos posiciones (o estados) encendido y apagado. Suponga que la matriz binaria

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

representa un conmutador de interruptores en donde 0 representa apagado y 1 representa encendido.

(a) Determine una matriz B tal que $A + B$ represente el conmutador de interruptores con el estado de cada interruptor "invertido".

(b) Sea

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

¿La matriz B del inciso (a) también "invertirá" los estados del conmutador de interruptores representado por C? Verifique su respuesta.

(c) Si A es cualquier matriz binaria de $m \times n$ que representa un conmutador de interruptores, determine una matriz binaria B de $m \times n$ tal que $A + B$ "invierta" todos los estados de los interruptores en A. Justifique por qué B "invertirá" los estados de A.

Ejercicios con MATLAB

Para utilizar MATLAB *en esta sección, primero deberá leer las secciones 12.1 y 12.2, las cuales proporcionan información básica acerca del programa así como de las operaciones matriciales con el mismo. Le pedimos que siga con cuidado los ejemplos o ilustraciones de las instrucciones de* MATLAB *que aparecen en las secciones 12.1 y 12.2 antes de intentar realizar estos ejercicios.*

ML.1. Introduzca las siguientes matrices en MATLAB.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 * 2 & 2/3 \\ 1/201 & 5 - 8.2 \\ 0.00001 & (9+4)/3 \end{bmatrix}.$$

Utilice los comandos apropiados de MATLAB para desplegar lo siguiente:

(a) a_{23}, b_{23}, b_{12}.

(b) $\text{fila}_1(A)$, $\text{columna}_3(A)$, $\text{fila}_2(B)$.

(c) Escriba el comando **format long** de MATLAB y despliegue la matriz B. Compare los elementos de B indicados en el inciso (a) y los del despliegue actual. Observe que el comando **format short** despliega los valores redondeados a cuatro decimales. Restablezca el formato a **format short**.

ML.2. Escriba el comando **H = hilb(5)** en MATLAB**;** (Observe que el último carácter es un punto y coma, el cual sirve para suprimir el despliegue del contenido de la matriz H; vea la sección 12.1.). Para obtener más información acerca del comando **hilb**, escriba **help hilb**. Utilice los comandos apropiados de MATLAB para hacer lo siguiente:

(a) Determine el tamaño de H.

(b) Despliegue el contenido de H.

(c) Despliegue el contenido de H como números racionales.

(d) Extraiga las tres primeras columnas como una matriz.

(e) Extraiga las dos últimas filas (renglones) como una matriz.

Los ejercicios ML.3 a ML.5 emplean matrices binarias y los comandos complementarios descritos en la sección 12.9.

ML.3. Utilice **bingen** para resolver los ejercicios T.10 y T.11.

ML.4. Utilice **bingen** para resolver el ejercicio T.13. (*Sugerencia:* una matriz de $n \times n$ contiene el mismo número de entradas que un n^2-vector.)

ML.5. Resuelva el ejercicio 11 utilizando **binadd**.

1.3 PRODUCTO PUNTO Y MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

En esta sección presentaremos la operación de multiplicación de matrices. A diferencia de la suma, algunas de las propiedades de la multiplicación de matrices la distinguen de la multiplicación de números reales.

DEFINICIÓN El **producto punto** o **producto interior** de los n-vectores **a** y **b** es la suma de los productos de las entradas correspondientes. En consecuencia, si

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i.^* \tag{1}$$

De manera similar, si **a** o **b** (o ambas) son n-vectores escritos como una matriz de $1 \times n$, el producto punto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ está dado por (1). El producto punto de los vectores en C^n se define en el apéndice A.2.

El producto punto es una operación importante que usaremos tanto en ésta como en secciones posteriores.

EJEMPLO 1 El producto punto de

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (1)(2) + (-2)(3) + (3)(-2) + (4)(1) = -6.$$ ■

EJEMPLO 2 Sean $\mathbf{a} = [x \quad 2 \quad 3]$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -4$, determine x.

Solución Tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4x + 2 + 6 &= -4 \\ 4x + 8 &= -4 \\ x &= -3. \end{aligned}$$ ■

EJEMPLO 3 **(Aplicación: cálculo de la calificación promedio de un curso)** Suponga que un profesor utiliza cuatro notas para determinar la calificación promedio que obtiene un estudiante en un curso: cuestionarios, dos exámenes de una hora y un examen final. Cada una de estas notas tiene una ponderación de 10, 30, 30 y 30%, respectivamente. Si las calificaciones de un estudiante son, en cada rubro, 78, 84, 62 y 85, podemos calcular el promedio del curso haciendo

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 0.30 \\ 0.30 \\ 0.30 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{g} = \begin{bmatrix} 78 \\ 84 \\ 62 \\ 85 \end{bmatrix}$$

y calculando

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{g} = (0.10)(78) + (0.30)(84) + (0.30)(62) + (0.30)(85) = 77.1.$$

Así, el promedio del curso del estudiante es 77.1. ■

*Tal vez ya esté familiarizado con esta útil notación, la notación de suma. De cualquier manera, la analizaremos con detalle al final de esta sección.

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

DEFINICIÓN Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de $m \times p$, y $B = [b_{ij}]$ es una matriz de $p \times n$, el **producto** de A y B, que se denota mediante AB, es la matriz $C = [c_{ij}]$ de $m \times n$, definida como

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n). \end{aligned} \tag{2}$$

La ecuación (2) dice que el i, j-ésimo elemento de la matriz producto es el producto punto de la i-ésima fila, $\text{fil}_i(A)$ y la j-ésima columna, $\text{col}_j(B)$ de B; esto se muestra en la figura 1.4.

Figura 1.4 ►

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \text{fil}_i(A) \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & & \text{col}_j(B) & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}.$$

$$\text{fil}_i(A) \cdot \text{col}_j(B) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Observe que el producto de A y B sólo está definido cuando el número de filas de B es exactamente igual al número de columnas de A, como se indica en la figura 1.5.

Figura 1.5 ►

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & = & AB \\ m \times p & & p \times n & & m \times n \end{array}$$

iguales

tamaño de AB

EJEMPLO 4 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} (1)(-2) + (2)(4) + (-1)(2) & (1)(5) + (2)(-3) + (-1)(1) \\ (3)(-2) + (1)(4) + (4)(2) & (3)(5) + (1)(-3) + (4)(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 16 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 5 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule la entrada (3, 2) de AB.

Solución Si $AB = C$, la entrada (3, 2) de AB es c_{32}, que es $\text{fil}_3(A) \cdot \text{col}_2(B)$. Ahora tenemos

$$\text{fil}_3(A) \cdot \text{col}_2(B) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -5.$$

■

EJEMPLO 6 El sistema lineal

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 3x + 4z &= 5 \end{aligned}$$

puede escribirse (verifíquelo) por medio del producto de matrices como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

■

EJEMPLO 7 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ y \end{bmatrix}.$$

Si $AB = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}$, determine x y y.

Solución Tenemos

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 4x + 3y \\ 4 - 4 + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} &2 + 4x + 3y = 12 \\ &y = 6, \end{aligned}$$

por lo que $x = -2$ y $y = 6$. ■

Las propiedades básicas de la multiplicación de matrices se estudiarán en la sección siguiente. Por lo pronto, diremos que la multiplicación de matrices requiere mucho más cuidado que la suma, ya que las propiedades algebraicas de la multiplicación de matrices difieren de las que satisfacen los números reales. Parte del problema se debe al hecho de que AB se define sólo cuando el número de columnas de A es igual al número de filas de B. En consecuencia, si A es una matriz de $m \times p$ y B es una matriz de $p \times n$, AB es una matriz de $m \times n$. ¿Qué ocurre con BA? Pueden suceder cuatro situaciones diferentes:

1. Es posible que BA no esté definido; esto pasará si $n \neq m$.
2. Si BA está definida, lo que significa que $m = n$, entonces BA es de $p \times p$, mientras que AB es de $m \times m$; de esta manera, si $m \neq p$, AB y BA son de tamaños diferentes.

3. Si AB y BA son del mismo tamaño, pueden ser iguales.

4. Si AB y BA son del mismo tamaño, pueden ser diferentes.

EJEMPLO 8

Si A es una matriz de 2×3 y B es una matriz de 3×4, AB es una matriz de 2×4, mientras que BA no está definida. ■

EJEMPLO 9

Sean A de 2×3 y B de 3×2. Entonces AB es de 2×2, mientras que BA es de 3×3. ■

EJEMPLO 10

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \text{ mientras que } BA = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, $AB \neq BA$. ■

Uno se preguntaría por qué la igualdad y la suma de matrices se definen de manera natural, mientras que la multiplicación de matrices parece mucho más complicada. El ejemplo 11 nos proporciona una idea al respecto.

EJEMPLO 11

(Ecología) Una siembra se rocía con pesticidas para eliminar insectos dañinos; sin embargo, las plantas absorben parte de las sustancias. Luego, los animales herbívoros de la zona comen las plantas contaminadas y absorben los pesticidas. Para determinar la cantidad de pesticida absorbida por uno de esos animales, procedemos de la manera siguiente. Suponga que tenemos tres pesticidas y cuatro plantas. Sea a_{ij} la cantidad de pesticida i (en miligramos) absorbida por la planta j. Esta información puede representarse mediante la matriz

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \text{Planta 1} & \text{Planta 2} & \text{Planta 3} & \text{Planta 4} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Pesticida 1} \\ \text{Pesticida 2} \\ \text{Pesticida 3} \end{array}$$

Imagine ahora, que tenemos tres animales herbívoros, y sea b_{ij} la cantidad de plantas del tipo i que uno de ellos, de tipo j, come mensualmente. La información puede representarse mediante la matriz

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Herbívoro 1} & \text{Herbívoro 2} & \text{Herbívoro 3} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 12 & 8 \\ 28 & 15 & 15 \\ 30 & 12 & 10 \\ 40 & 16 & 20 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Planta 1} \\ \text{Planta 2} \\ \text{Planta 3} \\ \text{Planta 4} \end{array}$$

La entrada (i, j) de AB proporciona la cantidad de pesticida del tipo i que ha absorbido el animal j. En consecuencia, si $i = 2$ y $j = 3$, la entrada $(2, 3)$ de AB es

$$\begin{aligned} &3(8) + 2(15) + 2(10) + 5(20) \\ &\qquad = 174 \text{ mg de pesticida, 2 absorbidos por el herbívoro 3.} \end{aligned}$$

Ahora bien, si tuviéramos p animales carnívoros (como el hombre) que se comen a los herbívoros, podríamos repetir el análisis para determinar cuánto pesticida absorbe cada uno. ■

A veces es útil poder determinar una columna en el producto matricial AB sin tener que multiplicar las dos matrices. Puede demostrarse (ejercicio T.9) que la j-ésima columna del producto matricial AB es igual al producto matricial $A\mathrm{col}_j(B)$.

EJEMPLO 12 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, la segunda columna de AB es

$$A\mathrm{col}_2(B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

■

Observación Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son n-vectores, puede demostrarse (ejercicio T.14) que si los consideramos como matrices de $n \times 1$,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}.$$

Esta observación nos servirá en el capítulo 3. De manera similar, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se consideran matrices de $1 \times n$, entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T.$$

Por último, si $\mathbf{u}$ es una matriz de $1 \times n$ y $\mathbf{v}$ es una matriz de $n \times 1$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}$.

EJEMPLO 13 Sean $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Entonces

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1(2) + 2(-1) + (-3)(1) = -3.$$

Además,

$$\mathbf{u}^T \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1(2) + 2(-1) + (-3)(1) + -3.$$

■

EL PRODUCTO MATRIZ-VECTOR ESCRITO EN TÉRMINOS DE COLUMNAS

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

una matriz de $m \times n$, y sea

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

un n-vector, es decir una matriz de $n \times 1$. Como A es de $m \times n$ y $\mathbf{c}$ es de $n \times 1$, el producto matricial $A\mathbf{c}$ es la matriz de $m \times 1$

$$\begin{aligned} A\mathbf{c} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{renglón}_1(A) \cdot \mathbf{c} \\ \text{renglón}_2(A) \cdot \mathbf{c} \\ \vdots \\ \text{renglón}_m(A) \cdot \mathbf{c} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n \\ \vdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

El lado derecho de esta expresión puede escribirse como

$$\begin{aligned} & c_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= c_1\text{col}_1(A) + c_2\text{col}_2(A) + \cdots + c_n\text{col}_n(A). \end{aligned} \tag{4}$$

En consecuencia, el producto $A\mathbf{c}$ de una matriz A de $m \times n$ y una matriz $\mathbf{c}$ de $n \times 1$ puede escribirse como una combinación lineal de las columnas de A, en las que los coeficientes son las entradas en $\mathbf{c}$.

EJEMPLO 14 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Entonces, el producto $A\mathbf{c}$ escrito como una comunicación lineal de las columnas de A es

$$A\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix}.$$ ■

Si A es una matriz de $m \times p$ y B es una matriz de $p \times n$, podemos concluir que la j-ésima columna del producto AB se puede escribir como una combinación lineal de las columnas de la matriz A, en la que los coeficientes son las entradas en la j-ésima columna de la matriz B:

$$\text{col}_j(AB) = A\text{col}_j(B) = b_{1j}\text{col}_1(A) + b_{2j}\text{col}_2(A) + \cdots + b_{pj}\text{col}_p(A).$$

EJEMPLO 15 Si A y B son las matrices definidas en el ejemplo 12, entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 6 & 17 & 16 \\ 17 & 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Las columnas de AB como combinaciones lineales de las columnas de A están dadas por

$$\mathrm{col}_1(AB) = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 17 \end{bmatrix} = A\mathrm{col}_1(B) = -2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{col}_2(AB) = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \\ 7 \end{bmatrix} = A\mathrm{col}_2(B) = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{col}_3(AB) = \begin{bmatrix} 6 \\ 16 \\ 1 \end{bmatrix} = A\mathrm{col}_3(B) = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

■

SISTEMAS LINEALES

A continuación generalizaremos el ejemplo 6. Consideremos el sistema lineal de m ecuaciones en n incógnitas,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{5}$$

Ahora definamos las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Las entradas en el producto $A\mathbf{x}$ son sólo los lados izquierdos de las ecuaciones en (5). Por lo tanto, el sistema lineal (5) puede escribirse en forma matricial como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

La matriz A es la **matriz de coeficientes** del sistema lineal (5), y la matriz

$$\left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right],$$

obtenida al agregar la columna $\mathbf{b}$ a A, se denomina **matriz aumentada** del sistema lineal (5). La matriz aumentada de (5) se escribe como $\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}\right]$. Recíprocamente, cualquier matriz con más de una columna puede considerarse la matriz aumentada de un sistema lineal. La matriz de coeficientes y la matriz aumentada tienen una función esencial en nuestro método de solución de sistemas lineales.

EJEMPLO 16 Considere el sistema lineal

$$\begin{aligned} -2x \phantom{{}+3y} + z &= 5 \\ 2x + 3y - 4z &= 7 \\ 3x + 2y + 2z &= 3. \end{aligned}$$

Si hacemos

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix},$$

podemos escribir el sistema lineal dado en forma matricial, como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

La matriz de coeficientes es A y la matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{rrr:r} -2 & 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

■

EJEMPLO 17 La matriz

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \end{array}\right],$$

es la matriz aumentada del sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 4 \\ 3x \phantom{{}-y} + 2z &= 5. \end{aligned}$$

■

Con base en el análisis anterior, se desprende que el sistema lineal en (5) puede escribirse como una combinación lineal de las columnas de A, como

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Recíprocamente, una ecuación las de (6) siempre describe un sistema lineal como en (5).

PARTICIÓN DE MATRICES (OPCIONAL)

Si comenzamos con una matriz $A = [a_{ij}]$ de $m \times n$, y eliminamos algunas filas (renglones) o columnas (pero no todos), obtenemos una **submatriz** de A.

EJEMPLO 18 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

Si eliminamos la segunda fila y la tercera columna, obtenemos la submatriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

■

Para subdividir una matriz en submatrices, se pueden trazar rectas horizontales entre las filas (renglones) y rectas verticales entre las columnas. Por supuesto, la partición se puede realizar de muchas formas distintas.

EJEMPLO 19 La matriz

$$A = \left[\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right]$$

se puede separar como

$$A = \left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right].$$

También podríamos escribir

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c:c} \widehat{A}_{11} & \widehat{A}_{12} & \widehat{A}_{13} \\ \hdashline \widehat{A}_{21} & \widehat{A}_{22} & \widehat{A}_{23} \end{array}\right], \tag{7}$$

lo cual da otra partición de A. En consecuencia, podemos hablar de **particiones de una matriz**. ■

EJEMPLO 20 La matriz aumentada de un sistema lineal es una matriz con una partición. Así, si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, podemos escribir la matriz aumentada de este sistema como $\left[\begin{array}{c:c} A & \mathbf{b} \end{array}\right]$. ■

Si A y B son matrices de $m \times n$ que tienen una partición de la misma forma, $A + B$ se obtiene simplemente sumando las submatrices correspondientes de A y B. De manera análoga, si A es una matriz con una partición, el múltiplo escalar cA se obtiene formando el múltiplo escalar de cada submatriz.

Si A se divide como en (7) y

$$B = \left[\begin{array}{cc:cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hdashline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \\ \hdashline b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \\ \hdashline B_{31} & B_{32} \end{array}\right],$$

entonces un cálculo directo nos muestra que

$$AB = \left[\begin{array}{c:c} (\widehat{A}_{11}B_{11} + \widehat{A}_{12}B_{21} + \widehat{A}_{13}B_{31}) & (\widehat{A}_{11}B_{12} + \widehat{A}_{12}B_{22} + \widehat{A}_{13}B_{32}) \\ \hdashline (\widehat{A}_{21}B_{11} + \widehat{A}_{22}B_{21} + \widehat{A}_{23}B_{31}) & (\widehat{A}_{21}B_{12} + \widehat{A}_{22}B_{22} + \widehat{A}_{23}B_{32}) \end{array}\right].$$

EJEMPLO 21 Sea

$$A = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ \hdashline 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} A_{11} & A_{12} \\ \hdashline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

y sea

$$B = \left[\begin{array}{rrr:rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ \hdashline 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} B_{11} & B_{12} \\ \hdashline B_{21} & B_{22} \end{array}\right].$$

Entonces

$$AB = C = \left[\begin{array}{rrr:rrr} 3 & 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 12 & 0 & -3 & 7 & 5 \\ \hdashline 0 & -12 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ -9 & -2 & 7 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} C_{11} & C_{12} \\ \hdashline C_{21} & C_{22} \end{array}\right],$$

donde C_{11} debe ser $A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}$. Verificamos como sigue que C_{11} es esta expresión:

$$\begin{aligned} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 6 & 10 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 6 & 12 & 0 \end{bmatrix} = C_{11}. \end{aligned}$$

■

Este método de multiplicación de matrices con una partición también se conoce como **multiplicación por bloques**. Las matrices con partición son útiles al trabajar con matrices que exceden la capacidad de memoria de una computadora. De esta manera, al multiplicar dos matrices con partición se pueden conservar las matrices en un disco y llevar a la memoria solamente las submatrices necesarias para formar sus productos. Por supuesto, el resultado puede guardarse en el disco conforme se vaya calculando. La partición de las matrices debe hacerse de modo que los productos de las matrices correspondientes estén definidos. Gracias a la tecnología de cómputo actual, las computadoras con procesamiento paralelo utilizan las particiones para realizar más rápidamente los cálculos con matrices.

La partición de una matriz implica una subdivisión de la información en bloques o unidades. El proceso inverso consiste en considerar matrices individuales como bloques y unirlas para formar una matriz por bloques. El único requisito es que, después de unir los bloques, todas las filas y todas las columnas tengan el mismo número de entradas.

EJEMPLO 22 Sean

$$B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -4 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Entonces tenemos

$$\left[\begin{array}{c:c} B & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r:rrr} 2 & 9 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & 7 & 5 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c} D \\ \hdashline C \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr} 9 & 8 & -4 \\ 6 & 7 & 5 \\ \hdashline 1 & -1 & 0 \end{array}\right],$$

y

$$\left[\begin{array}{c:c} \left[\begin{array}{c} D \\ \hdashline C \end{array}\right] & C^T \end{array}\right] = \left[\begin{array}{rrr:r} 9 & 8 & -4 & 1 \\ 6 & 7 & 5 & -1 \\ \hdashline 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

■

Una práctica común en muchas aplicaciones, consiste en hacer la unión de matrices en bloques para extender las estructuras de información. Por ejemplo, suele conservarse la información de las ventas mensuales de cada año en una matriz de 1×12, y luego unir tales matrices para construir la matriz de ventas históricas de varios años. De manera similar, los resultados de nuevos experimentos de laboratorio se adjuntan a la información existente para actualizar una base de datos en una investigación.

En el ejemplo 20 se dijo ya que la matriz aumentada del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es una matriz por bloques. En ocasiones necesitaremos resolver varios sistemas lineales en los que la matriz de coeficientes A es la misma, pero son diferentes los lados derechos de los sistemas, digamos $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$. En estos casos, encontramos conveniente considerar la matriz por bloques $\left[A \;\vdots\; \mathbf{b} \;\vdots\; \mathbf{c} \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$. (Vea la sección 6.7.)

NOTACIÓN DE SUMA (OPCIONAL)

Habrá ocasiones en que será necesario emplear la **notación de suma**. Por ello, a continuación revisaremos esta útil y compacta notación que se utiliza ampliamente en matemáticas.

La expresión $\sum_{i=1}^{n} a_i$ significa

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

La letra i es el **índice de la suma**; se trata de una variable muda o arbitraria que puede remplazarse por otra letra. Por lo tanto, podemos escribir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

EJEMPLO 23 Si

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 5 \quad \text{y} \quad a_4 = 8,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 3 + 4 + 5 + 8 = 20.$$

■

EJEMPLO 24 La expresión $\sum_{i=1}^{n} r_i a_i$ significa

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \cdots + r_n a_n.$$

Es fácil demostrar (ejercicio T.11) que la notación de suma satisface las siguientes propiedades:

$$\text{(i)} \qquad \sum_{i=1}^{n} (r_i + s_i) a_i = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i + \sum_{i=1}^{n} s_i a_i.$$

$$\text{(ii)} \qquad \sum_{i=1}^{n} c(r_i a_i) = c \left(\sum_{i=1}^{n} r_i a_i \right).$$

■

EJEMPLO 25 Si

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

el producto punto $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ se puede expresar mediante notación de suma como

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i .$$

■

EJEMPLO 26 En términos de la notación de suma, podemos escribir la ecuación (2), para el i, j-ésimo elemento del producto de las matrices A y B, como

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n).$$

■

También es posible formar sumas dobles. Así, la expresión $\sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}$ significa que primero sumamos sobre i y luego sumamos la expresión resultante sobre j.

EJEMPLO 27 Si $n = 2$ y $m = 3$, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{2} a_{ij} &= \sum_{j=1}^{3} (a_{1j} + a_{2j}) \\
&= (a_{11} + a_{21}) + (a_{12} + a_{22}) + (a_{13} + a_{23}) \qquad (8) \\
\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{2} (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}) \\
&= (a_{11} + a_{12} + a_{13}) + (a_{21} + a_{22} + a_{23}) \\
&= \text{lado derecho de (8).}
\end{aligned}$$

■

Resulta fácil demostrar (ejercicio T.12) que, en general,

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}. \qquad (9)$$

La ecuación (9) puede interpretarse como sigue. Sea A $= [a_{ij}]$ la matriz de $m \times n$. Si sumamos las entradas de cada fila (renglón) de A y sumamos luego los números resultantes, obtenemos el mismo resultado que si sumáramos las entradas de cada columna de A y luego sumáramos los números resultantes.

EJEMPLOS CON MATRICES BINARIAS (OPCIONAL)

En el caso de las matrices binarias, el producto punto y el producto matricial se calculan de la manera usual, pero sin olvidar que debe usarse aritmética de base 2.

EJEMPLO 28 Sean $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vectores binarias. Entonces

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1)(1) + (0)(1) + (1)(0) = 1 + 0 + 0 = 1.$$

■

EJEMPLO 29 Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrices binarias. Entonces

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} (1)(0)+(1)(1) & (1)(1)+(1)(1) & (1)(0)+(1)(0) \\ (0)(0)+(1)(1) & (0)(1)+(1)(1) & (0)(0)+(1)(0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 30 Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrices binarias. Si $AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, determine x y y.

Solución Tenemos

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+1+x \\ y+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces $y + 1 + x = 1$ y $y + 1 = 1$. Empleando la aritmética de base 2, resulta que $y = 0$ y $x = 0$. ■

Términos clave

Producto punto (producto interior)
Producto de matrices
Matriz de coeficientes
Matriz aumentada
Submatriz
Particiones de una matriz
Multiplicación por bloques
Notación de suma

1.3 Ejercicios

En los ejercicios 1 y 2, calcule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

1. (a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. (a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. Sean $\mathbf{a} = [-3 \quad 2 \quad x]$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ x \end{bmatrix}$. Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 17$, determine x.

4. Sea $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$. Calcule $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}$.

5. Determine todos los valores de x tales que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1$, donde

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ x \end{bmatrix}.$$

6. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} y \\ x \\ 1 \end{bmatrix}$. Si $AB = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$, determine x y y.

En los ejercicios 7 y 8, sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad y \quad F = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. De ser posible, calcule:

(a) AB (b) BA (c) $CB + D$

(d) $AB + DF$ (e) $BA + FD$

8. De ser posible, calcule:

(a) $A(BD)$ (b) $(AB)D$ (c) $A(C + E)$

(d) $AC + AE$ (e) $(D + F)A$

9. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Calcule las siguientes entradas de AB:

(a) La entrada (1, 2) (b) La entrada (2, 3).

(c) La entrada (3, 1) (d) La entrada (3, 3).

10. Si $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, calcule DI_2 e I_2D.

11. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Demuestre que $AB \neq BA$.

12. Si A es la matriz del ejemplo 4 y O es la matriz de 3×2 en la cual todas las entradas son cero, calcule AO.

En los ejercicios 13 y 14, sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. Utilice el método del ejemplo 12 para calcular las siguientes columnas de AB.

(a) La primera columna (b) La tercera columna.

14. Utilice el método del ejemplo 12 para calcular las siguientes columnas de AB:

(a) La segunda columna (b) La cuarta columna.

15. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Exprese $A\mathbf{c}$ como una combinación lineal de las columnas de A.

16. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exprese las columnas de AB como una combinación lineal de las columnas de A.

17. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que $AB = 3\mathbf{a}_1 + 5\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3$, donde $\mathbf{a}_j$ es la j-ésima columna de A para $j = 1, 2, 3$.

(b) Verifique que $AB = \begin{bmatrix} (\mathrm{fil}_1(A))B \\ (\mathrm{fil}_2(A))B \end{bmatrix}$.

18. Escriba la combinación lineal

$$3\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

como un producto de una matriz de 2×3 y un 3-vector.

19. Considere el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x + \phantom{2y + 3z +{}} w &= 7 \\ 3x + 2y + 3z \phantom{{}+ w} &= -2 \\ 2x + 3y - 4z \phantom{{}+ w} &= 3 \\ x + \phantom{2y + {}} 3z \phantom{{}+ w} &= 5. \end{aligned}$$

(a) Determine la matriz de coeficientes.

(b) Escriba el sistema lineal en forma matricial.

(c) Determine la matriz aumentada.

20. Escriba el sistema lineal con matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc:c} -2 & -1 & 0 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 7 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right].$$

21. Escriba el sistema lineal con matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \end{array}\right].$$

22. Considere el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} 3x - y + 2z &= 4 \\ 2x + y \phantom{{}+ 2z} &= 2 \\ y + 3z &= 7 \\ 4x \phantom{{}- y} - z &= 4. \end{aligned}$$

(a) Determine la matriz de coeficientes.

(b) Escriba el sistema lineal en forma matricial.

(c) Determina la matriz aumentada.

23. ¿Cuál es la relación entre los sistemas lineales cuyas matrices aumentadas son las siguientes?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \end{array}\right] \quad \text{y} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

24. Escriba cada una de las siguientes matrices como un sistema lineal en forma matricial.

(a) $x\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

(b) $x\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

25. Escriba cada uno de los siguientes sistemas lineales como una combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes.

(a) $\begin{aligned} x + 2y &= 3 \\ 2x - y &= 5 \end{aligned}$

(b) $\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= -2 \\ x + 4y - z &= 3 \end{aligned}$

26. Sean A una matriz de $m \times n$ y B una matriz de $n \times p$. ¿Qué podría decir acerca del producto matricial AB si:

(a) A tiene una columna que consta únicamente de ceros?

(b) B tiene una fila (renglón) que consta únicamente de ceros?

27. (a) Determine un valor de r tal que $AB^T = 0$, donde:

$$A = [r \quad 1 \quad -2] \quad \text{y} \quad B = [1 \quad 3 \quad -1].$$

(b) Mencione una forma alternativa de escribir este producto.

28. Determine un valor de r y un valor de s tales que $AB^T = 0$, donde

$$A = [1 \quad r \quad 1] \quad \text{y} \quad B = [-2 \quad 2 \quad s].$$

29. Formule el método para sumar matrices que estén divididas en bloques, y verifíquelo estableciendo dos particiones distintas de las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

y determinando su suma.

30. Sean A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 3 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine AB mediante dos particiones distintas de A y B.

31. (***Costos de producción***) Un fabricante de muebles produce sillas y mesas que deben pasar por un proceso de armado y uno de acabado. Los tiempos necesarios para estos procesos están dados (en horas) por la matriz

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Proceso de armado} & \text{Proceso de acabado} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Silla} \\ \text{Mesa} \end{array}$$

El fabricante tiene una planta en Salt Lake City y otra en Chicago. Las tarifas por hora de cada proceso están dadas (en dólares) por matriz

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Salt Lake City} & \text{Chicago} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Proceso de armado} \\ \text{Proceso de acabado} \end{array}$$

¿Qué interpretación puede dar el fabricante a las entradas del producto de matrices AB?

32. (***Ecología: contaminación***) Un fabricante elabora los productos P y Q en dos plantas, X y Y. Durante la fabricación emiten los contaminantes bióxido de azufre, óxido nítrico y partículas suspendidas. Las cantidades de cada contaminante están dadas (en kilogramos) por la matriz

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Bióxido de azufre} & \text{Óxido nítrico} & \text{Partículas suspendidas} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 300 & 100 & 150 \\ 200 & 250 & 400 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Producto } P \\ \text{Producto } Q \end{array}$$

Los reglamentos estatales y federales exigen la eliminación de estos contaminantes. El costo diario por deshacerse de cada kilogramo de contaminante está dado (en dólares) por la matriz

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Planta } X & \text{Planta } Y \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 7 & 9 \\ 15 & 10 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Bióxido de azufre} \\ \text{Óxido nítrico} \\ \text{Partículas suspendidas} \end{array}$$

¿Qué interpretación puede dar el fabricante a las entradas del producto de matrices AB?

33. (***Medicina***) Un proyecto de investigación nutricional tiene como base de estudio a adultos y niños de ambos sexos. La composición de los participantes está dada por la matriz

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Adultos} & \text{Niños} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 80 & 120 \\ 100 & 200 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Hombres} \\ \text{Mujeres} \end{array}$$

El número de gramos diarios de proteínas, grasa y carbohidratos que consume cada niño y adulto está dado por la matriz

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Proteínas} & \text{Grasa} & \text{Carbohidratos} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 20 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 30 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{Adultos} \\ \text{Niños} \end{array}$$

(a) ¿Cuántos gramos de proteínas ingieren diariamente todos los hombres (niños y adultos) del proyecto?

(b) ¿Cuántos gramos de grasas consumen a diario todas las mujeres (niñas y adultas)?

34. (***Comercio***) Una empresa de fotografía tiene una tienda en cada una de las siguientes ciudades: Nueva York, Denver y Los Ángeles. Cierta marca de cámara está disponible en los modelos automático, semiautomático y manual. Además, cada una tiene una unidad de flash correspondiente, la cual se vende por lo general junto con la cámara. Los precios de venta de las cámaras y de las unidades de flash están dados (en dólares) por la matriz

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Auto-} & \text{Semi-} & \\ \text{mático} & \text{automático} & \text{Manual} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 200 & 150 & 120 \\ 50 & 40 & 25 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{Cámara} \\ \text{Unidad de flash} \end{array}$$

El número de equipos (cámara y unidad de flash) disponibles en cada tienda está dado por la matriz

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Nueva} & & \text{Los} \\ \text{York} & \text{Denver} & \text{Ángeles} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 220 & 180 & 100 \\ 300 & 250 & 120 \\ 120 & 320 & 250 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{Automático} \\ \text{Semiautomático} \\ \text{Manual} \end{array}$$

(a) ¿Cuál es el valor total de las cámaras en Nueva York?

(b) ¿Cuál es el valor total de las unidades de flash en Los Ángeles?

35. Sea $\mathbf{s}_1 = [18.95 \quad 14.75 \quad 8.98]$ y $\mathbf{s}_2 = [17.80 \quad 13.50 \quad 10.79]$ 3-vectores que denotan los precios de tres artículos en las tiendas A y B, respectivamente.

(a) Obtenga una matriz de 2×3 que represente la información combinada de los precios de los tres artículos en las dos tiendas.

(b) Suponga que cada tienda anuncia una venta en la que el precio de cada artículo se reduce 20 por ciento. Obtenga una matriz de 2×3 que represente el precio de venta en las dos tiendas.

Los ejercicios 36 a 41 tienen que ver con matrices binarias.

36. Calcule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ a partir de los vectores binarios $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

(a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

37. Calcule $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ a partir de los vectores binarios $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$.

(a) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

38. Sean $\mathbf{a} = [1 \quad x \quad 0]$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ vectores binarios.

Si $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, determine todos los posibles valores de x.

39. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & y & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrices binarias.

Si $AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, determine x y y.

40. A partir de las matrices binarias

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcule AB y BA.

41. A partir de la matriz binaria $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, determine la matriz B de 2×2 tal que $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ejercicios teóricos

T.1. Sea $\mathbf{x}$ un n-vector.

(a) ¿Es posible que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ sea negativo? Explique.

(b) Si $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$, ¿cuál es el valor de $\mathbf{x}$?

T.2. Sean $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ n-vectores, y sea k un número real.

(a) Demuestre que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$.

(b) Demuestre que $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

(c) Demuestre que $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b}) = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

T.3. (a) Demuestre que si A tiene una fila de ceros, AB tiene una fila de ceros.

(b) Demuestre que si B tiene una columna de ceros, AB tiene una columna de ceros.

T.4. Demuestre que el producto de dos matrices diagonales es una matriz diagonal.

T.5. Demuestre que el producto de dos matrices escalares es una matriz escalar.

T.6. (a) Demuestre que el producto de dos matrices triangulares superiores es una matriz triangular superior.

(b) Demuestre que el producto de dos matrices triangulares inferiores es una matriz triangular inferior.

T.7. Sean A y B matrices diagonales de $n \times n$. ¿Es cierto que $AB = BA$? Justifique su respuesta.

T.8. (a) Sea $\mathbf{a}$ una matriz de $1 \times n$ y B una matriz de $n \times p$. Demuestre que el producto de matrices $\mathbf{a}B$ puede escribirse como una combinación lineal de las filas de B, en los que los coeficientes son las entradas de **a**.

(b) Sean $\mathbf{a} = [1 \quad -2 \quad 3]$ y

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ -3 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Escriba $\mathbf{a}B$ como una combinación lineal de las filas de B.

T.9. (a) Demuestre que la j-ésima columna del producto de matrices AB es igual al producto de matrices $A\,\mathrm{col}_j(B)$.

(b) Demuestre que la i-ésima fila (renglón) del producto de matrices AB es igual al producto de matrices $\mathrm{fil}_i(A)B$.

T.10. Sea A una matriz de $m \times n$ cuyas entradas son números reales. Demuestre que si $AA^T = O$ (la matriz de $m \times m$ tal que todas sus entradas son cero), entonces $A = O$.

Para la resolución de los ejercicios T.11 a T.13 es necesario el análisis del material señalado como opcional.

T.11. Demuestre que la notación de suma satisface las siguientes propiedades

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(r_i + s_i)a_i = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i + \sum_{i=1}^{n} s_i a_i.$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} c(r_i a_i) = c\left(\sum_{i=1}^{n} r_i a_i\right).$

T.12. Demuestre que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$

T.13. Diga si las siguientes expresiones son verdaderas o falsas. Luego, demuestre las verdaderas, y dé un contraejemplo en el caso de las que considere falsas.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(a_i + 1) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + n$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} 1 = mn$

(c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i\right]\left[\sum_{j=1}^{m} b_j\right].$

T.14. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ n-vectores.

(a) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se consideran matrices de $n \times 1$, demuestre que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\mathbf{v}$.

(b) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ se consideran matrices de $1 \times n$, demuestre que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}^T$.

(c) Si $\mathbf{u}$ se considera una matriz de $1 \times n$ y $\mathbf{v}$ una matriz de $n \times 1$, demuestre que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{v}$.

Ejercicios con MATLAB

ML.1. Escriba el comando **clear** en MATLAB, y después introduzca las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & \frac{5}{4} & \frac{9}{4} \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

De ser posible, utilice los comandos apropiados de MATLAB para, calcular lo siguiente. Recuerde que, en MATLAB, un apóstrofo indica una transpuesta.

(a) $A * C$ (b) $A * B$

(c) $A = C'$ (d) $B * A - C' * A$

(e) $(2 * C - 6 * A') * B'$ (f) $A * C - C * A$

(g) $A * A' + C' * C.$

ML.2. Introduzca en MATLAB la matriz de coeficientes del sistema

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 6z &= -12 \\ 2x - 3y - 4z &= 15 \\ 3x + 4y + 5z &= -8 \end{aligned}$$

y llámela A. Introduzca el lado derecho del sistema y llámelo **b**. Forme la matriz aumentada asociada con este sistema lineal mediante el comando de MATLAB **[A b]**. Dé un nombre a la matriz aumentada, por ejemplo **aum**, utilice el comando **aum = [A b]**. (¡No escriba el punto!) Observe que no aparece una barra entre la matriz de coeficientes y el lado derecho en la pantalla de MATLAB.

ML.3. Repita el ejercicio anterior con el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 2z - w &= -5 \\ 2x + y - 3z &= 7 \\ -x + 4y + z + 2w &= 8. \end{aligned}$$

ML.4. Introduzca las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

y

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

en MATLAB.

(a) Utilice los comandos apropiados de MATLAB para asignar $\mathrm{fil}_2(A)$ a **R** y $\mathrm{col}_3(B)$ a **C**. Sea **V** = **R** * **C**. ¿Qué es **V** en términos de las entradas del producto **A** * **B**?

(b) Utilice los comandos apropiados de MATLAB para asignar $\mathrm{col}_2(B)$ a **C**. Sea **V** = **A** * **C**. ¿Qué es **V** en términos de las entradas del producto **A** * **B**?

(c) Utilice los comandos apropiados de MATLAB para asignar $\mathrm{fil}_3(A)$ a **R** y luego calcule **V** = **R** * **B**. ¿Qué es **V** en términos de las entradas del producto **A** * **B**?

ML.5. Utilice el comando **diag** de MATLAB para formar cada una de las siguientes matrices diagonales. El comando **diag** permite formar matrices diagonales sin escribir todas las entradas (para refrescar su memoria en torno del comando **diag**, utilice la característica de ayuda de MATLAB).

(a) La matriz diagonal de 4×4 con diagonal principal $[1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$.

(b) La matriz diagonal de 5×5 con diagonal principal $\left[0 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}\right]$.

(c) La matriz escalar de 5×5 con únicamente cincos en la diagonal principal.

ML.6. En MATLAB, el producto punto de un par de vectores puede calcularse mediante el comando **dot**. Si los vectores **v** y **w** se han introducido a MATLAB ya sea como filas (renglones) o como columnas, su producto punto se calcula con el comando **dot(v, w)** del programa. Si los vectores no tienen el mismo número de elementos, aparecerá un mensaje de error.

(a) Utilice **dot** para calcular el producto punto de cada uno de los siguientes vectores.

(i) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1 & 4 & -1\end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}7 & 2 & 0\end{bmatrix}$

(ii) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}2\\-1\\0\\6\end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix}4\\2\\3\\-1\end{bmatrix}$.

(b) Sea $\mathbf{a} = [3 \quad -2 \quad 1]$. Determine un valor de k tal que el producto punto de $\mathbf{a}$ con $\mathbf{b} = [k \quad 1 \quad 4]$ sea cero. Verifique sus resultados en MATLAB.

(c) Para cada uno de los siguientes vectores **v**, calcule **dot** (**v**, **v**) en MATLAB.

(i) $\mathbf{v} = [4 \quad 2 \quad -3]$

(ii) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}-9 & 3 & 1 & 0 & 6\end{bmatrix}$

(iii) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\-5\\-3\end{bmatrix}$.

¿Qué signo tiene cada uno de estos productos punto? Explique por qué esto es válido para casi todos los vectores **v**. ¿En qué situaciones no es válido?

En los ejercicios ML.7 a ML.11 se utilizan matrices binarias y los comandos adicionales descritos en la sección 12.9.

ML.7. Utilice **binprod** para resolver el ejercicio 40.

ML.8. Dados los vectores binarios $\mathbf{a} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}$ y $\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$, utilice **binprod** para calcular $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

ML.9. (a) Utilice **bingen** para generar una matriz B cuyas columnas sean todos los posibles 3-vectores binarios.

(b) Defina **A = ones (3)** y calcule AB por medio de **binprod**.

(c) Describa por qué AB sólo contiene solamente columnas con ceros y unos. (*Sugerencia:* busque un patrón que tenga como base las columnas de B.)

ML.10. Repita el ejercicio ML.9 con 4-vectores y **A = ones (4)**.

ML.11. Sea B una matriz de $n \times n$ en donde todas las entradas son unos. Calcule BB para $n = 2, 3, 4$ y 5. ¿A qué es igual BB para $n = k$, donde k es cualquier entero positivo?

1.4 PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON MATRICES

En esta sección analizaremos las propiedades algebraicas de las operaciones con matrices recién definidas. Muchas de estas propiedades son similares a las propiedades de los números reales, que ya conocemos. Sin embargo, habrá diferencias importantes por lo que respecta al comportamiento algebraico de ciertas operaciones, por ejemplo la multiplicación (como hemos visto en la sección 1.3). Casi todas las propiedades serán enunciadas como teoremas, cuyas demostraciones se dejan como ejercicios.

TEOREMA 1.1 **(Propiedades de la suma de matrices)** *Sean A, B, C y D matrices de $m \times n$.*

(a) $A + B = B + A$.

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$.

(c) *Existe una única matriz O de $m \times n$ tal que*

$$A + O = A \tag{1}$$

para cualquier matriz A de $m \times n$. La matriz O se denomina **neutro aditivo** *de $m \times n$,* **matriz nula** o **matriz cero**.

(d) *Para cada matriz A de $m \times n$, existe una única matriz D de $m \times n$ tal que*

$$A + D = O. \tag{2}$$

Escribiremos D como (–A), de modo que (2) *puede escribirse como*

$$A + (-A) = O.$$

La matriz $(-A)$ *se llama* **inverso aditivo** *o* **negativo** *de A.*

Demostración (a) Para establecer (a), debemos demostrar que el i, j-ésimo elemento de $A + B$ es igual al i, j-ésimo elemento de $B + A$. El i, j-ésimo elemento de $A + B$ es $a_{ij} + b_{ij}$; el i, j-ésimo elemento de $B + A$ es $b_{ij} + a_{ij}$. Como los elementos a_{ij} son números reales (o complejos),

$$a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} \qquad (1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n),$$

de lo que se obtiene el resultado.

(b) Ejercicio T.1.

(c) Sea $U = [u_{ij}]$. Entonces

$$A + U = A$$

si y sólo si*

$$a_{ij} + u_{ij} = a_{ij},$$

lo cual es válido si y sólo si $u_{ij} = 0$. En consecuencia, U es la matriz de $m \times n$ tal que todas sus entradas son iguales a cero; U se denota como O.

(d) Ejercicio T.1. ■

EJEMPLO 1 Para ilustrar el inciso (c) del teorema 1.1, observamos que la matriz cero de 2×2 e

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

tenemos

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 & -1+0 \\ 2+0 & 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$ ■

La matriz cero de 2×3 es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*El conector lógico "si y sólo si" significa que ambas proposiciones son verdaderas o ambas son falsas. Por lo tanto, (1) si $A + U = A$, entonces $a_{ij} + u_{ij} = a_{ij}$ y (2) si $a_{ij} + u_{ij} = a_{ij}$, entonces $A + U = A$.

EJEMPLO 2 Para ilustrar el inciso (d) del teorema 1.1, sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -4 & 5 & -2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$-A = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 4 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ahora tenemos que $A + (-A) = O$. ■

EJEMPLO 3 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A - B = \begin{bmatrix} 3-2 & -2-3 & 5-2 \\ -1+3 & 2-4 & 3-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

■

TEOREMA 1.2 **(Propiedades de la multiplicación de matrices)**

(a) *Si A, B y C son matrices de los tamaños apropiados,*

$$A(BC) = (AB)C.$$

(b) *Si A, B y C son matrices de los tamaños apropiados, entonces*

$$A(B + C) = AB + AC.$$

(c) *Si A, B y C son matrices de los tamaños apropiados, entonces*

$$(A + B)C = AC + BC.$$

Demostración (a) Omitiremos una demostración general. En el ejercicio T.2 se pide al lector que demuestre el resultado para un caso específico.

(b) Ejercicio T.3.

(c) Ejercicio T.3. ■

EJEMPLO 4 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix},$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 8 & -4 & 6 \\ 9 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 16 & 56 \\ 12 & 30 & 8 \end{bmatrix}$$

y

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 19 & -1 & 6 & 13 \\ 16 & -8 & -8 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 43 & 16 & 56 \\ 12 & 30 & 8 \end{bmatrix}.$$

■

EJEMPLO 5 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

y

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & -1 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}.$$

■

DEFINICIÓN La matriz escalar de $n \times n$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

cuyas entradas en la diagonal son todas iguales a 1, es la **matriz identidad de orden *n***.

Si A es una matriz de $m \times n$, es fácil verificar (ejercicio T.4) que

$$I_m A = A I_n = A.$$

También resulta sencillo ver que toda matriz escalar de $n \times n$ puede escribirse como rI_n para alguna r.

EJEMPLO 6 La matriz identidad I_2 de orden 2 es

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

entonces

$$I_2 A = A.$$

La matriz identidad I_3 de orden 3 es

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$AI_3 = A.$$

■

Suponga que A es una matriz cuadrada. Si p es un entero positivo, definimos las **potencias de una matriz** como sigue:

$$A^p = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{p\ factores}.$$

Si A es de $n \times n$, también definimos

$$A^0 = I_n.$$

En el caso de enteros no negativos p y q, algunas de las leyes conocidas de los exponentes de los números reales también pueden demostrarse para la multiplicación de una matriz cuadrada A (ejercicio T.5):

$$A^p A^q = A^{p+q}$$

y

$$(A^p)^q = A^{pq}.$$

Observe que

$$(AB)^p \neq A^p B^p$$

para las matrices cuadradas en general. Sin embargo, si $AB = BA$, esta regla es válida (ejercicio T.6).

A continuación llamaremos su atención respecto de otras dos peculiaridades de la multiplicación de matrices. Si a y b son números reales, $ab = 0$ se cumple sólo si a o b son cero. Sin embargo, esto no es válido para las matrices.

EJEMPLO 7 Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix},$$

entonces ni A ni B es la matriz cero, pero

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

Si a, b y c son números reales para los cuales $ab = ac$ y $a \neq 0$, se tiene que $b = c$. Es decir, podemos cancelar a. Sin embargo, la ley de cancelación no se cumple para las matrices, como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 8 Si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix},$$

entonces

$$AB = AC = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{bmatrix},$$

pero $B \neq C$. ■

Observación En la sección 1.7 analizamos una clase especial de matrices A, para las cuales $AB = AC$ implica que $B = C$.

EJEMPLO 9 **(Comercio)** Suponga que únicamente dos compañías rivales, R y S, fabrican cierto producto. Cada año, la compañía R conserva $\frac{1}{4}$ de sus clientes, mientras que $\frac{3}{4}$ de los consumidores cambian a S. En el mismo lapso, S conserva $\frac{2}{3}$ de sus clientes, mientras que $\frac{1}{3}$ cambia a R. Esta información puede desplegarse en forma matricial como

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} R & S \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} R \\ S \end{array} \end{array}$$

Al comenzar por vez primera la fabricación del producto, R tiene $\frac{3}{5}$ del mercado (el mercado es la cantidad total de clientes), mientras que S tiene los otros $\frac{2}{5}$. Denotamos la distribución inicial del mercado como

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}.$$

Un año después, la distribución del mercado es

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right) \\ \frac{3}{4}\left(\frac{3}{5}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{60} \\ \frac{43}{60} \end{bmatrix}.$$

Esto se puede ver fácilmente como sigue. Supongamos que el mercado inicial consta de k personas, digamos, $k = 12{,}000$, y que este número no se modifica con el paso del tiempo. Entonces, inicialmente, R tiene $\frac{3}{5}k$ clientes, y S tiene $\frac{2}{5}k$ consumidores. Al final del primer año, R conserva $\frac{1}{4}$ de sus clientes y gana $\frac{1}{3}$ de los de S. En consecuencia, R tiene

$$\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{5}k\right) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{5}k\right) = \left[\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{3}{5}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{5}\right)\right]k = \tfrac{17}{60}k \text{ clientes.}$$

Cuando $k = 12{,}000$, R tiene $\frac{17}{60}(12{,}000) = 3{,}400$ clientes. De manera similar, al final del primer año, S conserva $\frac{2}{3}$ de sus clientes y gana $\frac{3}{4}$ de los clientes de R. En consecuencia, S tiene

$$\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{3}{5}k\right) + \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{5}k\right) = \left[\tfrac{3}{4}\left(\tfrac{3}{5}\right) + \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{5}\right)\right]k = \tfrac{43}{60}k \text{ clientes.}$$

Cuando $k = 12{,}000$ S tiene $\frac{43}{60}(12{,}000) = 8{,}600$ clientes. De manera análoga, al paso de los dos años, la distribución del mercado estará dada por

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = A(A\mathbf{x}_0) = A^2\boldsymbol{x}_0.$$

Si

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

¿podemos determinar a y b de modo que la distribución sea la misma año con año? Cuando esto ocurre, se dice que la distribución del mercado es **estable**. Procedemos de la manera siguiente. Como R y S controlan todo el mercado, debemos tener

$$a + b = 1. \tag{3}$$

También queremos que la distribución no se modifique después de un año. Por lo tanto

$$A\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$$

o

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}a + \tfrac{1}{3}b &= a\\ \tfrac{3}{4}a + \tfrac{2}{3}b &= b\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}-\tfrac{3}{4}a + \tfrac{1}{3}b &= 0\\ \tfrac{3}{4}a - \tfrac{1}{3}b &= 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Observe que las dos ecuaciones en (4) son iguales. Utilizamos la ecuación (3) y una de las ecuaciones en (4) para determinar (verifique) que

$$a = \tfrac{4}{13} \quad \text{y} \quad b = \tfrac{9}{13}.$$

El problema que acabamos de ver es un ejemplo de una **cadena de Markov**. En la sección 2.5 volveremos a abordar este tema.

TEOREMA 1.3 **(Propiedades de la multiplicación por un escalar)** *Si r y s son números reales y A y B son matrices, entonces*

(a) $r(sA) = (rs)A$
(b) $(r + s)A = rA + sA$
(c) $r(A + B) = rA + rB$
(d) $A(rB) = r(AB) = (rA)B$

Demostración Ejercicio T.12. ■

EJEMPLO 10 Sean $r = -2$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A(rB) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -2 & -8 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$r(AB) = (-2)\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix},$$

lo cual ilustra el inciso (d) del teorema 1.3.

Resulta fácil demostrar que $(-1)A = -A$ (ejercicio T.13). ■

TEOREMA 1.4 **(Propiedades de la transpuesta)** Si *r es un escalar y A y B son matrices, entonces*

(a) $(A^T)^T = A$
(b) $(A + B)^T = A^T + B^T$
(c) $(AB)^T = B^T A^T$
(d) $(rA)^T = rA^T$

Demostración Dejaremos las demostraciones de (a), (b) y (d) como ejercicio (T.14); aquí sólo demostraremos el inciso (c). Así, sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $m \times p$ y sea $B = [b_{ij}]$ una matriz de $p \times n$. El i, j-ésimo elemento de $(AB)^T$ es c^T_{ij}. Ahora bien,

$$\begin{aligned} c^T_{ij} = c_{ji} &= \text{fil}_j(A) \cdot \text{col}_i(B) \\ &= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jp}b_{pi} \\ &= a^T_{1j}b^T_{i1} + a^T_{2j}b^T_{i2} + \cdots + a^T_{pj}b^T_{ip} \\ &= b^T_{i1}a^T_{1j} + b^T_{i2}a^T_{2j} + \cdots + b^T_{ip}a^T_{pj} \\ &= \text{fil}_i(B^T) \cdot \text{col}_j(A^T), \end{aligned}$$

que es el i, j-ésimo elemento de $B^T A^T$. ■

EJEMPLO 11 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

y

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 7 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}.$$

■

DEFINICIÓN Una matriz $A = [a_{ij}]$ cuyas entradas son números reales es **simétrica** si

$$A^T = A.$$

Es decir, A es simétrica si es una matriz cuadrada para la cual

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \text{(ejercicio T.17).}$$

Si la matriz A es simétrica, los elementos de A son simétricos respecto de la diagonal principal de A.

EJEMPLO 12 Las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

son simétricas. ■

EJEMPLOS CON MATRICES BINARIAS (OPCIONAL)

Todas las operaciones matriciales analizadas en esta sección son válidas para matrices binarias, siempre y cuando utilicemos aritmética binaria. Por lo tanto, los únicos escalares disponibles son 0 y 1.

EJEMPLO 13 Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ una matriz binaria. Determine el inverso aditivo de A.

Solución Sea $-A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$ (el inverso aditivo de A). Entonces, $A + (-A) = O$. Tenemos

$$\begin{aligned} 1 + a &= 0 \qquad & 0 + b &= 0 \\ 1 + c &= 0 \qquad & 1 + d &= 0 \\ 0 + e &= 0 \qquad & 1 + f &= 0 \end{aligned}$$

de manera que $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = 1$, $e = 0$ y $f = 1$. En consecuencia, $-A = A$. (Vea también el ejercicio T.38.) ■

EJEMPLO 14 A partir de la matriz binaria $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, determine una matriz binaria de 2×2, $B \neq O$, tal que $AB = O$.

Solución Sea $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Entonces

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

siempre y cuando $a = b = 0$, $c = 0$ o 1 y $d = 0$ o 1. Por lo tanto, existen cuatro de tales matrices,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

La sección 2.2, teoría de gráficas, utiliza el material de esta sección; si lo desea, estúdiela en este momento.

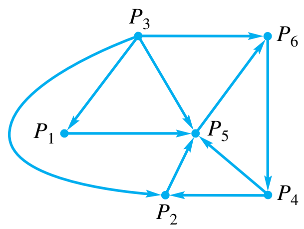
Vista preliminar de una aplicación

Teoría de gráficas (sección 2.2)

En los últimos años, la necesidad de resolver problemas que tienen que ver con la comunicación entre individuos, computadoras y organizaciones, ha crecido con un ritmo sin precedentes. Observe, por ejemplo, el crecimiento explosivo de Internet y sus posibilidades de interactuar con medios de todo tipo. La teoría de gráficas es un área de las matemáticas aplicadas que estudia problemas como el siguiente:

Considere una red de área local que consta de seis usuarios, denotados mediante $P_1, P_2, \ldots, P_6$. Decimos que P_i tiene "acceso" a P_j si P_i puede enviar directamente un mensaje a P_j. Por otro lado, es posible que P_i no pueda enviar un mensaje de manera directa a P_k, pero si pueda enviarlo a P_j, quien lo enviará luego a P_k. En este caso, decimos que P_i tiene un "acceso en 2 etapas (o pasos)" a P_k. Del mismo modo, hablamos de un "acceso en r etapas". Podemos describir la relación de acceso en la red que aparece en la figura 1.6, definiendo la matriz $A = [a_{ij}]$ de 6×6, en la que $a_{ij} = 1$ si P_i tiene acceso a P_j, y $a_{ij} = 0$ en caso contrario. En consecuencia, A puede ser

Figura 1.6 ▶



$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 \end{array} \\ \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Utilizando la matriz A y las técnicas de teoría de gráficas que se estudian en la sección 2.2, podemos determinar el número de formas en que P_i tiene acceso a P_k en r etapas, donde $r = 1, 2, \ldots$. La teoría de gráficas permite resolver muchos otros problemas que implican las comunicaciones.

En realidad, la matriz A que se acaba de describir es una matriz binaria, pero en esta situación es mejor considerarla una matriz de base 10, como se mostrará en la sección 2.2.

Términos clave

Propiedades de la suma de matrices
Identidad aditiva o matriz cero
Inverso aditivo o negativo de una matriz
Propiedades de la multiplicación de matrices
Matriz identidad
Potencias de una matriz
Propiedades de la transpuesta
Matriz simétrica
Matriz antisimétrica

1.4 Ejercicios

1. Verifique el teorema 1.1 para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

y

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Verifique el inciso (a) del teorema 1.2 para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Verifique el inciso (b) del teorema 1.2 para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Verifique los incisos (a), (b) y (c) del teorema 1.3 para $r = 6$, $s = -2$ y

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Verifique el inciso (d) del teorema 1.3 para $r = -3$ y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

6. Verifique los incisos (b) y (d) del teorema 1.4 para $r = -4$ y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

7. Verifique el inciso (c) del teorema 1.4 para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 8 y 9, sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

8. De ser posible, calcule

(a) $(AB)^T$ (b) B^TA^T (c) A^TB^T
(d) BB^{TT} (e) B^TB

9. De ser posible, calcule

(a) $(3C - 2E)^TB$ (b) $A^T(D + F)$
(c) $B^TC + A$ (d) $(2E)A^T$
(e) $(B^T + A)C$

10. Si

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

demuestre que $AB = O$.

11. Si

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$C = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$

demuestre que $AB = AC$.

12. Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, demuestre que $A^2 = I_2$.

13. Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Determine

(a) $A^2 + 3A$
(b) $2A^3 + 3A^2 + 4A + 5I_2$

14. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Determine

(a) $A^2 - 2A$
(b) $3A^3 - 2A^2 + 5A - 4I_2$

15. Determine un escalar r tal que $A\mathbf{x} = r\mathbf{x}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

16. Determine una constante k tal que $(kA)^T(kA) = 1$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

¿Hay más de un valor de k que se pueda utilizar?

17. Sean

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{a}_j = \mathrm{col}_j(A)$, $j = 1, 2, 3$. Verifique que

$$A^T A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_1^T\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_2^T\mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_3^T\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_3^T\mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3^T\mathbf{a}_3 \end{bmatrix}.$$

Los ejercicios 18 a 21 tienen que ver con cadenas de Markov, un área que se estudiará con más detalle en la sección 2.5.

18. Suponga que la matriz del ejemplo 9 es

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(a) Determine la distribución del mercado después de un año.

(b) Determine la distribución estable del mercado.

19. Considere dos compañías de comida rápida, M y N. Cada año, la compañía M conserva $\frac{1}{3}$ de sus clientes, mientras que $\frac{2}{3}$ de sus consumidores cambian a N. Cada año, N conserva $\frac{1}{2}$ de sus clientes, mientras que $\frac{1}{2}$ cambia a M. Suponga que la distribución inicial del mercado está dada por

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

(a) Determine la distribución del mercado después de un año.

(b) Determine la distribución estable del mercado.

20. Tomando como base el ejemplo 9, considere que había tres compañías competidoras, R, S y T, de modo que el patrón de retención y pérdida de clientes está dado por la información de la matriz A, donde

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R & S & T \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} R \\ S \\ T \end{array}$$

(a) Si la distribución inicial del mercado está dada por

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

determine la distribución del mercado al cabo de un año, y después de dos años.

(b) Demuestre que la distribución estable del mercado está dada por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{21}{53} \\ \frac{24}{53} \\ \frac{8}{53} \end{bmatrix}.$$

(c) ¿Cuál de las tres compañías, R, S o T, ganará la mayor parte del mercado a largo plazo (suponiendo que el patrón de retención y pérdida de clientes permanece constante)? ¿Cuál es, aproximadamente, el porcentaje del mercado que ganó esta compañía?

21. Tomando como base el ejercicio 20, suponga que la matriz A está dada por

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} R & S & T \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} R \\ S \\ T \end{array}$$

(a) Si la distribución inicial del mercado está dada por

$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

determine la distribución del mercado al cabo de un año, y después de dos años.

(b) Demuestre que la distribución estable del mercado está dada por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{10}{37} \\ \frac{12}{37} \\ \frac{15}{37} \end{bmatrix}.$$

(c) ¿Cuál de las tres compañías, R, S o T, ganará la mayor parte del mercado en el largo plazo (suponiendo que el patrón de retención y pérdida de clientes permanece constante)? ¿Cuál es, aproximadamente, el porcentaje del mercado que ganó esta compañía?

Los ejercicios 22 a 25 tienen que ver con el uso de matrices binarias.

22. Si la matriz binaria $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, demuestre que $A^2 = O$.

23. Si la matriz binaria $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, demuestre que $A^2 = I_2$.

24. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ una matriz binaria. Determine

(a) $A^2 - A$ (b) $A^3 + A^2 + A$

25. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ una matriz binaria. Determine

(a) $A^2 + A$ (b) $A^4 + A^3 + A^2$

Ejercicios teóricos

T.1. Demuestre las propiedades (b) y (d) del teorema 1.1.

T.2. Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz de 2×3, $B = [b_{ij}]$ es una matriz de 3×4 y $C = [c_{ij}]$ es una matriz de 4×3, demuestre que $A(BC) = (AB)C$.

T.3. Demuestre las propiedades (b) y (c) del teorema 1.2.

T.4. Si A es una matriz de $m \times n$, demuestre que

$$I_m A = AI_n = A.$$

T.5. Sean p y q enteros no negativos, y sea A una matriz cuadrada. Demuestre que

$$A^p A^q = A^{p+q} \quad \text{y} \quad (A^p)^q = A^{pq}.$$

T.6. Si $AB = BA$, y p es un entero no negativo, demuestre que

$$(AB)^p = A^p B^p.$$

T.7. Demuestre que si A y B son matrices diagonales de $n \times n$, $AB = BA$.

T.8. Determine una matriz de 2×2, $B \neq O$ y $B \neq I_2$, tal que $AB = BA$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Cuántas de estas matrices B existen?

T.9. Determine una matriz B de 2×2, $B \neq 0$ y $B \neq I_2$, tal que $AB = BA$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

¿Cuántas matrices B de este tipo hay?

T.10. Sea $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

(a) Determine una expresión sencilla para A^2.

(b) Determine una expresión sencilla para A^3.

(c) Conjeture la forma de una expresión sencilla para A^k, en la que k es un entero positivo.

(d) Verifique su conjetura del inciso (c).

T.11. Si p es un entero no negativo y c es un escalar, demuestre que

$$(cA)^p = c^p A^p.$$

T.12. Demuestre el teorema 1.3.

T.13. Demuestre que $(-1)A = -A$.

T.14. Complete la demostración del teorema 1.4.

T.15. Demuestre que $(A - B)^T = A^T - B^T$.

T.16. (a) Demuestre que $(A^2)^T = (A^T)^2$.

(b) Demuestre que $(A^3)^T = (A^T)^3$.

(c) ¿Cierto o falso? Para $k = 4, 5, \ldots,$

$$(A^k)^T = (A^T)^k.$$

T.17. Demuestre que una matriz cuadrada A es simétrica si y sólo si $a_{ij} = a_{ji}$ para toda i, j.

T.18. Demuestre que si A es simétrica, entonces A^T es simétrica.

T.19. Sea A una matriz de $n \times m$. Demuestre que si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para todas las matrices $\mathbf{x}$ de $n \times 1$, entonces $A = O$.

T.20. Sea A una matriz de $n \times n$. Demuestre que si $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$ para todas las matrices $\mathbf{x}$ de $n \times 1$, entonces $A = I_n$.

T.21. Demuestre que si $AA^T = O$, entonces $A = O$.

T.22. Demuestre que si A es una matriz simétrica, entonces A^k, $k = 2, 3, \ldots,$ es simétrica.

T.23. Sean A y B matrices simétricas.

(a) Demuestre que $A + B$ es simétrica.

(b) Demuestre que AB es simétrica si y sólo si $AB = BA$.

T.24. Una matriz $A = [a_{ij}]$ es **antisimétrica** si $A^T = -A$. Demuestre que A es antisimétrica si y sólo si $a_{ij} = -a_{ji}$ para toda i, j.

T.25. Describa todas las matrices escalares que son antisimétricas. (Vea la sección 1.2 para la definición de matriz escalar.)

T.26. Si A es una matriz de $n \times n$, demuestre que AA^T y A^TA son simétricas.

T.27. Si A es una matriz de $n \times n$, demuestre que

(a) $A + A^T$ es simétrica.

(b) $A - A^T$ es antisimétrica.

T.28. Demuestre que si A es una matriz de $n \times n$, entonces A puede escribirse de manera única como $A = S + K$, donde S es una matriz simétrica y K es una matriz antisimétrica.

T.29. Demuestre que si A es una matriz escalar de $n \times n$, entonces $A = rI_n$ para algún número real r.

T.30. Demuestre que $I_n^T = I_n$.

T.31. Sea A una matriz de $m \times n$. Demuestre que si $rA = O$, entonces $r = 0$ o $A = O$.

T.32. Demuestre que si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema lineal que tiene más de una solución, entonces tiene un número infinito de soluciones. (*Sugerencia*: si $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son soluciones, considere $\mathbf{w} = r\mathbf{u}_1 + s\mathbf{u}_2$, donde $r + s = 1$.)

T.33. Determine todas las matrices A de 2×2, tales que $AB = BA$, para cualquier matriz B de 2×2.

T.34. Si A es una matriz antisimétrica, ¿qué tipo de matriz es A^T? Justifique su respuesta.

T.35. ¿Qué tipo de matriz es una combinación lineal de matrices simétricas? (Vea la sección 1.3.) Justifique su respuesta.

T.36. ¿Qué tipo de matriz es una combinación lineal de matrices escalares? (Vea la sección 1.3.) Justifique su respuesta.

T.37. Sea $A = [a_{ij}]$ la matriz de $n \times n$ definida por $a_{ii} = r$ y $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Demuestre que si B es cualquier matriz de $n \times n$, entonces $AB = rB$.

T.38. Si A es cualquier matriz binaria de $n \times n$, demuestre que $-A = A$.

T.39. Determine todas las matrices binarias A de 2×2, tales que $A^2 = O$.

T.40. Determine todas las matrices binarias A de 2×2, tales que $A^2 = I_2$.

Ejercicios con MATLAB

Para utilizar MATLAB *en esta sección, primero deberá haber leído el capítulo 12, hasta la sección 12.3.*

ML.1. Utilice MATLAB para determinar el menor entero positivo k en cada uno de los siguientes casos (vea también el ejercicio 12).

(a) $A^k = I_3$ para $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A^k = A$ para $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ML.2. Utilice MATLAB para desplegar la matriz A en cada uno de los siguientes casos. Determine el menor valor de k tal que A^k sea una matriz nula. **tril**, **ones**, **triu fix**, y **rand** son comandos de MATLAB. (Para ver una descripción, utilice el comando **help** del programa.)

(a) $A = $ **tril(ones(5), −1)**

(b) $A = $ **triu(fix(10 ∗ rand(7)),2)**

ML.3. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Utilice el comando **polyvalm** de MATLAB para calcular los siguientes polinomios de matrices:

(a) $A^4 - A^3 + A^2 + 2I_3$ (b) $A^3 - 3A^2 + 3A$

ML.4. Sea $A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$. Utilice MATLAB para calcular las siguientes expresiones matriciales:

(a) $(A^2 - 7A)(A + 3I_3)$.

(b) $(A - I_3)^2 + (A^3 + A)$.

(c) Observe la sucesión $A, A^2, A^3, \ldots, A^8, \ldots$. ¿Parece que converge a alguna matriz? De ser así, ¿a qué matriz?

ML.5. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Utilice MATLAB para calcular los elementos de la sucesión $A, A^2, A^3, \ldots, A^k, \ldots$. Escriba una descripción del comportamiento de esta sucesión de matrices.

ML.6. Sea $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$. Repita el ejercicio ML.5.

ML.7. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Utilice MATLAB para hacer lo siguiente:

(a) Calcule A^TA y AA^T. ¿Son iguales?

(b) Calcule $B = A + A^T$ y $C = A - A^T$. Demuestre que B es simétrica y C es antisimétrica. (Vea el ejercicio T.24.)

(c) Determine una relación entre $B + C$ y A.

En los ejercicios ML.8 a ML.11 se emplean matrices binarias y los comandos adicionales que se describen en la sección 12.9.

ML.8. (a) Utilice **binrand** para generar una matriz binaria B de 3×3.

(b) Utilice **binadd** para calcular $B + B$ y $B + B + B$.

(c) Si B se sumara con ella misma n veces, ¿cuál sería el resultado? Explique su respuesta.

ML.9. Sea $B = $ **triu(ones(3))**. Determine k de modo que $B^k = I_3$.

ML.10. Sea $B = $ **triu(ones(4))**. Determine k de modo que $B^k = I_4$.

ML.11. Sea $B = $ **triu(ones(5))**. Determine k de modo que $B^k = I_5$.

1.5 TRANSFORMACIONES MATRICIALES

En la sección 1.2 mencionamos la notación R^n para el conjunto de todos los n-vectores con entradas reales. De acuerdo con ello, R^2 denota el conjunto de todos los 2-vectores, y R^3 el conjunto de todos los 3-vectores. De manera geométrica, es conveniente representar los elementos de R^2 y R^3 como segmentos de recta en un sistema de coordenadas rectangular.‡ En esta sección nuestro enfoque es intuitivo, y nos permitirá presentar algunas aplicaciones geométricas interesantes en la sección siguiente (en una etapa temprana del curso). En la sección 3.1 realizaremos un análisis más cuidadoso y preciso de los 2-vectores y los 3-vectores.

‡Sin duda ha visto sistemas de coordenadas rectangulares en sus cursos de precálculo o de cálculo.

En R^2, el vector

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

se representa por medio del segmento de recta que se muestra en la figura 1.7. En R^3, el vector

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

se representa por medio del segmento de recta que se muestra en la figura 1.8.

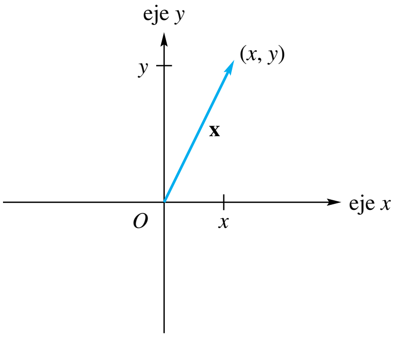


Figura 1.7 ▲

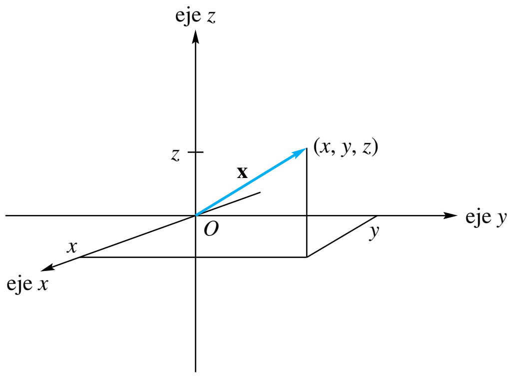


Figura 1.8 ▲

EJEMPLO 1 En la figura 1.9 se muestran las representaciones geométricas de los 2-vectores

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en un sistema de coordenadas rectangular de dos dimensiones. La figura 1.10 muestra las representaciones geométricas de los 3-vectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

en un sistema de coordenadas rectangular de tres dimensiones. ■

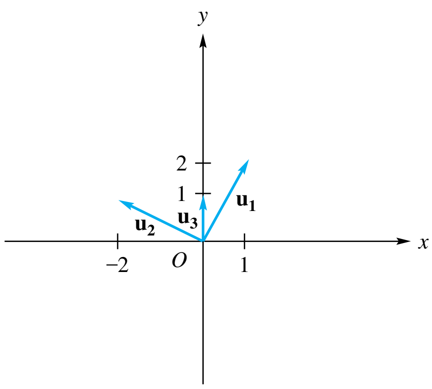


Figura 1.9 ▲

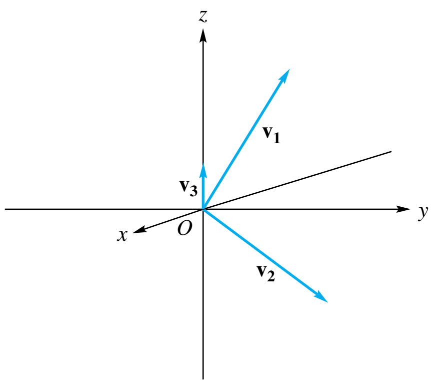


Figura 1.10 ▲

Las funciones aparecen en casi todas las aplicaciones de matemáticas. En esta sección daremos una breve introducción a ciertas transformaciones de R^n a R^m desde un punto de vista geométrico. Ya que deseamos representar estas funciones, denominadas transformaciones matriciales, la mayor parte de nuestro análisis en esta sección se limita a la situación en que m y n tienen los valores 2 o 3. En la sección siguiente se analizará una aplicación de estas funciones a las gráficas por computadora en el plano, esto es, para m y n iguales a 2. En el capítulo 4 consideraremos con mayor detalle una función más general, denominada transformación lineal de R^n a R^m. Puesto que toda transformación matricial es una transformación lineal, a continuación aprenderemos más acerca de sus propiedades.

Las transformaciones lineales desempeñan un papel muy importante en muchas áreas de matemáticas, así como en numerosos problemas de aplicación en ciencias físicas, ciencias sociales y economía.

Si A es una matriz de $m \times n$ y $\mathbf{u}$ es un n-vector, el producto $A\mathbf{u}$ es un m-vector. Una función f que transforma R^n en R^m se denota mediante $f\colon R^n \to R^m$.[§] Una **transformación matricial** es una función $f\colon R^n \to R^m$, definida con $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$. El vector $f(\mathbf{u})$ en R^m se denomina **imagen** de $\mathbf{u}$, y el conjunto de todas las imágenes de los vectores en R^n se denomina **rango** de f. Aunque en esta sección nos limitaremos a estudiar matrices y vectores con entradas reales, puede desarrollarse un análisis completamente similar para matrices y vectores con entradas complejas. (Vea el apéndice A.2.)

EJEMPLO 2

(a) Sea f la trasformación matricial definida por

$$f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}.$$

La imagen de $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ es

$$f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y la imagen de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$ (verifique).

(b) Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, y considere la transformación matricial definida por

$$f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}.$$

En consecuencia, la imagen de $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, la imagen de $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, y la imagen de $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ es $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (verifique). ■

Observe que si A es una matriz de $m \times n$ y $f\colon R^n \to R^m$ es una transformación matricial de R^n a R^m, definida por $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, un vector $\mathbf{w}$ en R^m está en el rango de f sólo si podemos encontrar un vector $\mathbf{v}$ en R^n tal que $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

[§]El apéndice A, que, aborda el tema de conjuntos y funciones, puede consultarse conforme sea necesario.

EJEMPLO 3 Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, y considere la transformación matricial definida por $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$. Determine si el vector $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ está en el rango de f.

Solución La pregunta es equivalente a inquirir si existe un vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ tal que $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Tenemos

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 + 2v_2 \\ -2v_1 + 3v_2 \end{bmatrix} = \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{aligned} v_1 + 2v_2 &= 4 \\ -2v_1 + 3v_2 &= -1. \end{aligned}$$

Al resolver este sistema de ecuaciones lineales por medio del método usual de eliminación, obtenemos $v_1 = 2$ y $v_2 = 1$ (verifique). Por lo tanto, $\mathbf{w}$ está en el rango de g. En particular, si $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, entonces $f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. ■

EJEMPLO 4 **(Producción)** Un editor publica un libro en tres ediciones diferentes: comercial, rústica y de lujo. Cada libro requiere de cierta cantidad de papel y lienzo (para la tapa). Los requerimientos se dan (en gramos) por medio de la matriz

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Comercial} & \text{Rústica} & \text{De lujo} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 300 & 500 & 800 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{Papel} \\ \text{Lienzo} \end{array}$$

Sea

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

el vector de producción, en donde x_1, x_2 y x_3 son el número de libros que se publicarán en edición comercial, rústica y de lujo, respectivamente. La transformación matricial $f: R^3 \to R^2$, definida por $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, da el vector

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

en donde y_1 es la cantidad total de papel requerido, y y_2 es la cantidad total de lienzo necesario para la publicación. ■

Para las transformaciones matriciales en donde m y n son 2 o 3, podemos dibujar representaciones que muestren el efecto de la transformación matricial. Esto se ilustrará en los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Sea $f: R^2 \to R^2$ la transformación matricial definida por

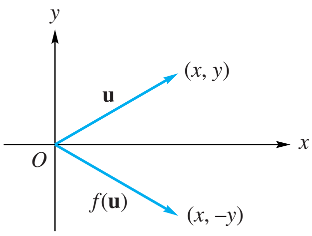
$$f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u}.$$

Así, si $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, entonces

$$f(\mathbf{u}) = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

El efecto de la transformación matricial f, denominada **reflexión respecto del eje x en R^2**, se muestra en la figura 1.11. En el ejercicio 2 consideramos la reflexión respecto del eje y. ■

Figura 1.11 ▶ Reflexión respecto del eje x



EJEMPLO 6 Sea $f: R^3 \to R^2$ la transformación matricial definida por

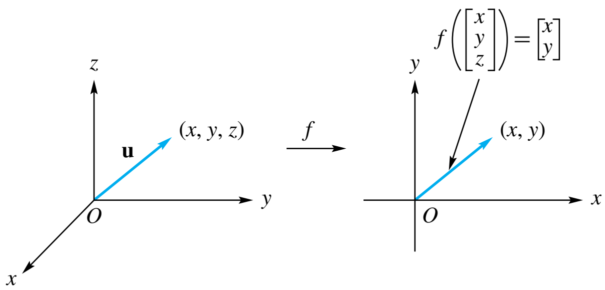
$$f(\mathbf{u}) = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$f(\mathbf{u}) = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

La figura 1.12 muestra el efecto de esta transformación matricial. (Precaución: observe con atención los ejes en la figura 1.12.)

Figura 1.12 ▶



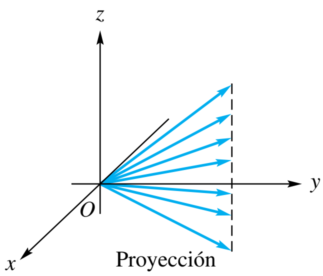


Figura 1.13 ▲

Observe que si

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ s \end{bmatrix},$$

en donde s es cualquier escalar, entonces

$$f(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f(\mathbf{u}).$$

Por lo tanto, un número infinito de 3-vectores tienen el mismo vector imagen. Vea la figura 1.13. La transformación matricial f es un ejemplo de un tipo de transformación matricial denominado **proyección**. En este caso, f es una proyección de R^3 en al plano xy.

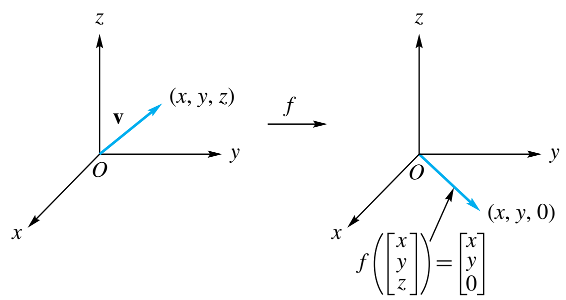
Observe que la imagen del 3-vector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, bajo la transformación matricial f:

$R^3 \to R^3$, definida por

$$f(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

es $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$. El efecto de esta transformación matricial se muestra en la figura 1.14. La gráfica es casi igual a la de la figura 1.12, en donde la imagen es un 2-vector que está en el plano xy, mientras que en la figura 1.14 la imagen es un 3-vector que está en el plano xy. Observe que $f(\mathbf{v})$ aparentemente es la sombra proyectada por $\mathbf{v}$ sobre el plano xy. ■

Figura 1.14 ▶



EJEMPLO 7 Sea $f: R^3 \to R^3$ la transformación matricial definida por

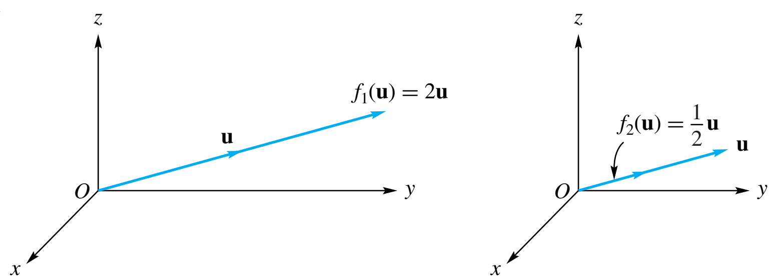
$$f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix} \mathbf{u},$$

donde r es un número real. Es fácil ver que $f(\mathbf{u}) = r\mathbf{u}$. Si $r > 1$, f se denomina **dilatación**; si $0 < r < 1$, f se conoce como **contracción**. En la figura 1.15(a) se muestra el vector $f_1(\mathbf{u}) = 2\mathbf{u}$, y en la figura 1.15(b) el vector $f_2(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbf{u}$. Como puede verse, la dilatación estira el vector y una contracción lo comprime. De manera similar, podemos definir la transformación matricial $g: R^2 \to R^2$ por

$$g(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \mathbf{u}.$$

También tenemos que $g(\mathbf{u}) = r\mathbf{u}$, así que, una vez más, si $r > 1$, g se denomina **dilatación**; si $0 < r < 1$, g se llama **contracción**. ■

Figura 1.15 ▶



(a) Dilatación: $r > 1$ (b) Contracción: $0 < r < 1$

EJEMPLO 8 **(Producción)** Retomemos el caso del editor del ejemplo 4. Los requerimientos están dados por el vector de producción

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

donde x_1, x_2 y x_3 representan la cantidad de ejemplares de la edición comercial, rústica y de lujo, respectivamente. El vector

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

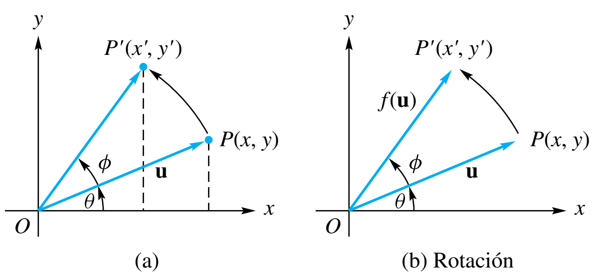
proporciona y_1, la cantidad total de papel requerida, y y_2, la cantidad total de lienzo necesaria. Sea c_1 el costo por libra de papel y c_2 el costo por libra de lienzo. La transformación matricial $g\colon R^2 \to R^1$ definida por $g(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}$, donde

$$B = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

proporciona el costo total de la producción de los libros. ■

EJEMPLO 9 Suponga que cada punto de R^2 se rota en sentido contrario a las manecillas del reloj, en un ángulo de ϕ respecto del origen de un sistema de coordenadas rectangulares. En consecuencia, si el punto P tiene coordenadas (x, y), después de la rotación obtenemos el punto P' con coordenadas (x', y'). Para obtener una relación entre las coordenadas de P' y las de P, tomamos como $\mathbf{u}$ el vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, que se representa por medio del segmento de recta que va del origen a $P(x, y)$. Vea la figura 1.16(a). Además, sea θ el ángulo que forma $\mathbf{u}$ con la parte positiva del eje x.

Figura 1.16 ▶



Denotando con r la longitud del segmento de recta dirigido de O a P, de acuerdo con la figura 1.16(a) vemos que

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{1}$$

y

$$x' = r\cos(\theta + \phi), \qquad y' = r\,\mathrm{sen}(\theta + \phi). \tag{2}$$

Por medio de las fórmulas para el seno y el coseno de una suma de ángulos, las ecuaciones (2) se transforman en

$$x' = r\cos\theta\cos\phi - r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$$
$$y' = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi + r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi.$$

Sustituyendo la expresión (1) en las últimas dos ecuaciones, obtenemos

$$x' = x\cos\phi - y\,\mathrm{sen}\,\phi, \qquad y' = x\,\mathrm{sen}\,\phi + y\cos\phi. \tag{3}$$

Al despejar x y y en (3), tenemos

$$x = x' \cos\phi + y' \operatorname{sen}\phi \qquad \text{y} \qquad y = -x' \operatorname{sen}\phi + y' \cos\phi. \tag{4}$$

La ecuación (3) proporciona las coordenadas de P' en términos de las de P, y (4) expresa las coordenadas de P en términos de las de P'. Este tipo de rotación se utiliza para simplificar la ecuación general de segundo grado

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Al sustituir x y y en términos de x' y y', obtenemos

$$a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2 + d'x' + e'y' + f' = 0.$$

El punto clave es elegir ϕ de modo que $b' = 0$. Una vez hecho esto (podríamos tener que realizar una traslación de coordenadas), identificamos la ecuación general de segundo grado como una circunferencia, una elipse, una hipérbola, una parábola o una forma degenerada de éstas. Este tema se estudiará desde el punto de vista del álgebra lineal en la sección 9.5.

También podemos realizar este cambio de coordenadas considerando la transformación matricial $f: R^2 \to R^2$, definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{5}$$

De esta manera, (5) puede escribirse, por medio de (3), como

$$f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} x\cos\phi - y\operatorname{sen}\phi \\ x\operatorname{sen}\phi + y\cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

De lo anterior se deduce que el vector $f(\mathbf{u})$ está representado por el segmento de recta que va de O al punto P'. Por lo tanto, la rotación de un ángulo ϕ en sentido contrario a las manecillas del reloj es una transformación matricial. ■

Términos clave

Transformación matricial	Rango	Dilatación
Transformación (función)	Reflexión	Contracción
Imagen	Proyección	Rotación

Vista preliminar de una aplicación

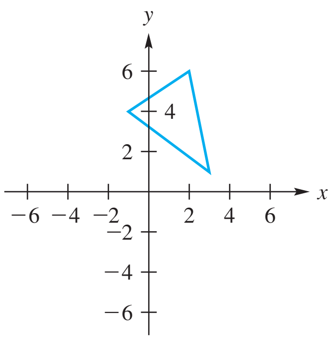
Creación de gráficos por computadora (sección 2.3)

El amplio uso y constante desarrollo de los gráficos creados por computadora para las áreas de juegos de vídeo, efectos especiales en la industria cinematográfica y de televisión, y diseño asistido por computadora (CAD, por sus siglas en inglés), nos sorprende todos los días. En una aplicación de CAD común, se crea el modelo de un producto en computadora, para luego probarlo de manera exhaustiva a fin de encontrar fallas y, con base en la información recabada, mejorar el producto real.

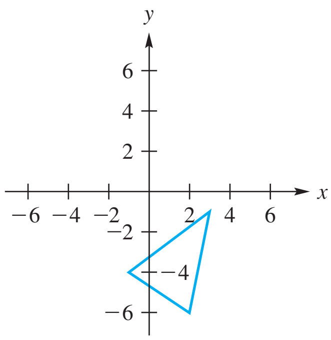
Las transformaciones matriciales desempeñan un papel muy importante en las gráficas por computadora. En la sección 2.3 analizaremos brevemente cuatro transformaciones matriciales. Dos de éstas son las siguientes:

$$f\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix},$$

la cual transforma



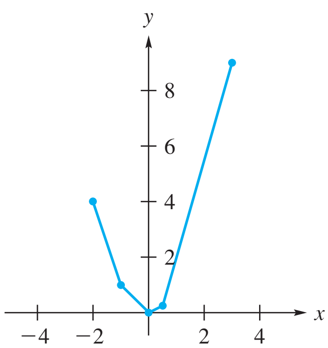
a



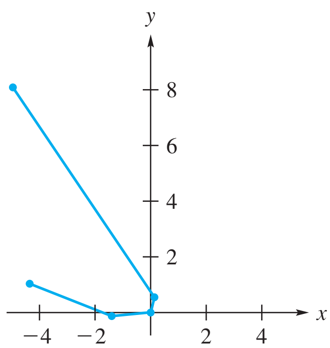
y

$$g\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\frac{5}{18}\pi & -\operatorname{sen}\frac{5}{18}\pi \\ \operatorname{sen}\frac{5}{18}\pi & \cos\frac{5}{18}\pi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix},$$

que transforma



a



1.5 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, haga un bosquejo de **u** *y de su imagen a partir de la transformación matricial f dada.*

1. $f\colon R^2 \to R^2$ definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2. $f\colon R^2 \to R^2$ (**reflexión respecto del eje** $\boldsymbol{y}$) definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3. $f\colon R^2 \to R^2$ es una rotación de 30° en sentido contrario a las manecillas del reloj; $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. $f\colon R^2 \to R^2$ es una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj de $\frac{2}{3}\pi$ radianes; $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

5. $f\colon R^2 \to R^2$ definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

6. $f\colon R^2 \to R^2$ definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

7. $f\colon R^3 \to R^3$ definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

8. $f\colon R^3 \to R^3$ definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 9 a 11, sea $f\colon R^2 \to R^3$ *la transformación matricial definida por* $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$*, donde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine si el vector **w** *dado está en el rango de f.*

9. $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ **10.** $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ **11.** $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ -9 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 12 a 14, sea $f\colon R^2 \to R^3$ *la transformación matricial definida por* $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$*, donde*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine si el vector **w** *dado está en el rango de f.*

12. $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ **13.** $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ **14.** $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 15 a 17, proporcione una descripción geométrica de la transformación matricial $f\colon R^2 \to R^2$ *definida por* $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ *para la matriz A dada.*

15. (a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

16. (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

17. (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

18. Algunas transformaciones matriciales f tienen la propiedad de que $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v})$, cuando $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$. Esto es, las imágenes de vectores diferentes pueden ser iguales. Para cada una de las transformaciones matriciales siguientes, $f\colon R^2 \to R^2$ definida por $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, encuentre dos vectores diferentes, **u** y **v**, tales que $f(\mathbf{u}) = f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ para el vector **w** dado.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

19. Sea $f\colon R^2 \to R^2$ la transformación lineal definida por $f(\mathbf{u}) = A\boldsymbol{u}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

Para $\phi = 30°$, f define una rotación en un ángulo de 30° en sentido contrario a las manecillas del reloj.

(a) Si $T_1(\mathbf{u}) = A^2\mathbf{u}$, describa la acción de T_1 sobre **u**.

(b) Si $T_2(\mathbf{u}) = A^{-1}\mathbf{u}$, describa la acción de T_2 sobre **u**.

(c) ¿Cuál es el valor positivo más pequeño de k para el cual $T(\mathbf{u}) = A^k\mathbf{u} = \mathbf{u}$?

Ejercicios teóricos

T.1. Sea $f\colon R^n \to R^m$ una transformación matricial definida por $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, donde A es una matriz de $m \times n$.

(a) Demuestre que $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$ para cualesquiera **u** y **v** en R^n.

(b) Demuestre que $f(c\mathbf{u}) = cf(\mathbf{u})$ para cualquier **u** en R^n y cualquier número real c.

(c) Demuestre que $f(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cf(\mathbf{u}) + df(\mathbf{v})$ para cualesquiera **u** y **v** en R^n y cualesquiera números reales c y d.

T.2. Sea $f: R^n \to R^m$ una transformación matricial definida por $f(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, donde A es una matriz de $m \times n$. Demuestre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en R^n tales que $f(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ y $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

entonces $f(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ para cualesquiera números reales c y d.

T.3. (a) Sea $O: R^n \to R^m$ la transformación matricial definida por $O(\mathbf{u}) = O\mathbf{u}$, donde O es la matriz cero de $m \times n$. Demuestre que $O(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, para toda $\mathbf{u}$ en R^n.

(b) Sea $I: R^n \to R^n$ la transformación matricial definida por $I(\mathbf{u}) = I_n\mathbf{u}$, donde I_n es la matriz identidad (vea la sección 1.4). Demuestre que $I(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ para toda $\mathbf{u}$ en R^n.

1.6 SOLUCIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En esta sección sistematizaremos el método de eliminación de incógnitas que ya conocemos (analizado en la sección 1.1), con lo que obtendremos un método útil para resolver sistemas lineales. El método comienza con la matriz aumentada del sistema lineal dado, con lo cual se obtiene una matriz de una forma particular. Esta nueva matriz representa un sistema lineal que tiene exactamente las mismas soluciones que el sistema dado. Por ejemplo, si

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

representa la matriz aumentada de un sistema lineal, es fácil determinar la solución a partir de las ecuaciones correspondientes

$$\begin{aligned} x_1 + \qquad\quad 2x_4 &= 4 \\ x_2 \quad - \ x_4 &= -5 \\ x_3 + 3x_4 &= 6. \end{aligned}$$

El objetivo de esta sección consiste en manipular la matriz aumentada que representa un sistema lineal dado, hasta llevarla a una forma de la cual puedan deducirse fácilmente las soluciones.

DEFINICIÓN

Una matriz A de $m \times n$ está en **forma escalonada reducida por filas (renglones)** cuando satisface las propiedades siguientes:

(a) Todas las filas que constan sólo de ceros, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.

(b) La primera entrada distinta de cero de la fila, al leer de izquierda a derecha, es un 1. Esta entrada se denomina **entrada principal** o **uno principal** de su fila.

(c) Para cada fila que no consta sólo de ceros, el uno principal aparece a la derecha y abajo de cualquier uno principal en las filas que le preceden.

(d) Si una columna contiene un uno principal, el resto de las entradas de dicha columna son iguales a cero.

En una matriz en forma escalonada reducida por filas, los unos principales describen un patrón de escalera ("escalonada") que desciende a partir de la esquina superior izquierda.

Se dice que una matriz de $m \times n$ que satisface las propiedades (a), (b) y (c) está en la **forma escalonada por filas**.

EJEMPLO 1

Las matrices siguientes están en la forma escalonada reducida por filas, ya que satisfacen las propiedades (a), (b), (c) y (d):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Las matrices siguientes no están en forma escalonada reducida por filas. (¿Por qué no?)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

EJEMPLO 2 Las matrices siguientes están en la forma escalonada por filas:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

Una propiedad útil de las matrices en forma escalonada reducida por filas (vea el ejercicio T.9), es que si A es una matriz de $n \times n$ en forma escalonada reducida por filas y no es igual a I_n, por lo menos una fila de A consiste sólo de ceros.

A continuación estudiaremos cómo transformar una matriz dada en una matriz en forma escalonada reducida por filas.

DEFINICIÓN Cualquiera de las siguientes es una **operación elemental por filas (renglones)** sobre una matriz $A = [a_{ij}]$ de $m \times n$:

(a) Intercambiar las filas r y s de A. Es decir, remplazar $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$ por $a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}$ y $a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}$ por $a_{r2}, \ldots, a_{rn}$.

(b) Multiplicar la fila r de A por $c \neq 0$. Es decir, remplazar $a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn}$ por $ca_{r1}, ca_{r2}, \ldots, ca_{rn}$.

(c) Sumar d veces la fila r de A a la fila (renglón) s de A, $r \neq s$. Es decir, remplazar $a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}$ por $a_{s1} + da_{r1}, a_{s2} + da_{r2}, \ldots, a_{sn} + da_{rn}$.

Observe que cuando una matriz se considera como la matriz aumentada de un sistema lineal, las operaciones elementales por filas son equivalentes, respectivamente, al intercambio de dos ecuaciones, a la multiplicación de una ecuación por una constante distinta de cero y a la suma de un múltiplo de una ecuación a otra.

EJEMPLO 3 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 6 & -9 \end{bmatrix}.$$

Al intercambiar las filas 1 y 3 de A, obtenemos

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 6 & -9 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Al multiplicar la tercera fila de A por $\frac{1}{3}$, obtenemos

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Al sumar (-2) veces la fila 2 de A a la fila (renglón) 3 de A, obtenemos

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Observe que al obtener D a partir de A, la fila 2 de A *no cambia*. ■

DEFINICIÓN Se dice que una matriz A de $m \times n$ es **equivalente por filas (renglones)** a una matriz B de $m \times n$, si B se puede obtener al aplicar a la matriz A una serie finita de operaciones elementales por fila.

EJEMPLO 4 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si sumamos 2 veces la fila 3 de A a su segunda fila, obtenemos

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & -3 & 7 & 8 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

de manera que B es equivalente por filas a A.

Si intercambiamos las filas 2 y 3 de B, obtenemos

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$

por lo que C es equivalente por filas a A y también equivalente por filas a A.

Al multiplicar la fila 1 de C por 2, obtenemos

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 7 & 8 \end{bmatrix},$$

por lo que D es equivalente por filas a C. De lo anterior se deduce que D es equivalente por filas a A, ya que D se obtuvo D aplicando tres operaciones elementales por filas a A. ■

Resulta fácil demostrar (ejercicio T.2) que

1. toda matriz es equivalente por filas a sí misma;
2. si A es equivalente por filas a B, B es equivalente por filas a A, y
3. si A es equivalente por filas a B y B es equivalente por filas a C, A es equivalente por filas a C.

De acuerdo con 2, la pareja de afirmaciones "A es equivalente por filas a B" y "B es equivalente por filas a A" puede remplazarse por "A y B son equivalentes por filas".

TEOREMA 1.5 *Toda matriz de $m \times n$ es equivalente por filas (renglones) a una matriz en forma escalonada por filas.* ■

Ilustraremos la demostración del teorema exponiendo los pasos que deben realizarse en una matriz específica, A, para obtener una matriz en forma escalonada por filas que sea equivalente por filas a A. Utilizaremos el siguiente ejemplo para ilustrar el procedimiento.

EJEMPLO 5 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

El procedimiento para transformar una matriz a una forma escalonada reducida por filas es el siguiente.

Procedimiento	**Ejemplo**
Paso 1. Determinar la primera columna (contando de izquierda a derecha) den A, tal que no todas sus entradas sean cero. Ésta es la **columna pivote**.	$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$ **Columna pivote** de A
Paso 2. Identificar la primera entrada (contando de arriba hacia abajo) distinta de cero en la columna pivote. Este elemento es el **pivote**, que señalamos mediante un círculo.	$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$ **Pivote**
Paso 3. Intercambiar, en caso necesario, la primera fila por aquella en el renglón donde aparece el pivote, de modo que éste se encuentre ahora en la primera fila (renglón). Llamamos a esta nueva matriz A_1.	$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$ Se intercambiaron la primera y tercera filas de A.

Paso 4. Multiplicar la primera fila de A_1 por el recíproco del pivote. Así, la entrada de la primera fila del pivote y la columna pivote (donde estaba el pivote) es ahora un 1. Llamamos a la nueva matriz A_2.

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

La primera fila de A_1 se multiplicó por $\frac{1}{2}$.

Paso 5. Sumar los múltiplos apropiados de la primera fila de A_2 a las demás filas, para hacer que todas las entradas de la columna pivote, excepto aquella en entrada donde se encuentra el pivote, sean iguales a cero. Así, todas las entradas de la columna pivote y las filas 2, 3, . . . , m se anulan. Llamamos a la nueva matriz A_3.

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

(-2) veces la primera fila de A_2 se le sumó a su cuarta fila.

Paso 6. Identificar B como la submatriz de $(m-1) \times n$ de A_3, obtenida al ignorar o "tapar" la primera fila de A_3. Repita los pasos 1 a 5 con B.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{matrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Columna pivote de B

Pivote

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{matrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Se intercambiaron la primera y la segunda filas de B.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{matrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

La primera fila de B_1 se multiplicó por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{matrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \end{matrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Se sumó 2 veces la primera fila de B_2 se sumó 2 veces a su tercera fila.

Paso 7. Identificar C como la submatriz de $(m-2) \times n$, obtenida al ignorar o "tapar" la primera fila de B_3; no lo borre. Repita los pasos 1 a 5 para C.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Columna pivote de C **Pivote**

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

No se intercambiaron las filas de C. La primera fila de C se multiplicó por $\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La primera fila de C_2 se sumó (-2) veces el primer renglón de C_2 a su segunda fila.

Paso 8. Identifique D como la submatriz de $(m-3) \times n$ de C_3. A continuación debe tratar de repetir los pasos 1 a 5 sobre D. Sin embargo, como en este caso no existe fila pivote en D, hemos terminado. La matriz, denotada por H, que consiste en la matriz D y las filas sombreadas arriba de D, está en la forma escalonada por renglones.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{array}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Observación Cuando los cálculos se realizan de manera manual, en ocasiones es posible evitar las fracciones mediante una modificación adecuada de los pasos del procedimiento.

EJEMPLO 6 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para determinar una matriz en forma escalonada por filas que sea equivalente por filas a A, modificamos el procedimiento anterior para evitar fracciones y procedemos como sigue.

Sume (-1) veces la fila 1 a la fila 2 para obtener

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Intercambie las filas 1 y 2 de A_1 para obtener

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Sume (-2) veces la fila 1 a la fila 2 para obtener

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix},$$

una matriz que está en la forma escalonada y que es equivalente por filas a A. ■

Observación Puede haber más de una matriz en forma escalonada que sea equivalente por filas a una matriz A dada. Por ejemplo, si realizamos la operación siguiente en la matriz H del ejemplo 5, sumar (-1) veces la segunda fila de H a su primera fila, obtenemos la matriz

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que está en la forma escalonada por filas y es equivalente por filas a A. Por lo tanto, tanto H como W son matrices en la forma escalonada por filas, y cada una de ellas es equivalente por filas a A.

En general, si A es una matriz dada, una matriz en forma escalonada por filas que es equivalente por filas a A se denomina **forma escalonada por filas** de A.

TEOREMA 1.6 *Toda matriz de $m \times n$ es equivalente por filas a una única matriz en forma escalonada reducida por filas.* ■

La matriz del teorema 1.6 se denomina **forma escalonada reducida por filas** de A.

Ilustraremos la demostración de este teorema llevando a cabo los pasos que deben realizarse sobre una matriz A específica para obtener una matriz en la forma escalonada reducida por filas equivalente a A. Omitiremos la demostración de que la matriz obtenida es única. El ejemplo siguiente se utilizará para ilustrar el procedimiento.

EJEMPLO 7 Determine la forma escalonada reducida por filas de la matriz A del ejemplo 5.

Solución Iniciamos con la forma escalonada por filas H de A que obtuvimos en el ejemplo 5. Sumamos múltiplos adecuados de cada fila de H, que no está formada sólo por ceros, para hacer cero todas las entradas por arriba del uno principal. Así, iniciamos sumando $\left(-\frac{3}{2}\right)$ veces la tercera fila de H a su segunda fila:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora, sumamos $\frac{5}{2}$ veces la tercera fila de J_1 a su primera fila:

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{19}{4} & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por último, sumamos (-1) veces la segunda fila de J_2 a su primera fila:

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que está en la forma escalonada reducida por filas y es equivalente por filas a A.

Observe que en este ejemplo iniciamos con la fila inferior distinta de cero, y trabajamos hacia arriba para hacer ceros las entradas por encima de los 1 principales. ■

Observación El procedimiento que se dio aquí para determinar la forma escalonada reducida por filas no es la única posible. Como alternativa, podríamos primero hacer cero todas las entradas por debajo del 1 principal y luego, de manera inmediata, hacer cero las entradas por arriba del 1 principal. Este procedimiento no es, sin embargo, tan eficiente como el que describimos previamente. En la práctica, no perdemos tiempo identificando las matrices $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, C_2, \ldots$, etc. Sólo iniciamos con la matriz dada y la transformamos a la forma escalonada reducida por filas.

RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

A continuación aplicaremos estos resultados a la resolución de sistemas lineales.

TEOREMA 1.7 *Sean $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$ dos sistemas lineales, cada uno con m ecuaciones y n incógnitas. Si las matrices aumentadas $\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}\right]$ y $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$ de estos sistemas son equivalentes por filas, ambos sistemas lineales tienen exactamente las mismas soluciones.*

Demostración Esto es consecuencia de la definición de equivalencias por filas, y del hecho de que las tres operaciones elementales por filas sobre la matriz aumentada resultan ser las tres modificaciones sobre un sistema lineal que se analiza en la sección 1.1, con lo cual se obtiene un sistema lineal que tiene las mismas soluciones que el sistema dado. Observe, asimismo, que si un sistema no tiene solución, el otro tampoco. ■

COROLARIO 1.1 *Si A y C son dos matrices de $m \times n$ equivalentes por filas, los sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tienen exactamente las mismas soluciones.*

Demostración Ejercicio T.3. ■

Los resultados que tenemos hasta el momento nos proporcionan dos métodos para resolver sistemas lineales. La idea central consiste en iniciar con el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, obtener la matriz por bloques $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$ ya sea en la forma escalonada por filas o en la forma escalonada reducida por filas que sea equivalente por filas a la matriz aumentada $\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}\right]$. Ahora, $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$ representa el sistema lineal $C\mathbf{x} = \mathbf{d}$, que es más fácil de resolver debido a la estructura más sencilla de $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$, y el conjunto de todas las soluciones para este sistema proporciona precisamente el conjunto de todas las soluciones para el sistema dado, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. El método en donde $\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}\right]$ está reducido a la forma escalonada por filas se denomina **reducción de Gauss*-Jordan****; el método

*Carl Friedrich Gauss (1777-1855) nacido en una familia pobre de obreros en Brunswick y muerto en Gotinga, Alemania, ha sido uno de los matemáticos más famosos del mundo. Fue un niño prodigio incomprendido por su padre, quien lo llamaba “contemplador de estrellas”. Sin embargo, su genio logró impresionar lo suficiente a sus maestros como para que obtuviera del duque de Brunswick una beca para que pudiera asistir a la escuela secundaria local. Durante su adolescencia realizó descubrimientos originales en teoría de números y comenzó a especular acerca de la geometría no euclidiana. Sus obras científicas incluyen importantes en donde $\begin{bmatrix} C \mid \mathbf{d} \end{bmatrix}$ está en la forma escalonada por filas se denomina **eliminación de Gauss**. Hablando estrictamente, el método alterno de Gauss-Jordan descrito en la observación anterior no es tan eficiente como el que se utilizó en los ejemplos 5 y 6. En la práctica, ni la reducción de Gauss-Jordan ni la eliminación de Gauss se utilizan tanto como el método que implica la factorización LU de A, del que hablaremos en la sección 1.8. Sin embargo la reducción de Gauss-Jordan y la eliminación de Gauss son útiles para resolver problemas de menos envergadura; en este libro emplearemos el primer procedimiento con más frecuencia.

El procedimiento de reducción de Gauss-Jordan para resolver el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es el siguiente.

Paso 1. Formar la matriz aumentada $\begin{bmatrix} A \mid \mathbf{b} \end{bmatrix}$.

Paso 2. Transformar la matriz aumentada $\begin{bmatrix} A \mid \mathbf{b} \end{bmatrix}$ a su forma escalonada reducida por filas $\begin{bmatrix} C \mid \mathbf{d} \end{bmatrix}$ mediante operaciones elementales por filas.

Paso 3. Para cada fila distinta de cero de la matriz $\begin{bmatrix} C \mid \mathbf{d} \end{bmatrix}$, se despeja la incógnita correspondiente a la entrada principal de cada fila asociada con la entrada principal de esa fila. Las filas que constan completamente de ceros se pueden ignorar, pues la ecuación correspondiente será satisfecha por cualesquiera valores de las incógnitas.

El procedimiento de eliminación gaussiano para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es como sigue.

Paso 1. Formar la matriz aumentada $\begin{bmatrix} A \mid \mathbf{b} \end{bmatrix}$.

Paso 2. Por medio de operaciones elementales por filas, obtener una forma escalonada por filas $\begin{bmatrix} C \mid \mathbf{d} \end{bmatrix}$ de la matriz aumentada $\begin{bmatrix} A \mid \mathbf{b} \end{bmatrix}$.

Paso 3. Resolver el sistema lineal correspondiente a $\begin{bmatrix} C \mid \mathbf{d} \end{bmatrix}$ por medio de **sustitución hacia atrás** (ilustrado en el ejemplo 11). Las filas que constan únicamente de ceros pueden ignorarse, ya que la ecuación correspondiente será satisfecha por cualesquiera valores de las incógnitas.

Los siguientes ejemplos ilustran el procedimiento de Gauss-Jordan.

---

contribuciones a la teoría de números, a la astronomía matemática, a la geografía matemática, a la estadística, a la geometría diferencial y al magnetismo. Sus diarios y notas privadas contienen muchos otros descubrimientos que no publicó.

Hombre austero y conservador que tuvo pocos amigos y una vida privada poco afortunada, se preocupó mucho por dar el crédito de los descubrimientos científicos a sus fuentes originales. Cuando sus estudios se basaban en resultados de otros, tenía cuidado de reconocerlo; y cuando otros descubrían de manera independiente algunos resultados en sus notas privadas, rápidamente reclamaba su propiedad.

En sus investigaciones utilizó un método que después se generalizó para la reducción por filas de una matriz. Aunque dicho método se aplicaba en China desde casi 2000 años antes, lleva el nombre de este ilustre matemático en su honor.

** Wilhelm Jordan (1842-1899) nació en el sur de Alemania. Asistió a la Universidad en Stuttgart y en 1868 se convirtió en profesor de tiempo completo de geodesia en la escuela técnica de Karlsruhe, Alemania. Participó en la medición de varias regiones de Alemania. Jordan fue un prolífico autor cuya obra principal, *Handbuch der Vermessungskunde* (*Manual de geodesia*) fue traducido al francés, al italiano y al ruso; además de magnífico autor, se le consideraba un excelente maestro. Por desgracia, el método de reducción de Gauss-Jordan ha sido ampliamente atribuido a Camille Jordan (1838-1922), matemático francés bastante conocido. Además, parece que el método fue descubierto también, de manera independiente y en la misma época, por B. I. Clasen, un sacerdote avecindado en Luxemburgo. Este bosquejo biográfico se basa en el excelente artículo de S. C. Althoen y R. McLaughlin, "Gauss-Jordan reduction: A Brief History", *MAA Monthly,* 94, 1987, páginas 130-142.

EJEMPLO 8 Resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ 2x - y + z &= 8 \\ 3x - z &= 3 \end{aligned} \tag{1}$$

mediante la reducción de Gauss-Jordan.

Solución ***Paso 1.*** La matriz aumentada de este sistema lineal es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right].$$

Paso 2. Ahora transformamos como sigue la matriz del paso 1 a su forma escalonada reducida por filas:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right]$$ Se sumó (-2) veces la primera fila a la segunda. Se sumó (-3) veces la primera fila a la tercera fila.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right]$$ Se multiplicó la segunda fila por $\left(-\frac{1}{5}\right)$.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right]$$ Se sumó 6 veces la segunda fila a su tercera fila.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ La tercera fila se multiplicó por $\left(-\frac{1}{4}\right)$.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ Se sumó (-1) veces la tercera fila a su primera fila.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ Se sumó (-3) veces la tercera fila a su primera fila.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$ Se sumó (-2) veces la segunda fila a su primera fila.

En consecuencia, la matriz aumentada es equivalente por filas a la matriz

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \tag{2}$$

en forma escalonada reducida por filas.

Paso 3. El sistema lineal representado por (2) es

$$\begin{aligned} x \quad\quad &= 2 \\ y \quad &= -1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

de modo que la única solución del sistema lineal dado (1) es

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -1 \\ z &= 3. \end{aligned}$$

■

EJEMPLO 9 Resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + y + 2z - 5w &= 3 \\ 2x + 5y - z - 9w &= -3 \\ 2x + y - z + 3w &= -11 \\ x - 3y + 2z + 7w &= -5 \end{aligned} \tag{3}$$

mediante la reducción de Gauss-Jordan.

Solución ***Paso 1***. La matriz aumentada de este sistema lineal es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11 \\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right].$$

Paso 2. La matriz aumentada es equivalente por filas a la matriz (verifique)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \tag{4}$$

que está en forma escalonada reducida por filas.
Paso 3. El sistema lineal representado en (4) es

$$\begin{aligned} x \quad\quad + 2w &= -5 \\ y \quad - 3w &= 2 \\ z - 2w &= 3. \end{aligned}$$

Hemos ignorado la fila en (4), ya que consta completamente de ceros.

Al despejar en cada ecuación la incógnita correspondiente a la entrada principal de cada fila de (4), obtenemos

$$\begin{aligned} x &= -5 - 2w \\ y &= 2 + 3w \\ z &= 3 + 2w. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si hacemos $w = r$, cualquier número real, una solución del sistema lineal (3) es

$$\begin{aligned} x &= -5 - 2r \\ y &= 2 + 3r \\ z &= 3 + 2r \\ w &= r. \end{aligned} \tag{5}$$

Como r puede tener asignado cualquier número real en (5), el sistema lineal dado (3) tiene una infinidad de soluciones. ■

EJEMPLO 10 Resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 + x_6 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 &= 9 \end{aligned} \tag{6}$$

mediante la reducción de Gauss-Jordan.

Solución ***Paso 1.*** La matriz aumentada de este sistema lineal es

$$\left[\begin{array}{cccccc:c} 1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9 \end{array}\right].$$

Paso 2. La matriz aumentada es equivalente por filas a la matriz (verifique)

$$\left[\begin{array}{cccccc:c} 1 & 2 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{7}$$

Paso 3. El sistema lineal representado en (7) es

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_4 - x_6 &= 0 \\ x_3 + 2x_6 &= 1 \\ x_5 + x_6 &= 2. \end{aligned}$$

Al despejar en cada ecuación la incógnita correspondiente a la entrada principal de cada fila de (7), obtenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= x_6 + 3x_4 - 2x_2 \\ x_3 &= 1 - 2x_6 \\ x_5 &= 2 - x_6. \end{aligned}$$

Haciendo $x_6 = r$, $x_4 = s$ y $x_2 = t$, una solución para el sistema lineal (6) es

$$\begin{aligned} x_1 &= r + 3s - 2t \\ x_2 &= t \\ x_3 &= 1 - 2r \\ x_4 &= s \\ x_5 &= 2 - r \\ x_6 &= r, \end{aligned} \tag{8}$$

donde r, s y t son cualesquiera números reales. Así, (8) es la solución para el sistema lineal dado en (6); y como a r, s y t se les puede asignar cualesquiera números reales, el sistema lineal dado en (6) tiene una infinidad de soluciones. ■

El ejemplo siguiente ilustra el procedimiento de eliminación gaussiana y la sustitución hacia atrás.

EJEMPLO 11 Resuelva mediante eliminación gaussiana el sistema lineal dado en el ejemplo 8.

Solución ***Paso 1.*** La matriz aumentada del sistema es

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right].$$

Paso 2. Una forma escalonada por filas de la matriz aumentada es (verifique)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

Esta matriz aumentada corresponde al sistema lineal equivalente

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 9 \\ y + z &= 2 \\ z &= 3. \end{aligned}$$

Paso 3. El proceso de sustitución hacia atrás inicia con la ecuación $z = 3$. Después, sustituimos este valor de z en la ecuación que le precede, $y + z = 2$, y despejamos y para obtener $y = 2 - z = 2 - 3 = -1$. Por último, sustituimos en la primera ecuación, $x + 2y + 3z = 9$, los valores para y y z que acabamos de obtener, y despejamos x para obtener $x = 9 - 2y - 3z = 9 + 2 - 9 = 2$. En consecuencia, la solución es $x = 2$, $y = -1$ y $z = 3$. ■

EJEMPLO 12 Resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= 5 \\ x + 3y + 5z + 7w &= 11 \\ x \phantom{{}+3y} - z - 2w &= -6 \end{aligned} \tag{9}$$

mediante la reducción de Gauss-Jordan.

Solución ***Paso 1.*** La matriz aumentada de este sistema lineal es

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right].$$

Paso 2. La matriz aumentada es equivalente por filas a la matriz (verifique)

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{10}$$

Paso 3. La última ecuación del sistema lineal representada en (10) es

$$0x + 0y + 0z + 0w = 1,$$

la cual no tiene valores para x, y, z y w que la satisfagan. En consecuencia, el sistema lineal (9) dado no tiene solución. ■

El último ejemplo es característico de la forma en que un sistema lineal no tiene solución. Es decir, un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en n incógnitas no tiene solución si y sólo si su matriz aumentada es equivalente por filas (renglones) a una matriz en forma escalonada reducida por filas o en forma escalonada por filas, la cual tiene unas filas cuyos primeros n elementos son iguales a cero, y cuyo $(n + 1)$-ésimo elemento es 1 (ejercicio T.4).

Los sistemas lineales de los ejemplos 8, 9 y 10 tuvieron por lo menos una solución, mientras que el sistema del ejemplo 12 no tuvo solución alguna. Los sistemas lineales que tienen por lo menos una solución se denominan **consistentes**; a los sistemas lineales sin solución se les llama **inconsistentes**. Cada sistema lineal inconsistente produce la situación que se ilustra en el ejemplo 12.

Observaciones

1. Conforme realizamos operaciones elementales por filas, en el proceso de transformar la matriz aumentada a la forma escalonada reducida por filas podemos encontrarnos con una fila que tiene n entradas que son ceros y una entrada $(n+1)$-ésima distinta de cero. En este caso, podemos detener nuestros cálculos y concluir que el sistema lineal dado es inconsistente.
2. En ocasiones es necesario resolver k sistemas lineales

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \ldots, \qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k,$$

con la misma matriz $m \times n$ de coeficientes, A. En lugar de resolver cada sistema de forma separada, procedemos como sigue. Formamos la matriz aumentada de $m \times (n + k)$

$$\left[A \;\vdots\; \mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{b}_k\right].$$

La forma escalonada reducida por filas

$$\left[C \;\vdots\; \mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{d}_k\right]$$

de esta matriz corresponde a los sistemas lineales

$$C\mathbf{x} = \mathbf{d}_1, \qquad C\mathbf{x} = \mathbf{d}_2, \ldots, \qquad C\mathbf{x} = \mathbf{d}_k,$$

que tiene las mismas soluciones que el correspondiente sistema lineal dado. Este enfoque será útil en la sección 6.7. Los ejercicios 35 y 36 le piden investigar esta técnica.

SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Un sistema lineal de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &\;\;\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned} \tag{11}$$

es un **sistema homogéneo**. También podemos escribir (11) en forma matricial como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{12}$$

La solución

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$$

del sistema homogéneo (12) se conoce como **solución trivial**. Una solución $x_1, x_2, \ldots x_n$ de un sistema homogéneo en donde no todas las x_i se anulen es una **solución no trivial**. Vemos que un sistema homogéneo siempre es consistente, pues siempre tiene solución trivial.

EJEMPLO 13 Considere el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 0 \\ -x + 3y + 2z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

La matriz aumentada de este sistema,

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right],$$

es equivalente por filas (verifique) a

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

que está en forma escalonada reducida por filas. Por lo tanto, la solución de (13) es

$$x = y = z = 0,$$

lo cual significa que el sistema homogéneo (13) sólo tiene la solución trivial. ■

EJEMPLO 14 Considere el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ x \phantom{{}+ 2y + z} + w &= 0 \\ x + 2y + z \phantom{{}+ w} &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

La matriz aumentada de este sistema,

$$\left[\begin{array}{rrrr:r} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

es equivalente por filas (verifique) a

$$\left[\begin{array}{rrrr:r} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

que está en forma escalonada reducida por filas. Por lo tanto, la solución de (14) es

$$\begin{aligned} x &= -r \\ y &= r \\ z &= -r \\ w &= r, \end{aligned}$$

donde r es cualquier número real. Por ejemplo, si hacemos $r = 2$, entonces

$$x = -2, \quad y = 2, \quad z = -2, \quad w = 2$$

es una solución no trivial para este sistema homogéneo. Esto es,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Verifique calculando el producto matricial del lado izquierdo.) En consecuencia, este sistema lineal tiene una infinidad de soluciones. ■

El ejemplo 14 muestra que un sistema homogéneo puede tener una solución no trivial. El siguiente teorema trata un caso donde esto ocurre.

TEOREMA 1.8 *Un sistema homogéneo de m ecuaciones en n incógnitas siempre tiene una solución no trivial si $m < n$, es decir, si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones.*

Demostración Sea C la matriz en forma escalonada reducida por filas, equivalente por filas a A. Entonces los sistemas homogéneos $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ son equivalentes. Si r es el número de filas distintas de cero en C, entonces $r \leq m$. Si $m < n$, concluimos que $r < n$. Así, estamos resolviendo r ecuaciones en n incógnitas, y podemos despejar r incógnitas en términos de las $n - r$ restantes, de modo que estas últimas pueden asumir cualquier valor. En consecuencia, si una de estas $n - r$ incógnitas es distinta de cero, obtenemos una solución no trivial de $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y, con ello, de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ■

También utilizaremos el teorema 1.8 en la siguiente forma equivalente. Si A es $m \times n$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial, entonces $m \geq n$.

El siguiente resultado es importante en el estudio de las ecuaciones diferenciales. (Vea la sección 9.2.)

Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, un sistema lineal consistente. Si $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema no homogéneo dado y $\mathbf{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ es una solución del sistema dado $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Además, cada solución $\mathbf{x}$ del sistema lineal no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede escribirse como $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, donde $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema no homogéneo dado y $\mathbf{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Para una demostración, vea el ejercicio T.13.

EJEMPLO 15 Considere el sistema lineal dado en el ejemplo 9. Una solución para este sistema lineal estaba dada por

$$\begin{aligned} x &= -5 - 2r \\ y &= 2 + 3r \\ z &= 3 + 2r \\ w &= r, \end{aligned}$$

donde r es cualquier número real. Si hacemos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix},$$

la solución puede expresarse como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5 - 2r \\ 2 + 3r \\ 3 + 2r \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2r \\ 3r \\ 2r \\ r \end{bmatrix}.$$

Hacemos

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_h = \begin{bmatrix} -2r \\ 3r \\ 2r \\ r \end{bmatrix}.$$

Entonces $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$. Además, $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema dado y $\mathbf{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado [verifique que $A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}$ y $A\mathbf{x}_h = \mathbf{0}$, donde A es la matriz de coeficientes del ejemplo 9 y $\mathbf{b}$ es el lado derecho de la ecuación (3)]. ■

Observación Los sistemas homogéneos son especiales y desempeñan un papel clave en los últimos capítulos del libro.

INTERPOLACIÓN POLINOMIAL

Suponga que nos dan n puntos distintos (x_1, y_1), (x_2, y_2),. . . , (x_n, y_n). ¿Es posible determinar un polinomio de grado $n - 1$ o menor que "interpole" los datos, es decir, que pase por los n puntos? De acuerdo con lo anterior, el polinomio que buscamos tiene la forma

$$y = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Los n puntos dados pueden utilizarse para obtener un sistema lineal $n \times n$, cuyas incógnitas son $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Se puede demostrar que este sistema lineal tiene una única solución. En consecuencia, existe un único polinomio de interpolación.

Consideremos a detalle el caso en que $n = 3$. En ese caso tenemos dados los puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), donde $x_1 \neq x_2$, $x_1 \neq x_3$ y $x_2 \neq x_3$ y buscamos el polinomio

$$y = a_2x^2 + a_1x + a_0. \tag{15}$$

Al sustituir los puntos dados en (15), obtenemos el sistema lineal

$$\begin{aligned} a_2x_1^2 + a_1x_1 + a_0 &= y_1 \\ a_2x_2^2 + a_1x_2 + a_0 &= y_2 \\ a_2x_3^2 + a_1x_3 + a_0 &= y_3. \end{aligned} \tag{16}$$

En la sección 3.2 demostraremos que el sistema lineal (16) tiene una única solución. De acuerdo con ello, hay un único polinomio cuadrático de interpolación. En general, existe un único polinomio de interpolación de grado, a lo más, $n - 1$ que pase por n puntos dados.

EJEMPLO 16 Determinar el polinomio cuadrático que interpola los puntos (1, 3), (2, 4), (3, 7).

Solución Al plantear el sistema lineal (16) tenemos

$$\begin{aligned} a_2 + a_1 + a_0 &= 3 \\ 4a_2 + 2a_1 + a_0 &= 4 \\ 9a_2 + 3a_1 + a_0 &= 7 \end{aligned}$$

cuya solución es (verifique)

$$a_2 = 1, \qquad a_1 = -2, \qquad a_0 = 4.$$

Por lo tanto, el polinomio cuadrático de interpolación es

$$y = x^2 - 2x + 4.$$

Su gráfica, que se muestra en la figura 1.17, pasa por los tres puntos dados. ■

En este momento pueden estudiarse las secciones 2.4, circuitos eléctricos, y 2.5, cadenas de Markov, así como el capítulo 11, programación lineal, en los cuales se utiliza el material analizado en esta sección.

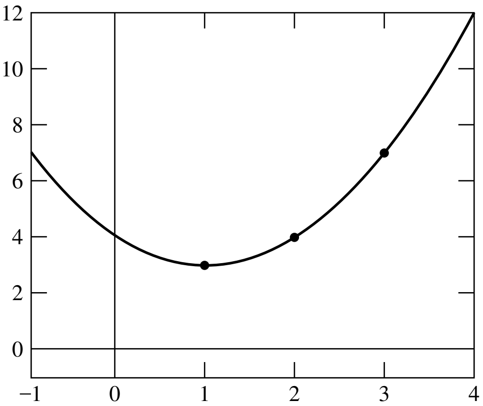


Figura 1.17 ▶

DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURA

Un modelo sencillo para estimar la distribución de temperatura en una placa cuadrada da lugar a un sistema de ecuaciones lineales. Para construir el sistema lineal adecuado, utilizamos la información siguiente. La placa cuadrada está perfectamente aislada por arriba y por abajo, por lo que el único flujo de calor es a través de la placa misma. Cada lado se mantiene a una temperatura constante, pero ésta puede ser diferente en cada lado. Para aproximar la temperatura en un punto interior de la placa, utilizamos la regla que promedia las temperaturas de sus cuatro puntos circunvecinos, al oeste, al norte, al este y al sur.

EJEMPLO 17 Aproximar las temperaturas T_i, $i = 1, 2, 3, 4$, en los cuatro puntos interiores igualmente espaciados en la placa, mismos que se muestran en la figura 1.18.

Solución A continuación formaremos el sistema lineal para aproximar las temperaturas. Los puntos de la placa cuya temperatura necesitamos conocer para este modelo se indican con puntos en la figura 1.18. Por medio de la regla del promedio, obtenemos las ecuaciones

$$
\begin{array}{lcl}
T_1 = \dfrac{60 + 100 + T_2 + T_3}{4} & \text{o} & 4T_1 - T_2 - T_3 = 160 \\[2ex]
T_2 = \dfrac{T_1 + 100 + 40 + T_4}{4} & \text{o} & -T_1 + 4T_2 - T_4 = 140 \\[2ex]
T_3 = \dfrac{60 + T_1 + T_4 + 0}{4} & \text{o} & -T_1 + 4T_3 - T_4 = 60 \\[2ex]
T_4 = \dfrac{T_3 + T_2 + 40 + 0}{4} & \text{o} & -T_2 - T_3 + 4T_4 = 40.
\end{array}
$$

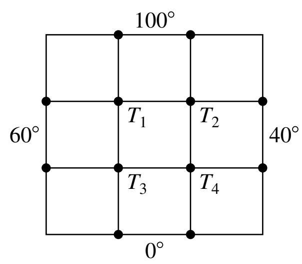


Figura 1.18 ▲

La matriz aumentada para este sistema lineal es (verifique)

$$
\left[A \mid \mathbf{b}\right] = \left[\begin{array}{rrrr|r} 4 & -1 & -1 & 0 & 160 \\ -1 & 4 & 0 & -1 & 140 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 60 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 40 \end{array}\right].
$$

Utilizando eliminación gaussiana o la reducción de Gauss-Jordan, obtenemos la solución única (verifique)

$$
T_1 = 65^\circ, \quad T_2 = 60^\circ, \quad T_3 = 40^\circ \quad \text{y} \quad T_4 = 35^\circ. \qquad \blacksquare
$$

SOLUCIONES DE SISTEMAS LINEALES CON MATRICES BINARIAS (OPCIONAL)

Las definiciones y teoremas que se desarrollan en esta sección son válidos para sistemas con matrices binarias. Los ejemplos 18 a 21 ilustran los conceptos de esta sección para tales sistemas. Nos referiremos a tales sistemas como **sistemas lineales binarios**.

En el caso de sistemas lineales binarios se aplican las interpretaciones siguientes.

- Las operaciones elementales por filas (renglones) sobre matrices binarias son un intercambio de filas o la suma de una fila con otra. Esto es consecuencia de las propiedades aritméticas de la aritmética binaria, y de las combinaciones lineales de matrices binarias que se analizaron previamente.
- Si como resultado del proceso de resolución de un sistema consistente se puede asignar cualquier valor a una incógnita, podemos asignarle 0 o 1. Tales sistemas tienen más de una solución, pero el número total de soluciones posibles dependerá del número de incógnitas que se puedan asignar de esta manera. Esto es, resulta imposible decir que tales sistemas tienen un número infinito de soluciones.

EJEMPLO 18 Resolver el sistema lineal binario

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ y &= 1 \end{aligned} \tag{17}$$

mediante la reducción de Gauss-Jordan.

Solución ***Paso 1.*** La matriz aumentada del sistema lineal es

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Paso 2. Luego calculamos como sigue la forma escalonada reducida por filas de la matriz del paso 1:

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \text{Se sumó la segunda fila a la primera fila.}$$

Por lo tanto, la forma escalonada reducida por filas de la matriz aumentada es la matriz

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \tag{18}$$

Paso 3. El sistema lineal representado por (18) es

$$\begin{aligned} x \quad &= 0 \\ y &= 1 \end{aligned}$$

de modo que la solución única del sistema lineal (17) es $x = 0$, $y = 1$. ■

EJEMPLO 19 Resolver el sistema lineal binario

$$\begin{aligned} x \quad\quad + z &= 0 \\ y \quad\quad &= 1 \\ x + y + z &= 1 \end{aligned} \tag{19}$$

mediante la reducción de Gauss-Jordan.

Solución ***Paso 1.*** La matriz aumentada de este sistema lineal es

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Paso 2. Ahora calculamos como sigue la forma escalonada reducida por filas de la matriz del paso 1:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \text{Se sumó la primera fila a la tercera fila.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{Se sumó la segunda fila a la tercera fila.}$$

En consecuencia, la matriz aumentada es equivalente por filas a la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{20}$$

Paso 3. El sistema lineal representado por (20) es

$$\begin{aligned} x \phantom{{}+y} + z &= 0 \\ y \phantom{{}+z} &= 1. \end{aligned}$$

Al despejar en cada ecuación la incógnita que corresponde a la entrada principal de cada fila de (20), obtenemos

$$\begin{aligned} x &= \text{“}-z\text{” (el inverso aditivo de } z) \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si hacemos $z = b$, ya sea 0 o 1, entonces "$-z$" es igualmente 0 o 1. En consecuencia, el conjunto de soluciones para el sistema lineal (19) es

$$\begin{aligned} x &= b \\ y &= 1 \\ z &= b. \end{aligned} \tag{21}$$

Como en (20) b es 0 o 1, el sistema lineal (19) tiene dos soluciones,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

EJEMPLO 20 Resolver el sistema lineal binario

$$\begin{aligned} x + y \phantom{{}+z} &= 0 \\ x + y + z &= 1 \\ x + y \phantom{{}+z} &= 1 \end{aligned} \tag{22}$$

mediante eliminación gaussiana.

Solución ***Paso 1.*** La matriz aumentada de este sistema lineal es

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Paso 2. Una forma escalonada por filas de la matriz aumentada es (verifique)

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \tag{23}$$

Paso 3. El sistema lineal representado por (23) es

$$\begin{aligned} x + y \qquad &= 0 \\ z &= 1 \\ 0 &= 1, \end{aligned}$$

que es evidentemente inconsistente. Por lo tanto, (22) no tiene solución. ■

EJEMPLO 21 Resolver el sistema homogéneo binario cuya matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \tag{24}$$

mediante reducción de Gauss-Jordan.

Solución ***Paso 1.*** La forma escalonada reducida por filas de la matriz aumentada es (verifique)

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{25}$$

Paso 2. El sistema lineal representado por (25) es

$$\begin{aligned} x \qquad + z + w &= 0 \\ y + z + w &= 0. \end{aligned}$$

Al despejar en cada ecuación la incógnita que corresponde a la entrada principal de cada fila de (20), obtenemos

$$\begin{aligned} x \quad &= \text{“}-z\text{”} + \text{“}-w\text{”} \qquad \text{(los inversos aditivos de } z \text{ y de } w) \\ y &= \text{“}-z\text{”} + \text{“}-w\text{”} \qquad \text{(los inversos aditivos de } z \text{ y de } w). \end{aligned}$$

En consecuencia, si hacemos $z = b$, igual a 0 o a 1, entonces "$-z$" es igualmente 0 o 1. De manera análoga, $w = b$ implica que w es 0 o 1. Por lo tanto, el conjunto de soluciones para el sistema lineal binario (25) es

$$\begin{aligned} x &= b_z + b_w \\ y &= b_z + b_w, \end{aligned} \tag{26}$$

donde b_z es el valor binario elegido para z, y b_w es el elegido para w. Como existen dos opciones para z y dos para w, existen cuatro posibles soluciones:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

Vista preliminar de una aplicación

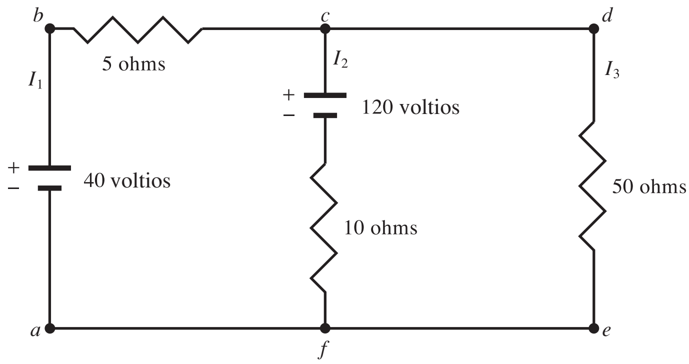
Circuitos eléctricos (sección 2.4)

Un circuito eléctrico es una conexión cerrada de baterías (pilas), resistores (como los bulbos) y cables que los conectan. Las baterías y los resistores se denotan por escrito como

Baterías Resistores

La figura 1.19 muestra el ejemplo de un circuito eléctrico.

Figura 1.19 ►



En el caso de este circuito, hay que determinar las corrientes desconocidas I_1, I_2 e I_3 (en amperes) a partir de los valores de la resistencia (en ohms) a lo largo de cada resistor, y el potencial electrostático (en voltios) a lo largo de cada batería (como se muestra en la figura 1.19). Al aplicar dos leyes fundamentales de la física, que estudiaremos en la sección 2.4, determinamos que I_1, I_2 e I_3 deben satisfacer el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -16 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

En la sección 2.4 se presenta una breve introducción a estos circuitos eléctricos.

Cadenas de Markov (sección 2.5)

Considere el siguiente problema: las autoridades de una ciudad en donde se acaba de inaugurar un nuevo sistema de transporte público han predicho que cada año 35% de quienes lo emplean para ir al trabajo volverán a utilizar su auto, mientras que 65% seguirá empleando el servicio público. También se espera que 45% de las personas que actualmente van en auto al trabajo opte por el transporte colectivo, mientras que 55% continuará manejando. En consecuencia, la probabilidad de que alguien que ahora utiliza el sistema de transporte público vuelva a conducir es de 0.35. En términos de probabilidades, podemos ilustrar el comportamiento esperado de los viajeros mediante la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.45 \\ 0.35 & 0.55 \end{bmatrix},$$

que denota la información siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & & \textit{Modo de transporte el siguiente año} \\ & & \begin{array}{cc} \text{Transporte público} & \text{Automóvil} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{Modo de} \\ \textit{transporte} \\ \textit{este año} \end{array} & \begin{array}{r} \text{Transporte público} \\ \text{Automóvil} \end{array} & \left[\begin{array}{cc} 0.65 & 0.45 \\ 0.35 & 0.55 \end{array}\right] \end{array}$$

Cuando el sistema se pone en operación, 15% de la gente utiliza el transporte público, mientras que 85% prefiere su auto. Suponiendo que la población de la ciudad permanecerá constante durante mucho tiempo, a las autoridades responsables del sistema de transporte público les gustaría responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el porcentaje de los usuarios de cada medio de transporte después de, digamos, tres años?
- ¿Qué porcentaje de usuarios utilizarán cada medio de transporte a largo plazo?

Esta clase de problema y el que se describe en el ejemplo 9 de la sección 1.4 son cadenas de Markov. Las técnicas que analizaremos en la sección 2.5 nos permiten resolver éstos y muchos otros problemas semejantes.

Programación lineal (capítulo 11)

El siguiente es uno de los problemas que suelen presentarse en los procesos de manufactura:

Una procesadora de café utiliza granos de Colombia y de Kenia para preparar una mezcla regular y otra de lujo. Cada libra de la mezcla regular consta de $\frac{1}{2}$ libra de café colombiano y $\frac{1}{2}$ libra de café keniano. Cada libra de la mezcla de lujo consta de $\frac{1}{4}$ de libra de café de Colombia y $\frac{3}{4}$ de libra de café de Kenia. La procesadora obtendrá una ganancia de 2 dólares por cada libra de la mezcla regular y 3 por cada libra de la mezcla de lujo. Si tiene 100 libras de café de Colombia y 120 de Kenia, ¿cuántas libras de cada mezcla debe producir para lograr la máxima utilidad posible?

Primero traduciremos este problema a una forma matemática, haciendo que x denote el número de libras de mezcla regular y y el número de libras de mezcla de lujo a procesar. Entonces, nuestro problema puede enunciarse como sigue:

Determinar valores de x y y que hagan que la expresión

$$z = 2x + 3y$$

sea lo más grande posible, satisfaciendo al mismo tiempo las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}y &\leq 100 \\ \tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{4}y &\leq 120 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Este problema se puede resolver fácilmente mediante las técnicas de programación lineal, un área reciente de las matemáticas aplicadas que estudiaremos en el capítulo 11.

Términos clave

Forma escalonada reducida por filas
Uno principal (entrada principal)
Forma escalonada por filas
Operación elemental por filas
Equivalente por filas
Forma escalonada reducida por filas de una matriz
Forma escalonada por filas de una matriz
Reducción de Gauss-Jordan
Eliminación de Gauss
Sustitución hacia atrás
Sistema lineal consistente
Sistema lineal inconsistente
Sistema homogéneo
Solución trivial
Solución no trivial
Sistemas lineales binarios

1.6 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, determine si la matriz dada está en la forma escalonada reducida por filas, en la forma escalonada por filas, o en ninguna de las dos.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

9. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determine las matrices que se obtienen al realizar las siguientes operaciones elementales por filas en A.

(a) Intercambiar la segunda y cuarta filas.

(b) Multiplicar la tercera fila por 3.

(c) Sumar (-3) veces la primera fila a la cuarta.

10. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 5 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine las matrices que se obtienen al realizar las siguientes operaciones elementales por filas en A.

(a) Intercambiar la segunda y tercera filas.

(b) Multiplicar la segunda fila por (-4).

(c) Sumar 2 veces la tercera fila a la primera.

11. Determine tres matrices que sean equivalentes por filas a

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

12. Determine tres matrices que sean equivalentes por filas a

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 13 a 16, determine una forma escalonada por filas para la matriz dada en cada caso.

13. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -6 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & -3 \\ 5 & -4 & 1 & 6 & 5 \\ -7 & 8 & -3 & -14 & 1 \end{bmatrix}$

17. Para cada una de las matrices de los ejercicios 13 a 16, determine la forma escalonada reducida por filas de la matriz dada.

18. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

En cada parte, determine si $\mathbf{x}$ es una solución para el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ (b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \mathbf{0}$

(c) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$

(d) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

19. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

En cada parte, determine si $\mathbf{x}$ es una solución para el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(a) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{3}{5} \\ 1 \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix}$ (d) $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 20 a 22, determine todas las soluciones del sistema lineal dado en cada caso.

20. (a)
$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ x - 2y + z &= -5 \\ 3x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x + y + 3z + 2w &= 7 \\ 2x - y \qquad + 4w &= 8 \\ 3y + 6z \qquad &= 8 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x + 2y - 4z &= 3 \\ x - 2y + 3z &= -1 \\ 2x + 3y - z &= 5 \\ 4x + 3y - 2z &= 7 \\ 5x + 2y - 6z &= 7 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x \qquad + z &= 0 \\ 2x + y - 2z &= 0 \\ x + 5y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

21. (a)
$$\begin{aligned} x + y + 2z + 3w &= 13 \\ x - 2y + z + w &= 8 \\ 3x + y + z - w &= 1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y - 2z &= 3 \\ 2x + y + z &= 2 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x + y + z - 2w &= 1 \\ 3x - 2y + z - 6w &= -2 \\ x + y - z - w &= -1 \\ 6x \qquad + z - 9w &= -2 \\ 5x - y + 2z - 8w &= 3 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x + 2y + 3z - w &= 0 \\ 2x + y - z + w &= 3 \\ x - y \qquad + w &= -2 \end{aligned}$$

22. (a)
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ x - 3y + z &= 4 \\ -5x \qquad - 2z &= -5 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 6 \\ 2x + y - z \qquad &= 3 \\ 3x + y \qquad + 2w &= 6 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 3 \\ 3x + y - 2z &= -2 \\ x - y + z &= 7 \\ x + 5y + 7z &= 13 \\ x - 7y - 5z &= 12 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ 5x + 7y + z &= 0 \end{aligned}$$

En los ejercicios 23 a 26, determine todos los valores de a para los que el sistema lineal resultante (a) no tenga solución, (b) tenga una solución única, y (c) tenga una infinidad de soluciones.

23.
$$\begin{aligned} x + y - \qquad z &= 2 \\ x + 2y + \qquad z &= 3 \\ x + y + (a^2 - 5)z &= a \end{aligned}$$

24.
$$\begin{aligned} x + y + \qquad z &= 2 \\ 2x + 3y + \qquad 2z &= 5 \\ 2x + 3y + (a^2 - 1)z &= a + 1 \end{aligned}$$

25.
$$\begin{aligned} x + y + \qquad z &= 2 \\ x + 2y + \qquad z &= 3 \\ x + y + (a^2 - 5)z &= a \end{aligned}$$

26.
$$\begin{aligned} x + \qquad y &= 3 \\ x + (a^2 - 8)y &= a \end{aligned}$$

En los ejercicios 27 a 30, resuelva el sistema lineal con la matriz aumentada dada.

27. (a) $\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right]$

28. (a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 11 \\ 2 & 1 & 4 & 12 \end{array}\right]$

29. (a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & 7 \end{array}\right]$

30. (a) $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & -8 & 8 \end{array}\right]$

(b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$

31. Sea $f\colon R^3 \to R^3$ la transformación matricial definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Determine x, y y z tales que $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$.

32. Sea $f\colon R^3 \to R^3$ la transformación matricial definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Determine x, y y z tales que $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

33. Sea $f\colon R^3 \to R^3$ la transformación matricial definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Determine una ecuación que relacione a, b y c de modo que siempre podamos calcular los valores de x, y y z para los que

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

34. Sea $f\colon R^3 \to R^3$ la transformación matricial definida por

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Determine una ecuación que relacione a, b y c de modo que siempre podamos calcular los valores de x, y y z para los que

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 35 y 36, resuelva los sistemas lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$ y $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ por separado, y luego obtenga la forma escalonada reducida por filas de la matriz aumentada $[A \mid \mathbf{b}_1 \ \ \mathbf{b}_2]$. Compare sus respuestas.

35. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -5 \end{bmatrix}$

36. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 12 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 37 y 38, sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

37. Determine una solución no trivial del sistema homogéneo $(-4I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

38. Determine una solución no trivial del sistema homogéneo $(2I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

39. Determine una ecuación que relacione a, b y c de modo que el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= a \\ 2x + 3y + 3z &= b \\ 5x + 9y - 6z &= c \end{aligned}$$

sea consistente para cualesquiera valores de a, b y c que satisfagan esa ecuación.

40. Determine una ecuación que relacione a, b y c de modo que el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 3z &= a \\ 3x - \ \ y + 5z &= b \\ x - 3y + 2z &= c \end{aligned}$$

Sea consistente para cualesquiera valores de a, b y c que satisfagan esa ecuación.

*Este tipo de problemas desempeñará un papel importante en el capítulo 8.

41. Determine una matriz $\mathbf{x}$ de 2×1 cuyas entradas no sean todas cero, tal que $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

[*Sugerencia:* escriba la ecuación matricial $A\mathbf{x} = 4\mathbf{x}$ como $4\mathbf{x} - A\mathbf{x} = (4I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y resuelva el sistema homogéneo.]

42. Determine una matriz $\mathbf{x}$ de 2×1 cuyas entradas no sean todas nulas, tal que $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.^{*}$$

43. Determine una matriz $\mathbf{x}$ de 3×1 cuyas entradas no sean todas nulas, tal que $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.^{*}$$

44. Determine una matriz $\mathbf{x}$ de 3×1 cuyas entradas no sean todas nulas, tal que $A\mathbf{x} = 1\mathbf{x}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 45 y 46, resuelva el sistema lineal dado y escriba la solución $\mathbf{x}$ *como* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, *donde* $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema dado y $\mathbf{x}_h$ *es una solución para el sistema homogéneo asociado.*

45.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & z & - & 2w & = & 2 \\ 2x & + & y & - & 2z & + & 3w & = & 2 \\ x & + & 2y & + & 3z & + & 4w & = & 5 \\ 4x & + & 5y & - & 4z & - & w & = & 6 \end{array}$$

46.
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & y & - & 2z & + & 3w & = & 4 \\ 3x & + & 2y & - & z & + & 2w & = & 5 \\ & - & y & - & 7z & + & 9w & = & -2 \end{array}$$

En los ejercicios 47 y 48, determine el polinomio cuadrático que interpole los puntos dados.

47. (1, 2), (3, 3), (5, 8).

48. (1, 5), (2, 12), (3, 44).

En los ejercicios 49 y 50, determine el polinomio cúbico que interpole los puntos dados.

49. $(-1, -6)$, (1, 0), (2, 8), (3, 34).

50. $(-2, 2)$, $(-1,2)$, (1, 2), (2, 10).

51. Un ebanista fabrica sillas, mesas para café y mesas para comedor. Se necesitan 10 minutos para lijar una silla, 6 para pintarla y 12 para barnizarla. Se requieren 12 minutos para lijar una mesa para café, ocho para pintarla y 12 para barnizarla. Son necesarios 15 minutos para lijar una mesa para comedor, 12 para pintarla y 18 para barnizarla. El centro de lijado está disponible 16 horas a la semana, el de pintura 11 horas a la semana y el de barnizado 18 horas. ¿Cuántas unidades de cada mueble deben fabricarse por semana de modo que las mesas de trabajo se utilicen a toda su capacidad?

52. Un editor publica un posible éxito de librería en tres presentaciones distintas: libro de bolsillo, edición para club de lectores y edición de lujo. Cada libro de bolsillo necesita un minuto para el cosido y 2 para el pegado. Cada libro de la edición para el club de lectores necesita 2 minutos para el cosido y 4 para el pegado. Cada libro en edición de lujo necesita 3 minutos para el cosido y 5 para el pegado. Si la planta de cosido está disponible 6 horas diarias y la planta de pegado 11 horas, ¿cuántos libros de cada presentación se pueden producir por día de modo que las plantas se aprovechen a toda su capacidad?

53. (***Se requiere cálculo***) Construya un sistema de ecuaciones lineales para determinar un polinomio cuadrático

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

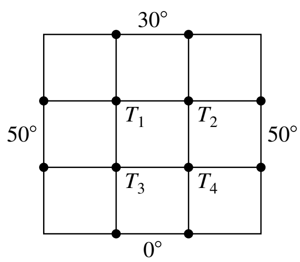
que satisfaga las condiciones $p(0) = f(0)$, $p'(0) = f'(0)$ y $p''(0) = f''(0)$, donde $f(x) = e^{2x}$.

54. (***Se requiere cálculo***) Construya un sistema de ecuaciones lineales para determinar un polinomio cuadrático

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

que satisfaga las condiciones $p(1) = f(1)$, $p'(1) = f'(1)$ y $p''(1) = f''(1)$, donde $f(x) = xe^{x-1}$.

55. Determine las temperaturas en los puntos interiores T_i, $i = 1, 2, 3, 4$ para la placa que se muestra en la figura. (Vea el ejemplo 17.)



En los ejercicios 56 a 59, resuelva los sistemas lineales binarios.

56. (a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & & & = & 1 \end{array}$$
(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 1 \end{array}$$

57. (a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & & & + & w & = & 0 \\ x & & & + & z & + & w & = & 1 \\ & & y & + & z & + & w & = & 1 \end{array}$$
(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & & & & & = & 0 \\ x & + & y & + & z & & & = & 1 \\ x & + & y & + & z & + & w & = & 0 \end{array}$$

58. (a)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & & & = & 1 \\ & & y & + & z & + & w & = & 1 \\ x & & & & & + & w & = & 1 \end{array}$$
(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & & & = & 0 \\ & & y & + & z & + & w & = & 0 \\ x & & & & & + & w & = & 0 \end{array}$$

*Este tipo de problemas desempeñará un papel importante en el capítulo 8.

59. Resuelva el sistema lineal binario $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$, donde

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ejercicios teóricos

T.1. Demuestre que las propiedades (a), (b) y (c) por sí solas [excluyendo (d)] de la definición de la forma escalonada reducida por filas de una matriz A, implican que si una columna de A contiene una entrada principal de alguna fila, entonces todas las demás entradas de esa columna *debajo de la entrada principal* son iguales a cero.

T.2. Demuestre que:

(a) Toda matriz es equivalente por filas a sí misma.

(b) Si A es equivalente por filas a B, entonces B es equivalente por filas a A.

(c) Si A es equivalente por filas a B y B es equivalente por filas a C, entonces A es equivalente por filas a C.

T.3. Demuestre el corolario 1.1.

T.4. Demuestre que el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es de $n \times n$, no tiene soluciones si y sólo si su matriz aumentada es equivalente por filas a una matriz en forma escalonada reducida, que tenga una fila cuyos primeros n elementos son iguales a cero y cuyo $(n + 1)$-ésimo elemento es igual a 1.

T.5. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Demuestre que A es equivalente por filas a I_2 si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

T.6. (a) Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ ka & kb \end{bmatrix}.$$

Utilice el ejercicio T.5 para determinar si A es equivalente por filas a I_2.

(b) Sea A una matriz de 2×2 con una fila que consta totalmente de ceros. Use el ejercicio T.5 para determinar si A es equivalente por filas a I_2.

T.7. Determine la matriz en forma escalonada reducida por filas que sea equivalente por filas a la matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

T.8. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Demuestre que el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución trivial si y sólo si $ad - bc \neq 0$.

T.9. Sea A una matriz en $n \times n$ en forma escalonada reducida por filas. Demuestre que si A no es igual a I_n, entonces A tiene una fila que consta totalmente de ceros.

T.10. Demuestre que los valores de λ para los que el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} (a - \lambda)x + \quad\quad by &= 0 \\ cx + (d - \lambda)y &= 0 \end{aligned}$$

tiene una solución no trivial, satisfacen la ecuación $(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$. (*Sugerencia:* vea el ejercicio T.8.)

T.11. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ soluciones del sistema lineal homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(a) Demuestre que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ es una solución.

(b) Demuestre que $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es una solución.

(c) Para cualquier escalar r, demuestre que $r\mathbf{u}$ es una solución.

(d) Para cualesquiera escalares r y s, demuestre que $r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ es una solución.

T.12. Demuestre que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son soluciones del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ es una solución para el sistema homogéneo asociado, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

T.13. Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, un sistema lineal consistente.

(a) Demuestre que si $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema no homogéneo dado y $\mathbf{x}_h$ es una solución para el sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ es una solución para el sistema dado $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

(b) Demuestre que toda solución $\mathbf{x}$ del sistema lineal no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ puede escribirse como $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, donde $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema lineal no homogéneo y $\mathbf{x}_h$ es una solución para el sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. [*Sugerencia:* sea $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p)$.]

T.14. Justifique la segunda observación que sigue al ejemplo 12.

Ejercicios con MATLAB

Para emplear MATLAB en esta sección, debe haber leído antes el capítulo 12, hasta la sección 12.4.

ML.1. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determine las matrices obtenidas al realizar las siguientes operaciones por filas, en forma sucesiva, sobre la matriz A. Realice las operaciones por filas de manera directa, utilizando el operador de dos puntos.

(a) Multiplique la fila 1 por $\frac{1}{4}$.
(b) Sume 3 veces la fila 1 a la fila 2.
(c) Sume (-1) veces la fila 1 a la fila 3.
(d) Sume (-5) veces la fila 1 a la fila 4.
(e) Intercambie las filas 2 y 4.

ML.2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Determine las matrices obtenidas al realizar las siguientes operaciones por filas, en forma sucesiva, sobre la matriz A. Realice las operaciones por filas de manera directa, empleando el operador de dos puntos.

(a) Multiplique la fila 1 por 2.
(b) Sume $(-\frac{1}{3})$ veces la fila 1 a la fila 2.
(c) Sume (-1) veces la fila 1 a la fila 3.
(d) Intercambie loas filas 2 y 3.

ML.3. Utilice **reduce** para determinar la forma escalonada reducida por filas de la matriz A del ejercicio ML.1.

ML.4. Utilice **reduce** para determinar la forma escalonada reducida por filas de la matriz A del ejercicio ML.2.

ML.5. Utilice **reduce** para determinar todas las soluciones del sistema lineal del ejercicio 21(a).

ML.6. Utilice **reduce** para determinar todas las soluciones del sistema lineal del ejercicio 20(b).

ML.7. Utilice **reduce** para determinar todas las soluciones del sistema lineal del ejercicio 27(b).

ML.8. Utilice **reduce** para determinar todas las soluciones del sistema lineal del ejercicio 28(a).

ML.9. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Utilice **reduce** para determinar una solución no trivial del sistema homogéneo

$$(5I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

[*Sugerencia:* en MATLAB, introduzca la matriz A, y luego aplique la instrucción **reduce (5*eye(size(A)) − A)**.]

ML.10. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Utilice **reduce** para determinar una solución no trivial del sistema homogéneo

$$(-4I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

[*Sugerencia:* en MATLAB, introduzca la matriz A, y luego aplique la instrucción **reduce(−4*eye(size(A)) − A)**.]

ML.11. Utilice **rref** en MATLAB para resolver los sistemas lineales en los ejercicios 27 y 28.

ML.12. MATLAB tiene un comando inmediato para resolver los sistemas lineales cuadrados $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Una vez que la matriz de coeficientes A y el lado derecho $\mathbf{b}$ se introducen a MATLAB, el comando

$$\mathbf{x = A \backslash b}$$

despliega la solución, siempre y cuando A sea no singular (vea la definición al principio de la sección 1.7). El comando con el símbolo de diagonal invertida, \, no usa la forma escalonada reducida por filas, sino que inicia la ejecución de ciertos métodos numéricos que se analizan en un curso de análisis numérico. Para más detalles acerca del comando, vea D. R. Hill, *Experiments in Computational Matrix Algebra,* Nueva York, Random House, 1988.

(a) Utilice \ para resolver el ejercicio 27(a).
(b) Utilice \ para resolver el ejercicio 21(b).

ML.13. El comando \ se comporta de manera diferente que **rref.** Utilice \ y **rref** para resolver $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Los ejercicios ML.14 a ML.16 utilizan matrices binarias y los comandos adicionales descritos en la sección 12.9.

ML.14. Resuelva cada uno de los ejercicios de demostración integrados en la rutina **binreduce**. (Introduzca el comando **binreduce** y luego la opción **< 1 >** para seleccionar una demostración.)

ML.15. Utilice **binreduce** para obtener la forma escalonada reducida por filas de las matrices aumentadas binarias de los ejercicios 56 a 59, y luego determine la solución para el sistema lineal correspondiente.

ML.16. Utilice **binreduce** para obtener la forma escalonada reducida por filas de la matriz aumentada binaria

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

y luego determine la solución del sistema lineal correspondiente.

1.7 LA INVERSA DE UNA MATRIZ

En esta sección concentraremos nuestra atención en las matrices cuadradas, y formularemos el concepto correspondiente al recíproco de un número distinto de cero.

DEFINICIÓN Una matriz A de $n \times n$ es **no singular** (o **invertible**) si existe una matriz B de $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n.$$

La matriz B se denomina **inversa** de A. Si no existe tal matriz B, entonces B es **singular** (o **no invertible**).

Observación Con base en la definición anterior, se deduce que $AB = BA = I_n$;, por lo tanto, también A es una inversa de B.

EJEMPLO 1 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$AB = BA = I_2,$$

concluimos que B es una inversa de A y que A es no singular. ■

TEOREMA 1.9 *Si una matriz tiene inversa, la inversa es única.*

Demostración Sean B y C inversos de A. Entonces $BA = AC = I_n$. Por lo tanto,

$$B = BI_n = B(AC) = (BA)C = I_nC = C,$$

Con lo cual concluye la demostración. ■

Ahora escribiremos la inversa de A, si existe, como A^{-1}. Así,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

EJEMPLO 2 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para determinar A^{-1}, hacemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Entonces, debemos tener

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Al igualar las entradas correspondientes de estas dos matrices, obtenemos los sistemas lineales

$$\begin{aligned} a + 2c &= 1 \\ 3a + 4c &= 0 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} b + 2d &= 0 \\ 3b + 4d &= 1. \end{aligned}$$

Las soluciones son (verifique) $a = -2$, $c = \frac{3}{2}$, $b = 1$ y $d = -\frac{1}{2}$. Además, como la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

también satisface la propiedad de que

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

concluimos que A es no singular y que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

■

Observación No todas las matrices tienen una inversa. Como muestra, considere el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Para determinar A^{-1}, hacemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Entonces debemos tener

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + 4c & 2b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Al igualar las entradas correspondientes de estas dos matrices, obtenemos los sistemas lineales.

$$\begin{aligned} a + 2c &= 1 \\ 2a + 4c &= 0 \end{aligned} \qquad \text{y} \qquad \begin{aligned} b + 2d &= 0 \\ 2b + 4d &= 1. \end{aligned}$$

Estos sistemas lineales no tienen solución, de modo que A no tiene inversa. Por lo tanto, A es una matriz singular. ■

El método que seguimos en el ejemplo 2 para determinar la inversa de una matriz no es muy eficiente; y en breve lo modificaremos para obtener uno mejor, pero antes estableceremos varias propiedades de las matrices no singulares.

TEOREMA 1.10 **(Propiedades de la inversa)**

(a) *Si A es una matriz no singular, entonces A^{-1} es no singular y*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

(b) *Si A y B son matrices no singulares, entonces AB es no singular y*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

(c) *Si A es una matriz no singular, entonces*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})T.$$

Demostración (a) A^{-1} es no singular si podemos encontrar una matriz B tal que

$$A^{-1}B = BA^{-1} = I_n.$$

Como A es no singular,

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n.$$

En consecuencia, $B = A$ es una inversa de A^{-1}, y como las inversas son únicas, concluimos que

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

En consecuencia, la inversa de la inversa de una matriz A no singular es A.

(b) Tenemos

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

y

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

Por lo tanto, AB es no singular. Como la inversa de una matriz es única, concluimos que

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

En consecuencia, la inversa de un producto de dos matrices no singulares es el producto de sus inversas en orden inverso.

(c) Tenemos

$$AA^{-1} = I_n \qquad \text{y} \qquad A^{-1}A = I_n.$$

Al calcular las transpuestas, obtenemos

$$(AA^{-1})^T = I_n^T = I_n \qquad \text{y} \qquad (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n.$$

Entonces

$$(A^{-1})^T = A^T = I_n \qquad \text{y} \qquad A^T(A^{-1})^T = I_n.$$

Estas ecuaciones implican que

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

En consecuencia, la inversa de la transpuesta de una matriz no singular, es la transpuesta de su inversa. ■

EJEMPLO 4 Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, de acuerdo con el ejemplo 2,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad (A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Además (verifique),

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad (A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

■

COROLARIO 1.2 *Si $A_1, A_2, \ldots A_r$ son matrices no singulares de $n \times n$, entonces $A_1A_2 \cdots A_r$ es no singular y*

$$(A_1A_2 \cdots A_r)^{-1} = A_r^{-1}A_{r-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

Demostración Ejercicio T.2. ■

Anteriormente definimos una matriz B como la inversa de A si $AB = BA = I_n$. El siguiente teorema, cuya demostración omitimos, muestra que una de estas ecuaciones es consecuencia de la otra.

TEOREMA 1.11 *Suponga que A y B son matrices de $n \times n$;*

(a) *Si $AB = I_n$, entonces $BA = I_n$.*

(b) *Si $BA = I_n$, entonces $AB = I_n$.* ■

UN MÉTODO PRÁCTICO PARA DETERMINAR A^{-1}

Ahora desarrollaremos un método práctico para determinar A^{-1}. Si A es una matriz dada de $n \times n$, estamos buscando una matriz $B = [b_{ij}]$ de $n \times n$ tal que

$$AB = BA = I_n.$$

Denotamos las columnas de B mediante las matrices $n \times 1$ $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, donde

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{ij} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Denotamos las columnas de I_n como las matrices de $n \times 1$ $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Por lo tanto,

$$\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longleftarrow j\text{-ésima fila.}$$

De acuerdo con el ejercicio T.9(a) de la sección 1.3, la j-ésima columna de AB es la matriz $A\mathbf{x}_j$ de $n \times 1$. Como las matrices iguales deben coincidir columna a columna, el problema de determinar una matriz $B = A^{-1}$ de $n \times n$ tal que

$$AB = I_n \tag{1}$$

es equivalente al problema de determinar n matrices (cada una de $n \times 1$) $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, tales que

$$A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j \ (1 \leq j \leq n). \tag{2}$$

En consecuencia, determinar B es equivalente a resolver n sistemas lineales (cada uno con n ecuaciones en n incógnitas). Esto es precisamente lo que hicimos en el ejemplo 2.

Cada uno de estos sistemas puede resolverse mediante el método de reducción de Gauss-Jordan. Para resolver el primer sistema lineal, formamos la matriz aumentada $\left[A \;\vdots\; \mathbf{e}_1\right]$ y la escribimos en forma escalonada reducida por filas. Hacemos lo mismo con

$$\left[A \;\vdots\; \mathbf{e}_2\right], \ldots, \left[A \;\vdots\; \mathbf{e}_n\right].$$

Sin embargo, si observamos que la matriz de coeficientes de cada uno de estos n sistemas lineales siempre es A, podemos resolver todos estos sistemas de manera simultánea. Formamos la matriz de $n \times 2n$

$$\left[A \;\vdots\; \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n\right] = \left[A \;\vdots\; I_n\right]$$

y la transformamos a la forma escalonada reducida por filas $\left[C \;\vdots\; D\right]$. La matriz C de $n \times n$ es la forma escalonada reducida por filas equivalente por filas de A. Sean $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_n$ las n columnas de D. Entonces, la matriz $\left[C \;\vdots\; D\right]$ da lugar a los n sistemas lineales

$$C\mathbf{x}_j = \mathbf{d}_j \qquad (1 \le j \le n) \tag{3}$$

o la ecuación matricial

$$CB = D. \tag{4}$$

Ahora existen dos casos posibles:

Caso 1. $C = I_n$. En esta situación, la ecuación (3) se convierte en

$$I_n\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j = \mathbf{d}_j,$$

y $B = D$, de modo que hemos obtenido A^{-1}.

Caso 2. $C \neq I_n$. En este caso, el ejercicio T.9 de la sección 1.6 implica que C tiene una fila que consta completamente de ceros. Con base en el ejercicio T.3 de la sección 1.3, observamos que el producto CB de la ecuación (4) tiene una fila de ceros. La matriz D en (4) surgió de I_n mediante una serie de operaciones elementales, pero resulta evidente que D no puede tener una fila de ceros. Esta afirmación puede demostrarse formalmente en este momento, pero pediremos al lector que acepte el resultado sin solicitar demostraciones por ahora;. En la sección 3.2, un argumento mediante determinantes mostrará su validez. En consecuencia, una de las ecuaciones $C\mathbf{x}_j = \mathbf{d}_j$ no tiene solución, de modo que $A\mathbf{x}_j = \mathbf{e}_j$ tampoco la tiene y, en este caso, A es singular.

El procedimiento práctico para calcular la inversa de la matriz A es el siguiente.

Paso 1. Formar la matriz de $n \times 2n$ $\left[A \;\vdots\; I_n\right]$, que se obtiene al adjuntar la matriz identidad I_n con la matriz dada A.

Paso 2. Transformar la matriz obtenida en el paso 1 a su forma escalonada reducida por filas mediante operaciones elementales por filas. Recuerde que todo lo que se haga a una fila de A también debe hacerse a la fila correspondiente de I_n.

Paso 3. Suponga que el paso 2 ha producido la matriz $\left[C \;\vdots\; D\right]$ en forma escalonada reducida por filas.

(a) Si $C = I_n$, entonces $D = A^{-1}$.

(b) Si $C \neq I_n$, entonces C tiene una fila de ceros. En este caso, A es singular y A^{-1} no existe.

EJEMPLO 5 Determinar la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución ***Paso 1.*** La matriz $\left[A \,\vdots\, I_3\right]$ de 3×6 es

$$\left[A \,\vdots\, I_3\right] = \begin{array}{c} \qquad\quad A \qquad\qquad\qquad I_3 \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Paso 2. Ahora transformamos la matriz obtenida en el paso 1 a su forma escalonada reducida por filas.

$$\begin{array}{c} \qquad A \qquad\qquad\qquad I_3 \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sumamos (-5) veces la primera fila a la tercera fila.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Se multiplicó la segunda fila por $\frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Se multiplicó la tercera fila por $\left(-\frac{1}{4}\right)$.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Se sumó $\left(-\frac{3}{2}\right)$ veces la tercera fila a la segunda fila.
Se sumó (-1) veces la tercera fila a la primera fila.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}\right]$$

Se sumó (-1) veces la segunda fila a la primera fila.

Paso 3. Como $C = I_3$, concluimos que $D = A^{-1}$. Por lo tanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Es fácil verificar que $AA^{-1} = A^{-1} = I_3$. ■

Si la matriz escalonada reducida por filas bajo A tiene una fila de ceros, entonces A es singular. Como cada matriz bajo A es equivalente por filas a A, una vez que una matriz bajo A tiene una fila de ceros, todas las matrices posteriores que sean equivalentes por filas a A tendrán una fila de ceros. De esta manera, podemos concluir el procedimiento tan pronto encontremos una matriz F que sea equivalente por filas a A y tenga una fila de ceros. En este caso, A^{-1} no existe.

EJEMPLO 6 Determine la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \text{ si ésta existe.}$$

Solución ***Paso 1.*** La matriz $\left[A \;\vdots\; I_3\right]$ de 3×6 es

$$\left[A \;\vdots\; I_3\right] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad A \quad & \quad I_3 \quad \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Paso 2. Transformamos la matriz obtenida en el paso 1 a su forma escalonada reducida por filas. Para determinar A^{-1}, procedemos como sigue:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad A \quad & \quad I_3 \quad \end{array} \\ \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Se sumó (-1) veces la primera fila a la segunda fila.

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 12 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Se sumó (-5) veces la primera fila a la tercera fila.

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Se sumó (-3) veces la segunda fila a la tercera fila.

En este punto, A es equivalente por filas a

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como F tiene una fila de ceros, nos detenemos y concluimos que A es una matriz singular. ■

Observe que, para determinar A^{-1}, no es preciso saber de antemano si existe o no. Simplemente iniciamos el procedimiento anterior y obtenemos A^{-1}, o bien, concluimos que A es singular.

El análisis anterior acerca del método práctico para obtener A^{-1} establece el siguiente teorema.

TEOREMA 1.12 *Una matriz de $n \times n$ es no singular si y sólo si es equivalente por filas a I_n.* ■

SISTEMAS LINEALES E INVERSAS

Si A es una matriz de $n \times n$, el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un sistema de n ecuaciones en n incógnitas. Supongamos que A es no singular. Entonces A^{-1} existe y podemos multiplicar ambos lados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por A^{-1} para obtener

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\mathbf{x}) &= A^{-1}\mathbf{b} \\ (A^{-1}A)\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ I_n\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Además, es evidente que $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ es una solución del sistema lineal dado. En consecuencia, si A es no singular, tenemos una única solución.

Aplicaciones Este método es útil para la resolución de problemas industriales. Muchos modelos físicos se describen por medio de sistemas lineales. Esto significa que si se utilizan como entrada n valores (que se pueden ordenar como la matriz $\mathbf{x}$ de $n \times 1$), se obtienen m valores como resultado (mismos que pueden ordenarse como la matriz $\mathbf{b}$ de $m \times 1$) mediante la regla $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. La matriz A forma parte intrínseca del procedimiento. Así, supongamos que hay una matriz A asociada a cierto proceso químico. Cualquier cambio en el mismo puede producir una nueva matriz. De hecho, hablamos de una **caja negra**, lo cual significa que la estructura interna del proceso no nos interesa. El problema que aparece con frecuencia en el análisis de sistemas es la determinación de la entrada que debe utilizarse para obtener el resultado deseado. Es decir, queremos resolver el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{x}$, al variar $\mathbf{b}$. Si A es una matriz cuadrada no singular, una forma eficiente de manejar esto es la siguiente: calculamos A^{-1} una vez, y siempre que modifiquemos $\mathbf{b}$, determinamos la solución correspondiente $\mathbf{x}$ formando $A^{-1}\mathbf{b}$.

EJEMPLO 7 **(Proceso industrial)** Considere un proceso industrial cuya matriz es la matriz A del ejemplo 5. Si $\mathbf{b}$ es la matriz resultante

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 8 \end{bmatrix},$$

la matriz de entrada $\mathbf{x}$ es la solución del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. De esta manera,

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{15}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{5}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, si $\mathbf{b}$ es la matriz resultante

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 16 \end{bmatrix},$$

entonces (verifique)

$$\mathbf{x} = A^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

TEOREMA 1.13 *Si A es una matriz de $n \times n$, el sistema homogéneo*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{5}$$

tiene una solución no trivial si y sólo si A es singular.

Demostración Supongamos que A es no singular. Entonces, A^{-1} existe, y al multiplicar ambos lados de (5) por A^{-1}, tenemos

$$\begin{aligned} A^{-1}(A\mathbf{x}) &= A^{-1}\mathbf{0} \\ (A^{-1}A)\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ I_n\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la única solución de (5) es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Dejaremos la demostración del recíproco —si A es singular, entonces (5) tiene una solución no trivial— como ejercicio (T.3). ■

EJEMPLO 8 Considere el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde A es la matriz del ejemplo 5. Como A es no singular,

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

También podemos resolver este sistema mediante la reducción de Gauss-Jordan. En este caso, determinamos la matriz en forma escalonada reducida por filas que es equivalente a la matriz aumentada del sistema dado,

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

es

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

lo cual demuestra de nuevo que la solución es

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$ ■

EJEMPLO 9 Considere el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde A es la matriz singular del ejemplo 6. En este caso, la matriz en forma escalonada reducida por filas que es equivalente por filas a la matriz aumentada del sistema dado,

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right],$$

es (verifique)

$$\left[\begin{array}{rrr:r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} x &= r \\ y &= r \\ z &= r, \end{aligned}$$

donde r es cualquier número real. En consecuencia, el sistema dado tiene una solución no trivial. ■

La demostración del siguiente teorema se deja en manos del lector (ejercicio complementario T.18).

TEOREMA 1.14 *Si A es una matriz de $n \times n$, entonces A es no singular si y sólo si el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada matriz $\mathbf{b}$ de $n \times 1$.* ■

Podemos resumir nuestros resultados acerca de los sistemas homogéneos y las matrices no singulares mediante la siguiente lista de equivalencias no singulares.

Lista de equivalencias no singulares

Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. A es no singular.
2. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la única solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. A es equivalente por filas a I_n.
4. El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada matriz $\mathbf{b}$ de $n \times 1$.

Esto significa que al resolver un problema podemos utilizar cualquiera de las cuatro afirmaciones anteriores, es decir, que son intercambiables. Como verá a lo largo del curso, suele ocurrir que un problema dado se puede resolver de varias formas, y a veces un procedimiento de solución es más fácil de aplicar que otro. Esta lista de equivalencias no singulares irá creciendo conforme avancemos. Al final del apéndice B aparece la lista completa, que consta de 12 afirmaciones equivalentes.

INVERSA DE MATRICES BINARIAS (OPCIONAL)

Las definiciones y teoremas desarrollados en esta sección son válidos para matrices binarias. Los ejemplos 10 y 11 ilustran los procedimientos computacionales de esta sección para matrices binarias en donde, por supuesto, utilizamos aritmética de base 2.

EJEMPLO 10 Determine la inversa de la matriz binaria

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución ***Paso 1.*** La matriz $\left[A \;\vdots\; I_3\right]$ de 3×6 es

$$\left[A \;\vdots\; I_3\right] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Paso 2. Ahora calculamos la forma escalonada reducida por filas de la matriz obtenida en el paso 1. Para determinar A^{-1}, procedemos como sigue:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad A \quad & \quad I_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ Se intercambiaron la primera y la segunda fila.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$ Se sumó la primera fila a la tercera fila.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$ Se intercambiaron la segunda y la tercera filas.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$ Se sumó la segunda fila a la tercera fila.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$ Se sumó la tercera fila a la primera fila.

En este punto, A es equivalente por filas a I_3, por lo que A es no singular y concluimos que

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

EJEMPLO 11 Determine la inversa de la matriz binaria

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución ***Paso 1.*** La matriz $\left[A \;\vdots\; I_3\right]$ de 3×6 es

$$\left[A \;\vdots\; I_3\right] = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Paso 2. Ahora calculamos la forma escalonada reducida por filas de la matriz obtenida en el paso 1. Para determinar A^{-1}, procedemos como sigue:

$$\begin{array}{c} \quad A \qquad\qquad\quad I_3 \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ Se sumó la primera fila a la segunda fila.

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$ Se sumó la segunda fila a la tercera fila.

En este punto vemos que A no puede ser equivalente por filas a I_3, ya que la tercera fila, en la parte de la matriz de coeficientes de la matriz aumentada, consta sólo de ceros. En consecuencia, aquí A es singular. ■

EJEMPLO 12 Resuelva el sistema lineal binario $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Solución De acuerdo con el ejemplo 10, tenemos que A es no singular y

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Así, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única, dada por

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

■

La sección 2.6, Modelos económicos lineales; la sección 2.7, introducción a *wavelets (ondeletas),* y la segunda mitad de la sección 7.2 (páginas 380 a 387), Mínimos cuadrados, utilizan el material de esta sección; si lo desea, puede estudiarlas en este momento.

Vista preliminar de una aplicación

Modelos económicos lineales (sección 2.6)

El análisis y la predicción económicos son cada vez más importantes en nuestras complejas sociedades moderna. Suponga que tenemos una sociedad sencilla, que sólo consta de tres individuos: un agricultor, que dedicado de manera exclusiva a la producción de toda la comida; un carpintero, cuya única misión es construir todas las casas, y un sastre, que se dedica tan sólo a la fabricación de toda la ropa. Seleccionamos nuestras unidades de modo que cada uno produzca una unidad del artículo que fabrica durante el año. Supongamos también que la parte de cada artículo consumida por cada persona está dada por la tabla 1.3.

Table 1.3

Bienes consumidos por:	Bienes consumidos por:		
	Agricultor	Carpintero	Sastre
Agricultor	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{16}$
Carpintero	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{16}$
Sastre	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

De esta manera, el agricultor consume $\frac{7}{16}$ de la comida producida, $\frac{1}{2}$ de los hogares construidos por el carpintero, y $\frac{3}{16}$ de la ropa fabricada por el sastre, etcétera.

El economista tiene que determinar los precios relativos p_1, p_2 y p_3 por unidad de comida, vivienda y ropa, respectivamente, de modo que nadie gane ni pierda dinero. Cuando ocurre esta situación, decimos que tenemos un estado de equilibrio. Si

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix},$$

vemos que $\mathbf{p}$ se puede obtener al resolver el sistema lineal

$$A\mathbf{p} = \mathbf{p}.$$

La sección 2.6 analiza éste y otros modelos económicos.

Introducción a *wavelets* (sección 2.7)

Una de las características que definieron al siglo XX, y cuya presencia ha adquirido aún más fuerza en el siglo XXI, es la capacidad para transmitir grandes volúmenes de información. Entre los datos que se transmiten están archivos de huellas dactilares para aplicaciones legales, procesamiento de señales para restauración de archivos, señales de radio del espacio exterior, estudios de sismología, resultados de rayos x que se envían de un servicio médico a otro, imágenes y muchas otros. Con el paso del tiempo se han desarrollado varios esquemas que transforman la información original, la comprimen, la transmiten y luego hacen posible la recuperación de los datos de origen. Ejemplos de tales esquemas incluyen el código Morse, codificadores de muchas clases, y señales utilizadas en radio, televisión y transmisión de microondas.

Uno de dichos esquemas, cuya existencia data de hace menos de 20 años, es el que se conoce como método de *wavelets* (u *ondeletas*). La enorme atención que ha recibido, se debe a que puede utilizarse con éxito en una amplia variedad de aplicaciones en medicina, ciencia e ingeniería. El método de *wavelets* transforma la información original en una forma equivalente a la información dada, pero más fácil comprimir, por lo que la cantidad de datos que debe transmitirse se reduce. Una vez que la información se ha transmitido, la siguiente fase del procedimiento consiste en construir una aproximación de la información original, el *wavelet*. En la sección 2.7 proporcionamos una introducción muy elemental al método de *wavelets* para pequeños conjuntos de datos discretos, empleando sólo técnicas básicas de álgebra lineal.

Ajuste por mínimos cuadrados (sección 7.2)

La recolección y análisis de datos es un problema que surge con frecuencia en las ciencias exactas, la ingeniería, la economía y las ciencias sociales. Al graficar varios datos, se obtiene un resultado semejante al que se muestra en la figura 1.20. El problema consiste en trazar la línea recta que "mejor se ajuste" a los datos dados. Esta recta aparece en la figura 1.21. La técnica para resolver este problema se llama método de los mínimos cuadrados, y será analizada en la sección 7.2.

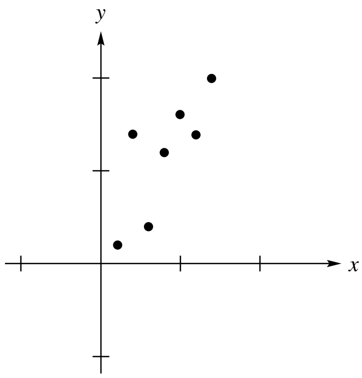


Figura 1.20 ▲

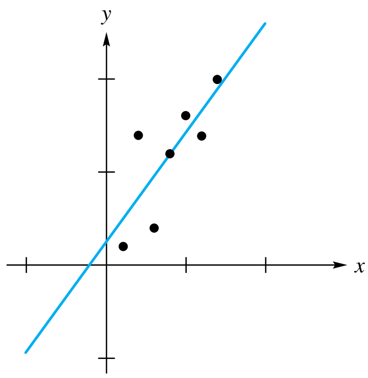


Figura 1.21 ▲

El procedimiento para determinar la recta que mejor se ajusta a los datos dados se presenta en la sección 7.2. Su justificación aparece en la primera parte de esa sección, y en ella se utiliza el material de las secciones 4.2 y 6.9.

CAPÍTULO 3

DETERMINANTES

3.1 DEFINICIÓN Y PROPIEDADES

En esta sección definiremos el concepto de determinante, y estudiaremos algunas de sus propiedades. Los determinantes se utilizaron por primera vez en la solución de sistemas lineales. Aunque el método desarrollado en el capítulo 1 para resolver tales sistemas es mucho más eficiente que los métodos que involucran determinantes, éstos son útiles en otros aspectos del álgebra lineal. Consideraremos algunos de estos aspectos en el capítulo 8. En primer lugar, trataremos brevemente las permutaciones, que se utilizan después en nuestra definición de determinante. En este capítulo, todas las matrices son cuadradas.

DEFINICIÓN Sea $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ el conjunto de enteros de 1 a n, ordenados en forma ascendente. Un reordenamiento $j_1 j_2 \cdots j_n$ de los elementos de S es una **permutación** de S.

Para ilustrar esta definición, sea $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces 4132 es una permutación de S. Corresponde a la función $f\colon S \to S$ definida por

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 \\ f(2) &= 1 \\ f(3) &= 3 \\ f(4) &= 2. \end{aligned}$$

Podemos colocar cualquiera de los n elementos de S en la primera posición, cualquiera de los $n - 1$ elementos restantes en la segunda posición, cualquiera de los $n - 2$ elementos restantes en la tercera, y así sucesivamente, hasta llegar a la n-ésima posición, la cual sólo puede ser ocupada por el elemento que queda. Entonces, hay

$$n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \tag{1}$$

permutaciones de S. Denotamos el conjunto de todas las permutaciones de S como S_n.

El producto indicado en la expresión (1) se denota

$$n!, \quad \textbf{\textit{n} factorial}.$$

Tenemos que

$$
\begin{aligned}
1! &= 1\\
2! &= 2 \cdot 1 = 2\\
3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6\\
4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24\\
5! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120\\
6! &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720\\
7! &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040\\
8! &= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40{,}320\\
9! &= 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 362{,}880.
\end{aligned}
$$

EJEMPLO 1

S_1 consta sólo de $1! = 1$ permutación del conjunto $\{1\}$, a saber, 1; S_2 consta de $2! = 2 \cdot 1 = 2$ permutaciones del conjunto $\{1, 2\}$, a saber, 12 y 21; S_3 consta de $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutaciones del conjunto $\{1, 2, 3\}$, a saber, 123, 231, 312, 132, 213 y 321. ■

Se dice que una permutación $j_1 j_2 \cdots j_n$ de $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ tiene una **inversión** si un entero mayor j_r precede a uno menor j_s. Una permutación se denomina **par** o **impar** si el número total de inversiones en ella es par o impar, respectivamente. Entonces, la permutación 4132 de $S = \{1, 2, 3, 4\}$ tiene cuatro inversiones: 4 antes de 1, 4 antes de 3, 4 antes de 2 y 3 antes de 2. Por lo tanto, es una permutación par.

Si $n \geq 2$, puede demostrarse que S_n tiene $n!/2$ permutaciones pares y un número igual de permutaciones impares.

EJEMPLO 2

En S_2, la permutación 12 es par, ya que no tiene inversiones; la permutación 21 es impar, pues tiene una inversión. ■

EJEMPLO 3

Las permutaciones pares en S_3 son 123 (sin inversiones), 231 (dos inversiones: 21 y 31) y 312 (dos inversiones: 31 y 32). Las permutaciones impares en S_3 son 132 (una inversión: 32); 213 (una inversión: 21), y 321 (tres inversiones: 32, 31 y 21). ■

DEFINICIÓN

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$. Definimos el **determinante** de A (que se escribe $\det(A)$ o $|A|$) como

$$\det(A) = |A| = \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}, \tag{2}$$

donde la suma varía sobre todas las permutaciones $j_1 j_2 \cdots j_n$ del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. El signo se toma como $+$ o como $-$ si la permutación $j_1 j_2 \cdots j_n$ es par o impar, respectivamente.

En cada término $(\pm) a_{1_{j_1}} a_{1_{j_2}} \cdots a_{n_{j_n}}$ del $\det(A)$, los subíndices de las filas aparecen en su orden natural, mientras que los subíndices de las columnas están en el orden $j_1 j_2 \cdots j_n$. Como la permutación $j_1 j_2 \cdots j_n$ no es más que un reordenamiento de los números desde 1 hasta n, no tiene repeticiones. En consecuencia, cada término en $\det(A)$ es un producto de n elementos de A, cada uno con su signo adecuado, en el cual hay exactamente un elemento de cada fila y exactamente un elemento de cada columna. Dado que sumamos sobre todas las permutaciones del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, la expresión para $\det(A)$ tiene $n!$ términos en la suma.

EJEMPLO 4 Si $A = [a_{11}]$ es una matriz de 1×1, entonces S_1 sólo tiene una permutación, la permutación 1, que es par. Así, $\det(A) = a_{11}$. ■

EJEMPLO 5 Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

es una matriz de 2×2, para obtener $\det(A)$ escribimos los términos

$$a_{1-}a_{2-} \quad \text{y} \quad a_{1-}a_{2-},$$

y llenamos los espacios en blanco con todos los elementos posibles de S_2; entonces, los subíndices vienen a ser 12 y 21. Como 12 es una permutación par, el término $a_{11}a_{22}$ tiene asociado un signo $+$; como 21 es una permutación impar, el término $a_{12}a_{21}$ tiene asociado un signo $-$. Por lo tanto,

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

También podemos obtener $\det(A)$ formando el producto de las entradas en la línea que va de izquierda a derecha en el siguiente diagrama, y restando de este producto el producto de las entradas en la línea que va de derecha a izquierda.

$$\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array}.$$

Por lo tanto, si

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$$

entonces $\det(A) = (2)(5) - (-3)(4) = 22$. ■

EJEMPLO 6 Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

para calcular $\det(A)$ escribimos los seis términos

$$a_{1-}a_{2-}a_{3-}, \quad a_{1-}a_{2-}a_{3-}, \quad a_{1-}a_{2-}a_{3-}, \quad a_{1-}a_{2-}a_{3-},$$
$$a_{1-}a_{2-}a_{3-} \quad \text{y} \quad a_{1-}a_{2-}a_{3-}.$$

Utilizamos todos los elementos de S_3 para llenar los espacios en blanco y, anteponemos a cada término el signo $+$ o el signo – según si la permutación es par o impar, con lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned} \det(A) = {} & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} \\ & -a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned} \tag{3}$$

También podemos obtener $\det(A)$ como sigue. Repetimos la primera y segunda columnas de A, como se muestra a continuación; formamos la suma de los productos de las entradas sobre las líneas que van de izquierda a derecha, y restamos a este número los productos de las entradas en las líneas que van de derecha a izquierda (verifique).

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}.$$

■

Precaución Téngase presente que los métodos descritos en los ejemplos 5 y 6 para evaluar det(A) no se aplican para $n \geq 4$.

EJEMPLO 7 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Evaluar det(A).

Solución Al sustituir en (3), encontramos que

$$\begin{aligned} \det(A) &= (1)(1)(2) + (2)(3)(3) + (3)(2)(1) \\ &\quad - (1)(3)(1) - (2)(2)(2) - (3)(1)(3) = 6. \end{aligned}$$

Podríamos obtener el mismo resultado aplicando el sencillo método descrito al finalizar la página anterior (verifique). ■

Tal vez ya se le ha ocurrido al lector que esta forma de calcular el determinante puede ser en extremo tediosa para un valor considerable de n. De hecho, $10! = 3.6288 \times 10^6$ y $20! = 2.4329 \times 10^{18}$ son números enormes. Pronto desarrollaremos varias propiedades de los determinantes, que reducirán en gran medida la magnitud de los cálculos requeridos.

Las permutaciones se estudian con cierto detalle en el cursos de álgebra abstracta y en cursos de teoría de grupos. Nosotros no utilizaremos las permutaciones en nuestros métodos para calcular los determinantes, aunque sí nos será útil la siguiente propiedad de las permutaciones: si intercambiamos dos números en la permutación $j_1 j_2 \cdots j_n$, entonces el número de inversiones aumenta o disminuye en un número impar (ejercicio T.1).

EJEMPLO 8 El número de inversiones en la permutación 54132 es 8. El número de inversiones en la permutación 52134 es 5. La permutación 52134 se obtuvo intercambiando los dígitos 2 y 4 en 54132. El número de inversiones difiere en 3, un número impar. ■

PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES

TEOREMA 3.1 *Los determinantes de una matriz y de su transpuesta son iguales; es decir,* $\det(A^T) = \det(A)$.

Demostración Sean $A = [a_{ij}]$ y $A^T = [b_{ij}]$, donde $b_{ij} = a_{ji}$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$. Entonces, de acuerdo con (2), tenemos

$$\det(A^T) = \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} = \sum (\pm) a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}. \tag{4}$$

Ahora podemos reordenar los factores en el término $a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}$ de modo que los índices de las filas aparezcan en su orden natural. Así,

$$b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{nj_n} = a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n}.$$

Con base en las propiedades de las permutaciones discutidas en un curso de álgebra abstracta,* puede demostrarse que tanto la permutación $k_1 k_2 \cdots k_n$, que determina el signo

---

* Vea J. Fraleigh, *A First Course in Abstract Algebra*, 7a. ed., Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 2003; y J. Gallian, *Contemporary Abstract Algebra*, 5a. ed., Massachusetts: Houghton Mifflin, 2002.

asociado con $a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$, como la permutación $j_1j_2\cdots j_n$, que determina el signo asociado con $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$, son ambas impares o ambas pares. Por ejemplo,

$$b_{13}b_{24}b_{35}b_{41}b_{52} = a_{31}a_{42}a_{53}a_{14}a_{25} = a_{14}a_{25}a_{31}a_{42}a_{53};$$

el número de inversiones en la permutación 45123 es 6, y el número de inversiones en la permutación 34512 también es 6. Como los términos y los signos correspondientes en (2) y (4) coinciden, podemos concluir que $\det(A) = \det(A^T)$. ■

EJEMPLO 9 Sea A la matriz del ejemplo 7. Entonces

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Al sustituir en (3), tenemos que

$$\begin{aligned} \det(A^T) &= (1)(1)(2) + (2)(1)(3) + (3)(2)(3) \\ &\quad -(1)(1)(3) - (2)(2)(2) - (3)(1)(3) \\ &= 6 = \det(A). \end{aligned}$$ ■

El teorema 3.1 nos permite remplazar "fila" por "columna" en muchas de las otras propiedades de los determinantes; veremos la forma de hacerlo en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.2 *Si la matriz B se obtiene intercambiando dos filas o intercambiando dos columnas de A entonces* $\det(B) = -\det(A)$.

Demostración Supongamos que B se obtiene a partir de A, al intercambiar las filas r y s y supongamos que $r < s$. Entonces tenemos $b_{rj} = a_{sj}$, $b_{sj} = a_{rj}$ y $b_{ij} = a_{ij}$ para $i \neq r$, $i \neq s$. Ahora,

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{rj_r} \cdots b_{sj_s} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{sj_r} \cdots a_{rj_s} \cdots a_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_s} \cdots a_{sj_r} \cdots a_{nj_n}. \end{aligned}$$

La permutación $j_1j_2\cdots j_s\cdots j_r\cdots j_n$ se obtiene de la permutación $j_1j_2\cdots j_r\cdots j_s\cdots j_n$ mediante el intercambio de dos números; el número de inversiones en la primera difiere en un número impar del número de inversiones en la segunda (vea el ejercicio T.1). Esto significa que el signo de cada término en $\det(B)$ es el negativo del signo del término correspondiente en $\det(A)$. Por lo tanto, $\det(B) = -\det(A)$.

Supongamos ahora que B se obtiene a partir de A, al intercambiar dos columnas de A. Entonces B^T se obtiene de A^T, intercambiando dos filas de A^T. De esta manera, $\det(B^T) = \det(A^T)$, pero $\det(B^T) = \det(B)$ y $\det(A^T) = \det(A)$. Por lo tanto, $\det(B) = -\det(A)$. ■

En los siguientes resultados, daremos las demostraciones sólo para las filas de A; para las demostraciones del caso correspondiente para las columnas, se procede como al final de la demostración del teorema 3.2.

EJEMPLO 10 Tenemos que

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$ ■

TEOREMA 3.3 *Si dos filas (columnas) de A son iguales, entonces* $\det(A) = 0$.

Demostración Supongamos que las filas r y s de A son iguales. Intercambiamos las filas r y s de A para obtener una matriz B. Entonces $\det(B) = -\det(A)$. Por otro lado, $B = A$, de modo que $\det(B) = \det(A)$. Así, $\det(A) = -\det(A)$, por lo que $\det(A) = 0$. ■

EJEMPLO 11 Utilizando el teorema 3.3, se sigue que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

■

TEOREMA 3.4 *Si una fila (columna) de A consta sólo de ceros, entonces* $\det(A) = 0$.

Demostración Supongamos que la r-ésima fila de A consta completamente de ceros. Como cada término en la definición de determinante de A contiene un factor de la r-ésima fila, entonces cada término en $\det(A)$ es igual a cero. Por lo tanto, $\det(A) = 0$. ■

EJEMPLO 12 Con base en el teorema 3.4, resulta que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

■

TEOREMA 3.5 *Si B se obtiene a partir de A multiplicando una fila (columna) de A por un número real c, entonces* $\det(B) = c\det(A)$.

Demostración Supongamos que la r-ésima fila de $A = [a_{ij}]$ se multiplica por c para obtener $B = [b_{ij}]$. Entonces, $b_{ij} = a_{ij}$ si $i \neq r$ y $b_{rj} = ca_{rj}$. Obtenemos $\det(B)$ a partir de la ecuación (2), como

$$\begin{aligned} \det(B) &= \sum (\pm) b_{1j_1} b_{2j_2} \cdots b_{rj_r} \cdots b_{nj_n} \\ &= \sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (ca_{rj_r}) \cdots a_{nj_n} \\ &= c\left(\sum (\pm) a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{rj_r} \cdots a_{nj_n}\right) = c\det(A). \end{aligned}$$

■

Ahora podemos utilizar el teorema 3.5 para simplificar el cálculo de $\det(A)$, factorizando los factores comunes de las filas y las columnas de A.

EJEMPLO 13 Tenemos que

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} = (2)(3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6(4-1) = 18.$$

■

EJEMPLO 14 Tenemos que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (2)(3)(0) = 0.$$

En este caso, primero factorizamos el factor común 2 de la tercera fila, luego 3 de la tercera columna, y finalmente empleamos el teorema 3.3, pues la primera y tercera columnas son iguales. ■

TEOREMA 3.6 *Si $B = [b_{ij}]$ se obtiene de $A = [a_{ij}]$ sumando a cada elemento de la* r-*ésima fila (columna) de A una constante c por el elemento correspondiente de la* s-*ésima fila (columna) $r \neq s$ de A, entonces* $\det(B) = \det(A)$.

Demostración Demostraremos el teorema para las filas. Tenemos que $b_{ij} = a_{ij}$ para $i \neq r$, y $b_{rj} = a_{rj} + ca_{sj}$, $r \neq s$, digamos $r < s$. Entonces

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum(\pm)b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{rj_r}\cdots b_{nj_n} \\
&= \sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(a_{rj_r} + ca_{sj_r})\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n} \\
&= \sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{rj_r}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n} \\
&\quad + \sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ca_{sj_r})\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}.
\end{aligned}$$

La primera suma en esta última expresión es $\det(A)$; la segunda suma se puede escribir como

$$c\left[\sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_r}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n}\right].$$

Observe que

$$\begin{aligned}
&\sum(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_r}\cdots a_{sj_s}\cdots a_{nj_n} \\
&\qquad = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow r\text{-ésima fila} \\ \\ \leftarrow s\text{-ésima fila} \\ \\ \\ \end{array} \\
&\qquad = 0,
\end{aligned}$$

ya que existen dos filas iguales. Por lo tanto, $\det(B) = \det(A) + 0 = \det(A)$. ■

EJEMPLO 15 Tenemos

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 9 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

lo cual se obtiene al sumar el doble de la segunda fila a la primera. Si ahora se aplica la definición de determinante al segundo determinante, podemos que ver que ambos tienen el valor de 4. ■

TEOREMA 3.7 *Si una matriz $A = [a_{ij}]$ es triangular superior (inferior) (vea el ejercicio T.5, sección 1.2), entonces*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{mn};$$

es decir, el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

Demostración Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz triangular superior (es decir, $a_{ij} = 0$ para $i > j$). Entonces, un término $a_{1j_1}a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ de la expresión para $\det(A)$ sólo puede ser distinto de cero si $1 \leq j_1, 2 \leq j_2, \ldots, n \leq j_n$. Ahora, $j_1j_2 \ldots j_n$ debe ser una permutación o reordenamiento de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Por lo tanto, debemos tener $j_n = n, j_{n-1} = n-1, \ldots, j_2 = 2, j_1 = 1$. En consecuencia, el único término de $\det(A)$ que puede ser distinto de cero es el producto de los elementos de la diagonal principal de A. Como la permutación $12 \cdots n$ no tiene inversiones, el signo asociado a ella es $+$. Por lo tanto, $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

Dejamos al lector la demostración del caso de una matriz triangular inferior (ejercicio T.2). ■

COROLARIO 3.1 *El determinante de una matriz diagonal es el producto de las entradas de su diagonal principal.*

Demostración Ejercicio T.17. ■

EJEMPLO 16 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Calcular $\det(A)$, $\det(B)$, $\det(C)$.

Solución De acuerdo con el teorema 3.7, $\det(A) = -24$, $\det(B) = -60$. Por el corolario 3.1, $\det(C) = 120$. ■

Ahora presentamos una forma de denotar operaciones elementales por filas y por columnas, en las matrices y en los determinantes.

- Intercambiar filas (columnas) i y j:

$$\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j \qquad (\mathbf{c}_i \leftrightarrow \mathbf{c}_j).$$

- Reemplazar la fila (columna) i por k veces ($k \neq 0$) la fila (columna) i:

$$k\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i \qquad (k\mathbf{c}_i \to \mathbf{c}_i).$$

- Reemplazar la fila (columna) j por k veces ($k \neq 0$) la fila (columna) i + la fila (columna) j:

$$k\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_j \qquad (k\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j \to \mathbf{c}_j).$$

Con esta notación es fácil seguir el rastro de las operaciones elementales entre filas o entre columnas realizadas a una matriz. Por ejemplo, con $A_{\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j}$ indicamos que hemos intercambiado las filas i y j de la matriz A. Procedemos de manera similar en el caso de operaciones entre columnas.

Podemos interpretar los teoremas 3.2, 3.5 y 3.6 en términos de esta notación así:

$$\begin{aligned} \det(A_{\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j}) &= -\det(A), \quad i \neq j \\ \det(A_{k\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i}) &= k\det(A) \\ \det(A_{k\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_j}) &= \det(A), \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Es conveniente rescribir estas propiedades en términos de det(A):

$$\det(A) = -\det(A_{\mathbf{r}_i \leftrightarrow \mathbf{r}_j}), \qquad i \neq j$$

$$\det(A) = \frac{1}{k}\det(A_{k\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i}), \qquad k \neq 0$$

$$\det(A) = \det(A_{k\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j \to \mathbf{r}_j}), \qquad i \neq j.$$

Para las operaciones entre columnas procedemos de manera análoga.

Los teoremas 3.2, 3.5, 3.6 y 3.7 son muy útiles en la evaluación de det(A). Lo que hacemos es transformar A por medio de operaciones elementales por filas en una matriz triangular. Por supuesto, debemos registrar cómo cambia el determinante de las matrices resultantes al realizar tales operaciones.

EJEMPLO 17 Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. Calcular det($A$).

Solución Tenemos

$$\begin{aligned}
\det(A) &= 2\det(A_{\frac{1}{2}\mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}) && \text{Multiplicar la fila 3 por } \tfrac{1}{2}. \\
&= 2\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\right) \\
&= 2\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_3}\right) && \text{Intercambiar las filas 1 y 3.} \\
&= (-1)2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}\right) \\
&= -2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{\substack{-3\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 \to \mathbf{r}_2 \\ -4\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}}\right) && \text{Obtener ceros debajo de la entrada (1, 1).} \\
&= -2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}\right) \\
&= -2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}_{-\frac{5}{8}\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 \to \mathbf{r}_3}\right) && \text{Obtener ceros debajo de la entrada (2, 2).} \\
&= -2\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -8 & -4 \\ 0 & 0 & -\frac{30}{4} \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

En seguida calculamos el determinante de la matriz triangular superior.

$$\det(A) = -2(1)(-8)\left(-\frac{30}{4}\right) = -120 \qquad \text{De acuerdo con el teorema 3.7.}$$

Las operaciones que seleccionamos no son las más eficientes, pero con ellas evitamos el uso de fracciones durante los primeros pasos. ■

Observación Haremos referencia al método utilizado en el ejemplo 17 para calcular un determinante, como **cálculo por reducción a la forma triangular**.

Omitiremos la demostración del siguiente e importante teorema.

TEOREMA 3.8 *El determinante del producto de dos matrices es el producto de sus determinantes; es decir,*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$ ■

EJEMPLO 18 Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$|A| = -2 \quad \text{y} \quad |B| = 5.$$

Además,

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$$

y

$$|AB| = -10 = |A||B|.$$ ■

Observación En el ejemplo 18 también tenemos (verifique)

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 7 & 10 \end{bmatrix},$$

de manera que $AB \neq BA$. Sin embargo, $|BA| = |B||A| = -10 = |AB|$.

Como consecuencia inmediata del teorema 3.8, podemos calcular fácilmente $\det(A^{-1})$ a partir de $\det(A)$, como demuestra el siguiente corolario.

COROLARIO 3.2 *Si A es no singular, entonces* $\det(A) \neq 0$ *y*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Demostración Ejercicio T.4. ■

EJEMPLO 19 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Entonces $\det(A) = -2$ y

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ahora,

$$\det(A^{-1}) = -\frac{1}{2} = \frac{1}{\det(A)}.$$ ■

DETERMINANTE DE MATRICES BINARIAS (OPCIONAL)

Las propiedades y técnicas para el cálculo de determinantes desarrolladas en esta sección se aplican también a matrices binarias; sólo que en éste caso los cálculos se hacen con aritmética binaria.

EJEMPLO 20 El determinante de la matriz binaria de 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

calculado por medio de la técnica desarrollada en el ejemplo 5, es

$$\det(A) = (1)(1) - (1)(0) = 1. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 21 El determinante de la matriz binaria de 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

calculado por medio de la técnica desarrollada en el ejemplo 6, es

$$\begin{aligned}\det(A) &= (1)(1)(1) + (0)(0)(0) + (1)(1)(1) \\ &\quad -(1)(0)(1) - (1)(0)(1) - (0)(1)(1) \\ &= 1 + 0 + 1 - 0 - 0 - 0 = 1 + 1 = 0.\end{aligned} \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 22 Utilice el cálculo por reducción a la forma triangular para evaluar el determinante de la matriz binaria

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solución

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}_{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 \rightarrow \mathbf{r}_3} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

De acuerdo con el teorema 3.3, $\det(A) = 0$. ■

Términos clave

Permutación
n factorial
Inversión
Permutación par
Permutación impar
Determinante
Cálculo por reducción a la forma triangular

3.1 Ejercicios

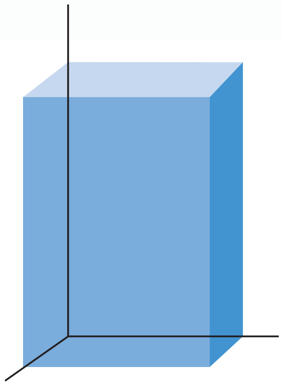
1. Determine el número de inversiones en cada una de las siguientes permutaciones de $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(a) 52134 (b) 45213 (c) 42135
(d) 13542 (e) 35241 (f) 12345

2. Decida, en cada una de las siguientes permutaciones de $S = \{1, 2, 3, 4\}$, si es par o si es impar.

(a) 4213 (b) 1243 (c) 1234
(d) 3214 (e) 1423 (f) 2431

CAPÍTULO 6



ESPACIOS VECTORIALES REALES

6.1 ESPACIOS VECTORIALES

Al iniciar la sección 4.2 definimos R^n, y en el teorema 4.2 establecimos algunas de sus propiedades básicas. A continuación analizaremos su estructura fundamental. El concepto de espacio vectorial aparece en muchas aplicaciones de matemáticas, ciencias e ingeniería. Dicho concepto no es más que una generalización cuidadosamente elaborada de R^n. Al estudiar las propiedades y la estructura de un espacio vectorial, podemos examinar no sólo R^n en particular, sino también muchos otros espacios vectoriales importantes. En esta sección definiremos el concepto de espacio vectorial en general, para más adelante ocuparnos de su estructura.

DEFINICIÓN 1* Un **espacio vectorial real** es una terna formada por un conjunto V y dos operaciones, $\oplus$ y $\odot$ que satisfacen las siguientes propiedades:

(α) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son elementos cualesquiera de V, entonces $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ está en V (es decir, V es cerrado bajo la operación $\oplus$).

(a) $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{v} \oplus \mathbf{u}$, para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V.

(b) $\mathbf{u} \oplus (\mathbf{v} \oplus \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w}$, para $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ en V.

(c) Existe un elemento $\mathbf{0}$ en V, tal que

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0} \oplus \mathbf{u} = \mathbf{u}, \qquad \text{para toda } \mathbf{u} \text{ en } V.$$

(d) Para cada $\mathbf{u}$ en V existe un elemento $-\mathbf{u}$ en V, tal que

$$\mathbf{u} \oplus -\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

(β) Si $\mathbf{u}$ es cualquier elemento de V y c es cualquier número real, entonces $c \odot \mathbf{u}$ está en V (es decir, V es cerrado bajo la operación $\odot$).

(e) $c \odot (\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = c \odot \mathbf{u} \oplus c \odot \mathbf{v}$, para todo número real c y toda $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V.

(f) $(c + d) \odot \mathbf{u} = c \odot \mathbf{u} \oplus d \odot \mathbf{u}$, para todo número real c y d y toda $\mathbf{u}$ en V.

(g) $c \odot (d \odot \mathbf{u}) = (cd) \odot \mathbf{u}$, para todo número real c y d y toda $\mathbf{u}$ en V.

(h) $1 \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}$, para toda $\mathbf{u}$ en V.

Los elementos de V se llaman **vectores**; los números reales se llaman **escalares**. La operación $\oplus$ es la **suma vectorial**; la operación $\odot$ es la **multiplicación por un escalar**.

*Aunque en esta obra las definiciones no están numeradas, *esta* definición sí lo está, pues haremos referencia a ella varias veces a lo largo del capítulo.

El vector **0** en la propiedad (c) es el **vector cero**, y el vector $-\mathbf{u}$ en la propiedad (d) es el **negativo** de **u**. Se puede demostrar (vea los ejercicios T.5 y T.6) que los vectores **0** y $-\mathbf{u}$ son únicos.

La propiedad (α) se denomina propiedad de **cerradura** para $\oplus$, y la propiedad (b) se llama propiedad de **cerradura** para $\odot$. También decimos que V es **cerrado** bajo las operaciones de suma de vectores, $\oplus$ y multiplicación por escalares $\odot$.

Si permitimos que los escalares mencionados en la definición 1 sean números complejos, obtenemos un **espacio vectorial complejo**. De manera más general, los escalares pueden ser elementos de un campo F,† con lo que obtenemos un espacio vectorial sobre F. Tales espacios son importantes en muchas aplicaciones de matemáticas y ciencias físicas. En el apéndice A daremos una breve introducción a los espacios vectoriales complejos. Aunque en este libro nuestra atención estará centrada en espacios vectoriales reales, damos ahora un vistazo a un espacio vectorial sobre el campo constituido por los bits 0 y 1, con las operaciones de suma y multiplicación binarias. En este caso, tomamos como conjunto de vectores V a B^n, el conjunto de los n-vectores binarios; la suma de n-vectores binarios se hace usando la suma binaria, y la multiplicación por escalares, usando bits como escalares, con lo cual son válidas todas las propiedades listadas en la definición 1. [Como se observó en la sección 1.4, los teoremas 1.1 y 1.3 (a)-(c) son válidos para matrices binarias y, por lo tanto para B^n; las propiedades (α), (β) y (h) de la definición 1 también se cumplen.] (Vea los ejercicios T.7-T.9.) En consecuencia, B^n es un espacio vectorial.

EJEMPLO 1 Considere el conjunto R^n junto con las operaciones de suma vectorial y multiplicación por un escalar definidas en la sección 4.2. En el teorema 4.2 de esa sección se estableció el hecho de que R^n es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar. ■

EJEMPLO 2 Considere el conjunto V de todas las ternas ordenadas de números reales de la forma $(x, y, 0)$, y defina las operaciones $\oplus$ y $\odot$ como

$$\begin{aligned}(x, y, 0) \oplus (x', y', 0) &= (x + x', y + y', 0)\\ c \odot (x, y, 0) &= (cx, cy, 0).\end{aligned}$$

A partir de lo anterior, resulta fácil demostrar (ejercicio 7) que V es un espacio vectorial, ya que satisface todas las propiedades de la definición 1. ■

EJEMPLO 3 Considere el conjunto V de todas las ternas ordenadas de números reales (x, y, z), y defina las operaciones $\oplus$ y $\odot$ como

$$\begin{aligned}(x, y, z) \oplus (x', y', z') &= (x + x', y + y', z + z')\\ c \odot (x, y, z) &= (cx, y, z).\end{aligned}$$

Una vez más, es fácil verificar (ejercicio 8) que se cumplen las propiedades (α), (β), (a), (b), (c), (d) y (e) de la definición 1. En este caso, $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$, y el negativo del vector (x, y, z) es el vector $(-x, -y, -z)$. Por ejemplo, para verificar la propiedad (e), procedemos como sigue: en primer lugar,

$$\begin{aligned}c \odot [(x, y, z) \oplus (x', y', z')] &= c \odot (x + x', y + y', z + z')\\ &= (c(x + x'), y + y', z + z').\end{aligned}$$

†Un campo (o cuerpo) es una estructura algebraica que goza de las propiedades algebraicas compartidas por los números reales, complejos y racionales. Los campos se estudian a detalle en cursos de álgebra abstracta.

Además,

$$\begin{aligned} c \odot (x, y, z) \oplus c \odot (x', y', z') &= (cx, y, z) \oplus (cx', y', z') \\ &= (cx + cx', y + y', z + z') \\ &= (c(x + x'), y + y', z + z'). \end{aligned}$$

Sin embargo, a continuación demostraremos que la propiedad (f) no se cumple. Por una parte,

$$(c + d) \odot (x, y, z) = ((c + d)x, y, z).$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} c \odot (x, y, z) \oplus d \odot (x, y, z) &= (cx, y, z) \oplus (dx, y, z) \\ &= (cx + dx, y + y, z + z) \\ &= ((c + d)x, 2y, 2z). \end{aligned}$$

En consecuencia, V no es un espacio vectorial bajo las operaciones indicadas. Por cierto, las propiedades (g) y (h) *sí* se cumplen para este ejemplo. ■

EJEMPLO 4 Considere el conjunto M_{23} de todas las matrices de 2×3 bajo las operaciones usuales de suma matricial y multiplicación por un escalar. En la sección 1.4 (teoremas 1.1 y 1.3) establecimos que las propiedades de la definición 1 son válidas, lo cual hace de M_{23} un espacio vectorial. De manera análoga, el conjunto de todas las matrices de $m \times n$ bajo las operaciones usuales de suma matricial y multiplicación por un escalar, es un espacio vectorial. Este espacio vectorial se denota M_{mn}. ■

EJEMPLO 5 Sea $F[a, b]$ el conjunto de todas las funciones con valores reales, definidas en el intervalo $[a, b]$. Si f y g están en V, definimos $f \oplus g$ como

$$(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t).$$

Si f está en $F[a, b]$ y c es un escalar, definimos $c \odot f$ como

$$(c \odot f)(t) = cf(t).$$

Entonces, $F[a, b]$ es un espacio vectorial (ejercicio 9). De manera similar, el conjunto de todas las funciones con valores reales definidas para todos los números reales, denotado mediante $F(-\infty, \infty)$, es un espacio vectorial. ■

Otra de las fuentes de ejemplos de espacios vectoriales que analizaremos será los conjuntos de polinomios; por lo tanto, comenzaremos por recordar algunos conceptos relativos a ellos. Un **polinomio** (en t) es una función que puede expresarse como

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0, \tag{1}$$

donde n es un entero ≥ 0 y los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales.

EJEMPLO 6 Las siguientes funciones son polinomios:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 3t^4 - 2t^2 + 5t - 1 \\ p_2(t) &= 2t + 1 \\ p_3(t) &= 4. \end{aligned}$$

Las siguientes funciones no son polinomios (explique por qué):

$$f_4(t) = 2\sqrt{t} - 6 \quad \text{y} \quad f_5(t) = \frac{1}{t^2} - 2t + 1.$$ ■

El polinomio $p(t)$ en (1) tiene **grado n** si $a_n \neq 0$. En consecuencia, el grado de un polinomio es la máxima potencia que tiene un coeficiente distinto de cero.

EJEMPLO 7 Los polinomios definidos en el ejemplo 6 tienen los siguientes grados:

$$p_1(t)\text{: grado } 4$$
$$p_2(t)\text{: grado } 1$$
$$p_3(t)\text{: grado } 0. \qquad \blacksquare$$

El **polinomio cero** se define como

$$0t^n + 0t^{n-1} + \cdots 0t + 0.$$

Observe que, por definición, el polinomio cero no tiene grado.

Ahora sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado $\leq n$ junto con el polinomio cero. Entonces, $2t^2 - 3t + 5$, $2t + 1$ y 1 son elementos de P_2.

EJEMPLO 8 Si

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots a_1 t + a_0$$

y

$$q(t) = b_n t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \cdots + b_1 t + b_0,$$

definimos $p(t) \oplus q(t)$ como

$$p(t) \oplus q(t) = (a_n + b_n)t^n + (a_{n-1} + b_{n-1})t^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)t + (a_0 + b_0)$$

(es decir, sumamos los coeficientes de términos de potencias iguales). *Si* c es un escalar, definimos $c \odot p(t)$ como

$$c \odot p(t) = (ca_n)t^n + (ca_{n-1})t^{n-1} + \cdots + (ca_1)t + (ca_0)$$

(es decir, multiplicamos cada coeficiente por c). Enseguida demostraremos que P_n es un espacio vectorial.

Sean $p(t)$ y $q(t)$, definidos como antes, elementos de P_n; es decir, polinomios de grado $\leq n$ o el polinomio cero. Las operaciones ya definidas $\oplus$ y $\odot$ muestran que $p(t) \oplus q(t)$ y $c \odot p(t)$, para cualquier escalar c, son polinomios de grado $\leq n$ o el polinomio cero. Es decir, $p(t) \oplus q(t)$ y $c \odot p(t)$ están en P_n, de modo que se cumplen (α) y (β) de la definición 1. Para verificar la propiedad (a), observamos que

$$q(t) \oplus p(t) = (b_n + a_n)t^n + (b_{n-1} + a_{n-1})t^{n-1} + \cdots + (b_1 + a_1)t + (a_0 + b_0),$$

y, como $a_i + b_i = b_i + a_i$ se cumple para los números reales, concluimos que $p(t) \oplus q(t) = q(t) \oplus p(t)$. Verificamos la propiedad (b) de manera similar. El polinomio cero es el elemento **0** requerido en la propiedad (c). Si $p(t)$ es el polinomio definido antes, su negativo, $-p(t)$, es

$$-a_n t^n - a_{n-1}t^{n-1} - \cdots - a_1 t - a_0.$$

Comprobaremos a continuación la propiedad (f); dejaremos las demás al lector. Tenemos,

$$\begin{aligned}
(c + d) \odot p(t) &= (c + d)a_n t^n + (c + d)a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + (c + d)a_1 t \\
&\quad + (c + d)a_0 \\
&= ca_n t^n + da_n t^n + ca_{n-1}t^{n-1} + da_{n-1}t^{n-1} + \cdots + ca_1 t \\
&\quad + da_1 t + ca_0 + da_0 \\
&= c(a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0) \\
&\quad + d(a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0) \\
&= c \odot p(t) \oplus d \odot p(t). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

EJEMPLO 9 Sea V el conjunto de los números reales, con las operaciones $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ ($\oplus$ es la resta ordinaria) y $c \odot \mathbf{u} = c\mathbf{u}$ ($\odot$ es la multiplicación ordinaria). ¿Es V un espacio vectorial? Si no lo es, ¿qué propiedades de la definición 1 no se cumplen?

Solución Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en V, y c es un escalar, entonces $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ y $c \odot \mathbf{u}$ están en V, de modo que se cumplen (α) y (β) de la definición 1. Sin embargo, la propiedad (a) no se cumple, como se advierte al considerar, por ejemplo, $\mathbf{u} = 2$ y $\mathbf{v} = 3$:

$$\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = 2 \oplus 3 = -1$$

y

$$\mathbf{v} \oplus \mathbf{u} = 3 \oplus 2 = 1.$$

Tampoco se cumplen las propiedades (b), (c) y (d) (verifique). Las propiedades (e), (g) y (h) se cumplen, pero la propiedad (f) no, como vemos al considerar $c = 2$, $d = 3$ y $\mathbf{u} = 4$:

$$(c + d) \odot \mathbf{u} = (2 + 3) \odot 4 = 5 \odot 4 = 20$$

mientras que

$$c \odot \mathbf{u} \oplus d \odot \mathbf{u} = 2 \odot 4 \oplus 3 \odot 4 = 8 \oplus 12 = -4.$$

En consecuencia, V no es un espacio vectorial. ■

Para cada número natural n, hemos definido el espacio vectorial P_n de todos los polinomios de grado $\leq n$ junto con el polinomio cero. Consideremos ahora el espacio P de *todos* los polinomios (de cualquier grado), junto con el polinomio cero. En este caso, P es la unión de todos los espacios vectoriales P_n. Dos polinomios, $p(t)$ de grado n y $g(t)$ de grado m, se suman en P de la misma forma en que se sumarían en P_r, donde r es el máximo de los dos números m y n. Entonces, P es un espacio vectorial (ejercicio 10).

> Para verificar que un conjunto dado V con dos operaciones $\oplus$ y $\odot$ es un espacio vectorial real, debemos mostrar que satisface todas las propiedades de la definición 1. Primero debemos establecer si se cumplen (α) y (β) puesto que si alguna de las propiedades de cerradura falla, V no es un espacio vectorial. Si se cumplen (α) y (β), es recomendable verificar a continuación la propiedad (c), es decir, establecer si existe el elemento cero (o elemento neutro). Naturalmente, si (c) no se cumple, V no es un espacio vectorial y no tiene sentido verificar las propiedades restantes.

Con frecuencia diremos simplemente **espacio vectorial**, para referirnos a un espacio vectorial real. También escribiremos $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ simplemente como $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ y c $\odot$ u como $c\mathbf{u}$, pero recordando siempre cómo ha sido definida cada operación en particular.

Hay muchos otros ejemplos importantes de espacios vectoriales en varias áreas de las matemáticas.

La ventaja de la definición 1 es que en ella no interesa qué es un vector. Por ejemplo, en R^3, ¿un vector es un punto?, ¿es un segmento de recta dirigido?, ¿es una matriz de 3×1? La definición 1 se ocupa solamente del comportamiento algebraico de los elementos de un espacio vectorial. En el caso de R^3, sin importar el punto de vista que se adopte, el comportamiento algebraico es el mismo. El matemático abstrae aquellas características comunes a todos los objetos (es decir, aquellas propiedades que los hacen comportarse de manera similar) y define una nueva estructura, llamada un espacio vectorial real. Esto permite hablar de las propiedades de todos los espacios vectoriales, sin hacer referencia a uno en particular. Entonces, un "vector" es simplemente un elemento de un espacio vectorial; el concepto ya no tiene que estar asociado con un segmento de recta dirigido. El teorema siguiente presenta varias propiedades útiles, comunes a todos los espacios vectoriales.

TEOREMA 6.1 *Si V es un espacio vectorial, entonces*

(a) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$, *para cada* $\mathbf{u}$ en V.
(b) $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$, *para cada escalar* c.
(c) *Si* $c\mathbf{u} = \mathbf{0}$, *entonces* $c = 0$ *o* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
(d) $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$, *para cada* $\mathbf{u}$ *en* V.

Demostración (a) Tenemos

$$0\mathbf{u} = (0 + 0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}, \tag{2}$$

según la parte (f) de la definición 1. Al sumar $-0\mathbf{u}$ a ambos lados de (2), se obtiene, por (b), (c) y (d) de la definición 1,

$$\begin{aligned} \mathbf{0} = 0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u}) &= (0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}) + (-0\mathbf{u}) \\ &= 0\mathbf{u} + [0\mathbf{u} + (-0\mathbf{u})] = 0\mathbf{u} + \mathbf{0} = 0\mathbf{u}. \end{aligned}$$

(b) Ejercicio T.1.

(c) Suponga que $c\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y que $c \neq 0$. Tenemos

$$\mathbf{u} = 1\mathbf{u} = \left(\frac{1}{c}\, c\right)\mathbf{u} = \frac{1}{c}\,(c\mathbf{u}) = \frac{1}{c}\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

de acuerdo con la parte (b) de este teorema y con (g) y (h) de la definición 1.

(d) $(-1)\mathbf{u} + \mathbf{u} = (-1)\mathbf{u} + (1)\mathbf{u} = (-1 + 1)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Como $-\mathbf{u}$ es único, se concluye que $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$. ■

Notación para los espacios vectoriales utilizados en esta sección

R^n,	el espacio vectorial de todos los n-vectores con componentes reales
M_{mn},	el espacio vectorial de todas las matrices de $n \times m$
$F[a, b]$,	el espacio vectorial de todas las funciones con valores reales, definidas en el intervalo $[a, b]$
$F(-\infty, \infty)$,	el espacio vectorial de todas las funciones con valores reales, definidas para todos los números reales
P_n,	el espacio vectorial de todos los polinomios de grado $\leq n$ junto con el polinomio cero
P,	el espacio vectorial de todos los polinomios junto con el polinomio cero

Términos clave

Espacio vectorial real
Vectores
Escalares
Suma vectorial
Multiplicación por un escalar
Vector cero (o nulo)
Negativo de un vector
Propiedades de cerradura
Espacio vectorial complejo
Polinomio
Grado de un polinomio
Polinomio cero

6.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 4, determine si el conjunto dado V es cerrado bajo las operaciones $\oplus$ y $\odot$.

1. V es el conjunto de todos los pares ordenados de número reales (x, y), donde $x > 0$ y $y > 0$;

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$$

y

$$c \odot (x, y) = (cx, cy).$$

2. V es el conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales de la forma $(0, y, z)$;

$$(0, y, z) \oplus (0, y', z') = (0, y + y', z + z')$$

y

$$c \odot (0, y, z) = (0, 0, cz).$$

3. V es el conjunto de todos los polinomios de la forma $at^2 + bt + c$, donde a, b y c son números reales, y $b = a + 1$;

$$\begin{aligned}(a_1t^2 + b_1t + c_1) &\oplus (a_2t^2 + b_2t + c_2)\\ &= (a_1 + a_2)t^2 + (b_1 + b_2)t + (c_1 + c_2)\end{aligned}$$

y

$$r \odot (at^2 + bt + c) = (ra)t^2 + (rb)t + rc.$$

4. V es el conjunto de todas las matrices de 2×2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

donde $a = d$; $\oplus$ es la suma matricial y $\odot$ es la multiplicación por un escalar.

5. Verifique con detalle que R^2 es un espacio vectorial.

6. Verifique con detalle que R^3 es un espacio vectorial.

7. Verifique que el conjunto del ejemplo 2 es un espacio vectorial.

8. Verifique que el conjunto del ejemplo 3 satisface todas las propiedades de la definición 1, excepto la propiedad (f).

9. Muestre que el conjunto del ejemplo 5 es un espacio vectorial.

10. Muestre que espacio P de todos los polinomios es un espacio vectorial.

En los ejercicios 11 a 17, determine si el conjunto dado, junto con las operaciones dadas, es un espacio vectorial. Si no lo es, enumere las propiedades de la definición 1 que no se cumplen.

11. El conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales (x, y, z) con las operaciones

$$(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x', y + y', z')$$

y

$$c \odot (x, y, z) = (cx, cy, cz)$$

12. El conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales (x, y, z) con las operaciones

$$(x, y, z) \oplus (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

y

$$c \odot (x, y, z) = (x, 1, z)$$

13. El conjunto de todas las ternas ordenadas de números reales de la forma $(0, 0, z)$ con las operaciones

$$(0, 0, z) \oplus (0, 0, z') = (0, 0, z + z')$$

y

$$c \odot (0, 0, z) = (0, 0, cz)$$

14. El conjunto de todos los números reales, con las operaciones usuales de suma y multiplicación.

15. El conjunto de todos los pares ordenadas de números reales (x, y), donde $x \leq 0$, con las operaciones usuales en R^2.

16. El conjunto de todos los pares ordenados de números reales (x, y) con las operaciones $(x, y) \oplus (x', y') = (x + x', y + y')$ y $c \odot (x, y) = (0, 0)$

17. El conjunto de todos los números reales positivos $\mathbf{u}$ con las operaciones $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{uv}$ y $c \odot \mathbf{u} = \mathbf{u}^c$

18. Sea V el conjunto de todos los números reales. Definimos $\oplus$ por $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v} = 2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ y $\odot$ como $c \odot$ u $= c\mathbf{u}$. ¿Es V un espacio vectorial?

19. Sea V el conjunto formado solamente por un elemento $\mathbf{0}$. Sean $\mathbf{0} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $c \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Muestre que V es un espacio vectorial.

20. (a) Si V es un espacio vectorial que tiene un vector distinto de cero, ¿cuántos vectores existen en V?

(b) Describa todos los espacios vectoriales que tienen un número finito de vectores.

Ejercicios teóricos

En los ejercicios T.1 a T.4, establezca el resultado indicado para un espacio vectorial real V.

T.1. Muestre que $c\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para cada escalar c.

T.2. Muestre que $-(-\mathbf{u}) = \mathbf{u}$.

T.3. Muestre que si $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$, entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$.

T.4. Muestre que si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ y $a\mathbf{u} = b\mathbf{u}$, entonces $a = b$.

T.5. Muestre que un espacio vectorial sólo tiene un vector cero.

T.6. Muestre que cada vector $\mathbf{u}$ en un espacio vectorial sólo tiene un negativo $-\mathbf{u}$.

T.7. Muestre que B^n es cerrado bajo la operación de suma binaria de los n-vectores binarios.

T.8. Muestre que B^n es cerrado bajo la operación de multiplicación por escalares, siendo éstos los bits 0 y 1.

T.9. Muestre que la propiedad (h) es válida para todos los vectores en B^n.

Ejercicios con MATLAB

Los conceptos analizados en esta sección no son fáciles de implementar en rutinas de MATLAB. *Los requerimientos de la definición 1, deben ser satisfechos por* todos *los vectores. Demostrar con* MATLAB *que una propiedad de la definición 1 se cumple para unos cuantos vectores no es suficiente para concluir que ella se cumple para todos. Usted debe evitar este razonamiento erróneo. En cambio, si demostramos con* MATLAB *que para una elección particular de vectores no se cumple una propiedad, habremos establecido que la propiedad no siempre se cumple en todos los casos posibles; por lo tanto, la propiedad se considera falsa. De esta forma, podremos mostrar que un conjunto no es un espacio vectorial.*

ML.1. Sea V el conjunto de todas las matrices de 2×2. Definimos las operaciones que se indican, mediante los siguientes comandos de MATLAB:

$$A \oplus B \quad \text{es} \quad A.*B$$

$$k \odot A \quad \text{es} \quad k + A$$

¿Es V un espacio vectorial? (*Sugerencia:* introduzca algunas matrices de 2×2 y experimente con los comandos de MATLAB para comprender su comportamiento, antes de verificar las condiciones de la definición 1.)

ML.2. Continuando con el ejemplo 8, analizamos el espacio vectorial P_n de los polinomios con grado n o menor. Las operaciones sobre polinomios se pueden realizar mediante un software para álgebra lineal asociando, con cada polinomio $p(t)$ de P_n, una matriz fila de tamaño $n + 1$. Esta matriz está formada por los coeficientes de $p(t)$ mediante la asociación

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$
$$\to \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Si falta explícitamente algún término de $p(t)$, se utiliza un cero para ese coeficiente. Con esta asociación, la suma de polinomios corresponde a la suma de matrices y la multiplicación de un polinomio por un escalar corresponde a la multiplicación de una matriz por un escalar. Emplee MATLAB para realizar las operaciones indicadas sobre los polinomios, utilizando la asociación matricial que hemos descrito. Sean $n = 3$ y

$$p(t) = 2t^3 + 5t^2 + t - 2$$
$$q(t) = t^3 + 3t + 5.$$

(a) $p(t) + q(t)$ (b) $5p(t)$

(c) $3p(t) - 4q(t)$

6.2 SUBESPACIOS

En esta sección comenzaremos a analizar la estructura de un espacio vectorial. En primer lugar, es conveniente tener un nombre para un subconjunto de un espacio vectorial dado, que es, a su vez, un espacio vectorial con respecto a las mismas operaciones de V. En este sentido, tenemos la siguiente.

DEFINICIÓN Sean V un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de V. Si W es un espacio vectorial con respecto a las operaciones en V, entonces W es un **subespacio** de V.

EJEMPLO 1 Cada espacio vectorial tiene por lo menos dos subespacios: él mismo, y el subespacio $\{\mathbf{0}\}$ que consta sólo del vector cero [recordemos que $\mathbf{0} \oplus \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $c \odot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ en cualquier espacio vectorial (vea el ejercicio 19 de la sección 6.1)]. El subespacio $\{\mathbf{0}\}$ es denominado el **subespacio cero**. ■

EJEMPLO 2 Sea W el subconjunto de R^3 que consta de todos los vectores de la forma $(a, b, 0)$, donde a y b son números reales cualesquiera, junto con las operaciones usuales de suma de vectores y multiplicación por escalar. Para verificar si W es un subespacio de R^3, y de acuerdo con el recuadro de la página 276, primero establecemos si se cumplen las propiedades (α) y (β) de la definición 1. Sean $\mathbf{u} = (a_1, b_1, 0)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2, 0)$ vectores en W. Entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a_1, b_1, 0) + (a_2, b_2, 0) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 0)$ está en W, pues el tercer componente es igual a cero. Ahora, si c es un escalar, entonces $c\mathbf{u} = c(a_1, b_1, 0) = (ca_1, cb_1, 0)$ también está en W. Por lo tanto, en W se satisfacen las propiedades (a) y (b) de la definición 1. Es fácil demostrar que las propiedades (a)-(h) también se cumplen. En consecuencia, W es un subespacio de R^3. ■

Antes de mencionar otros subespacios, hacemos una pausa para desarrollar un resultado que nos ahorrará mucho trabajo al examinar si un subconjunto W de un espacio vectorial V es o no un subespacio vectorial. De acuerdo con la definición de subespacio vectorial, debemos verificar que se cumplen (α), (β) y (a) - (h) de la definición 1. Sin embargo, el teorema siguiente dice que es suficiente verificar que se cumplen (α) y (β), es decir, solamente necesitamos verificar que W es cerrado bajo las operaciones $\oplus$ y $\odot$.

TEOREMA 6.2 *Sea V un espacio vectorial con las operaciones $\oplus$ y $\odot$ y sea W un subconjunto no vacío de V. Entonces W es un subespacio de V si, y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

(α) *Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores cualesquiera en W, entonces $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ está en W.*
(β) *Si c es cualquier número real y $\mathbf{u}$ es cualquier vector en W, entonces $c \odot \mathbf{v}$ está en W.*

Demostración Ejercicio T.1. ■

Observaciones

1. Observe que el subconjunto que tiene como único elemento el vector cero (vea el ejemplo 1) es un subespacio no vacío.
2. Si un subconjunto W de un espacio vectorial V no contiene el vector cero, entonces W no es un subespacio de V. (Vea el ejercicio T.13.)

EJEMPLO 3 Considere el conjunto W de matrices de 2×3 que tienen la forma

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix},$$

donde a, b, c y d son números reales arbitrarios. Mostrar que W es un subconjunto del espacio vectorial M_{23} definido en el ejemplo 4 de la sección 6.1. Observe que una matriz de 2×3 está en W si y sólo si sus entradas (1, 3) y (2, 1) son cero.

Solución Considere las matrices $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & d_2 \end{bmatrix}$ en W. Entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix} \text{ está en } W$$

de modo que se satisface el requerimiento (α) del teorema 6.2. Ahora, sea k un escalar. Entonces

$$k\mathbf{u} = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 & 0 \\ 0 & kc_1 & kd_1 \end{bmatrix} \quad \text{está en } W$$

de modo que se satisface también la condición (β) del teorema 6.2. Por lo tanto, W es un subespacio de M_{23}. ■

Un criterio alternativo para mostrar que un subconjunto no vacío W de un espacio vectorial V es un subespacio de V consiste en demostrar que $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ está en W, para vectores cualesquiera $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en W y escalares cualesquiera a y b (ejercicio T.2).

EJEMPLO 4 ¿Cuáles de los subconjuntos siguientes de R^2, con las operaciones usuales de suma de vectores y multiplicación por escalar son subespacios?

(a) W_1 es el conjunto de todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, donde $x \geq 0$.

(b) W_2 es el conjunto de todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, donde $x \geq 0$, $y \geq 0$.

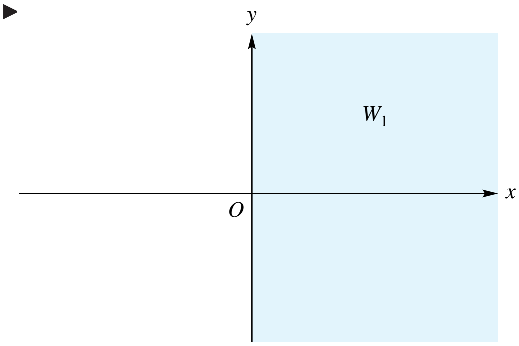
(c) W_3 es el conjunto de todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, donde $x = 0$.

Solución (a) W_1 es el semiplano derecho del plano xy (vea la figura 6.1). No es un subespacio de R^2, porque si tomamos el vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ en W_1, entonces la multiplicación por escalar

$$-3\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \end{bmatrix}$$

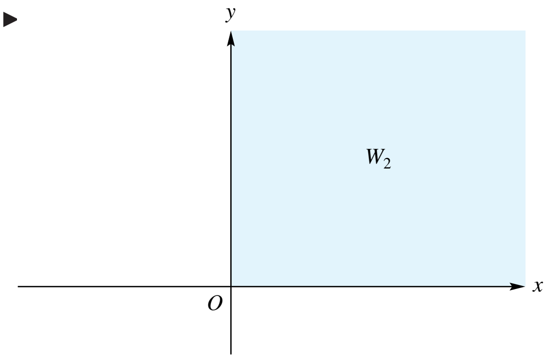
no es un vector de W_1, es decir, no se cumple la propiedad (b) del teorema 6.2.

Figura 6.1 ▶



(b) W_2 es el primer cuadrante del plano xy (vea la figura 6.2). Utilizando el mismo vector y el mismo escalar de la parte (a) puede mostrarse que W_2 no es un subespacio.

Figura 6.2 ▶



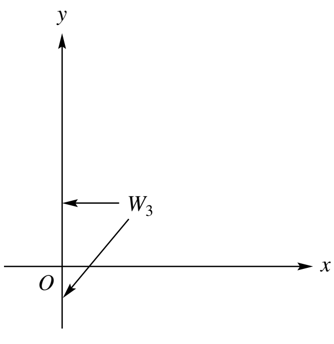


Figura 6.3 ▲

(c) W_3 es el eje y en el plano xy (vea la figura 6.3). Para determinar si W_3 es un subespacio, sean

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

vectores cualesquiera en W_3. Entonces

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b_1 + b_2 \end{bmatrix},$$

está en W_3, de modo que se satisface la propiedad (α) del teorema 6.2. Además, si c es un escalar, entonces

$$c\mathbf{u} = c\begin{bmatrix} 0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ cb_1 \end{bmatrix},$$

está en W_3, de manera que se cumple también la propiedad (β) del teorema 6.2. En consecuencia, W_3 es un subespacio de R^2. ■

EJEMPLO 5 Sea W el subconjunto de R^3 formado por todos los vectores de la forma $(a, b, 1)$, donde a y b son números reales cualesquiera. Para verificar si se cumplen las propiedades (α) y (β) del teorema 6.2, sean $\mathbf{u} = (a_1, b_1, 1)$ y $\mathbf{v} = (a_2, b_2, 1)$ vectores en W. Entonces $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a_1, b_1, 1) + (a_2, b_2, 1) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, 2)$, que no está en W, ya que el tercer componente es 2 y no 1. Como (α) del teorema 6.2 no se cumple, W no es un subespacio de R^3. ■

EJEMPLO 6 En la sección 6.1 denotamos por P_n el espacio vectorial formado por todos los polinomios de grado $\leq n$ y el polinomio cero, y por P el espacio vectorial de todos los polinomios. Es fácil verificar que P_2 es un subespacio de P_3 y, en general, que P_n es un subespacio de P_{n+1} (ejercicio 11). También, se puede demostrar que P_n es un subespacio de P (ejercicio 12). ■

EJEMPLO 7 Sea V el conjunto de todos los polinomios de grado 2 (no ≤ 2, sino exactamente igual a 2); V es un *subconjunto* de P_2, pero no es un *subespacio* de P_2. Para mostrarlo, tomemos como ejemplo los polinomios $2t^2 + 3t + 1$ y $-2t^2 + t + 2$. La suma, el polinomio 4t+3, que es un polinomio de grado 1, no está en V. ■

EJEMPLO 8 **(Requiere conocimientos de cálculo)** Sea $C[a, b]$ el conjunto de todas las funciones reales, continuas, definidas en el intervalo $[a, b]$. Si f y g están en $C[a, b]$, entonces $f + g$ está en $C[a, b]$, pues la suma de dos funciones continuas es continua. De manera análoga, si c es un escalar, entonces cf está en $C[a, b]$. Por lo tanto, $C[a, b]$ es un subespacio del espacio vectorial de todas las funciones reales definidas en $[a, b]$, mencionado en el ejemplo 5 de la sección 6.1. El espacio vectorial de las funciones continuas y definidas para todos los números reales, se denota como $C(-\infty, \infty)$.

A continuación presentamos como ejemplo un subespacio muy importante

EJEMPLO 9 Consideremos el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde A es una matriz de $m \times n$. Una solución es un vector $\mathbf{x}$ en R^n. Sea W el subconjunto de R^n formado por todas las soluciones de dicho sistema. De la igualdad $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, se deduce que W no es vacío. Para decidir si W es o no un subespacio de R^n, consideraremos las condiciones (α) y (β) establecidas en el teorema 6.2. Supongamos que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son soluciones, es decir,

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad A\mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Entonces,

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0},$$

de modo que $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ también es una solución. Por otra parte, si c es un escalar cualquiera, entonces

$$A(c\mathbf{x}) = c(A\mathbf{x}) = c\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

de modo que $c\mathbf{x}$ también es una solución. Se concluye entonces, que W es un subespacio de R^n. ■

El subespacio W del ejemplo 9 se denomina **espacio solución** del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, o **espacio nulo** de la matriz A. Tenga presente que el conjunto de soluciones del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es de $m \times n$, no es un subespacio de R^n si $\mathbf{b} \neq 0$ (ejercicio T.3).

EJEMPLO 10 Una forma sencilla de construir subespacios de un espacio vectorial dado es la siguiente. Sean $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ vectores fijos en un espacio vectorial V, y sea W el conjunto de todas las combinaciones lineales (vea la sección 1.3) de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$; es decir, W consta de todos los vectores de la forma $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2$, donde a_1 y a_2 son números reales cualesquiera. Mostraremos que W es un subespacio de V, verificando las propiedades (α) y (β) del teorema 6.2.

Sean

$$\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_2 = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2$$

vectores en W. Entonces

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = (a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2) + (b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2) = (a_1 + b_1)\mathbf{v}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{v}_2,$$

es también una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, de modo que está en W. Además, si c es un escalar, entonces

$$c\mathbf{w}_1 = (ca_1)\mathbf{v}_1 + (ca_2)\mathbf{v}_2$$

está en W. De acuerdo con el teorema 6.2, W es un subespacio de V. ■

El espacio construido en el ejemplo 10 a partir de dos vectores se generaliza fácilmente a un número finito de vectores. Ahora daremos la definición formal.

DEFINICIÓN

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ vectores en un espacio vectorial V. Un vector $\mathbf{v}$ en V es una **combinación lineal** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ si

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

para ciertos números reales $c_1, c_2, \ldots, c_k$. (Vea también la sección 1.3.)

En la figura 6.4 mostramos al vector $\mathbf{v}$ en R^2 o R^3 como combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

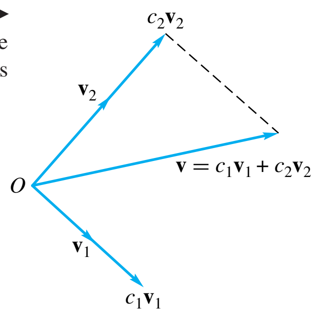


Figura 6.4 ► Combinación lineal de dos vectores

EJEMPLO 11

En R^3, sean

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 2) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0).$$

El vector

$$\mathbf{v} = (2, 1, 5)$$

es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ si podemos determinar números reales, c_1, c_2 y c_3 tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}.$$

Al sustituir los valores de $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, obtenemos

$$c_1(1, 2, 1) + c_2(1, 0, 2) + c_3(1, 1, 0) = (2, 1, 5).$$

Al efectuar las operaciones de la izquierda e igualar las entradas correspondientes, resulta el sistema lineal (verifique)

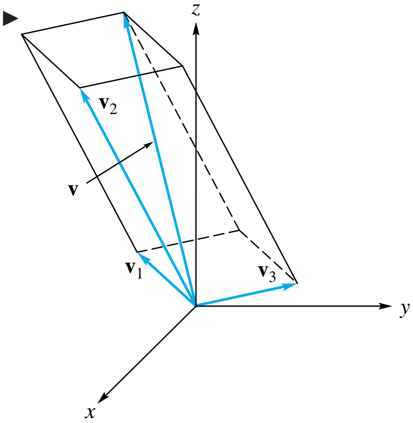
$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 2 \\ 2c_1 \phantom{{}+ 2c_2} + c_3 &= 1 \\ c_1 + 2c_2 \phantom{{}+ c_3} &= 5. \end{aligned}$$

cuya solución por los métodos del capítulo 1 es (verifique) $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ y $c_3 = -1$, lo cual significa que $\mathbf{v}$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Así,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3.$$

La figura 6.5 muestra a $\mathbf{v}$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. ■

Figura 6.5 ▶

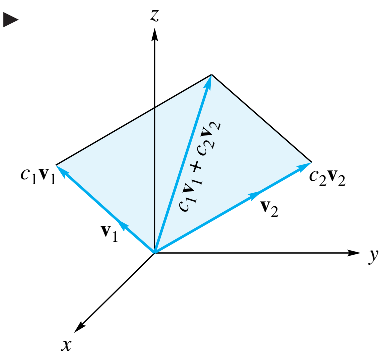


DEFINICIÓN Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, entonces el conjunto de todos los vectores en V que son combinaciones lineales de los vectores en S se denota como

$$\text{gen } S \quad \text{o} \quad \text{gen } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}.$$

En la figura 6.6 aparece una parte de gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, donde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son los vectores no colineales en R^3, que allí se muestran; gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es un plano que pasa por el origen y contiene a los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

Figura 6.6 ▶



EJEMPLO 12 Considere el siguiente conjunto S de matrices de 2×3

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Entonces gen S es el conjunto de matrices en M_{23} formado por todos los vectores de la forma

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix}, \quad \text{donde } a, b, c \text{ y } d \text{ son números reales.}$$

Es decir, gen S es el subconjunto de M_{23} que consta de todas las matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \end{bmatrix},$$

donde a, b, c y d son números reales. ■

TEOREMA 6.3 *Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V. Entonces, gen S es un subespacio de V.*

Demostración Vea el ejercicio T.4. ■

EJEMPLO 13 Dados los vectores siguiente en P_2,

$$\mathbf{v}_1 = 2t^2 + t + 2, \quad \mathbf{v}_2 = t^2 - 2t, \quad \mathbf{v}_3 = 5t^2 - 5t + 2, \quad \mathbf{v}_4 = -t^2 - 3t - 2.$$

Determine si el vector

$$\mathbf{u} = t^2 + t + 2$$

pertenece a gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

Solución Si podemos determinar escalares c_1, c_2, c_3 y c_4 tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{u},$$

entonces, $\mathbf{u}$ pertenece a gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Al sustituir los valores de $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$, tenemos

$$\begin{aligned} c_1(2t^2 + t + 2) + c_2(t^2 - 2t) + c_3(5t^2 - 5t + 2) + c_4(-t^2 - 3t - 2) \\ = t^2 + t + 2 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} (2c_1 + c_2 + 5c_3 - c_4)t^2 + (c_1 - 2c_2 - 5c_3 - 3c_4)t + (2c_1 + 2c_3 - 2c_4) \\ = t^2 + t + 2. \end{aligned}$$

Dos polinomios coinciden para todos los valores de t sólo si los coeficientes de las potencias respectivas de t coinciden. De modo que la igualdad anterior, origina el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2c_1 + c_2 + 5c_3 - c_4 &= 1 \\ c_1 - 2c_2 - 5c_3 - 3c_4 &= 1 \\ 2c_1 \phantom{{}- 2c_2} + 2c_3 - 2c_4 &= 2. \end{aligned}$$

Para determinar si este sistema de ecuaciones lineales es consistente o no, formamos la matriz aumentada, y obtenemos su forma escalonada reducida por filas, que es la siguiente (verifique)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

como el sistema es inconsistente, es decir, no tiene solución, se concluye que $\mathbf{u}$ no pertenece a gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. ■

Observación En general, para determinar si un vector específico $\mathbf{v}$ pertenece a gen S, analizamos la consistencia de un sistema lineal adecuado.

SUBESPACIOS EN B^n (OPCIONAL)

Los conceptos de subespacio, combinación lineal y generador son válidos para cualquier espacio vectorial, y por tanto para B^n. Los ejemplos 14 a 16, ilustran estos conceptos para B^n.

EJEMPLO 14 Sean $V = B^3$ y $W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$, donde

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Determine si W es un subespacio de V.

Solución Aplicamos el teorema 6.2 usando escalares binarios y la aritmética binaria. Tenemos (verifique)

$$\begin{aligned}
&\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_1, \quad \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_2, \quad \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_3, \quad \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_4,\\
&\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1, \quad \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_4, \quad \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_3, \quad \mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1,\\
&\mathbf{w}_3 + \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_2, \quad \mathbf{w}_4 + \mathbf{w}_4 = \mathbf{w}_1,
\end{aligned}$$

de modo que W es cerrado bajo la suma de vectores. Además,

$$0\mathbf{w}_j = \mathbf{w}_1 \quad \text{y} \quad 1\mathbf{w}_j = \mathbf{w}_j, \quad \text{para } j = 1, 2, 3, 4,$$

lo cual muestra que W es cerrado bajo la multiplicación por escalares. Entonces, según el teorema 6.2, W es un subespacio de B^3. ■

EJEMPLO 15 Las combinaciones lineales de vectores en B^n puede formarse empleando sólo los escalares 0 y 1. Para los vectores $\mathbf{w}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$ del ejemplo 14 y los escalares $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$, tenemos la combinación lineal

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + c_3\mathbf{w}_3 + c_4\mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{w}_1.$$

(Vea también el ejemplo 19 en la sección 1.2.) ■

EJEMPLO 16 En B^3, sean

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine si el vector $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ pertenece a gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Solución Si encontramos escalares (binarios) c_1, c_2 y c_3, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{u},$$

entonces $\mathbf{u}$ pertenece a gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Al sustituir $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, obtenemos

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esta combinación lineal es equivalente al producto matricial (verifique)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

que tiene la forma de un sistema lineal. Al formar la matriz aumentada correspondiente, y transformarla a la forma escalonada reducida por filas, obtenemos (verifique)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

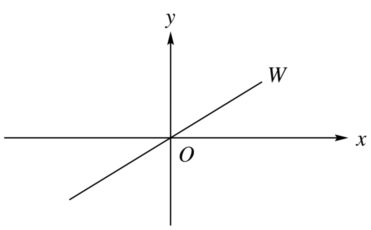
Por lo tanto el sistema lineal es consistente, con solución $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ y $c_3 = 1$. La existencia de solución significa que $\mathbf{u}$ pertenece a gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. ■

Términos clave

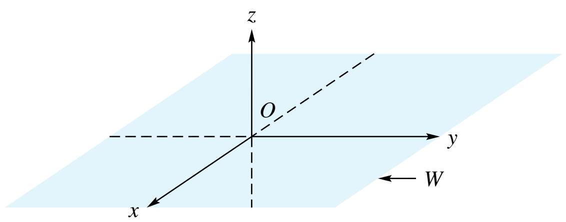
Subespacio
Subespacio cero
Propiedad de cerradura
Espacio solución
Combinación lineal

6.2 Ejercicios

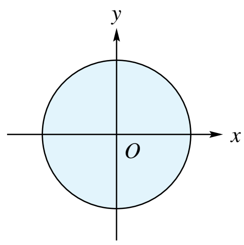
1. El conjunto W formado por todos los puntos de R^2 que tienen la forma (x, x) es una línea recta. ¿Es W un subespacio de R^2? Explique.



2. Sea W el conjunto de todos los puntos en R^3 que están en el plano xy. ¿Es W un subespacio de R^3? Explique.



3. En el plano xy, considere el círculo centrado en el origen y cuya ecuación es $x^2 + y^2 = 1$. Sea W el conjunto de todos los vectores cuya cola está en el origen y cuya cabeza es un punto interior a la, o en la circunferencia. ¿Es W un subespacio de R^2? Explique.



4. Considere el cuadrado unitario que se muestra en la figura adjunta. Sea W el conjunto de todos los vectores de la forma $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, donde $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Esto es, W es el conjunto de todos los vectores cuya cola está en el origen y su cabeza es un punto interior al cuadrado, o sobre sus lados. ¿Es W un subespacio de R^2? Explique.

5. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de R^3 son subespacios de R^3? El conjunto de todos los vectores de la forma

(a) $(a, b, 2)$

(b) (a, b, c), donde $c = a + b$

(c) (a, b, c), donde $c > 0$

6. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de R^3 son subespacios de R^3? El conjunto de todos los vectores de la forma

(a) (a, b, c), donde $a = c = 0$

(b) (a, b, c), donde $a = -c$

(c) (a, b, c), donde $b = 2a + 1$

7. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de R^4 son subespacios de R^4? El conjunto de todos los vectores de la forma

(a) (a, b, c, d), donde $a - b = 2$

(b) (a, b, c, d), donde $c = a + 2b$ y $d = a - 3b$

(c) (a, b, c, d), donde $a = 0$ y $b = -d$

8. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de R^4 son subespacios de R^4? El conjunto de todos los vectores de la forma

(a) (a, b, c, d), donde $a = b = 0$

(b) (a, b, c, d), donde $a = 1$, $b = 0$ y $c + d = 1$

(c) (a, b, c, d), donde $a > 0$ y $b < 0$

9. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de P_2 son subespacios? El conjunto de todos los polinomios de la forma

(a) $a_2t^2 + a_1t + a_0$, donde $a_0 = 0$

(b) $a_2t^2 + a_1t + a_0$, donde $a_0 = 2$

(c) $a_2t^2 + a_1t + a_0$, donde $a_2 + a_1 = a_0$

10. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de P_2 son subespacios? El conjunto de todos los polinomios de la forma

(a) $a_2t^2 + a_1t + a_0$, donde $a_1 = 0$ y $a_0 = 0$

(b) $a_2t^2 + a_1t + a_0$, donde $a_1 = 2a_0$

(c) $a_2t^2 + a_1t + a_0$, donde $a_2 + a_1 + a_0 = 2$

11. (a) Muestre que P_2 es un subespacio de P_3.

(b) Muestre que P_n es un subespacio de P_{n+1}.

12. Muestre que P_n es un subespacio de P.

13. Muestre que P es un subespacio del espacio vectorial definido en el ejemplo 5 de la sección 6.1.

14. Sean $\mathbf{u} = (1, 2, -3)$ y $\mathbf{v} = (-2, 3, 0)$ dos vectores en R^3 y sea W el subconjunto de R^3 que consta de todos los vectores de la forma $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, donde a y b son números reales cualesquiera. Proporcione un argumento que demuestre que W es un subespacio de R^3.

15. Sean $\mathbf{u} = (2, 0, 3, -4)$ y $\mathbf{v} = (4, 2, -5, 1)$ dos vectores en R^4 y sea W el subconjunto de R^4 que consta de todos los vectores de la forma $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, donde a y b son números reales cualesquiera. Proporcione un argumento que demuestre que W es un subespacio de R^4.

16. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio vectorial M_{23}, definido en el ejemplo 4 de la sección 6.1, son subespacios? El conjunto de todas las matrices de la forma

(a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}$, donde $b = a + c$

(b) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix}$, donde $c > 0$

(c) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, donde $a = -2c$ y $f = 2e + d$

17. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio vectorial M_{23} definido en el ejemplo 4 de la sección 6.1 son subespacios? El conjunto de todas las matrices de la forma

(a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, donde $a = 2c + 1$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, donde $a + c = 0$ y $b + d + f = 0$

18. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio vectorial M_{nn} son subespacios?

(a) El conjunto de todas las matrices simétricas de $n \times n$

(b) El conjunto de todas las matrices no singulares de $n \times n$

(c) El conjunto de todas las matrices diagonales de $n \times n$

19. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio vectorial M_{nn} son subespacios?

(a) El conjunto de todas las matrices singulares de $n \times n$

(b) El conjunto de todas las matrices triangulares superiores de $n \times n$

(c) El conjunto de todas las matrices de $n \times n$ cuyo determinante es 1

20. (***Requiere conocimiento de cálculo***) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios del espacio vectorial $C(-\infty, \infty)$ definido en el ejemplo 8?

(a) Todas las funciones no negativas

(b) Todas las funciones constantes

(c) Todas las funciones f tales que $f(0) = 0$

(d) Todas las funciones f tales que $f(0) = 5$

(e) Todas las funciones diferenciables

21. (***Requiere conocimiento de cálculo***) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $C(-\infty, \infty)$ definido en el ejemplo 8 son subespacios?

(a) Todas las funciones integrables

(b) Todas las funciones acotadas

(c) Todas las funciones integrables en $[a, b]$

(d) Todas las funciones acotadas en $[a, b]$

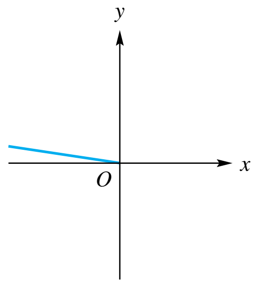
22. (***Requiere conocimiento de cálculo***) Considere la ecuación diferencial

$$y'' - y' + 2y = 0.$$

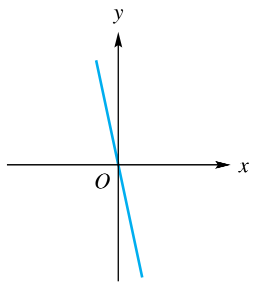
Una solución de la ecuación diferencial es una función f con valores reales que satisface la ecuación. Sea V el conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial dada; defina $\oplus$ y $\odot$ como en el ejemplo 5 de la sección 6.1. Muestre que V es un subespacio del espacio vectorial de todas las funciones con valores reales definidas en $(-\infty, \infty)$. (Vea también la sección 9.2.)

23. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de R^2 son subespacios.

(a)

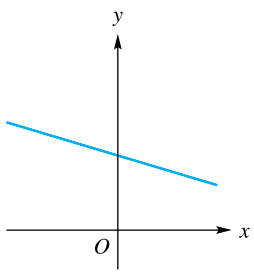


(b)

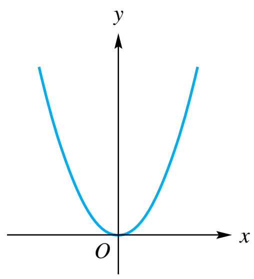


24. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de R^2 son subespacios.

(a)



(b)



25. Determine, en cada parte (a)-(d), si el vector dado $\mathbf{v}$ pertenece a gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0, 1), \qquad \mathbf{v}_2 = (1, -1, 0, 0)$$

y

$$\mathbf{v}_3 = (0, 1, 2, 1).$$

(a) $\mathbf{v} = (-1, 4, 2, 2)$ (b) $\mathbf{v} = (1, 2, 0, 1)$

(c) $\mathbf{v} = (-1, 1, 4, 3)$ (d) $\mathbf{v} = (0, 1, 1, 0)$

26. ¿Cuáles de los siguientes vectores son combinaciones lineales de

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}?$$

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

27. Determine, en cada parte (a)-(d), si el vector dado $p(t)$ pertenece a gen $\{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$, donde

$$\begin{aligned} p_1(t) &= t^2 - t, \\ p_2(t) &= t^2 - 2t + 1, \\ p_3(t) &= -t^2 + 1. \end{aligned}$$

(a) $p(t) = 3t^2 - 3t + 1$ (b) $p(t) = t^2 - t + 1$

(c) $p(t) = t + 1$ (d) $p(t) = 2t^2 - t - 1$

Los ejercicios 28 a 33 utilizan matrices binarias.

28. Sea $V = B^3$. Determine si

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es un subespacio de V.

29. Sea $V = B^3$. Determine si

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

es un subespacio de V.

30. Sea $V = B^4$. Determine si W, el conjunto de todos los vectores en V cuya primera entrada es 0, es un subespacio de V.

31. Sea $V = B^4$. Determine si W, el conjunto de todos los vectores en V cuya segunda entrada es 1, es un subespacio de V.

32. Sea

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Determine si $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ pertenece a gen S.

33. Sea

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Determine si $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pertenece a gen S.

Ejercicios teóricos

T.1. Demuestre el teorema 6.2.

T.2. Demuestre que un subconjunto W de un espacio vectorial V es un subespacio de V si, y sólo si se cumple la siguiente condición: si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores cualesquiera en W y a y b son escalares arbitrarios, entonces $a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$ está en W.

T.3. Demuestre que el conjunto de todas las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donde A es de $m \times n$, no es un subespacio de R^n si $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

T.4. Demuestre el teorema 6.3.

T.5. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k)$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, y sea W un subespacio de V que contiene a S. Muestre que W contiene a gen S.

T.6. Si A es una matriz no singular, ¿cuál es el espacio nulo de A? Justifique su respuesta.

T.7. Sea $\mathbf{x}_0$ un vector fijo en un espacio vectorial V. Muestre que el conjunto W que consta de todos los múltiplos escalares $c\mathbf{x}_0$ de $\mathbf{x}_0$ es un subespacio de V.

T.8. Sea A una matriz de $m \times n$. ¿Es el conjunto W de todos los vectores $\mathbf{x}$ en R^n tales que $A\mathbf{x} \neq 0$ un subespacio de R^n? Justifique su respuesta.

T.9. Muestre que los únicos subespacios de R^1 son $\{\mathbf{0}\}$ y el propio R^1.

T.10. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Sea $W_1 + W_2$ el conjunto de todos los vectores $\mathbf{v}$ en V tales que $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde $\mathbf{w}$ está en W_1 y $\mathbf{w}_2$ está en W_2. Muestre que $W_1 + W_2$ es un subespacio de V.

T.11. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V, con $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$. Sea $W_1 + W_2$, como se definió en el ejercicio T.10. Suponga que $V = W_1 + W_2$. Demuestre que cada vector en V se puede escribir de manera única como $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde $\mathbf{w}_1$ está en W_1 y $\mathbf{w}_2$ está en W_2. En este caso escribimos $V = W_1 \oplus W_2$ y decimos que V es la **suma directa** de los subespacios W_1 y W_2.

T.12. Muestre que el conjunto de todos los puntos del plano $ax + by + cz = 0$ es un subespacio de R^3.

T.13. Demuestre que si un subconjunto W de un espacio vectorial V no contiene el vector cero, entonces W no es un subespacio de V.

T.14. Sea $V = B^3$ y $W = \{\mathbf{w}_1\}$, donde $\mathbf{w}_1$ es cualquier vector en B^3. ¿Es W un subespacio de V?

T.15. Sea $V = B^3$. Determine si existe un subespacio de V que tenga exactamente tres vectores diferentes.

T.16. En el ejemplo 14, W es un subespacio de B^3 con exactamente cuatro vectores. Determine otros dos subespacios de B^3 que tengan exactamente cuatro vectores.

T.17. Determine todos los subespacios de B^3 que contienen el vector

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicios con MATLAB

ML.1. Sean V igual a R^3 y W el subconjunto de vectores de V que tienen la forma $(2, a, b)$, donde a y b son números reales arbitrarios. ¿Es W un subespacio de V? Utilice las siguientes instrucciones de MATLAB como ayuda para determinar la respuesta.

```
a1 = fix(10 * randn);
a2 = fix(10 * randn);
b1 = fix(10 * randn);
b2 = fix(10 * randn);
v = [2 a1 b1]
w = [2 a2 b2]
v + w
3 * v
```

ML.2. Sean $V = P_2$ y W el subconjunto de vectores de V que tienen la forma $ax^2 + bx + 5$, donde a y b son números reales arbitrarios. Asociemos, con cada uno de estos polinomios en W, el vector $(a, b, 5)$ en R^3. Construya instrucciones similares a las del ejercicio ML.1 para mostrar que W no es un subespacio de V.

Para resolver los siguientes ejercicios con MATLAB, *requiere haber leído la sección 12.7. (Aplicaciones de combinaciones lineales en* MATLAB.)

ML.3. Emplee MATLAB para determinar si el vector $\mathbf{v}$ es una combinación lineal de los elementos del conjunto S.

(a) $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$
$= \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$
$\mathbf{v} = (0, 1, 1, 1)$.

(b) $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ML.4. Utilice MATLAB para determinar si el vector $\mathbf{v}$ es una combinación lineal de los elementos del conjunto. S. En caso afirmativo, exprese $\mathbf{v}$ en función de los elementos de S.

(a) $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$
$= \{(1, 2, 1), (3, 0, 1), (1, 8, 3)\}$
$\mathbf{v} = (-2, 14, 4)$.

(b) $S = \{A_1, A_2, A_3\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\mathbf{v} = I_2$

ML.5. Emplee MATLAB para determinar si el vector **v** es una combinación lineal de los elementos del conjunto S. En tal caso, exprese **v** en términos de los elementos de S.

(a) $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) $S = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$
$= \{2t^2 - t + 1, t^2 - 2, t - 1\}$
$\mathbf{v} = p(t) = 4t^2 + t - 5$

ML.6. En cada parte, determine si **v** pertenece a gen S, donde

$$\begin{aligned} S &= \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \\ &= \{(1, 1, 0, 1), (1, -1, 0, 1), (0, 1, 2, 1)\}. \end{aligned}$$

(a) $\mathbf{v} = (2, 3, 2, 3)$

(b) $\mathbf{v} = (2, -3, -2, 3)$

(c) $\mathbf{v} = (0, 1, 2, 3)$

ML.7. En cada parte, determine si $p(t)$ pertenece a gen S, donde

$$\begin{aligned} S &= \{p_1(t),\ p_2(t),\ p_3(t)\} \\ &= \{t - 1, t + 1, t^2 + t + 1\}. \end{aligned}$$

(a) $p(t) = t^2 + 2t + 4$

(b) $p(t) = 2t^2 + t - 2$

(c) $p(t) = -2t^2 + 1$

6.3 INDEPENDENCIA LINEAL

En las secciones anteriores de este capítulo definimos un sistema matemático denominado espacio vectorial real y establecimos algunas de sus propiedades. Observemos, ahora, que el único espacio vectorial real que tiene un número finito de vectores, es el espacio cuyo único vector es $\mathbf{0}$. En efecto, si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ está en el espacio vectorial V y $c \neq c'$ son números reales distintos entonces, de acuerdo con el ejercicio T.4 de la sección 6.1, $c\mathbf{v} \neq c'\mathbf{v}$, lo cual permite concluir que V tiene una infinidad de vectores. Sin embargo, en esta sección y en la siguiente mostraremos que casi todo espacio vectorial V estudiado aquí posee un conjunto con un número finito de vectores que describen por completo el espacio V; esto es, cada vector en V puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores en tal conjunto. En general, debe notarse que existe más de uno de tales conjuntos que describen a V. Ahora formularemos estas ideas.

DEFINICIÓN Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ de un espacio vectorial V **generan** a V, si cada vector en V es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Además, si se denota por S el conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, se dice también que S **genera a** V, o que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ **genera a** V, o que V es **generado por** S o, en el lenguaje de la sección 6.2, gen $S = V$.

El procedimiento para establecer si los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ generan el espacio vectorial V es como sigue.

Paso 1. Seleccione un vector arbitrario **v** en V.

Paso 2. Determine si **v** es una combinación lineal de los vectores dados. Si lo es, los vectores dados generan a V; si no, los vectores dados no generan a V.

Nuevamente, en el paso 2, investigamos la consistencia de un sistema lineal, pero esta vez para un lado derecho que representa un vector arbitrario en un espacio vectorial V.

EJEMPLO 1 Sea V el espacio vectorial R^3 y sean

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 2) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0).$$

¿Los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ generan a V?

Solución ***Paso 1.*** Sea $\mathbf{v} = (a, b, c)$ un vector arbitrario en R^3 (es decir, donde a, b y c son números reales arbitrarios).

Paso 2. Debemos examinar si $\mathbf{v}$ es combinación lineal de los vectores dados, es decir, si existen constantes c_1, c_2 y c_3 tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}.$$

La ecuación anterior conduce al sistema lineal (verifique)

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= a \\ 2c_1 \qquad + c_3 &= b \\ c_1 + 2c_2 \qquad &= c. \end{aligned}$$

Una solución es (verifique)

$$c_1 = \frac{-2a + 2b + c}{3}, \qquad c_2 = \frac{a - b + c}{3}, \qquad c_3 = \frac{4a - b - 2c}{3}.$$

Dado que existe una solución para cualquier elección de a, b y c, se concluye que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ generan a R^3, o que gen$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = R^3$. ■

EJEMPLO 2 Demuestre que

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

genera el subespacio de M_{22} formado por las matrices simétricas.

Solución ***Paso 1.*** Una matriz simétrica arbitraria de 2×2, tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

donde a, b y c son números reales cualesquiera.

Paso 2. Debemos encontrar constantes d_1, d_2 y d_3 tales que

$$d_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix},$$

lo cual conduce a un sistema lineal cuya solución es (verifique)

$$d_1 = a, \quad d_2 = b, \quad d_3 = c.$$

Como hemos encontrado una solución para toda elección de a, b y c, concluimos que S genera al subespacio dado. ■

EJEMPLO 3 Sea V el espacio vectorial P_2. Sea $S = \{p_1(t), p_2(t)\}$, donde $p_1(t) = t^2 + 2t + 1$ y $p_2(t) = t^2 + 2$. ¿S genera a P_2?

Solución ***Paso 1.*** Sea $p(t) = at^2 + bt + c$ un polinomio en P_2, donde a, b y c son números reales cualesquiera.

Paso 2. Debemos determinar si existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$p(t) = c_1p_1(t) + c_2p_2(t),$$

es decir, tales que

$$at^2 + bt + c = c_1(t^2 + 2t + 1) + c_2(t^2 + 2).$$

Así,

$$(c_1 + c_2)t^2 + (2c_1)t + (c_1 + 2c_2) = at^2 + bt + c.$$

Como dos polinomios coinciden para todos los valores de t sólo si los coeficientes de las potencias respectivas de t coinciden, obtenemos el sistema lineal

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= a \\ 2c_1 &= b \\ c_1 + 2c_2 &= c. \end{aligned}$$

Utilizando operaciones elementales por filas sobre la matriz aumentada del sistema, obtenemos (verifique)

$$\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 2a - c \\ 0 & 1 & c - a \\ 0 & 0 & b - 4a + 2c \end{array}\right].$$

Si $b - 4a + 2c \neq 0$, el sistema es inconsistente y no existe solución. Por esta razón, $S = \{p_1(t), p_2(t)\}$ no genera a P_2. Por ejemplo, el polinomio $3t^2 + 2t - 1$ no puede escribirse como una combinación lineal de $p_1(t)$ y $p_2(t)$. ■

EJEMPLO 4 Los vectores $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j} = (0, 1)$ generan a R^2, ya que, como observamos en las secciones 4.1 y 4.2, si $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es cualquier vector en R^2, entonces $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2$. Como se observó en la sección 4.2, todo vector $\mathbf{u}$ en R^3 se puede escribir como combinación lineal de los vectores $\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{j} = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{e}_3 = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Entonces $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ generan a R^3 . En forma similar, los vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ generan a R^n, puesto que cualquier vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ en R^n puede expresarse como

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + \cdots + u_n\mathbf{e}_n.$$ ■

EJEMPLO 5 El conjunto $S = \{t^n, t^{n-1}, \ldots, t, 1\}$ genera a P_n, pues todo polinomio en P_n es de la forma

$$a_0t^n + a_1t^{n-1} + \cdots + a_{n-1}t + a_n,$$

que es una combinación lineal de los elementos en S. ■

EJEMPLO 6 Considere el sistema lineal homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 4 & -1 & 9 \end{bmatrix}.$$

El conjunto de todas las soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ forma un subespacio de R^4 (vea el ejemplo 9, sección 6.2). Para determinar un conjunto generador del espacio solución de este sistema homogéneo, encontremos la forma escalonada reducida por filas de la matriz aumentada. El resultado es (verifique)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Entonces, la solución general está dada por

$$\begin{aligned} x_1 &= -r - 2s \\ x_2 &= r \\ x_3 &= s \\ x_4 &= s, \end{aligned}$$

donde r y s son números reales cualesquiera. Cada elemento del espacio solución está dado entonces, en forma matricial, por

$$\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, los vectores $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ generan el espacio solución. ■

INDEPENDENCIA LINEAL

DEFINICIÓN Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ en un espacio vectorial V son **linealmente dependientes** si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_k$ no todas iguales a cero, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}. \tag{1}$$

En caso contrario, se dice que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, son **linealmente independientes**; esto es, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes si siempre que $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, debemos tener, necesariamente, que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0.$$

En otras palabras, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, son **linealmente independientes** si la *única* combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ que da como resultado el vector cero es aquella en la que todos los coeficientes son cero. Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, se dice que el conjunto S es **linealmente dependiente** o **linealmente independiente** según si los vectores de S tienen la correspondiente propiedad.

Observe que, cualesquiera sean los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$, la ecuación (1) siempre se cumple si hacemos igual a cero cada uno de los escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$. El punto importante de la definición es si es posible satisfacer la ecuación (1) con, por lo menos uno de los escalares, diferente de cero.

El procedimiento para determinar si los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente dependientes o linealmente independientes es como sigue.

Paso 1. Plantee la ecuación (1), la cual conduce a un sistema homogéneo.
Paso 2. Si el sistema homogéneo que se obtuvo en el paso 1 tiene sólo la solución trivial, entonces los vectores dados son linealmente independientes; si tiene una solución no trivial, entonces los vectores son linealmente dependientes.

EJEMPLO 7 Determinemos si los vectores

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

que generan el espacio solución del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ del ejemplo 6 son linealmente dependientes o linealmente independientes.

Solución Cuando se forma la ecuación (1)

$$c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

se obtiene el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} -c_1 - 2c_2 &= 0 \\ c_1 + 0c_2 &= 0 \\ 0c_1 + c_2 &= 0 \\ 0c_1 + c_2 &= 0, \end{aligned}$$

cuya única solución es $c_1 = c_2 = 0$. Entonces los vectores dados son linealmente independientes. ■

EJEMPLO 8 Determinar si los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1, 2)$ y $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 3)$ en R^4, son linealmente dependientes o si son linealmente independientes.

Solución Inicialmente formamos la ecuación (1),

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

que debemos resolver para c_1, c_2 y c_3. El sistema homogéneo resultante es (verifique)

$$\begin{aligned} c_1 \phantom{{}+ 2c_2} + c_3 &= 0 \\ c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0, \end{aligned}$$

cuya única solución es $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ (verifique). Esto muestra que los vectores dados son linealmente independientes. ■

EJEMPLO 9 Considere los vectores

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, -2, 1), \quad \mathbf{v}_3 = (-3, 2, -1)$$

y

$$\mathbf{v}_4 = (2, 0, 0) \quad \text{en } R^3.$$

¿Es el conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ linealmente dependiente o linealmente independiente?

Solución Después de establecer la ecuación (1), llegamos al sistema homogéneo de tres ecuaciones con cuatro incógnitas (verifique)

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 - 3c_3 + 2c_4 &= 0 \\ 2c_1 - 2c_2 + 2c_3 \phantom{{}+2c_4} &= 0 \\ -c_1 + c_2 - c_3 \phantom{{}+2c_4} &= 0, \end{aligned}$$

que, de acuerdo con el teorema 1.8 de la sección 1.6, tiene soluciones no triviales. Entonces S es linealmente dependiente. En particular, dos de las infinitas soluciones son

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 0;$$
$$c_1 = 1, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = -1.$$ ■

EJEMPLO 10 Los vectores $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ en R^2, definidos en el ejemplo 4, son linealmente independientes puesto que

$$c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (0, 0)$$

se satisface solamente para $c_1 = c_2 = 0$. Similarmente, los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ en R^3 y, en general, los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ en R^n, son linealmente independientes (ejercicio T.1). ■

Como veremos, el corolario 6.4 de la sección 6.6, establece otra forma de determinar la dependencia o independencia lineal de n vectores dados en R^n. Consiste en formar la matriz A, cuyas columnas son los n vectores dados. Entonces, los vectores dados son linealmente independientes si, y sólo si $\det(A) \neq 0$. Como ilustración, en el ejemplo 10,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y $\det(A) = 1$, de modo que $\mathbf{e}_1$ y $\mathbf{e}_2$ son linealmente independientes.

EJEMPLO 11 Considere los vectores

$$p_1(t) = t^2 + t + 2, \qquad p_2(t) = 2t^2 + t, \qquad p_3(t) = 3t^2 + 2t + 2.$$

Para determinar si $S = \{p_1(t), p_2(t), p_3(t)\}$ es linealmente dependiente o linealmente independiente, plantearemos la ecuación (1) y la resolveremos para c_1, c_2 y c_3. El sistema homogéneo resultante es (verifique)

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 &= 0 \\ 2c_1 \phantom{{}+2c_2} + 2c_3 &= 0, \end{aligned}$$

el cual tiene una infinidad de soluciones (verifique). Una solución particular es $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = -1$. La sustitución de estos valores en la ecuación correspondiente muestra que

$$p_1(t) + p_2(t) - p_3(t) = 0.$$

Por lo tanto, S es linealmente dependiente. ■

EJEMPLO 12 Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son k vectores en un espacio vectorial y $\mathbf{v}_i$ es el vector cero, la ecuación (1) se cumple haciendo $c_i = 1$ y $c_j = 0$ para $j \neq i$. Esto indica que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente dependiente, es decir, que *todo conjunto de vectores que incluya el vector cero es linealmente dependiente.* ■

Sean S_1 y S_2 subconjuntos finitos de un espacio vectorial y tales que S_1 es subconjunto de S_2. Entonces: (a) si S_1 es linealmente dependiente, también lo es S_2; y (b), si S_2 es linealmente independiente, también lo es S_1 (ejercicio T.2).

A continuación analizaremos el significado de independencia lineal en R^2 y en R^3. Supongamos que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente dependientes en R^2. Entonces existen escalares c_1 y c_2, por lo menos uno distinto de cero, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.$$

Si $c_1 \neq 0$, entonces

$$\mathbf{v}_1 = \left(-\frac{c_2}{c_1}\right)\mathbf{v}_2.$$

Si $c_2 \neq 0$, entonces

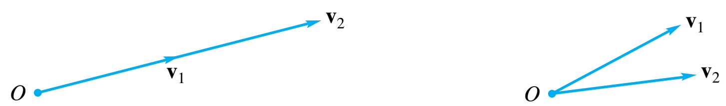
$$\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{c_1}{c_2}\right)\mathbf{v}_1.$$

Como vemos, en cualquiera de los casos uno de los vectores es un múltiplo escalar del otro. Recíprocamente, suponga que $\mathbf{v}_1 = c\mathbf{v}_2$. Entonces

$$1\mathbf{v}_1 - c\mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

y como los coeficientes de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ no son ambos iguales a cero, entonces $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente dependientes. En síntesis, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente dependientes en R^2 si y sólo si uno de los vectores es múltiplo del otro. Geométricamente, dos vectores en R^2 son linealmente dependientes si y sólo si ambos pertenecen a una misma recta que pasa por el origen [figura 6.7(a)].

Figura 6.7 ▶



(a) Vectores en R^2, linealmente dependientes (b) Vectores en R^2, linealmente independientes

Ahora suponga que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son linealmente dependientes en R^3. Entonces podemos escribir

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

donde c_1, c_2 y c_3 no todos son cero; digamos $c_2 \neq 0$. Entonces

$$\mathbf{v}_2 = \left(-\frac{c_1}{c_2}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{c_3}{c_2}\right)\mathbf{v}_3,$$

lo cual significa que $\mathbf{v}_2$ está en el subespacio W generado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3$.

Este subespacio W, o es un plano que pasa por el origen (cuando $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3$ son linealmente independientes), o es una recta que pasa por el origen (cuando $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3$ son linealmente dependientes), o es el origen (cuando $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$). Como una recta que pasa por el origen siempre pertenece a un plano que pasa por el origen, podemos concluir que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ están en un mismo plano, que pasa por el origen. Recíprocamente, supongamos que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ están en un mismo plano que pasa por el origen. Entonces, o los tres vectores son el vector cero, o están en una misma recta que pasa por el origen, o están en un plano que pasa por el origen y es generado por dos de ellos, digamos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3$. En todos estos casos, $\mathbf{v}_2$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{v}_2 = a_1\mathbf{v}_1 + a_3\mathbf{v}_3.$$

Entonces

$$a_1\mathbf{v}_1 - 1\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

lo cual significa que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son linealmente dependientes. En síntesis, tres vectores en R^3 son linealmente dependientes si y sólo si están en un mismo plano que pasa por el origen [figura 6.8(a)]

Figura 6.8 ►

(a) Vectores en R^3, linealmente dependientes (b) Vectores en R^3, linealmente independientes

En términos más generales, sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores distintos de cero en un espacio vectorial V. Podemos mostrar (ejercicio T.13) que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente dependientes si y sólo si existe un escalar k tal que $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$. O, de forma equivalente, $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son linealmente independientes si y sólo si ninguno de los vectores es múltiplo del otro. Esta caracterización no funciona para conjuntos de tres o más vectores; en estos casos utilizaremos el resultado que se establece en el teorema siguiente.

TEOREMA 6.4 *Los vectores no nulos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ en un espacio vectorial V, son linealmente dependientes si, y sólo si uno de los vectores $\mathbf{v}_j$, $j \geq 2$, es una combinación lineal de los vectores que lo preceden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}$.*

Demostración Si $\mathbf{v}_j$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}$,

$$\mathbf{v}_j = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{j-1}\mathbf{v}_{j-1},$$

entonces

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + (-1)\mathbf{v}_j + 0\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Como uno por lo menos de los coeficientes, -1, es diferente de cero, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes.

Supongamos ahora que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente dependientes. Entonces existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todos cero, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Sea j el mayor subíndice para el cual $c_j \neq 0$. Si $j > 1$, entonces

$$\mathbf{v}_j = -\left(\frac{c_1}{c_j}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{c_2}{c_j}\right)\mathbf{v}_2 - \cdots - \left(\frac{c_{j-1}}{c_j}\right)\mathbf{v}_{j-1}.$$

Si $j = 1$, entonces $c_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, lo cual implica que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, una contradicción con la hipótesis de que ninguno de los vectores es el vector cero. Por lo tanto, uno de los vectores $\mathbf{v}_j$ es una combinación lineal de los vectores que le preceden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}$. ■

EJEMPLO 13 Si $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$ son los vectores del ejemplo 9, encontramos (verifique) que

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{0},$$

es decir, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$ son linealmente dependientes. En este caso,

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$ ■

Observaciones

1. El teorema 6.4 no dice que en un conjunto de vectores linealmente dependientes *todo* vector $\mathbf{v}$ del conjunto es una combinación lineal de los vectores que le preceden. Así, en el ejemplo 9, también se cumple que $\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. Sin embargo, no podemos despejar a $\mathbf{v}_4$ para expresarlo como combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, puesto que su coeficiente es cero.
2. También podemos probar que si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto de vectores en un espacio vectorial V, entonces S es linealmente dependiente si y sólo si uno de los vectores en S es una combinación lineal de todos los demás vectores en S (ejercicios T.3). Como ilustración, el ejemplo 13,
$$\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2 - 0\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = -\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_3 - 0\mathbf{v}_4.$$
3. Si los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ en un espacio vectorial V son linealmente independientes, entonces no puede haber entre ellos dos vectores iguales, y ninguno de ellos puede ser el vector cero.

El resultado siguiente se utilizará en la sección 6.4 y en otras partes del texto. Suponga que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ genera un espacio vectorial V y que $\mathbf{v}_j$ es una combinación lineal de los vectores que le preceden en S. Entonces el conjunto

$$S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

que consta de los vectores en S, con excepción de $\mathbf{v}_j$, también genera a V. Para demostrar este resultado, observe que si $\mathbf{v}$ es cualquier vector en V, entonces, como S genera a V, podemos encontrar escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + a_j\mathbf{v}_j + a_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n.$$

Ahora, si

$$\mathbf{v}_j = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_{j-1}\mathbf{v}_{j-1},$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + a_j(b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_{j-1}\mathbf{v}_{j-1})\\ &\quad + a_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n\\ &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + c_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n,\end{aligned}$$

lo cual significa que gen $S_1 = V$.

EJEMPLO 14 Considere el conjunto de vectores $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ en R^4, donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix},$$

y sea $W =$ gen S, Como $\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, concluimos que $W =$ gen S_1, donde $S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. ■

GENERADOR E INDEPENDENCIA LINEAL EN B^n (OPCIONAL)

Los conceptos de independencia lineal, dependencia lineal y generador, son válidos independientemente de la naturaleza de los escalares o de la de los vectores de un espacio vectorial. Recordemos que en el caso del espacio vectorial B^n sólo se permiten a 0 y 1 como escalares, y que todas las operaciones aritméticas se realizan con aritmética binaria.

EJEMPLO 15 Sea V el espacio vectorial B^3 y sean

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

¿Generan los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ a V?

Solución Sea $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ cualquier vector en B^3, es decir, donde a, b y c son pueden ser cualquiera de los dígitos binarios 0 o 1. Debemos establecer si existen escalares c_1, c_2 y c_3 (dígitos binarios) tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}.$$

Esto conduce al sistema lineal

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= a \\ c_1 + c_3 &= b \\ c_2 + c_3 &= c. \end{aligned}$$

Formamos la matriz aumentada y obtenemos su forma escalonada reducida por filas (verifique):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a+a+b \\ 0 & 1 & 1 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & a+b+c \end{array}\right].$$

El sistema es inconsistente si la elección de dígitos binarios para a, b y c es tal que $a + b + c \neq 0$; por ejemplo, si $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. En consecuencia, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ no generan a V. ■

EJEMPLO 16 ¿Son los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ del ejemplo 15, linealmente independientes?

Solución Con base en la ecuación (1), planteamos el sistema lineal homogéneo

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1 + c_3 &= 0 \\ c_2 + c_3 &= 0. \end{aligned}$$

cuya forma escalonada reducida por filas es (verifique)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Entonces, $c_1 = -c_3$ y $c_2 = -c_3$, donde c_3 es 0 o 1. Escogiendo $c_3 = 1$, encontramos la solución no trivial $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ (verifique). Por lo tanto, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ son linealmente dependientes. ■

Términos clave

Generador
Linealmente dependiente
Linealmente independiente

6.3 Ejercicios

1. ¿Cuáles de los siguientes vectores generan a R^2?

(a) $(1, 2), (-1, 1)$

(b) $(0, 0), (1, 1), (-2, -2)$

(c) $(1, 3), (2, -3), (0, 2)$

(d) $(2, 4), (-1, 2)$

2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores generan a R^3?

(a) $\{(1, -1, 2), (0, 1, 1)\}$

(b) $\{(1, 2, -1), (6, 3, 0), (4, -1, 2), (2, -5, 4)\}$

(c) $\{(2, 2, 3), (-1, -2, 1), (0, 1, 0)\}$

(d) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

3. ¿Cuáles de los siguientes vectores generan a R^4?

(a) $(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0)$

(b) $(1, 2, 1, 0), (1, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)$

(c) $(6, 4, -2, 4), (2, 0, 0, 1), (3, 2, -1, 2),$ $(5, 6, -3, 2), (0, 4, -2, -1)$

(d) $(1, 1, 0, 0), (1, 2, -1, 1), (0, 0, 1, 1),$ $(2, 1, 2, 1)$

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de polinomios generan a P_2?

(a) $\{t^2 + 1, t^2 + t, t + 1\}$

(b) $\{t^2 + 1, t - 1, t^2 + t\}$

(c) $\{t^2 + 2, 2t^2 - t + 1, t + 2, t^2 + t + 4\}$

(d) $\{t^2 + 2t - 1, t^2 - 1\}$

5. ¿Generan los polinomios $t^3 + 2t + 1$, $t^2 - t + 2$, $t^3 + 2$, $-t^3 + t^2 - 5t + 2$ a P_3?

6. Determine un conjunto de vectores que genere el espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Determine un conjunto de vectores que genere el espacio nulo de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Sean

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

elementos del espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. ¿Es el conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ linealmente independiente?

9. Sean

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elementos del espacio nulo de A. ¿Es el conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ linealmente independiente?

10. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en R^3 son linealmente dependientes? Cuando lo sean, exprese un vector del conjunto como combinación lineal de los demás.

(a) $\{(1, 2, -1), (3, 2, 5)\}$

(b) $\{(4, 2, 1), (2, 6, -5), (1, -2, 3)\}$

(c) $\{(1, 1, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 3), (3, 6, 6)\}$

(d) $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$

11. Considere el espacio vectorial R^4. Siga las indicaciones del ejercicio 10.

(a) $\{(1, 1, 2, 1), (1, 0, 0, 2), (4, 6, 8, 6), (0, 3, 2, 1)\}$

(b) $\{(1, -2, 3, -1), (-2, 4, -6, 2)\}$

(c) $\{(1, 1, 1, 1), (2, 3, 1, 2), (3, 1, 2, 1), (2, 2, 1, 1)\}$

(d) $\{(4, 2, -1, 3), (6, 5, -5, 1), (2, -1, 3, 5)\}$

12. Considere el espacio vectorial P_2. Siga las indicaciones del ejercicio 10.

(a) $\{t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$

(b) $\{2t^2 + 1, t^2 + 3, t\}$

(c) $\{3t + 1, 3t^2 + 1, 2t^2 + t + 1\}$

(d) $\{t^2 - 4, 5t^2 - 5t - 6, 3t^2 - 5t + 2\}$

13. Considere el espacio vectorial M_{22}. Siga las indicaciones del ejercicio 10.

(a) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\right\}$

(b) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}$

(c) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$

14. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones continuas de valores reales. Siga las indicaciones del ejercicio 10.

(a) $\{\cos t, \operatorname{sen} t, e^t\}$ (b) $\{t, e^t, \operatorname{sen} t\}$

(c) $\{t^2, t, e^t\}$ (d) $\{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t, \cos 2t\}$

15. ¿Para qué valores de c son los vectores $(-1, 0, -1)$, $(2, 1, 2)$ y $(1, 1, c)$ en R^3 linealmente dependientes?

16. ¿Para qué valores de λ son los vectores $t + 3$ y $2t + \lambda^2 + 2$ en P_1 linealmente dependientes?

17. Determine si los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ generan a B^3.

18. Determine si los vectores $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ generan a B^3.

19. Determine si los vectores $\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ generan a B^4.

20. Determine si los vectores del ejercicio 17 son linealmente independientes.

21. Determine si los vectores del ejercicio 19 son linealmente independientes.

22. Con base en el teorema 6.4, muestre que los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ del ejemplo 15 son linealmente dependientes.

Ejercicios teóricos

T.1. Demuestre que los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ en R^n son linealmente independientes.

T.2. Sean S_1 y S_2 subconjuntos finitos de un espacio vectorial, y tales que S_1 es un subconjunto de S_2. Muestre que:

(a) Si S_1 es linealmente dependiente, también lo es S_2.

(b) Si S_2 es linealmente independiente, también lo es S_1.

T.3. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial. Muestre que S es linealmente dependiente si y sólo si uno de los vectores en S es una combinación lineal de los demás vectores en S.

T.4. Suponga que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en un espacio vectorial V. Muestre que $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, donde $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ y $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3$, también es linealmente independiente.

T.5. Suponga que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en un espacio vectorial V. ¿Es el conjunto $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, donde $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$ y $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ linealmente dependiente o linealmente independiente? Justifique su respuesta.

T.6. Suponga que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es un conjunto linealmente dependiente de vectores en un espacio vectorial V. ¿Es el conjunto $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, donde $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ linealmente dependiente o linealmente independiente? Justifique su respuesta.

T.7. Sean $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ vectores en un espacio vectorial, tales que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es linealmente independiente. Muestre que si $\mathbf{v}_3$ no pertenece a gen $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es linealmente independiente.

T.8. Sea A una matriz de $m \times n$ en forma escalonada reducida por filas. Muestre que las filas no nulas de A, vistas como vectores en R^n, forman un conjunto linealmente independiente de vectores.

T.9. Sea $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ un conjunto de vectores en un espacio vectorial, y sea $T = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, donde cada $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, es una combinación lineal de los vectores de S. Muestre que

$$\mathbf{w} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_m\mathbf{v}_m$$

es una combinación lineal de los vectores de S.

T.10. Suponga que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de R^n. Muestre que si A es una matriz no singular de $n \times n$, entonces $\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \ldots, A\mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente.

T.11. Sean S_1 y S_2 subconjuntos finitos de un espacio vectorial V y sea S_1 un subconjunto de S_2. Si S_2 es linealmente dependiente, muestre, mediante algunos ejemplos, que S_1 puede ser linealmente dependiente o linealmente independiente.

T.12. Sean S_1 y S_2 subconjuntos finitos de un espacio vectorial V y sea S_1 un subconjunto de S_2. Si S_1 es linealmente independiente, muestre, mediante algunos ejemplos, que S_2 puede ser linealmente dependiente o linealmente independiente.

T.13. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores distintos de cero en un espacio vectorial V. Muestre que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es linealmente dependiente si y sólo si existe un escalar k tal que $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$. En forma equivalente, $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es linealmente independiente si y sólo si uno de los vectores no es múltiplo del otro.

T.14. (***Requiere material de la sección 5.1***) Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores linealmente independientes en R^3. Muestre que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ forman una base para R^3. [*Sugerencia:* forme la ecuación (1) y tome el producto punto con $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.]

T.15. Sea W el subespacio de V generado por los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$. ¿Existe algún vector $\mathbf{v}$ en V tal que gen $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}\}$ también sea W? Si la respuesta es afirmativa, describa todos esos vectores $\mathbf{v}$.

Ejercicios con MATLAB

ML.1. Determine si S es linealmente independiente o linealmente dependiente.

(a) $S = \{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$

(b) $S = \left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$

(c) $S = \left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\0\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$

ML.2. Determine un conjunto generador del espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}.$$

6.4 BASES Y DIMENSIÓN

En esta sección proseguiremos con el estudio de la estructura de un espacio vectorial V, para lo cual determinaremos un conjunto mínimo de vectores de V que describa completamente a V.

BASE

DEFINICIÓN Los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ en un espacio vectorial V forman una **base** para V si (a) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ generan a V y (b) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ son linealmente independientes.

Observación Si los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ forman una base para un espacio vectorial V, ellos son distintos y no nulos (vea el ejemplo 12 en las sección 6.3); por esto los escribiremos como un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$.

EJEMPLO 1 Los vectores $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ y $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ forman una base para R^2, los vectores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$ forman una base para R^3 y, en general, los vectores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ forman una base para R^n. Cada uno de estos conjuntos de vectores se llama **base natural**, **base estándar** o **base canónica** para R^2, R^3 y R^n, respectivamente. ■

EJEMPLO 2 Muestre que el conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, donde $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, -1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 2, 2, 1)$ y $\mathbf{v}_4 = (1, 0, 0, 1)$, es una base para R^4.

Solución Para mostrar que S es linealmente independiente, formamos la ecuación

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

y resolvemos para c_1, c_2, c_3 y c_4. Al sustituir los valores de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$, obtenemos el sistema lineal (verifique)

$$\begin{aligned} c_1 \phantom{{}-c_2+2c_3} + c_4 &= 0 \\ c_2 + 2c_3 \phantom{{}+c_4} &= 0 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 \phantom{{}+c_4} &= 0 \\ 2c_2 + c_3 + c_4 &= 0, \end{aligned}$$

que tiene como única solución $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$ (verifique), lo cual muestra que S es linealmente independiente. Observe que el coeficiente de la matriz del sistema lineal precedente consiste en los vectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$ escritos en forma de columna.

Para mostrar que S genera a R^4, sea $\mathbf{v} = (a, b, c, d)$ un vector cualquiera de R^4. Debemos encontrar constantes k_1, k_2, k_3 y k_4 tales que

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + k_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{v}.$$

Cuando se sustituyen $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ $\mathbf{v}_4$ y $\mathbf{v}$, es siempre posible hallar una solución (verifíquelo) k_1, k_2, k_3 y k_4 del sistema lineal resultante, para cualesquiera a, b, c, d; por lo tanto, S genera a R^4. Se concluye así que S es una base para R^4. ■

EJEMPLO 3 Demuestre que el conjunto $S = \{t^2 + 1, t - 1, 2t + 2\}$ es una base para el espacio vectorial P_2.

Solución Debemos mostrar que S genera a V, y que es linealmente independiente. Para probar que genera a V, sea el polinomio $at^2 + bt + c$ un vector arbitrario en V. Determinaremos constantes a_1, a_2 y a_3, tales que

$$\begin{aligned} at^2 + bt + c &= a_1(t^2 + 1) + a_2(t - 1) + a_3(2t + 2) \\ &= a_1t^2 + (a_2 + 2a_3)t + (a_1 - a_2 + 2a_3). \end{aligned}$$

Dado que los dos polinomios coinciden para todos los valores de t sólo si los coeficientes de las respectivas potencias respectivas de t son iguales, obtenemos el sistema lineal

$$\begin{aligned} a_1 \qquad\qquad &= a \\ a_2 + 2a_3 &= b \\ a_1 - a_2 + 2a_3 &= c. \end{aligned}$$

cuya solución es

$$a_1 = a, \quad a_2 = \frac{a + b - c}{2}, \quad a_3 = \frac{c + b - a}{4}.$$

Por lo tanto, S genera a V.

Para ilustrar este resultado, considere el vector $2t^2 + 6t + 13$. Aquí, $a = 2$, $b = 6$ y $c = 13$. Al sustituir estos valores en las expresiones precedentes para a_1, a_2 y a_3, encontramos que

$$a_1 = 2, \quad a_2 = -\tfrac{5}{2}, \quad a_3 = \tfrac{17}{4}.$$

Por lo tanto,

$$2t^2 + 6t + 13 = 2(t^2 + 1) - \tfrac{5}{2}(t - 1) + \tfrac{17}{4}(2t + 2).$$

Para probar que S es linealmente independiente, formamos la combinación lineal

$$a_1(t^2 + 1) + a_2(t - 1) + a_3(2t + 2) = 0.$$

De ella se deduce que

$$a_1t^2 + (a_2 + 2a_3)t + (a_1 - a_2 + 2a_3) = 0.$$

Una vez más, esta igualdad se satisface para todos los valores de t sólo si

$$\begin{aligned} a_1 \qquad\qquad &= 0 \\ a_2 + 2a_3 &= 0 \\ a_1 - a_2 + 2a_3 &= 0. \end{aligned}$$

La única solución para este sistema homogéneo es $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, es decir, S es linealmente independiente. En consecuencia, S es una base para P_2. ■

El conjunto de vectores $\{t^n, t^{n-1}, \ldots, t, 1\}$ forma una base para el espacio vectorial P_n, denominada **base canónica**, **base estándar** o **base natural** para P_n. En el ejemplo 5 de la sección 6.3 se demostró que este conjunto es un generador de P_n. La demostración de la independencia lineal de tales vectores se deja como ejercicio (ejercicio T.15).

EJEMPLO 4 Determine una base para el subespacio de P_2, formado por los vectores de la forma $at^2 + bt + c$, donde $c = a - b$.

Solución Todo vector en V es de la forma

$$at^2 + bt + a - b,$$

que puede escribirse como

$$a(t^2 + 1) + b(t - 1),$$

lo cual muestra que los vectores $t^2 + 1$ y $t - 1$ generan a V. Además, estos vectores son linealmente independientes ya que ninguno es múltiplo del otro. También podría haberse obtenido (con mayor trabajo) esta conclusión sobre independencia lineal, escribiendo la ecuación

$$a_1(t^2 + 1) + a_2(t - 1) = 0$$

o

$$t^2a_1 + ta_2 + (a_1 - a_2) = 0.$$

Como esta ecuación se cumple para todos los valores de t, debemos tener $a_1 = 0$ y $a_2 = 0$, que es la condición de independencia lineal. ■

Un espacio vectorial es de **dimensión finita** si existe un subconjunto finito de V que es una base para V; en caso contrario, es decir, si no existe tal subconjunto finito de V, el espacio es de **dimensión infinita**.

Casi todos los espacios vectoriales considerados en este libro son de dimensión finita. Sin embargo, es conveniente anotar que muchos espacios vectoriales de importancia en matemáticas y en física son de dimensión infinita; su estudio excede el alcance de este libro. El espacio vectorial P, de todos los polinomios, y el espacio vectorial $C(-\infty, \infty)$de las funciones continuas $f: R \rightarrow R$, no son de dimensión finita.

Ahora estableceremos algunos resultados relativos a espacios vectoriales de dimensión finita, que hacen referencia al número de vectores en una base, comparan el número de vectores de dos bases diferentes y establecen propiedades de las bases.

TEOREMA 6.5 *Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V, entonces cada vector en V se puede escribir de una y sólo una forma como combinación lineal de los vectores en S.*

Demostración En primer lugar, todo vector $\mathbf{v}$ en V se puede escribir como combinación lineal de los vectores en S, pues S es generador de V. Ahora, supongamos que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n \tag{1}$$

y

$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \cdots + d_n\mathbf{v}_n \tag{2}$$

son dos combinaciones lineales para el vector $\mathbf{v}$, en la base S.

Al restar (2) de (1), obtenemos

$$0 = (c_1 - d_1)\mathbf{v}_1 + (c_2 - d_2)\mathbf{v}_2 + \cdots + (c_n - d_n)\mathbf{v}_n.$$

Como S es linealmente independiente, $c_i - d_i = 0$, $1 \leq i \leq n$, de modo que $c_i = d_i$, $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, sólo hay una forma de expresar $\mathbf{v}$ como combinación lineal de los vectores en S. ■

Se puede también mostrar (ejercicio T.11) que si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto de vectores en un espacio vectorial V tales que todo vector en V se puede escribir de una y sólo de una forma como combinación lineal de los vectores en S, entonces S es una base para V.

TEOREMA 6.6 *Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores no nulos en un espacio vectorial V y sea $W =$ gen S. Entonces, algún subconjunto de S es una base para W.*

Demostración **Caso I.** Si S es linealmente independiente, entonces S es una base para W porque S es generador de W, de acuerdo con la hipótesis.

Caso II. Si S es linealmente dependiente, entonces existen $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todos iguales a cero, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Por lo tanto, algún $\mathbf{v}_j$ es una combinación lineal de los vectores anteriores en S (teorema 6.4). Ahora, eliminamos $\mathbf{v}_j$ de S, para obtener un subconjunto S_1 de S. Entonces, por la observación anterior al ejemplo 14 de la sección 6.3, concluimos que $S_1 = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ también genera a W.

Si S_1 es linealmente independiente, entonces S_1 es una base. Si S_1 es linealmente dependiente, eliminamos un vector de S_1 que sea combinación lineal de los vectores que le preceden en S_1 y obtenemos un nuevo conjunto S_2 que también genera a W. Continuando de esta forma, y dado que S es un conjunto finito, en algún momento encontraremos un subconjunto T de S que es linealmente independiente y genera a W. Tal conjunto T es una base para W.

Demostración constructiva alternativa, cuando V es R^m, $n \geq m$. Consideremos a los vectores en S como matrices de $m \times 1$ y formemos la ecuación (3). Esta ecuación conduce a un sistema homogéneo con n incógnitas $c_1, c_2, \ldots, c_n$ que tiene, como columnas de su matriz de coeficientes A de $m \times n$, los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Sea B la forma escalonada reducida por filas de la matriz A, y supongamos que B tiene r filas no nulas, $1 \leq r \leq m$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que los r unos (1s) principales en las r filas no nulas de B aparecen en las primeras r columnas. Entonces, B tiene la forma

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1\,r+1} & \cdots & b_{1\,n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{2\,r+1} & \cdots & b_{2\,n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{3\,r+1} & \cdots & b_{3\,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r\,r+1} & \cdots & b_{r\,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Al resolver el sistema para las incógnitas correspondientes a los unos (1s) principales vemos que $c_1, c_2, \ldots, c_r$ pueden despejarse en términos de las otras incógnitas $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n$, así

$$\begin{aligned} c_1 &= -b_{1\,r+1}c_{r+1} - b_{1\,r+2}c_{r+2} - \cdots - b_{1\,n}c_n, \\ c_2 &= -b_{2\,r+1}c_{r+1} - b_{2\,r+2}c_{r+2} - \cdots - b_{2\,n}c_n, \\ &\ \vdots \\ c_r &= -b_{r\,r+1}c_{r+1} - b_{r\,r+2}c_{r+2} - \cdots - b_{r\,n}c_n, \end{aligned} \tag{4}$$

donde a $c_{r+1}, c_{r+2}, \ldots, c_n$ se les pueden asignar valores reales arbitrarios. Si en la ecuación (4) hacemos

$$c_{r+1} = 1, \quad c_{r+2} = 0, \ldots, \quad c_n = 0$$

y utilizamos estos valores en la ecuación (3), obtenemos

$$-b_{1r+1}\mathbf{v}_1 - b_{2r+1}\mathbf{v}_2 - \cdots - b_{r\,r+1}\mathbf{v}_r + \mathbf{v}_{r+1} = \mathbf{0},$$

lo cual implica que $\mathbf{v}_{r+1}$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$. De acuerdo con la observación que antecedió al ejemplo 14 de la sección 6.3, el conjunto de vectores que se obtiene eliminando $\mathbf{v}_{r+1}$ del conjunto S genera a W. De manera similar, si hacemos

$$c_{r+1} = 0, \quad c_{r+2} = 1, \quad c_{r+3} = 0, \ldots, \quad c_n = 0,$$

encontramos que $\mathbf{v}_{r+2}$ es combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ y que el conjunto de vectores obtenido a partir de S eliminando a $\mathbf{v}_{r+1}$ y a $\mathbf{v}_{r+2}$ genera a W. Al continuar de esta manera, $\mathbf{v}_{r+3}, \mathbf{v}_{r+4}, \ldots, \mathbf{v}_n$ son combinaciones lineales de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, de lo cual se sigue que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r]$ genera a W.

Mostremos ahora que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente independiente. Consideremos la matriz B_D obtenida al eliminar de B todas las columnas que no tengan un 1 principal; es decir, B_D está formada por las primeras r columnas de B.

$$B_D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Sea A_D la matriz obtenida, a partir de A, eliminando las columnas correspondientes a las columnas que fueron eliminadas en B para obtener B_D. En este caso, las columnas de A_D son $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$, las primeras r columnas de A. Como A y B son equivalentes por filas, también lo son A_D y B_D. Entonces los sistemas homogéneos

$$A_D\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad B_D\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

son equivalentes. Recordemos que el sistema homogéneo $B_D\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se puede escribir en la forma equivalente

$$x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_r\mathbf{w}_r = \mathbf{0}, \tag{5}$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r$ son las columnas de B_D. Puesto que las columnas de B_D forman un conjunto de vectores linealmente independientes en R^m, la ecuación (5) sólo tiene la solución trivial. Por lo tanto, $A_D\mathbf{x} = \mathbf{0}$ también tiene únicamente la solución trivial. En consecuencia, las columnas de A_D son linealmente independientes; esto es, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente independiente. ■

La primera demostración del teorema 6.6 permite, dado un conjunto S de vectores, determinar un subconjunto T de S, de modo que T es una base para el espacio gen S.

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores no nulos en V. El procedimiento para determinar un subconjunto de S que sea una base para $W =$ gen S es como sigue.

Paso 1. Formar la ecuación (3),

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

y resolverla para $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Si todos estos valores son cero, S es linealmente independiente, y constituye una base para W.

Paso 2. Si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no son todos cero, entonces S es linealmente dependiente y por lo tanto alguno de sus vectores —digamos, $\mathbf{v}_j$— es combinación lineal de los vectores que le preceden en S. Se elimina $\mathbf{v}_j$ de S, obteniéndose un subconjunto S_1 que también genera a W.

Paso 3. Repetir el paso 1, utilizando S_1 en lugar de S. La eliminación reiterada de vectores de S se termina cuando se obtiene un subconjunto T de S que genera a W y es linealmente independiente. Este conjunto T es una base para W.

El procedimiento anterior se hace muy tedioso puesto que *cada vez* que eliminamos un vector en S debemos resolver un sistema lineal. En la sección 6.6 estudiaremos un procedimiento más eficiente para determinar una base para $W =$ gen S, pero que *no* garantiza que tal base sea un subconjunto de S. Generalmente esto no es preocupante puesto que una base para $W =$ gen S es tan buena como cualquiera otra; sin embargo, hay casos en los cuales los vectores de S tienen ciertas propiedades y queremos que la base para $W =$ gen S también las tenga, por lo cual necesitamos que la base sea un subconjunto de S. Si $V = R^m$, la prueba alternativa del teorema 6.6 establece un procedimiento muy eficiente (vea el ejemplo 5 a continuación) para determinar una base de $W =$ gen S, formada por vectores de S.

Sean $V = R^m$, y $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores no nulos en V. El procedimiento para determinar un subconjunto de S que es una base para $W =$ gen S es el siguiente:

Paso 1. Formar la ecuación (3),

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Paso 2. Construir la matriz aumentada asociada con el sistema homogéneo resultante de la ecuación (3), y llevarla a la forma escalonada reducida por filas.

Paso 3. Los vectores en S correspondientes a las columnas que contienen los unos (1s) principales constituyen una base para $W =$ gen S.

Recuerde que en la demostración alternativa del teorema 6.6 supusimos, sin pérdida de generalidad, que los r unos principales de las r filas no nulas de B aparecen en las primeras r columnas. En este caso, si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_6\}$, por ejemplo, y los unos principales aparecen en las columnas 1, 3 y 4, entonces $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es una base para gen S.

Observación En el paso 2 del procedimiento descrito en el recuadro anterior, es suficiente transformar la matriz aumentada a la forma escalonada por filas (vea la sección 1.6).

EJEMPLO 5 Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ un conjunto de vectores en R^4, donde

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, -2, 1),\ \mathbf{v}_2 = (-3, 0, -4, 3),$$
$$\mathbf{v}_3 = (2, 1, 1, -1), \quad \mathbf{v}_4 = (-3, 3, -9, 6) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_5 = (9, 3, 7, -6).$$

Determine una base para $W = \text{gen } S$, formada de vectores del conjunto S.

Solución ***Paso 1.*** Formamos la ecuación (3),

$$c_1(1, 2, -2, 1) + c_2(-3, 0, -4, 3) + c_3(2, 1, 1, -1) \\ + c_4(-3, 3, -9, 6) + c_5(9, 3, 7, -6) = (0, 0, 0, 0).$$

Paso 2. Al igualar las componentes correspondientes, obtenemos el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} c_1 - 3c_2 + 2c_3 - 3c_4 + 9c_5 &= 0 \\ 2c_1 \qquad + c_3 + 3c_4 + 3c_5 &= 0 \\ -2c_1 - 4c_2 + c_3 - 9c_4 + 7c_5 &= 0 \\ c_1 + 3c_2 - c_3 + 6c_4 - 6c_5 &= 0. \end{aligned}$$

La forma escalonada reducida por filas de la matriz aumentada asociada es (verifique)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Paso 3. Los unos principales aparecen en las columnas 1 y 2, de modo que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base para $W = \text{gen } S$. ■

Observación En la demostración alternativa del teorema 6.6, cuando $V = R^n$, el orden de los vectores en el conjunto generador original S, determina la base para W. Por ejemplo, si consideramos el ejemplo 5, donde $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5\}$ con $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_4$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_3$, $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_4 = \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{w}_5 = \mathbf{v}_5$, entonces la forma escalonada reducida por filas de la matriz aumentada es (verifique)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto, $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \{\mathbf{v}_4, \mathbf{v}_3\}$ es una base para $W = \text{gen } S$.

Uno de los resultados principales (corolario 6.1) de esta sección, que estableceremos muy pronto, se refiere al número de vectores en dos bases diferentes. Observemos, en primer lugar, que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V, entonces $\{c\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ también es una base, si $c \neq 0$ (ejercicio T.9). Esta observación muestra que un espacio vectorial real diferente de $\mathbf{0}$ tiene siempre infinitas bases.

TEOREMA 6.7 *Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en V, entonces $r \leq n$.*

Demostración Sea $T_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Como S genera a V, T_1 también lo genera. Y, puesto que $\mathbf{w}_1$ es una combinación lineal de los vectores de S, T_1 es linealmente dependiente. Entonces, de acuerdo con el teorema 6.4, algún $\mathbf{v}_j$ es una combinación lineal de los vectores que le preceden en T_1. Eliminemos ese vector particular $\mathbf{v}_j$.

Sea $S_1 = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Observe que S_1 genera a V. A continuación, sea $T_2 = \{\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_{j+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Entonces T_2 es linealmente dependiente, y algún vector en T_2 es una combinación lineal de los vectores precedentes en T_2. Como T es linealmente independiente, dicho vector no puede ser $\mathbf{w}_1$, así que es $\mathbf{v}_i$, $i \neq j$. Repita este proceso una y otra vez. Si se eliminan todos los vectores $\mathbf{v}$ antes de que se puedan incluir todos los vectores $\mathbf{w}$, entonces el conjunto resultante de vectores $\mathbf{w}$, un subconjunto de T, es linealmente dependiente, lo cual implica que también T es linealmente dependiente. Esta contradicción, permite concluir que el número r de vectores $\mathbf{w}$ no puede ser mayor que el número n de vectores $\mathbf{v}$. Esto es $r \leq n$. ■

COROLARIO 6.1 *Si* $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *y* $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ *son bases para un espacio vectorial, entonces* $n = m$.

Demostración Como T es un conjunto linealmente independiente de vectores, el teorema 6.7 implica que $m \leq n$. Igualmente, $n \leq m$, puesto que S es linealmente independiente. Entonces, $n = m$. ■

En la observación anterior al teorema 6.7 mencionamos que un espacio vectorial tiene muchas bases; pero acabamos de demostrar que, para un espacio vectorial particular V, todas las bases tienen el mismo número de vectores. Este hecho conduce a la siguiente definición.

DIMENSIÓN

DEFINICIÓN La **dimensión** de un espacio vectorial no nulo V es el número de vectores en una base para V. Con frecuencia escribimos **dim** V para la dimensión de V. Como el conjunto $\{\mathbf{0}\}$ es linealmente dependiente, es natural decir que el espacio vectorial $\{\mathbf{0}\}$ tiene dimensión **cero**.

EJEMPLO 6 La dimensión de R^2 es 2; la dimensión de R^3 es 3; y en general, la dimensión de R^n es n. ■

EJEMPLO 7 La dimensión de P_2 es 3; la dimensión de P_3 es 4; y en general, la dimensión de P_n es $n + 1$. ■

Se puede probar que todos los espacios de dimensión finita que tienen igual dimensión difieren sólo en la naturaleza de sus elementos; sus propiedades algebraicas son idénticas.

También se puede probar que si V es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces todo subespacio no nulo W de V tiene una base finita y que dim $W \leq$ dim V (ejercicio T.2).

EJEMPLO 8 El subespacio W de R^4, considerado en el ejemplo 5, tiene dimensión 2. ■

Consideremos ahora los subespacios de R^2 [recuerde que R^2 puede visualizarse como el plano xy]. En primer lugar, tenemos $\{\mathbf{0}\}$ y R^2, los subespacios triviales, de dimensiones 0 y 2, respectivamente. En segundo lugar, el subespacio V de R^2 generado por un vector $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ es un subespacio de R^2, de dimensión uno; V está representado por una recta que pasa por el origen. Entonces, los subespacios de R^2 son $\{\mathbf{0}\}$, R^2 y las rectas que pasan por el origen. Análogamente, muestre (ejercicio T.8) que los subespacios de R^3 son $\{\mathbf{0}\}$, R^3, todas las rectas que pasan por el origen y todos los planos que pasan por el origen.

Se puede probar que si un espacio vectorial V tiene dimensión finita n, entonces cualquier conjunto de $n + 1$ vectores en V es linealmente dependiente (ejercicio T.3). En particular, cualquier conjunto con más de n vectores en R^n es linealmente dependiente; por ejemplo, se mostró que los cuatro vectores en R^3 del ejemplo 9 de la sección 6.3 son linealmente dependientes. Además, si un espacio vectorial V es de dimensión n, entonces ningún conjunto de $n - 1$ vectores en V puede generar a V (ejercicio T.4); en el ejemplo 3 de la sección 6.3, se mostró que los polinomios $p_1(t)$ y $p_2(t)$ no generan a P_2, que es de dimensión 3.

A continuación enunciaremos un teorema que será utilizado repetidamente para construir una base que contenga un conjunto dado de vectores linealmente independientes. La demostración se propone como ejercicio (ejercicio T.5). En el ejemplo que sigue al enunciado del teorema se siguen completamente los pasos requeridos en la prueba.

TEOREMA 6.8 *Si S es un conjunto de vectores linealmente independientes en un espacio vectorial de dimensión finita V, existe una base T para V, que contiene a S.* ■

El teorema 6.8 establece que un conjunto linealmente independiente de vectores en un espacio vectorial V puede extenderse a una base para V.

EJEMPLO 9 Suponga que queremos construir una base para R^4, que contenga a los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, -1, 0)$.

Utilizamos el teorema 6.8 como sigue. Primero, sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ la base canónica para R^4, donde

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \qquad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \qquad \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$$

y

$$\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Formamos el conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. Como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ genera a R^4, también S lo genera. Ahora determinaremos, de acuerdo con la demostración alternativa del teorema 6.6, una base para R^4 constituida por vectores de S. La ecuación (3),

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{e}_1 + c_4\mathbf{e}_2 + c_5\mathbf{e}_5 + c_6\mathbf{e}_4 = \mathbf{0},$$

conduce al sistema homogéneo

$$\begin{aligned} c_1 - c_2 + c_3 \qquad\qquad\quad &= 0 \\ - c_2 \qquad + c_4 \qquad\quad &= 0 \\ c_1 - c_2 \qquad\qquad + c_5 &= 0 \\ c_6 &= 0. \end{aligned}$$

Al transformar la matriz aumentada a la forma escalonada reducida por filas, obtenemos (verifique)

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Como los números 1 principales aparecen en las columnas 1, 2, 3 y 6, podemos concluir que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_4\}$ es una base para R^4 que contiene a $\mathbf{v}_1$ y a $\mathbf{v}_2$, tal como se pide. ■

De acuerdo con la definición, un conjunto de vectores en un espacio vectorial V es una base para V si genera a V y es linealmente independiente. Sin embargo, si sabemos que la dimensión de V es n, y el conjunto tiene n vectores, sólo necesitamos verificar una de las dos condiciones, de acuerdo con el teorema siguiente.

TEOREMA 6.9 *Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de n vectores en V.*

(a) *Si S es linealmente independiente, entonces es una base para V.*
(b) *Si S genera a V, entonces es una base para V.*

Demostración Ejercicio T.6. ■

La siguiente es una aplicación particular del teorema 6.9. Para determinar si un subconjunto S de R^n es una base para R^n, contamos el número de vectores en S. Si tiene n vectores, utilizamos la parte (a) o la parte (b) del teorema 6.9 para determinar si S es o no una base; si no tiene n vectores, no es base para R^n. (¿Por qué?) La misma línea de razonamiento se aplica a cualquier espacio o subespacio vectorial cuya *dimensión sea conocida*.

EJEMPLO 10 En el ejemplo 5, $W = \text{gen } S$ es un subespacio de R^4, de modo que $\dim W \leq 4$. Como S tiene cinco vectores, el corolario 6.1 muestra que S no es una base para W. En el ejemplo 2, como el conjunto S contiene cuatro vectores y $\dim R^4 = 4$, es posible que S sea una base para R^4. Si S es linealmente independiente *o* genera a R^4, es una base; en caso contrario, no lo es. Es decir, sólo necesitamos verificar una de las condiciones del teorema 6.9, no las dos. ■

BASE Y DIMENSIÓN EN B^n (OPCIONAL)

Las definiciones y teoremas de esta sección son válidas para espacios vectoriales en general, y en consecuencia lo son para B^n, con la condición de que se utilice aritmética binaria. En los ejemplos 11 a 15 se ilustran los conceptos estudiados en esta sección, para el espacio vectorial B^n.

EJEMPLO 11 Los vectores

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forman una base para B^2; los vectores

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forman una base para B^3; y, en general, las columnas de I_n forman una base para B^n. Cada uno de estos conjuntos de vectores se denomina base canónica, base estándar o base natural para B^2, B^3 y B^n, respectivamente. ■

EJEMPLO 12 La dimensión de B^2 es 2, la dimensión de B^3 es 3 y, en general, la dimensión de B^n es n; esto es, B^n es un espacio vectorial de dimensión finita. ■

EJEMPLO 13 Muestre que el conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es una base para B^3.

Solución Para mostrar que S es linealmente independiente, formamos la ecuación

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

y la resolvemos para c_1, c_2 y c_3. Al sustituir $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, obtenemos el sistema lineal (verifique)

$$\begin{aligned} c_1 \qquad\qquad &= 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ c_2 \qquad &= 0, \end{aligned}$$

que tiene como única solución $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, lo que muestra que S es linealmente independiente.

Con base en el teorema 6.9(a), S es una base para B^3. ■

EJEMPLO 14 En el ejemplo 14 de la sección 6.2, se demostró que $W = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$, donde

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

es un subespacio de B^3. Se sigue, entonces, que $\{\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ es una base para W (verifique) y por lo tanto dim $W = 2$. ■

EJEMPLO 15 Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Determine si S es una base para B^4.

Solución Debemos determinar si S genera a B^4 y si es linealmente independiente. Si $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ es un vector cualquiera en B^4, sean c_1, c_2, c_3 y c_4 dígitos binarios tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{w}.$$

Al sustituir $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ y $\mathbf{w}$, obtenemos el sistema lineal (verifique)

$$\begin{aligned} c_1 \qquad + c_3 \qquad &= a \\ c_2 + c_3 \qquad &= b \\ c_2 \qquad + c_4 &= c \\ c_1 + c_2 \qquad\qquad &= d. \end{aligned}$$

Formamos la matriz aumentada y utilizamos operaciones fila: sumar la fila 1 a la fila 4, sumar la fila 2 a la fila 3 y sumar la fila 2 a la fila 4, para obtener la matriz aumentada equivalente (verifique)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 1 & b+c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+b+d \end{array}\right].$$

Este sistema es inconsistente si la elección de dígitos binarios a, b y d es tal que $a + b + d \neq 0$. Por ejemplo, si

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

el sistema es inconsistente; por lo tanto S no genera a B^4 y no es una base para B^4. ■

Términos clave

Base
Base canónica (estándar o natural)
Espacio vectorial de dimensión finita
Espacio vectorial de dimensión infinita
Dimensión

6.4 Ejercicios

1. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para R^2?

(a) $\{(1, 3), (1, -1)\}$

(b) $\{(0, 0), (1, 2), (2, 4)\}$

(c) $\{(1, 2), (2, -3), (3, 2)\}$

(d) $\{(1, 3), (-2, 6)\}$

2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para R^3?

(a) $\{(1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$

(b) $\{(1, 1, -1), (2, 3, 4), (4, 1, -1), (0, 1, -1)\}$

(c) $\{(3, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$

(d) $\{(1, 0, 0), (0, 2, -1), (3, 4, 1), (0, 1, 0)\}$

3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para R^4?

(a) $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$

(b) $\{(1, -1, 0, 2), (3, -1, 2, 1), (1, 0, 0, 1)\}$

(c) $\{(-2, 4, 6, 4), (0, 1, 2, 0), (-1, 2, 3, 2), (-3, 2, 5, 6), (-2, -1, 0, 4)\}$

(d) $\{(0, 0, 1, 1), (-1, 1, 1, 2), (1, 1, 0, 0), (2, 1, 2, 1)\}$

4. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para P_2?

(a) $\{-t^2 + t + 2, 2t^2 + 2t + 3, 4t^2 - 1\}$

(b) $\{t^2 + 2t - 1, 2t^2 + 3t - 2\}$

(c) $\{t^2 + 1, 3t^2 + 2t, 3t^2 + 2t + 1, 6t^2 + 6t + 3\}$

(d) $\{3t^2 + 2t + 1, t^2 + t + 1, t^2 + 1\}$

5. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para P_3?

(a) $\{t^3 + 2t^2 + 3t, 2t^3 + 1, 6t^3 + 8t^2 + 6t + 4, t^3 + 2t^2 + t + 1\}$

(b) $\{t^3 + t^2 + 1, t^3 - 1, t^3 + t^2 + t\}$

(c) $\{t^3 + t^2 + t + 1, t^3 + 2t^2 + t + 3, 2t^3 + t^2 + 3t + 2, t^3 + t^2 + 2t + 2\}$

(d) $\{t^3 - t, t^3 + t^2 + 1, t - 1\}$

6. Demuestre que las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

forman una base para el espacio vectorial M_{22}.

En los ejercicios 7 y 8, determine cuál de los subconjuntos dados forma una base para R^3. Exprese el vector $(2, 1, 3)$ como combinación lineal de los vectores en cada conjunto que sea una base.

7. (a) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (0, 1, 0)\}$

(b) $\{(1, 2, 3), (2, 1, 3), (0, 0, 0)\}$

8. (a) $\{(2, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 1, 4), (1, 5, 1)\}$

(b) $\{(1, 1, 2), (2, 2, 0), (3, 4, -1)\}$

En los ejercicios 9 y 10, determine cuál de los subconjuntos dados forma una base para P_2. Exprese $5t^2 - 3t + 8$ como combinación lineal de los vectores en cada subconjunto que sea una base.

9. (a) $\{t^2 + t, t - 1, t + 1\}$

(b) $\{t^2 + 1, t - 1\}$

10. (a) $\{t^2 + t, t^2, t^2 + 1\}$

(b) $\{t^2 + 1, t^2 - t + 1\}$

11. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 2), \qquad \mathbf{v}_2 = (3, 2, 1),$$
$$\mathbf{v}_3 = (11, 10, 7) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_4 = (7, 6, 4).$$

Determine una base para el subespacio de R^3, $W = \text{gen } S$. ¿Cuál es dim W?

12. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, -1), \qquad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2, 1),$$
$$\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1, -1) \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_4 = (1, 1, -6, -3)$$

y $\mathbf{v}_5 = (-1, -5, 1, 0)$. Determine una base para el subespacio de R^4, $W = \text{gen } S$. ¿Cuál es dim W?

13. Considere el siguiente subconjunto de P_3:

$$S = \{t^3 + t^2 - 2t + 1, t^2 + 1, t^3 - 2t, 2t^3 + 3t^2 - 4t + 3\}.$$

Determine una base para el subespacio $W = \text{gen } S$. ¿Cuál es dim W?

14. Sea

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Determine una base para el subespacio $W = \text{gen } S$ de M_{22}.

15. Determine una base para M_{23}. ¿Cuál es la dimensión de M_{23}? Generalice a M_{mn}.

16. Considere el siguiente subconjunto del espacio vectorial de todas las funciones con valores reales

$$S = \{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t, \cos 2t\}.$$

Determine una base para el subespacio $W = \text{gen } S$. ¿Cuál es dim W?

En los ejercicios 17 y 18, determine una base para los subespacios dados de R^3 y de R^4.

17. (a) Todos los vectores de la forma (a, b, c), donde $b = a + c$

(b) Todos los vectores de la forma (a, b, c), donde $b = a$

(c) Todos los vectores de la forma (a, b, c), donde $2a + b - c = 0$

18. (a) Todos los vectores de la forma (a, b, c), donde $a = 0$

(b) Todos los vectores de la forma $(a + c, a - b, b + c, -a + b)$

(c) Todos los vectores de la forma (a, b, c), donde $a - b + 5c = 0$

En los ejercicios 19 y 20, determine las dimensiones de los subespacios dados de R^4.

19. (a) Todos los vectores de la forma (a, b, c, d), donde $d = a + b$

(b) Todos los vectores de la forma (a, b, c, d), donde $c = a - b$ y $d = a + b$

20. (a) Todos los vectores de la forma (a, b, c, d), donde $a = b$

(b) Todos los vectores de la forma

$$(a + c, -a + b, -b - c, a + b + 2c)$$

21. Determine una base para el subespacio de P_2 formado por los vectores de la forma $at^2 + bt + c$, donde $c = 2a - 3b$.

22. Determine una base para el subespacio de P_3 formado por los vectores de la forma $at^3 + bt^2 + ct + d$, donde $a = b$ y $c = d$.

23. Determine las dimensiones de los subespacios de R^2 generados por los vectores del ejercicio 1.

24. Determine las dimensiones de los subespacios de R^3 generados por los vectores del ejercicio 2.

25. Determine las dimensiones de los subespacios de R^4 generados por los vectores del ejercicio 3.

26. Determine la dimensión del subespacio de P_2 formado por los vectores de la forma $at^2 + bt + c$, donde $c = b - 2a$.

27. Determine la dimensión del subespacio de P_3 formado por los vectores de la forma $at^3 + bt^2 + ct + d$, donde $b = 3a - 5d$ y $c = d + 4a$.

28. Determine una base para R^3 que incluya a los vectores

(a) $(1, 0, 2)$

(b) $(1, 0, 2)$ y $(0, 1, 3)$

29. Determine una base para R^4 que incluya a los vectores $(1, 0, 1, 0)$ y $(0, 1, -1, 0)$.

30. Determine todos los valores de a para los cuales $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$ es una base para R^3.

31. Determine una base para el subespacio W de M_{33} formado por las matrices simétricas.

32. Determine una base para el subespacio de M_{33} formado por las matrices diagonales.

33. Proporcione un ejemplo de un subespacio de R^4, de dimensión 2.

34. Proporcione un ejemplo de un subespacio de P_3, de dimensión 2.

En los ejercicios 35 y 36, determine una base para el plano dado.

35. $2x - 3y + 4z = 0$. **36.** $x + y - 3z = 0$.

37. Determine si los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

son una base para B^3.

38. Determine si los vectores

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

son una base para B^3.

39. Determine si los vectores

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}$$

son una base para B^4.

40. Determine si los vectores

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

son una base para B^4.

Ejercicios teóricos

T.1. Suponga que en el espacio vectorial no nulo V, el máximo número de vectores en un conjunto linealmente independiente es m. Demuestre que cualquier conjunto con m vectores linealmente independientes en V es una base para V.

T.2. Demuestre que si V es un espacio vectorial de dimensión finita entonces todo subespacio no nulo W, de V, tiene una base finita y $\dim W \leq \dim V$.

T.3. Muestre que si $\dim V = n$, entonces cualesquiera $n + 1$ vectores en V son linealmente dependientes.

T.4. Demuestre que si $\dim V = n$, entonces ningún conjunto con $n - 1$ vectores de V puede generar a V.

T.5. Pruebe el teorema 6.8.

T.6. Pruebe el teorema 6.9.

T.7. Muestre que si W es un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V y $\dim W = \dim V$, entonces $W = V$.

T.8. Muestre que los subespacios de R^3 son $\{\mathbf{0}\}$, R^3, todas las rectas que pasan por el origen y todos los planos que pasan por el origen.

T.9. Demuestre que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V y $c \neq 0$, entonces $\{c\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ también es una base para V.

T.10. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base para un espacio vectorial V. Muestre que $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, donde

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3,$$
$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

y

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3$$

también es una base para V.

T.11. Sea

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

un conjunto de vectores no nulos en un espacio vectorial V, y suponga que cada vector en V puede escribirse de una y sólo de una forma como combinación lineal de los vectores de S. Muestre que S es una base para V.

T.12. Suponga que

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

es una base para R^n. Muestre que si A es una matriz no singular de $n \times n$, entonces

$$\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_n\}$$

también es una base para R^n. (*Sugerencia:* vea el ejercicio T.10 de la sección 6.3.)

T.13. Suponga que

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

es un conjunto linealmente independientes de vectores en R^n, y que A es una matriz singular. Demuestre o refute que

$$\{A\mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2, \dots, A\mathbf{v}_n\}$$

es linealmente independiente.

T.14. Muestre que el espacio vectorial P de todos los polinomios no es de dimensión finita. [*Sugerencia:* suponga que $\{p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t)\}$ es una base finita para P. Sea d_j = grado $p_j(t)$. Establezca una contradicción.]

T.15. Muestre que el conjunto de vectores en P_n,

$$\{t^n, t^{n-1}, \dots, t, 1\},$$

es linealmente independiente.

T.16. Muestre que si la suma de los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ de B^n es $\mathbf{0}$, entonces estos vectores no pueden formar una base para B^n.

T.17. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ un conjunto de vectores en B^3.

(a) Determine vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ tales que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$.

(b) Determine vectores linealmente dependientes $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ tales que $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$.

Ejercicios con MATLAB

El uso de MATLAB *en esta sección tiene como requisito la sección 12.7. En los ejercicios siguientes relacionamos la teoría desarrollada en tal sección, con los procedimientos computacionales de* MATLAB *que ayudan en el análisis de la situación.*

La definición de base requiere que para determinar si un conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ *es una base para un espacio vectorial V, mostremos que gen S = V y que S es linealmente independiente. Sin embargo, el teorema 6.9 muestra que si sabemos que* dim $V = k$*, sólo necesitamos establecer que gen S = V o que S es linealmente independiente. En este caso especial, la independencia lineal se analiza con facilidad con el comando* **rref** *de* MATLAB. *Construya el sistema homogéneo* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *asociado con la pregunta sobre independencia o dependencia lineal. Entonces, S es linealmente independiente si y sólo si*

$$\mathbf{rref}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Aplique este caso especial, si ello es posible, en los ejercicios ML.1 a ML.6; en caso contrario, determine, en la forma convencional, si S es una base para V.

ML.1. $S = \{(1, 2, 1), (2, 1, 1), (2, 2, 1)\}$ en $V = R^3$.

ML.2. $S = \{2t - 2, t^2 - 3t + 1, 2t^2 - 8t + 4\}$ en $V = P_2$.

ML.3. $S = \{(1, 1, 0, 0), (2, 1, 1, -1), (0, 0, 1, 1), (1, 2, 1, 2)\}$ en $V = R^4$.

ML.4. $S = \{(1, 2, 1, 0), (2, 1, 3, 1), (2, -2, 4, 2)\}$ en $V =$ gen S.

ML.5. $S = \{(1, 2, 1, 0), (2, 1, 3, 1), (2, 2, 1, 2)\}$ en $V =$ gen S.

ML.6. $V =$ el subespacio de R^3, formado por los vectores (a, b, c), tales que $b = 2a - c$ y $S = \{(0, 1, -1), (1, 1, 1)\}$.

En los ejercicios ML.7 a ML.9 utilice el comando **rref** *de* MATLAB *para determinar un subconjunto de S que es una base para gen S. (Vea el ejemplo 5.)*

ML.7. $S = \{(1, 1, 0, 0), (-2, -2, 0, 0), (1, 0, 2, 1), (2, 1, 2, 1), (0, 1, 1, 1)\}$.
¿Cuál es dim gen S? ¿Es gen $S = R^4$?

ML.8. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.
¿Cuál es dim gen S? ¿Es gen $S = M_{22}$?

ML.9. Sea $S = \{t - 2, 2t - 1, 4t - 2, t^2 - t + 1, t^2 + 2t + 1\}$.
¿Cuál es dim gen S? ¿Es gen $S = P_2$?

Una interpretación del teorema 6.8 es que cualquier conjunto linealmente independiente S de un espacio vectorial V puede extenderse a una base para V. Siguiendo las ideas del ejemplo 9, utilice el comando **rref** *de* MATLAB *para extender S a una base para V, en los ejercicios ML.10 a ML.12.*

ML.10. $S = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0)\}$, $V = R^4$.

ML.11. $S = \{t^3 - t + 1, t^3 + 2\}$, $V = P_3$.

ML.12. $S = \{(0, 3, 0, 2, -1)\}$,
$V =$ el subespacio de R^5 que consta de todos los vectores de la forma (a, b, c, d, e), donde $c = a$ y $b = 2d + e$.

6.5 SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Los sistemas homogéneos desempeñan un papel central en álgebra lineal, como se verá en el capítulo 8. Allí se integrarán los fundamentos del tema, para resolver un importante problema presente en una amplia variedad de aplicaciones. En esta sección trataremos varios problemas que involucran sistemas homogéneos, y que serán fundamentales en el capítulo 8. Centraremos la atención en estos problemas, sin distraernos con el material adicional del capítulo 8.

Consideremos el sistema homogéneo

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

donde A es una matriz de $m \times n$. En el ejemplo 9 de la sección 6.2 se observó que el conjunto de soluciones de este sistema homogéneo es un subespacio de R^n. Un problema de importancia fundamental, y que aparecerá repetidamente en el capítulo 8, es determinar una base para dicho espacio solución. Para encontrar tal base utilizamos el método de reducción de Gauss-Jordan que se presentó en la sección 1.6. Debemos transformar la matriz aumentada $[A \,\vdots\, \mathbf{0}]$ del sistema, en una matriz $[B \,\vdots\, \mathbf{0}]$ en forma escalonada reducida por filas, y con r renglones no nulos, $1 \leq r \leq m$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que los unos (1s) principales de las r filas no nulas de B aparecen en las primeras r columnas. Si $r = n$, entonces

$$\left[B \mid \mathbf{0}\right] = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0 \quad}}^{n} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r = n \\ \\ \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m$$

y la única solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la solución trivial. El espacio solución no tiene base (en ocasiones se habla de una **base vacía**), y su dimensión es cero.

Si $r < n$, entonces

$$\left[B \mid \mathbf{0}\right] = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad b_{1\,r+1} \quad \cdots \quad b_{1n} \quad}}^{n} \\ \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1\,r+1} & \cdots & b_{1n} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{2\,r+1} & \cdots & b_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r\,r+1} & \cdots & b_{rn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} r \\ \\ \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m$$

Al despejar las incógnitas que corresponden a los unos (1s) principales, tenemos

$$\begin{aligned} x_1 &= -b_{1\,r+1}x_{r+1} - b_{1\,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{1n}x_n \\ x_2 &= -b_{2\,r+1}x_{r+1} - b_{2\,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_r &= -b_{r\,r+1}x_{r+1} - b_{r\,r+2}x_{r+2} - \cdots - b_{rn}x_n, \end{aligned}$$

donde a $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ se les pueden asignar valores reales arbitrarios s_j, donde

$j = 1, 2, \ldots, p$, donde $p = n - r$. Así,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b_{1\,r+1}s_1 - b_{1\,r+2}s_2 - \cdots - b_{1n}s_p \\ -b_{2\,r+1}s_1 - b_{2\,r+2}s_2 - \cdots - b_{2n}s_p \\ \vdots \\ -b_{r\,r+1}s_1 - b_{r\,r+2}s_2 - \cdots - b_{rn}s_p \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_p \end{bmatrix}$$

$$= s_1 \begin{bmatrix} -b_{1\,r+1} \\ -b_{2\,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r\,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s_2 \begin{bmatrix} -b_{1\,r+2} \\ -b_{2\,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r\,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + s_p \begin{bmatrix} -b_{1n} \\ -b_{2n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dado que $s_1, s_2, \ldots, s_p$ pueden tomar valores arbitrarios, elegimos los siguientes:

$$\begin{array}{llll} s_1 = 1, & s_2 = 0, \quad \ldots, & & s_p = 0 \\ s_1 = 0, & s_2 = 1, \quad \ldots, & & s_p = 0 \\ & \quad\;\; \vdots & & \\ s_1 = 0, & s_2 = 0, \quad \ldots, & s_{p-1} = 0, & s_p = 1, \end{array}$$

con los cuales se obtienen las soluciones

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -b_{1\,r+1} \\ -b_{2\,r+1} \\ \vdots \\ -b_{r\,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -b_{1\,r+2} \\ -b_{2\,r+2} \\ \vdots \\ -b_{r\,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \qquad \mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} -b_{1n} \\ -b_{2n} \\ \vdots \\ -b_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\mathbf{x} = s_1\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{x}_2 + \cdots + s_p\mathbf{x}_p,$$

entonces $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ genera el espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Además, si formamos la ecuación

$$c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_p\mathbf{x}_p = \mathbf{0},$$

la matriz de sus coeficientes es la matriz de columnas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$. Observando las filas $r+1, r+2, \ldots, n$ de esta matriz, se concluye fácilmente que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0.$$

Por lo tanto, $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ es también linealmente independiente y constituye una base para el espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, el espacio nulo de A.

> El procedimiento para determinar un base para el espacio solución de un sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ —o espacio nulo de A— donde A es una matriz de $m \times n$, es el siguiente.
>
> ***Paso 1.*** Resolver el sistema homogéneo dado, mediante reducción Gauss-Jordan. Si en la solución no hay constantes arbitrarias, el espacio solución es $\{\mathbf{0}\}$, no tiene una base, y su dimensión es cero.
>
> ***Paso 2.*** Si en la solución $\mathbf{x}$ hay constantes arbitrarias, se escribe $\mathbf{x}$ como combinación lineal de los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p$ con $s_1, s_2, \ldots, s_p$ como coeficientes:
>
> $$\mathbf{x} = s_1\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{x}_2 + \cdots s_p\mathbf{x}_p.$$
>
> ***Paso 3.*** El conjunto de vectores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_p\}$ es una base para el espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$; la dimensión del espacio solución es p.

Observación Suponga que en el paso 1 la matriz en forma escalonada reducida por filas, obtenida a partir de $[A \mid \mathbf{0}]$, tiene r renglones no nulos (es decir, tiene r unos principales). Entonces $p = n - r$, esto es, la dimensión del espacio solución es $n - r$. Además, una solución $\mathbf{x}$ para $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene $n - r$ constantes arbitrarias.

DEFINICIÓN Si A es una matriz de $m \times n$, llamaremos **nulidad** de A a la dimensión del espacio nulo de A. La denotaremos por nulidad A.

Observación La nulidad de una matriz A es el número de constantes arbitrarias presentes en la solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

EJEMPLO 1 Determine una base y la dimensión del espacio solución W del sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solución ***Paso 1.*** Para resolver el sistema dado por el método de reducción de Gauss-Jordan, determinamos la forma escalonada reducida por filas de la matriz aumentada. Es la siguiente (verifique)

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Entonces, toda solución es de la forma (verifique)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2s - t \\ -2s + t \\ s \\ -2t \\ t \end{bmatrix}, \tag{1}$$

donde s y t son números reales arbitrarios.

Paso 2. Como todo vector en W es una solución, la forma de tal vector está dada por la ecuación (1), es decir, todo vector en W puede ser expresado como

$$\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Dado que s y t pueden tomar valores arbitrarios, tomemos primero $s = 1$ y $t = 0$, y después $s = 0$ y $t = 1$, en la ecuación (2). Así obtenemos las soluciones

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Paso 3. El conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ es una base para W, y dim $W = 2$. ■

Con el ejemplo siguiente ilustramos una clase de problemas que tendremos que resolver con frecuencia en el capítulo 8.

EJEMPLO 2 Determine una base para el espacio solución del sistema homogéneo $(\lambda I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para $\lambda = -2$ y

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Solución Formemos la matriz $-2I_3 - A$:

$$-2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como la última matriz de la derecha es la matriz de coeficientes del sistema homogéneo, transformaremos la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

a la forma escalonada reducida por filas. Obtenemos (verifique)

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Entonces, toda solución es de la forma (verifique)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -s \\ \frac{2}{3}s \\ s \end{bmatrix},$$

donde s es cualquier número real. Esto indica que todo vector en la solución puede escribirse como

$$\mathbf{x} = s\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix},$$

y, en consecuencia,

$$\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

es una base para el espacio solución. ■

Otro problema importante que resolveremos con frecuencia en el capítulo 8 se ilustra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 Determine todos los números reales λ tales que el sistema homogéneo $(\lambda I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial, si

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Solución Formemos la matriz $\lambda I_2 - A$:

$$\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -5 \\ -3 & \lambda + 1 \end{bmatrix}.$$

El sistema homogéneo $(\lambda I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -5 \\ -3 & \lambda + 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con el corolario 3.4, este sistema homogéneo tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante de la matriz de coeficientes es cero; esto es si y sólo si

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -5 \\ -3 & \lambda + 1 \end{bmatrix}\right) = 0,$$

o si y sólo si

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)(\lambda + 1) - 15 &= 0 \\ \lambda^2 - 16 &= 0 \\ \lambda = 4 \quad \text{o} \quad \lambda &= -4. \end{aligned}$$

Entonces, cuando $\lambda = 4$, o cuando $\lambda = -4$, el sistema homogéneo $(\lambda I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial, para la matriz dada A. ■

RELACIÓN ENTRE SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS Y SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Se observó en la sección 6.2 (vea el comentario a continuación del ejemplo 9) que si A es una matriz de $m \times n$, el conjunto de soluciones del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ no es un subespacio de R^n. El ejemplo siguiente ilustra una relación geométrica entre el conjunto de soluciones del sistema no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ y el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

EJEMPLO 4 Considere el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

El conjunto de soluciones de este sistema lineal consta de los vectores de la forma

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 - 2r + 3s \\ r \\ s \end{bmatrix}$$

(verifique), que puede escribirse como

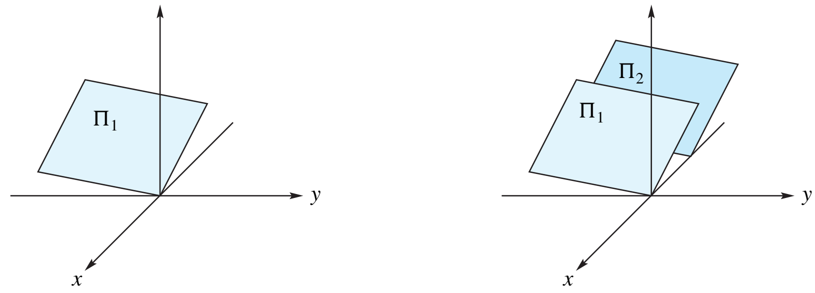
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

El conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado es el subespacio bidimensional de R^3 formado por los vectores de la forma

$$\mathbf{x} = r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Este subespacio es un plano Π_1 que pasa por el origen; el conjunto de todas las soluciones del sistema no homogéneo dado es un plano Π_2 que no pasa por el origen y que se obtiene desplazando a Π_1 paralelamente a sí mismo. Esta situación se ilustra en la figura 6.9. ■

Figura 6.9 ►



Π_1 es el espacio solución para $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Π_2 es el conjunto de soluciones para $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

El resultado siguiente, de importancia en el estudio de ecuaciones diferenciales, se presentó en la sección 1.6; su demostración se dejó como ejercicio T.13 de esa sección.

Si $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ y $\mathbf{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ entonces $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ es una solución del sistema dado $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Además, toda solución $\mathbf{x}$ del sistema lineal no homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es de la forma $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, donde $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema no homogéneo y $\mathbf{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Así, en el ejemplo 4,

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_h = r\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde r y s son números reales cualesquiera.

EJEMPLO 5 Considere el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} - 3x_4 + x_5 \phantom{{}+2x_6} &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} - 3x_4 + 2x_5 + x_6 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 &= 9, \end{aligned}$$

que se definió en el ejemplo 10 de la sección 1.6. Allí determinamos que una solución para el sistema lineal está dada por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} r + 3s - 2t \\ t \\ 1 - 2r \\ s \\ 2 - r \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r + 3s - 2t \\ t \\ -2r \\ s \\ -r \\ r \end{bmatrix},$$

donde r, s y t son números reales cualesquiera. Sean

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_h = \begin{bmatrix} r + 3s - 2t \\ t \\ -2r \\ s \\ -r \\ r \end{bmatrix}.$$

Entonces $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$. Además, $\mathbf{x}_p$ es una solución particular del sistema dado (verifique) y $\mathbf{x}_h$ es una solución del sistema homogéneo asociado. ■

SISTEMAS HOMOGÉNEOS BINARIOS (OPCIONAL)

La diferencia principal entre los sistemas homogéneos reales y los sistemas homogéneos binarios es que si un sistema homogéneo binario tiene una solución no trivial, entonces el número de soluciones no triviales es finito, y no infinito como sucede en los sistemas homogéneos reales. El conjunto de todas las soluciones de un sistema homogéneo binario es un subespacio, y ese subespacio contiene un número finito de vectores.

EJEMPLO 6 Determine una base para el espacio solución W del sistema homogéneo binario

$$\begin{aligned} x + y \quad\; &= 0 \\ y + z &= 0 \\ x \quad\; + z &= 0. \end{aligned}$$

Solución Formamos la matriz aumentada y determinamos su forma escalonada reducida por filas, para obtener (verifique)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Entonces, $x = -z$ y $y = -z$, donde z es 0 o 1. (Recuerde que el negativo de un dígito binario es él mismo.) Por lo tanto, el conjunto de soluciones consta de todos los vectores de B^3 de la forma $\begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix}$, de modo que existen exactamente dos soluciones $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Una base para el espacio solución es $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. (Verifique.) ■

EJEMPLO 7 En el ejemplo 21 de la sección 1.6 mostramos que el sistema homogéneo binario correspondiente a la matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

tiene la forma escalonada reducida por filas

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Esto indica que hay dos dígitos binarios arbitrarios b_1 y b_2 en la solución (verifique), dada por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

La ecuación (3) puede escribirse como

$$\mathbf{x} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

es una base para el espacio solución W. (Verifique.) Existen exactamente tres soluciones no triviales: una para cada una de las elecciones $b_1 = 0$, $b_2 = 1$; $b_1 = 1$, $b_2 = 0$; y $b_1 = b_2 = 1$. Por lo tanto,

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

■

EJEMPLO 8 Sea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema binario tal que la forma escalonada reducida por filas de la matriz aumentada $[A \mid \mathbf{b}]$ está dada por

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

El sistema no homogéneo correspondiente, de dos ecuaciones con cuatro incógnitas, puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \qquad &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Se concluye entonces que la solución involucra dos dígitos binarios arbitrarios puesto que

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3 \\ x_2 &= -x_3 - x_4 + 1. \end{aligned}$$

Sean $x_3 = b_1$ y $x_4 = b_2$ (recuerde que el negativo de un dígito binario es él mismo). Entonces tenemos la solución

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 + b_2 + 1 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Una solución particular es

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y la solución del sistema homogéneo correspondiente es

$$\mathbf{x}_h = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

Términos clave

Nulidad

6.5 Ejercicios

1. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 4 \\ -8 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine el conjunto de soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Exprese cada solución como combinación lineal de dos vectores en R^3.

(c) Grafique estos vectores en un sistema de coordenadas tridimensional para mostrar que el espacio solución es un plano que pasa por el origen.

2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine el conjunto de soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(b) Exprese cada solución como combinación lineal de dos vectores en R^3.

(c) Grafique estos vectores en un sistema de coordenadas tridimensional para mostrar que el espacio solución es un plano que pasa por el origen.

En los ejercicios 3 a 10, determine una base y la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo dado.

3. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

4. $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_3 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \end{aligned}$$

7. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

8. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

9. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

10. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & 3 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & 6 & 4 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & -3 & -2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 11 y 12, determine una base para el espacio nulo de la matriz A dada.

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 13 a 16, determine una base para el espacio solución del sistema homogéneo $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *para el escalar* λ *dado y la matriz A dada.*

13. $\lambda = 1$, $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

14. $\lambda = -3$, $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

15. $\lambda = 1$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

16. $\lambda = 3$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 17 a 20, determine todos los números reales λ *tales que el sistema homogéneo* $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *tiene una solución no trivial.*

17. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

19. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

20. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 21 y 22, resuelva el sistema lineal dado y escriba la solución $\mathbf{x}$ *como* $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, *donde* $\mathbf{x}_p$ *es una solución particular del sistema dado y* $\mathbf{x}_h$ *es una solución del sistema homogéneo asociado.*

21. $$\begin{aligned} x + 2y - z - w &= 3 \\ x + y + 3z + 2w &= -2 \\ 2x - y + 4z + 3w &= 1 \\ 2x - 2y + 8z + 6w &= -4 \end{aligned}$$

22. $$\begin{aligned} x - y + 2z + 2w &= 1 \\ -x + 2y + 3z + 2w &= 0 \\ 2x + 2y + z &= 4 \end{aligned}$$

En los ejercicios 23 a 26, determine una base y la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo binario dado.

23. $$\begin{aligned} x_1 + x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 &= 0\\ x_1 \phantom{{}+x_2} + x_3 + x_4 &= 0\\ x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= 0 \end{aligned}$$

24. $$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

25. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

26. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 27 y 28, resuelva el sistema binario dado y escriba la solución $\mathbf{x}$ *como* $\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$.

27. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

28. $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\ 1\\ 1\\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicios teóricos

T.1. Sea $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ un conjunto de soluciones de un sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Demuestre que todo vector en gen S es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

T.2. Demuestre que si la matriz de coeficientes A de $n \times n$ del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una fila o columna de ceros, entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial.

T.3. (a) Demuestre que la matriz cero es la única matriz de 3×3 cuyo espacio nulo tiene dimensión 3.

(b) Sea A un matriz no nula de 3×3 y suponga que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial. Demuestre que la dimensión del espacio nulo de A es 1 o 2.

T.4. A y B son dos matrices de $m \times n$ cuyas formas escalonadas reducidas por filas son las mismas. ¿Cuál es la relación entre el espacio nulo de A y el espacio nulo de B?

Ejercicios con MATLAB

En los ejercicios ML.1 a ML.3, utilice el comando **rref** de MATLAB *como ayuda en la determinación de una base para el espacio nulo de A. También puede utilizar la rutina* **homsoln**. *Para instrucciones, utilice* **help**.

ML.1. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 4 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ML.2. $$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ML.3. $$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 0\\ 2 & 5 & 8 & -1\\ 3 & 6 & 9 & -2 \end{bmatrix}$$

ML.4. Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

y $\lambda = 3$, el sistema homogéneo $(\lambda I_2 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial. Determine tal solución por medio de los comandos de MATLAB.

ML.5. Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

y $\lambda = 6$, el sistema homogéneo lineal $(\lambda I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial. Determine tal solución por medio de los comandos de MATLAB.

6.6 EL RANGO DE UNA MATRIZ Y SUS APLICACIONES

En esta sección obtendremos otro método eficaz para determinar una base para el espacio vectorial V generado por un conjunto de vectores dado, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. En la demostración del teorema 6.6 desarrollamos una técnica para seleccionar una base para V que es un *subconjunto* de S. El método que desarrollaremos en esta sección produce una base para V, pero *no* se garantiza que sea un subconjunto de S. Además, con cada matriz A asociaremos un número único que, como mostraremos posteriormente, nos da información sobre la dimensión del espacio solución del sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es A.

DEFINICIÓN Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

una matriz de $m \times n$. Las filas de A,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}) \\ \mathbf{v}_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}), \end{aligned}$$

consideradas como vectores en R^n, generan un subespacio de R^n, denominado el **espacio fila** de A. Análogamente, las columnas de A,

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \qquad \mathbf{w}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

consideradas como vectores de R^m, generan un subespacio de R^m, denominado el **espacio columna** de A.

TEOREMA 6.10 *Si A y B son dos matrices de $m \times n$, equivalentes por filas, entonces los espacios fila de A y B son iguales.*

Demostración Si A y B son equivalentes por filas, entonces los renglones de B se obtienen a partir de los de A mediante un número finito de las (tres) operaciones elementales por filas. Entonces, cada fila de B es una combinación lineal de las filas de A. Por lo tanto, el espacio fila de B está contenido en el espacio fila de A. De forma análoga, A puede obtenerse a partir de B mediante un número finito de operaciones elementales por filas, de modo que el espacio fila de A está contenido en el espacio fila de B. Por lo tanto, los espacios fila de A y B son iguales. ■

Observación Un resultado relacionado con el anterior, se establece en el teorema 1.7 de la sección 1.6. Allí demostramos que si dos matrices aumentadas son equivalentes por filas, sus correspondientes sistemas lineales tienen las mismas soluciones.

De acuerdo con el teorema 6.10, si tomamos una matriz A y encontramos su forma escalonada reducida por filas, B, entonces los espacios fila de A y B son iguales. Además, recuerde que según el ejercicio T.8 de la sección 6.3 las filas no nulas de una matriz que está en la forma escalonada reducida por filas son linealmente independientes y, en consecuencia, forman una base para su espacio fila. Podemos usar este método para determinar una base para el espacio vectorial generado por un conjunto dado de vectores en R^n, como se ilustra en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = (1, -2, 0, 3, -4), \qquad \mathbf{v}_2 = (3, 2, 8, 1, 4),$$
$$\mathbf{v}_3 = (2, 3, 7, 2, 3), \qquad \mathbf{v}_4 = (-1, 2, 0, 4, -3),$$

y sea V el subespacio de R^5 dado por $V = \text{gen } S$. Determinaremos una base para V.

Solución Observe que V es el espacio fila de la matriz A cuyas filas son los vectores dados

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz es equivalente por filas a la matriz en forma escalonada reducida por filas B (verifique)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los espacios fila de A y B son idénticos, y una base para el espacio fila de B está formada por sus filas no nulas. Por lo tanto,

$$\mathbf{w}_1 = (1, 0, 2, 0, 1), \quad \mathbf{w}_2 = (0, 1, 1, 0, 1) \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_3 = (0, 0, 0, 1, -1)$$

forman una base para V. ■

Observación Note en el ejemplo 1, que las filas de las matrices A y B son diferentes; sin embargo, sus espacios fila son idénticos.

Resumiremos ahora el método del ejemplo 1 para determinar una base para el subespacio V de R^n dado por $V = \text{gen } S$, donde S es un conjunto de vectores en R^n.

> El procedimiento para determinar una base para el subespacio V de R^n dado por $V = \text{gen } S$, donde $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es un conjunto de vectores en R^n dados como filas, es el siguiente.
>
> ***Paso 1.*** Formar la matriz
>
> $$A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix}$$
>
> cuyas filas son los vectores dados en S.
> ***Paso 2.*** Determinar la forma escalonada reducida por filas B, de la matriz A
> ***Paso 3.*** Las filas no nulas de B forman una base para V.

Por supuesto, la base obtenida mediante el procedimiento del ejemplo 1 produjo una base que no es un subconjunto del conjunto generador. Sin embargo, la base para el subespacio V de R^n obtenida de esta manera es análoga, en términos de sencillez, a la base canónica para R^n. Así, si $\mathbf{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ es un vector en V y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es una base para V obtenida por el método del ejemplo 1, y los unos principales aparecen en las columnas $j_1, j_2, \ldots, j_k$, se puede demostrar que

$$\mathbf{v} = a_{j_1}\mathbf{v}_1 + a_{j_2}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{j_k}\mathbf{v}_k.$$

EJEMPLO 2 Sea V el subespacio del ejemplo 1. Dado que el vector

$$\mathbf{v} = (5, 4, 14, 6, 3)$$

está en V, escriba $\mathbf{v}$ como una combinación lineal de la base determinada en dicho ejemplo.

Solución Tenemos $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ y $j_3 = 4$, de modo que

$$\mathbf{v} = 5\mathbf{w}_1 + 4\mathbf{w}_2 + 6\mathbf{w}_3. \qquad \blacksquare$$

Observación La solución del ejemplo 1 también proporciona una base para el espacio fila de la matriz A en ese ejemplo. Observe que los vectores de dicha base no son filas de la matriz A.

DEFINICIÓN La dimensión del espacio fila de A se denomina **rango fila** de A y la dimensión del espacio columna de A se denomina **rango columna** de A.

EJEMPLO 3 Determinaremos una base para el espacio fila de la matriz A del ejemplo 1, que contenga solamente vectores fila de A. Calcularemos también el rango fila de la matriz A.

Solución Según el procedimiento de la demostración alternativa del teorema 6.6, formamos la ecuación

$$c_1(1, -2, 0, 3, -4) + c_2(3, 2, 8, 1, 4) \\ + c_3(2, 3, 7, 2, 3) + c_4(-1, 2, 0, 4, -3) = (0, 0, 0, 0, 0),$$

cuya matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ -4 & 4 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] = \left[A^T \mid \mathbf{0}\right]; \tag{1}$$

esto es, la matriz de coeficientes es A^T. Al transformar la matriz aumentada $[A^T \mid \mathbf{0}]$ en (1) a la forma escalonada reducida por filas, obtenemos (verifique)

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{24} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{49}{24} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{2}$$

Como los unos principales en (2) aparecen en las columnas 1, 2 y 3, concluimos que las tres primeras filas de A forman una base para el espacio fila de A. Esto es,

$$\{(1, -2, 0, 3, 4), (3, 2, 8, 1, 4), (2, 3, 7, 2, 3)\}$$

es una base para el espacio fila de A. El rango fila de A es 3. $\blacksquare$

EJEMPLO 4 Determinaremos una base para el espacio columna de la matriz A definida en el ejemplo 1 y calcularemos el rango columna de A.

Solución 1 Al escribir las columnas de A como vectores fila, obtenemos la matriz A^T, cuya forma escalonada reducida por filas es (como vimos en el ejemplo 3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{24} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{49}{24} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces, los vectores $\left(1, 0, 0, \frac{11}{24}\right)$, $\left(0, 1, 0, -\frac{49}{24}\right)$ y $\left(0, 0, 1, \frac{7}{3}\right)$ forman una base para el espacio fila de A^T. Por lo tanto, los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{11}{24} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{49}{24} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

forman una base para el espacio columna de A, de lo cual se concluye que el rango columna de A es 3.

Solución 2 Si queremos determinar una base para el espacio columna de A, que contenga sólo vectores columna de A, seguimos el procedimiento desarrollado en la demostración del teorema 6.6. Para ello, formamos la ecuación

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + c_5 \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cuya matriz aumentada es $\left[A \mid \mathbf{0}\right]$. Transformamos esta matriz a la forma escalonada reducida por filas, obteniendo (como en el ejemplo 1)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Como los unos principales aparecen en las columnas 1, 2 y 4, concluimos que la primera, segunda y cuarta columnas de A forman una base para el espacio columna de A. Es decir,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base para el espacio columna de A. El rango columna de A es 3. ■

En los ejemplos 3 y 4 obtuvimos valores iguales para el rango fila y el rango columna de A. Esta igualdad, que se cumple siempre, constituye un resultado muy importante en álgebra lineal; como lo establece el siguiente teorema.

TEOREMA 6.11 *El rango fila y el rango columna de la matriz $A = [a_{ij}]$ de $m \times n$ son iguales.*

Demostración Sean $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ las columnas de A. Para determinar la dimensión del espacio columna de A, utilizaremos el procedimiento seguido en la demostración alternativa del teorema 6.6. Entonces, formamos la ecuación

$$c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n = \mathbf{0}$$

y transformamos la matriz aumentada, $[A \mid \mathbf{0}]$, de este sistema homogéneo a la forma escalonada reducida por filas. Los vectores correspondientes a las columnas en que aparecen los unos principales forman una base para el espacio columna de A. Por lo tanto, el rango columna de A es igual al número de unos principales. Pero este número es también el número de filas no nulas de la matriz en forma escalonada reducida que es equivalente por filas a la matriz A, de modo que es también el rango fila de A. Se concluye entonces, que rango fila de A = rango columna de A. ■

DEFINICIÓN El resultado, rango fila de A = rango columna de A, nos permite referirnos al **rango** de una matriz de $m \times n$, que denotaremos como rango A.

Ahora resumiremos el procedimiento para calcular el rango de una matriz.

> El procedimiento para calcular el rango de una matriz dada A, es el siguiente.
>
> ***Paso 1.*** Llevar A a su forma escalonada reducida por filas, B.
>
> ***Paso 2.*** El rango de A es igual al número de filas no nulas de B.

Hemos definido (vea la sección 6.5) la nulidad de una matriz A de $m \times n$, como la dimensión del espacio nulo de A, es decir, como la dimensión del espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si la matriz B es la forma escalonada reducida por filas de A, y B tiene r renglones no nulos, la dimensión del espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es $n - r$. Como $(n - r) + r = n$, y r es también el rango de A, hemos demostrado así el teorema siguiente que establece una relación fundamental entre el rango y la nulidad de A.

TEOREMA 6.12 *Si A es una matriz de $m \times n$, entonces rango A + nulidad $A = n$.* ■

EJEMPLO 5 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la matriz definida en el ejemplo 1 de la sección 6.5. Cuando A se lleva a la forma escalonada reducida por filas, obtenemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces rango $A = 3$ y nulidad $A = 2$. Esto coincide con el resultado obtenido en la solución del ejemplo 1 de la sección 6.5, según el cual la dimensión del espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es 2. ■

El ejemplo siguiente permite ilustrar geométricamente algunas de las ideas discutidas anteriormente.

EJEMPLO 6 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Al transformar A a la forma escalonada reducida por filas, obtenemos (verifique)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

lo cual permite concluir que:

- rango $A = 2$.
- Dimensión del espacio fila de $A = 2$, de modo que el espacio fila de A es un subespacio bidimensional de R^3, es decir, es un plano que pasa por el origen.

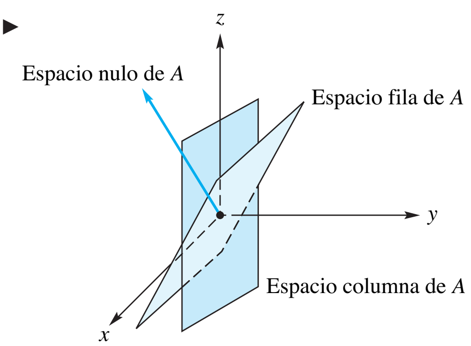
De la forma escalonada reducida de A se concluye que toda solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es de la forma (verifique)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -r \\ -r \\ r \end{bmatrix},$$

donde r es una constante arbitraria. De modo que el espacio solución del sistema homogéneo, o espacio nulo de A, es una recta que pasa por el origen, y la dimensión del espacio nulo de A, o nulidad de A, es 1. Ésta es, pues, una verificación del teorema 6.12.

Por supuesto, ya sabemos que también la dimensión del espacio columna de A es 2. Podríamos llegar a este resultado determinando una base con dos vectores para el espacio columna de A. Entonces, el espacio columna de A es también es un subespacio bidimensional de R^3, esto es, un plano que pasa por el origen. Estos resultados se ilustran en la figura 6.10. ■

Figura 6.10 ►



Observación Los conceptos de rango y nulidad también se aplican a transformaciones lineales, como veremos en la sección 10.2.

RANGO Y SINGULARIDAD

Si la matriz A es cuadrada, su rango permite decidir si la matriz es singular o no singular, como lo muestra el teorema siguiente.

TEOREMA 6.13 *Una matriz A de $n \times n$ es no singular si y sólo si rango $A = n$.*

Demostración Suponga que A es no singular. Entonces A es equivalente por filas a I_n (teorema 1.12, sección 1.7), de modo que rango $A = n$.

Recíprocamente, suponga que rango $A = n$, y que B es la forma escalonada reducida por filas de A. Entonces rango $B = n$, así que B no tiene renglones nulos. Además, B está en la forma escalonada reducida por filas. Por lo tanto, B debe ser I_n. Hemos demostrado así que A es equivalente por filas a I_n y, en consecuencia, que A es no singular (teorema 1.12, sección 1.7). ■

Una consecuencia inmediata del teorema 6.13 es el corolario siguiente, que constituye un criterio para saber que el rango de una matriz de $n \times n$ es n.

COROLARIO 6.2 *Si A es una matriz de $n \times n$, entonces rango $A = n$ si y sólo si* $\det(A) \neq 0$.

Demostración Ejercicio T.1. ■

Otro resultado fácilmente deducible del teorema 6.13 se expresa en el corolario siguiente.

COROLARIO 6.3 *Sea A una matriz de $n \times n$. El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para toda matriz $\mathbf{b}$ de $n \times 1$ si y sólo si rango $A = n$.*

Demostración Ejercicio T.2. ■

El corolario siguiente proporciona otro método para decidir que n vectores de R^n son linealmente dependientes o linealmente independientes.

COROLARIO 6.4 *Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de n vectores en R^n y sea A la matriz cuyas filas (columnas) son los vectores de S. Entonces S es linealmente independiente si y sólo si* $\det(A) \neq 0$.

Demostración Ejercicio T.3. ■

Cuando $n > 4$, el método del corolario 6.4 para establecer dependencia o independencia lineal no es tan eficiente como el método directo de la sección 6.3, que exige la solución de un sistema homogéneo.

COROLARIO 6.5 *El sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene una solución no trivial si y sólo si rango $A < n$.*

Demostración Este resultado se sigue del corolario 6.2 y de que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial si y sólo si A es singular (teorema 1.13, sección 1.7). ■

EJEMPLO 7 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

La forma escalonada reducida por filas de A es I_3 (verifique). Entonces, rango $A = 3$ y la matriz A es no singular. Además, el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, sólo tiene la solución trivial. ■

EJEMPLO 8 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

A es equivalente por filas a la matriz escalonada reducida por filas,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, rango $A < 3$, y A es singular. Además, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial. ■

APLICACIONES DEL RANGO AL SISTEMA LINEAL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

En el corolario 6.5 vimos que el rango de A proporciona información sobre la existencia de una solución no trivial para el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ahora estableceremos algunos resultados que muestran cómo el rango de A también proporciona información sobre las soluciones del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{b}$ es una matriz arbitraria de $n \times 1$. Cuando $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, el sistema lineal se dice que es **no homogéneo**.

TEOREMA 6.14 *El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución si y sólo si rango A = rango$[A \mid \mathbf{b}]$; esto es, si y sólo si el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz aumentada.*

Demostración Observe, inicialmente, que si $A = [a_{ij}]$ es de $m \times n$, entonces el sistema lineal dado puede rescribirse como

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Ahora, si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución, existen valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen la ecuación (3). Entonces, $\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de A y pertenece entonces al espacio columna de A. Por lo tanto, las dimensiones de los espacios columna de A y de $[A \mid \mathbf{b}]$ son iguales, esto es, rango A = rango $[A \mid \mathbf{b}]$.

Para demostrar el recíproco del resultado anterior, suponga que rango A = rango $[A \mid \mathbf{b}]$. Entonces $\mathbf{b}$ está en el espacio columna de A, lo cual significa que podemos determinar valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen la ecuación (3). En consecuencia, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución. ■

Observaciones

1. El teorema 6.14 implica que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente si y sólo si $\mathbf{b}$ no está en el espacio columna de A.
2. Aunque interesante, el resultado del teorema 6.14, no tiene mucho valor computacional, ya que generalmente estamos interesados en encontrar una solución, más que en saber si existe o no una solución.

EJEMPLO 9 Considere el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Como rango A = rango $[A \mid \mathbf{b}] = 3$, el sistema lineal tiene una solución. ■

EJEMPLO 10 El sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

no tiene solución, porque rango $A = 2$ y rango $[A \mid \mathbf{b}] = 3$ (verifique). ■

Ahora ampliaremos nuestra lista de equivalencias no singulares.

Lista de equivalencias no singulares

Las afirmaciones siguientes son equivalentes para una matriz A de $n \times n$.

1. A es no singular.
2. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la única solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. A es equivalente por filas a I_n.
4. El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única para cada matriz $\mathbf{b}$ de $n \times 1$.
5. $\det(A) \neq 0$.
6. A tiene rango n.
7. A tiene nulidad 0.
8. Las filas de A forman un conjunto linealmente independiente de n vectores en R^n.
9. Las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente de n vectores en R^n.

Términos clave

Espacio fila
Espacio columna
Rango fila
Rango columna
Rango
Sistema no homogéneo

6.6 Ejercicios

1. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3), \quad \mathbf{v}_2 = (2, 1, 4),$$
$$\mathbf{v}_3 = (-1, -1, 2), \quad \mathbf{v}_4 = (0, 1, 2)$$

y $\mathbf{v}_5 = (1, 1, 1)$. Determine una base para el subespacio de R^3, V = gen S.

2. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, -3, 1),$$
$$\mathbf{v}_3 = (0, 1, 1, 2), \quad \mathbf{v}_4 = (0, 0, 1, 1)$$

y $\mathbf{v}_5 = (1, 0, 0, 1)$. Determine una base para el subespacio de R^4, V = gen S.

3. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Determine una base para el subespacio de R^4, V = gen S.

4. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$, donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Determine una base para el subespacio de R^4, $V = \text{gen } S$.

En los ejercicios 5 y 6, determine una base para el espacio fila de A

(a) *formado por vectores que* no *son vectores fila de A;*
(b) *formado por vectores que* son *vectores fila de A.*

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 9 & -1 \\ -3 & 8 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 7 y 8, determine una base para el espacio columna de A
(a) *formado por vectores que* no *son vectores columna de A;*
(b) *formado por vectores que* son *vectores columna de A.*

7. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 7 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & 8 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 8 & 4 \\ 4 & -2 & 1 & -5 & -7 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 9 y 10, calcule una base para el espacio fila de A, el espacio columna de A, el espacio fila de A^T y el espacio columna de A^T. Describa brevemente las relaciones entre estas bases.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & 8 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -7 & 11 \\ 3 & -1 & -7 & 13 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 11 y 12, calcule los rangos fila y columma de A, y compruebe el resultado del teorema 6.11.

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & -2 & 1 \\ 7 & 8 & -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 & 1 & -2 & 2 \\ 9 & 9 & 4 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 13 a 17, calcule el rango y la nulidad de A y compruebe que se cumple el teorema 6.12.

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & -5 \\ 7 & 8 & -5 & -1 \\ 10 & 14 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **16.** $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & -8 & 3 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & -8 & 3 \\ 5 & -7 & 0 \end{bmatrix}$

18. Si A es una matriz de 3×4, ¿cuál es el máximo valor posible para rango A?

19. Si A es una matriz de 4×6, muestre que los columnas de A son linealmente dependientes.

20. Si A es una matriz de 5×3, muestre que las filas de A son linealmente dependientes.

En los ejercicios 21 y 22 sea A una matriz de 7×3 *cuyo rango es 3.*

21. ¿Son las filas de A linealmente dependientes o linealmente independientes? Justifique su respuesta.

22. ¿Son las columnas de A linealmente dependientes o linealmente independientes? Justifique su respuesta

En los ejercicios 23 a 25, utilice el teorema 6.13 para determinar si cada matriz es singular o no singular.

23. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ **24.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

25. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 12 & -4 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 26 y 27, utilice el corolario 6.3 para determinar si el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tiene una única solución para toda matriz* $\mathbf{b}$ *de* 3×1.

26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 8 & -7 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

Utilice el corolario 6.4 para resolver los ejercicios 28 y 29.

28. ¿Es

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

un conjunto linealmente independiente de vectores en R^3?

29. ¿Es

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

un conjunto linealmente independiente de vectores en R^3?

En los ejercicios 30 a 32, determine cuáles de los sistemas homogéneos tienen una solución no trivial para la matriz dada A, utilizando el corolario 6.5.

30. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

31. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

32. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 33 a 36, determine cuáles de los sistemas lineales tienen una solución, utilizando el teorema 6.14.

33. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

34. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -13 \\ 3 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

36. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 37 a 40, calcule el rango de las matrices binarias dadas.

37. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

38. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

40. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicios teóricos

T.1. Demuestre el corolario 6.2.

T.2. Demuestre el corolario 6.3.

T.3. Demuestre el corolario 6.4.

T.4. Sea A una matriz de $n \times n$. Muestre que el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial si y sólo si las columnas de A son linealmente dependientes.

T.5. Sea A una matriz de $n \times n$. Muestre que rango $A = n$ si y sólo si las columnas de A son linealmente independientes.

T.6. Sea A una matriz de $n \times n$. Muestre que las filas de A son linealmente independientes si y sólo si las columnas de A generan a R^n.

T.7. Sea A una matriz de $m \times n$. Muestre que el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución para cada matriz $\mathbf{b}$ de $m \times 1$ si y sólo si rango $A = m$.

T.8. Sea A una matriz de $m \times n$. Muestre que las columnas de A son linealmente independientes si y sólo si el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial.

T.9. Sea A una matriz de $m \times n$. Muestre que el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene a lo más una solución para cada matriz $\mathbf{b}$ de $m \times 1$ si y sólo si el sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial.

T.10. Sea A una matriz de $m \times n$ con $m \neq n$. Muestre que las filas de A o las columnas de A son linealmente dependientes.

T.11. Suponga que el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es de $m \times n$, es consistente (tiene solución). Demuestre que la solución es única si y sólo si rango $A = n$.

T.12. Demuestre que si A es una matriz de $m \times n$ tal que AA^T es no singular, entonces rango $A = m$.

Ejercicios con MATLAB

Dada una matriz A, las filas no nulas de **rref(A)** *forman una base para el espacio fila de A y las filas no nulas de* **rref(A′)** *transformadas en columnas constituyen una base para el espacio columna de A.*

ML.1. Resuelva los ejercicios 1 a 4 usando MATLAB.

Para determinar una base del espacio fila de A formado por filas de A, calculamos **rref(A′)**. *Los números 1 principales señalan las filas originales de A que forman una base para el espacio fila. Ver el ejemplo 3.*

ML.2. Determine dos bases para el espacio fila de A, que no tengan vectores en común.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 11 & 2 \\ 6 & 9 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

ML.3. Repita el ejercicio ML.2 para los espacios columna.

Para calcular el rango de una matriz en MATLAB, utilice la instrucción **rank (A)**.

ML.4. Calcule el rango y la nulidad de cada una de las siguientes matrices.

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

ML.5. Determine cuáles de los siguientes sistemas lineales son consistentes, utilizando solamente la instrucción **rank**.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

6.1 COORDENADAS Y CAMBIO DE BASE

COORDENADAS

Sabemos que si V es un espacio vectorial de dimensión n, V tiene una base S de n vectores; hasta este momento no nos ha interesado orden de los vectores en S. Sin embargo, en esta sección hablaremos de **base ordenada** $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para V. En este sentido, $S_1 = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base ordenada para V, diferente a la anterior.

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base ordenada para el espacio vectorial V de dimensión n, entonces cada vector $\mathbf{v}$ en V se puede expresar en forma única como

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son números reales. Nos referiremos a

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

como **vector de coordenadas de v con respecto a la base ordenada** S. Las entradas de $[\mathbf{v}]_S$ son las **coordenadas de v con respecto a** S.

Observe que el vector de coordenadas $[\mathbf{v}]_S$ depende del orden de los vectores en el conjunto S; un cambio en el orden en que aparecen puede modificar las coordenadas de $\mathbf{v}$ con respecto a S. Supondremos que todas las bases consideradas en esta sección son bases ordenadas.

EJEMPLO 1 Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ una base para R^4, donde

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 0), \qquad \mathbf{v}_2 = (2, 0, 1, 0),$$
$$\mathbf{v}_3 = (0, 1, 2, -1), \qquad \mathbf{v}_4 = (0, 1, -1, 0).$$

Si

$$\mathbf{v} = (1, 2, -6, 2),$$

calcule $[\mathbf{v}]_S$.

Solución Para determinar $[\mathbf{v}]_S$ necesitamos calcular las constantes c_1, c_2, c_3 y c_4, tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{v},$$

que es simplemente un problema de combinación lineal. Esta ecuación origina un sistema lineal cuya matriz aumentada es (verifique)

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right], \tag{1}$$

o en forma equivalente,

$$\left[\mathbf{v}_1^T \quad \mathbf{v}_2^T \quad \mathbf{v}_3^T \quad \mathbf{v}_4^T \;\vdots\; \mathbf{v}^T\right].$$

Al transformar la matriz en (1) a su forma escalonada reducida por filas, obtenemos la solución (verifique)

$$c_1 = 3, \quad c_2 = -1, \quad c_3 = -2, \quad c_4 = 1,$$

de modo que el vector de coordenadas de $\mathbf{v}$ con respecto a la base S es

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

■

EJEMPLO 2 Sea $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base canónica de R^3 y sea

$$\mathbf{v} = (2, -1, 3).$$

Calcule $[\mathbf{v}]_S$.

Solución Como S es la base canónica

$$\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_1 - 1\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3,$$

de modo que

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

■

Observación En el ejemplo 2, el vector de coordenadas $[\mathbf{v}]_S$ de $\mathbf{v}$ con respecto a S coincide con $\mathbf{v}$, pues S es la base canónica para R^3.

EJEMPLO 3 Sea $V = P_1$, el espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 1, y sean $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, bases para P_1, donde

$$\mathbf{v}_1 = t, \quad \mathbf{v}_2 = 1, \quad \mathbf{w}_1 = t + 1, \quad \mathbf{w}_2 = t - 1.$$

Sea $\mathbf{v} = p(t) = 5t - 2$.

(a) Calcule $[\mathbf{v}]_S$.

(b) Calcule $[\mathbf{v}]_T$.

Solución (a) Como S es la base canónica o estándar para P_1, tenemos

$$5t - 2 = 5t + (-2)(1).$$

Entonces,

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

(b) Para calcular $[\mathbf{v}]_T$, expresaremos a $\mathbf{v}$ como combinación lineal de $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$.

$$5t - 2 = c_1(t + 1) + c_2(t - 1),$$

o

$$5t - 2 = (c_1 + c_2)t + (c_1 - c_2).$$

Al igualar los coeficientes de las potencias correspondientes de t, obtenemos el sistema lineal

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 5 \\ c_1 - c_2 &= -2, \end{aligned}$$

cuya solución es (verifique)

$$c_1 = \tfrac{3}{2} \quad \text{y} \quad c_2 = \tfrac{7}{2}.$$

Por lo tanto,

$$[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

■

En cierto sentido, los vectores de coordenadas de los elementos de un espacio vectorial se comportan algebraicamente en forma similar a como se comportan los propios vectores. Por ejemplo, no es difícil demostrar (vea el ejercicio T.2) que si S es una base para un espacio vectorial n-dimensional V y $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ son vectores en V y k es un escalar, entonces

$$[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_S = [\mathbf{v}]_S + [\mathbf{W}]_S \tag{2}$$

y

$$[k\mathbf{v}]_S = k[\mathbf{v}]_S. \tag{3}$$

Es decir, el vector de coordenadas de una suma de vectores es la suma de los vectores de coordenadas, y el vector de coordenadas de un múltiplo escalar de un vector es el múltiplo escalar del vector de coordenadas. Además, los resultados de las ecuaciones (2) y (3) se pueden generalizar para mostrar que

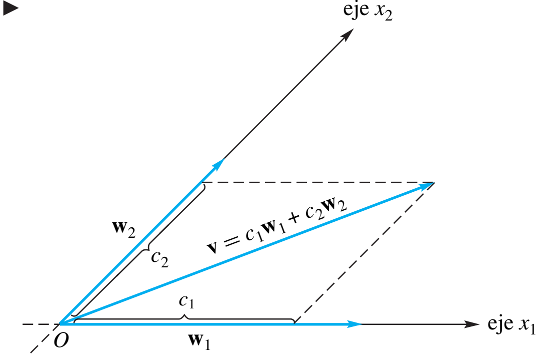
$$[k_1\mathbf{v} + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_n\mathbf{v}_n]_S = k_1[\mathbf{v}_1]_S + k_2[\mathbf{v}_2]_S + \cdots + k_n[\mathbf{v}_n]_S.$$

Es decir, el vector de coordenadas de una combinación lineal de vectores es la misma combinación lineal de los vectores de coordenadas individuales.

UNA REPRESENTACIÓN DEL ESPACIO VECTORIAL

La elección de una base ordenada, y la correspondiente determinación de un vector de coordenadas para cada **v** en V, nos permiten obtener una "ilustración" del espacio vectorial. Para esto, utilizaremos el ejemplo 3. Elegimos un punto fijo O en el plano R^2 y trazamos dos flechas arbitrarias $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ que parten de O, y que representan los vectores t y 1 de la base ordenada $S = \{t, 1\}$ para P_1 (vea la figura 6.11). Las direcciones de $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ determinan dos rectas, a las que llamaremos **eje** $\boldsymbol{x}_1$ y **eje** $\boldsymbol{x}_2$, respectivamente. La dirección positiva del eje x_1 está en la dirección de $\mathbf{w}_1$; la dirección negativa del eje x_1 está a lo largo de $-\mathbf{w}_1$. De manera análoga, la dirección positiva del eje x_2 está en la dirección de $\mathbf{w}_2$; la dirección negativa del eje x_2 está a lo largo de $-\mathbf{w}_2$. Las longitudes de $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ determinan las escalas en los ejes x_1 y x_2, respectivamente. Si **v** es un vector en P_1, podemos escribir a **v**, en forma única, como $\mathbf{v} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2$. Ahora, señalamos un segmento de longitud $|c_1|$ sobre el eje x_1 (en la dirección positiva, si c_1 es positivo y en la dirección negativa si c_1 es negativo), y trazamos una recta que pase por el extremo de este segmento y que sea paralela a $\mathbf{w}_2$. De manera análoga, señalamos un segmento de longitud $|c_2|$ sobre el eje x_2 (en la dirección positiva, si c_2 es positivo y en la dirección negativa si c_2 es negativo), y trazamos una recta que pase por el extremo de este segmento y que sea paralela a $\mathbf{w}_1$. Trazamos un segmento de recta dirigido desde O hasta el punto de intersección de estas dos rectas. Este segmento de recta dirigido representa el vector **v**.

Figura 6.11 ►



MATRICES DE TRANSICIÓN

Supongamos que $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ son bases para el espacio vectorial n-dimensional V. Examinaremos la relación entre los vectores de coordenadas $[\mathbf{v}]_S$ y $[\mathbf{v}]_T$, del vector **v** en V con respecto a las bases S y T, respectivamente.

Si **v** está en V, entonces

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n \tag{4}$$

de modo que

$$[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{v}\right]_S &= \left[c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n\right]_S \\
&= \left[c_1\mathbf{w}_1\right]_S + \left[c_2\mathbf{w}_2\right]_S + \cdots + \left[c_n\mathbf{w}_n\right]_S \\
&= c_1\left[\mathbf{w}_1\right]_S + c_2\left[\mathbf{w}_2\right]_S + \cdots + c_n\left[\mathbf{w}_n\right]_S .
\end{aligned}$$

Denotemos al vector de coordenadas de $\mathbf{w}_j$ con respecto a S como

$$\left[\mathbf{w}_j\right]_S = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$\left[\mathbf{v}\right]_S = c_1\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + c_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

o

$$\left[\mathbf{v}\right]_S = P_{S\leftarrow T}\left[\mathbf{v}\right]_T , \tag{5}$$

donde

$$P_{S\leftarrow T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \left[\left[\mathbf{w}_1\right]_S \quad \left[\mathbf{w}_2\right]_S \quad \cdots \quad \left[\mathbf{w}_n\right]_S\right]$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{v}\text{ (en } V) \arrow[r] \arrow[d] & {[\mathbf{v}]_S \text{ (en } R^n)} \\
{[\mathbf{v}]_T \text{ (en } R^n)} \arrow[ur, "\text{Multiplicar a la izquierda por } P_{S\leftarrow T}"']
\end{tikzcd}$$

Figura 6.12 ▲

se conoce como **la matriz de transición de la base *T* a la base *S***. La ecuación (5) dice que el vector de coordenadas de $\mathbf{v}$ con respecto a la base S es la matriz de transición $P_{S\leftarrow T}$ multiplicada por el vector de coordenadas de $\mathbf{v}$ con respecto a la base T. La figura 6.12 ilustra la ecuación (5).

En el cuadro siguiente se resume el procedimiento que acabamos de desarrollar para el cálculo de la matriz de transición de la base T a la base S.

> El procedimiento para calcular la matriz de transición $P_{S\leftarrow T}$ de la base $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ a la base $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para V es el siguiente.
>
> ***Paso 1.*** Calcule el vector de coordenadas de $\mathbf{w}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ con respecto a la base S. Esto significa expresar a $\mathbf{w}_j$ como una combinación lineal de los vectores en S:
>
> $$a_{1j}\mathbf{v}_1 + a_{2j}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{nj}\mathbf{v}_n = \mathbf{w}_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$
>
> Los valores para a_{1j}, a_{2j}, . . . , a_{nj} se determinan con reducción de Gauss-Jordan, transformando la matriz aumentada de este sistema a la forma escalonada reducida por filas.
>
> ***Paso 2.*** La matriz de transición $P_{S\leftarrow T}$ de la base T a la base S se forma tomando el vector $[\mathbf{w}_j]_S$ como *j-ésima* columna de la matriz pedida, $P_{S\leftarrow T}$.

EJEMPLO 4 Sea V igual a R^3, y sean $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ bases para R^3, donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule la matriz de transición $P_{S\leftarrow T}$ de la base T a la base S.

(b) Verifique la ecuación (5) para $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Solución (a) Para calcular $P_{S\leftarrow T}$, determinamos a_1, a_2, a_3 tales que

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_1.$$

En este caso obtenemos un sistema lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas, cuya matriz aumentada es

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{w}_1],$$

Esto es,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right].$$

De manera análoga, la determinación de b_1, b_2, b_3 y c_1, c_2, c_3 tales que

$$b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + b_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_2$$
$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3,$$

exige resolver los sistemas lineales, cuyas matrices aumentadas son

$$[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{w}_2] \text{ y } [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{w}_3],$$

o, específicamente,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad \text{y} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Como la matriz de coeficientes de los tres sistemas lineales es la misma, $[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3]$ en cada caso, podemos transformar simultáneamente las tres matrices aumentadas a la forma escalonada reducida, transformando la matriz por bloques

$$[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3 \mid \mathbf{w}_1 \mid \mathbf{w}_2 \mid \mathbf{w}_3]$$

a la forma escalonada reducida.* Esto significa llevar la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 2 & 1 & 1 & 6 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right]$$

*Discutido en la observación 2 que sigue al ejemplo 12 de la sección 1.6.

a su forma escalonada reducida por filas (verifique)

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

de la cual se deduce que la matriz de transición de la base T a la base S es

$$P_{S\leftarrow T} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Si

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix},$$

entonces para expresar $\mathbf{v}$ en términos de la base T utilizamos la ecuación (4). El sistema lineal asociado conduce a (verifique)

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 - 2\mathbf{w}_3,$$

de modo que

$$\left[\mathbf{v}\right]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Entonces, aplicando la ecuación (5), encontramos que $[\mathbf{v}]_S$ es

$$P_{S\leftarrow T}\left[\mathbf{v}\right]_T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si calculamos $[\mathbf{v}]_s$ directamente, planteando y resolviendo el sistema lineal correspondiente, encontramos que (verifique)

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3,$$

es decir,

$$\left[\mathbf{v}\right]_S = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Hemos verificado así la ecuación

$$\left[\mathbf{v}\right]_S = P_{S\leftarrow T}\left[\mathbf{v}\right]_T. \qquad \blacksquare$$

En seguida demostraremos que la matriz de transición $P_{S\leftarrow T}$ de la base T a la base S es no singular y que su inversa, $P^{-1}_{S\leftarrow T}$ es precisamente la matriz de transición de la base S a la base T.

TEOREMA 6.15 *Sean $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ bases para el espacio vectorial V, de dimensión n. Sea $P_{S\leftarrow T}$ la matriz de transición de la base T a la base S. Entonces $P_{S\leftarrow T}$ es no singular y $P^{-1}_{S\leftarrow T}$ es la matriz de transición de la base S a la base T.*

Demostración Para demostrar que $P_{S\leftarrow T}$ es no singular mostraremos que el espacio nulo de $P_{S\leftarrow T}$ contiene solamente el vector nulo. Suponga que $P_{S\leftarrow T}\left[\mathbf{v}\right]_T = \mathbf{0}_{R^n}$ para algún $\mathbf{v}$ en V. De acuerdo con la ecuación (5),

$$P_{S\leftarrow T}\left[\mathbf{v}\right]_T = \left[\mathbf{v}\right]_S = \mathbf{0}_{R^n}.$$

Si $\mathbf{v} = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n$, entonces

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \left[\mathbf{v}\right]_S = \mathbf{0}_{R^n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

de modo que

$$\mathbf{v} = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + \cdots + 0\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V.$$

o sea que $\left[\mathbf{v}\right]_T = \mathbf{0}_{R^n}$. Por lo tanto, el sistema homogéneo $P_{S\leftarrow T}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solamente la solución trivial y ello implica, de acuerdo con el teorema 1.13, que $P_{S\leftarrow T}$ es no singular. Adicionalmente, si multiplicamos por la izquierda ambos lados de la ecuación (5) por $P_{S\leftarrow T}^{-1}$, obtenemos

$$\left[\mathbf{v}\right]_T = P_{S\leftarrow T}^{-1}\left[\mathbf{v}\right]_S.$$

En conclusión, $P_{S\leftarrow T}^{-1}$ es la matriz de transición de la base S a la base T; la j-ésima columna de $P_{S\leftarrow T}^{-1}$ es $[\mathbf{v}_j]_T$. ■

Observación En los ejercicios T.5 a T.7 le pedimos demostrar que si S y T son bases para el espacio vectorial R^n, entonces

$$P_{S\leftarrow T} = M_S^{-1}M_T,$$

donde M_S es la matriz de $n \times n$ cuya j-ésima columna es $\mathbf{v}_j$ y M_T es la matriz de $n \times n$ cuya j-ésima columna es $\mathbf{w}_j$. Esta fórmula implica que $P_{S\leftarrow T}$ es no singular y es útil al resolver algunos de los ejercicios de esta sección.

EJEMPLO 5 Sean S y T las bases de R^3 definidas en el ejemplo 4. Calcule la matriz de transición $Q_{T\leftarrow S}$ de la base S a la base T, de forma directa y muestre que $Q_{T\leftarrow S} = P_{S\leftarrow T}^{-1}$.

Solución $Q_{T\leftarrow S}$ es la matriz que tiene por columnas los vectores solución del sistema lineal resultante de las ecuaciones vectoriales

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + a_3\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_1 \\ b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2 + b_3\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_2 \\ c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + c_3\mathbf{w}_3 &= \mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Como en el ejemplo 4, podemos resolver simultáneamente estos sistemas por medio de la transformación de la matriz por bloques

$$[\mathbf{w}_1\ \ \mathbf{w}_2\ \ \mathbf{w}_3 \mid \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3]$$

a la forma escalonada reducida por filas. Esto es, transformamos

$$\left[\begin{array}{rrr|r|r|r} 6 & 4 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

a la forma escalonada reducida (verifique)

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right],$$

de modo que

$$Q_{T\leftarrow S} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando $Q_{T\leftarrow S}$ por $P_{S\leftarrow T}$, obtenemos (verifique) $Q_{T\leftarrow S}\, P_{S\leftarrow T} = I_3$, de lo cual concluimos que $Q_{T\leftarrow S} = P_{S\leftarrow T}^{-1}$. ■

EJEMPLO 6 Sea V igual a P_1 y sean $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ bases para P_1, donde

$$\mathbf{v}_1 = t, \quad \mathbf{v}_2 = t - 3, \quad \mathbf{w}_1 = t - 1, \quad \mathbf{w}_2 = t + 1.$$

(a) Calcule la matriz de transición $P_{S\leftarrow T}$ de la base T a la base S.

(b) Verifique la ecuación (5) para $\mathbf{v} = 5t + 1$.

(c) Calcule la matriz de transición $Q_{T\leftarrow S}$ de la base S a la base T y muestre que $Q_{T\leftarrow S} = P_{S\leftarrow T}^{-1}$.

Solución (a) Para calcular $P_{S\leftarrow T}$, necesitamos resolver simultáneamente las ecuaciones vectoriales

$$\begin{aligned} a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 &= \mathbf{w}_1 \\ b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 &= \mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

mediante la transformación de la matriz por bloques resultante (verifique)

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

a la forma escalonada reducida por filas. El resultado es (verifique)

$$\left[\begin{array}{cc|c|c} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right],$$

de modo que

$$P_{S\leftarrow T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

(b) Al expresar $\mathbf{v} = 5t + 1$, en términos de la base T, obtenemos (verifique)

$$\mathbf{v} = 5t + 1 = 2(t - 1) + 3(t + 1),$$

y, en consecuencia,

$$\left[\mathbf{v}\right]_T = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Para verificarlo usted puede plantear y resolver el sistema lineal resultante de la combinación lineal

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2.$$

Ahora usamos la ecuación (5), para obtener

$$\left[\mathbf{v}\right]_S = P_{S\leftarrow T}\left[\mathbf{v}\right]_T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Si calculamos $[\mathbf{v}]_S$ directamente a partir del sistema lineal que resulta de la ecuación vectorial

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2,$$

encontramos que (verifique)

$$\mathbf{v} = 5t = 1 = \tfrac{16}{3}t - \tfrac{1}{3}(t-3),$$

de modo que

$$\left[\mathbf{v}\right]_S = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\left[\mathbf{v}\right]_S = P_{S\leftarrow T}\left[\mathbf{v}\right]_T,$$

que es la ecuación (5).

(c) La matriz de transición $Q_{T\leftarrow S}$ de la base S a la base T se obtiene (verifique) transformando la matriz por bloques

$$\left[\begin{array}{rr:r:r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

a la forma escalonada reducida por filas. Obtenemos (verifique)

$$\left[\begin{array}{rr:r:r} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{array}\right].$$

por lo tanto,

$$Q_{T\leftarrow S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}.$$

Al multiplicar $Q_{T\leftarrow S}$ por $P_{S\leftarrow T}$, obtenemos $Q_{T\leftarrow S}\,P_{S\leftarrow T} = I_2$, de modo que $Q_{T\leftarrow S} = P^{-1}_{S\leftarrow T}$. ■

Términos clave

Base ordenada
Vector de coordenadas
Matriz de transición

6.7 Ejercicios

Supondremos que todas las bases consideradas en estos ejercicios son bases ordenadas. En los ejercicios 1 a 6, calcule el vector de coordenadas de **v** *con respecto a la base dada S para V.*

1. V es R^2, $S = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

2. V es R^3, $S = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 2)\}$, $\mathbf{v} = (2, -1, -2)$.

3. V es P_1, $S = \{t+1, t-2\}$, $\mathbf{v} = t+4$.

4. V es P_2, $S = \{t^2 - t + 1, t + 1, t^2 + 1\}$, $\mathbf{v} = 4t^2 - 2t + 3$.

5. V es M_{22}, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$,
$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

6. V es M_{22}, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

En los ejercicios 7 a 12, calcule el vector $\mathbf{v}$ *si el vector de coordenadas* $[\mathbf{v}]_S$ *está dado con respecto a la base S para V.*

7. V es R^2, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

8. V es R^3, $S = \{(0, 1, -1), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$,
$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

9. V es P_1, $S = \{t, 2t - 1\}$, $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

10. V es P_2, $S = \{t^2 + 1, t + 1, t^2 + t\}$, $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

11. V es M_{22}, $S = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right\}$, $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

12. V es M_{22}, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$, $[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

13. Sean $S = (1, 2), (0, 1)$ y $T = \{(1, 1), (2, 3)\}$ bases para R^2. Sean $\mathbf{v} = (1, 5)$ y $\mathbf{w} = (5, 4)$.

(a) Determine los vectores de coordenadas de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ con respecto a la base T.

(b) ¿Cuál es la matriz de transición $P_{S \leftarrow T}$ de la base T a la base S?

(c) Determine los vectores de coordenadas de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ con respecto a S utilizando $P_{S \leftarrow T}$.

(d) Determine directamente los vectores de coordenadas de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ con respecto a S.

(e) Determine la matriz de transición $Q_{T \leftarrow S}$ de la base S a la base T.

(f) Determine los vectores de coordenadas de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ con respecto a T utilizando $Q_{T \leftarrow S}$. Compare las respuestas con las de (a).

14. Sean

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

y

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

bases para R^3. Sean

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Siga las indicaciones del ejercicio 13.

15. Sean $S = \{t^2 + 1, t - 2, t + 3\}$ y $T = \{2t^2 + t, t^2 + 3, t\}$ bases para P_2. Sean $\mathbf{v} = 8t^2 - 4t + 6$ y $\mathbf{w} = 7t^2 - t + 9$. Siga las indicaciones del ejercicio 13.

16. Sean $S = \{t^2 + t + 1, t^2 + 2t + 3, t^2 + 1\}$ y $T = \{t + 1, t^2, t^2 + 1\}$ bases para P_2. Además, sean $\mathbf{v} = -t^2 + 4t + 5$ y $\mathbf{w} = 2t^2 - 6$. Siga las indicaciones del ejercicio 13.

17. Sean

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

y

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

bases para M_{22}. Sean

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Siga las indicaciones del ejercicio 13.

18. Sean

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

y

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

bases para M_{22}. Sean

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Siga las indicaciones del ejercicio 13.

19. Sean $S = \{(1,-1), (2, 1)$ y $T = \{(3, 0), (4,-1)\}$ bases para R^2. Si $\mathbf{v}$ está en R^2 y

$$[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

determine $[\mathbf{v}]_S$.

20. Sean $S = \{t + 1, t - 2\}$ y $T = \{t - 5, t - 2\}$ bases para P_1. Si $\mathbf{v}$ está en P_1 y

$$[\mathbf{v}]_T = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

determine $[\mathbf{v}]_S$.

21. Sean $S = \{(-1, 2, 1), (0, 1, 1), (-2, 2, 1)$ y $T = \{(-1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ bases para R^3. Si $\mathbf{v}$ está en R^3 y

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

determine $[\mathbf{v}]_T$.

22. Sean $S = \{t^2, t - 1, 1\}$ y $T = \{t^2 + t + 1, t + 1,1\}$ bases para P_2. Si $\mathbf{v}$ está en P_2 y

$$[\mathbf{v}]_S = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

determine $[\mathbf{v}]_T$.

23. Sean $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ bases para R^3, donde

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1).$$

Si la matriz de transición de T a S es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

determine los vectores de la base T.

24. Sean $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ bases para P_1, donde

$$\mathbf{w}_1 = t, \quad \mathbf{w}_2 = t - 1.$$

Si la matriz de transición de S a T es

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

determine los vectores de la base S.

25. Sean $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ bases para R^2, donde

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1).$$

Si la matriz de transición de S a T es

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

determine los vectores de la base T.

26. Sean $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ bases para P_1, donde

$$\mathbf{w}_1 = t - 1, \quad \mathbf{w}_2 = t + 1.$$

Si la matriz de transición de T en S es

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

determine los vectores de S.

Ejercicios teóricos

T.1. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para el espacio vectorial V de dimensión n, y sean $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ dos vectores en V. Muestre que $\mathbf{v} = \mathbf{w}$ si, y sólo si $[\mathbf{v}]_S = [\mathbf{w}]_S$.

T.2. Muestre que si S es una base para un espacio vectorial V de dimensión n y $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ son vectores en V y k es un escalar, entonces

$$[\mathbf{v} + \mathbf{w}]_S = [\mathbf{v}]_S + [\mathbf{w}]_S$$

y

$$[k\mathbf{v}]_S = k[\mathbf{v}]_S.$$

T.3. Sea S una base para un espacio vectorial V de dimensión n. Muestre que si $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en V, entonces

$$\{[\mathbf{w}_1]_S, [\mathbf{w}_2]_S, \ldots, [\mathbf{w}_k]_S\}$$

es un conjunto linealmente independiente de vectores en R^n.

T.4. Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para un espacio vectorial V de dimensión n. Muestre que

$$\{[\mathbf{v}_1]_S, [\mathbf{v}_2]_S, \ldots, [\mathbf{v}_n]_S\}$$

es una base para R^n.

En los ejercicios T.5 a T.7, sean $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *y* $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ *bases para el espacio vectorial* R^n.

T.5. Sea M_S la matriz de $n \times n$ cuya j-ésima columna es $\mathbf{v}_j$ y sea M_T la matriz de $n \times n$ cuya j-ésima columna es $\mathbf{w}_j$. Demuestre que M_S y M_T son no singulares. (*Sugerencia:* considere los sistemas homogéneos $M_S\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y $M_T\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

T.6. Si $\mathbf{v}$ es un vector en V, demuestre que

$$\mathbf{v} = M_S[\mathbf{v}]_S \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = M_T[\mathbf{v}]_T.$$

T.7. (a) Utilice la ecuación (5) y los ejercicios T.5 y T.6 para demostrar que

$$P_{S\leftarrow T} = M_S^{-1}M_T.$$

(b) Demuestre que $P_{S\leftarrow T}$ es no singular.

(c) Verifique el resultado de la parte (a) para el ejemplo 4.

Ejercicios con MATLAB

La determinación de las coordenadas de un vector con respecto a una base es un problema de combinación lineal. Por lo tanto, una vez construido el correspondiente sistema lineal, podemos valernos de las rutinas **reduce** *o* **rref** *de* MATLAB *para determinar su solución. La solución nos proporciona las coordenadas deseadas (y el análisis de la sección 12.7 será útil para poder construir el sistema lineal necesario).*

ML.1. Sea $V = R^3$ y

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

Muestre que S es una base para V y determine $[\mathbf{v}]_S$ para cada uno de los siguientes vectores.

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

ML.2. Sea $V = R^4$ y
$S = \{(1, 0, 1, 1), (1, 2, 1, 3), (0, 2, 1, 1), (0, 1, 0, 0)\}$.
Muestre que S es una base para V y determine $[\mathbf{v}]_S$ para cada uno de los siguientes vectores.

(a) $\mathbf{v} = (4, 12, 8, 14)$

(b) $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$

(c) $\mathbf{v} = \left(1, 1, 1, \frac{7}{3}\right)$

ML.3. Sea V el espacio vectorial de las matrices de 2×2 y

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Muestre que S es una base para V y determine $[\mathbf{v}]_S$ para cada uno de los siguientes vectores.

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{10}{3} \\ \frac{7}{6} & 2 \end{bmatrix}$

(c) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

La determinación de la matriz de transición $P_{S \leftarrow T}$ de la base T a la base S también es un problema de combinación lineal. $P_{S \leftarrow T}$ es la matriz que tiene como columnas las coordenadas de los vectores de T con respecto a la base S. Podemos seguir las ideas desarrolladas en el ejemplo 4 para determinar la matriz $P_{S \leftarrow T}$ mediante las rutinas **reduce** *o* **rref.** *La idea es construir una matriz A cuyas columnas corresponden a los vectores en S (vea la sección 12.7) y una matriz B cuyas columnas corresponden a los vectores en T. Entonces, la instrucción* **rref([A B])** *proporciona la matriz* $[\mathbf{I P_{S \leftarrow T}}]$.

En los ejercicios ML.4 a ML.6, aplique las técnicas de MATLAB *descritas anteriormente, para determinar la matriz de transición $P_{S \leftarrow T}$ de la base T a la base S.*

ML.4. $V = R^3$,

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

ML.5. $V = P_3$, $S = \{t - 1, t + 1, t^2 + t, t^3 - t\}$,
$T = \{t^2, 1 - t, 2 - t^2, t^3 + t^2\}$

ML.6. $V = R^4$, $S = \{(1, 2, 3, 0), (0, 1, 2, 3), (3, 0, 1, 2), (2, 3, 0, 1)\}$, $T =$ base canónica.

ML.7. Sean $V = R^3$ y las bases

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\},$$

y

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(a) Determine la matriz de transición P de U a T.
(b) Determine la matriz de transición Q de T a S.
(c) Determine la matriz de transición Z de U a S.
(d) ¿Se cumple que $Z = PQ$ o QP?

6.8 Bases ortonormales en R^n

Nuestra experiencia con las bases naturales o canónicas para R^2, R^3 y, en general, R^n, nos ha mostrado que su uso reduce apreciablemente los cálculos. Un subespacio W de R^n no necesariamente contiene alguno de los vectores de tales bases, pero en esta sección mostraremos que sí tiene una base con las mismas propiedades de las bases canónicas. Es decir, mostraremos que existe una base S para W tal que cada uno de sus vectores tiene longitud 1 y cada dos vectores de S son ortogonales. El método para obtener dicha base, que presentaremos en esta sección, se conoce como proceso de Gram-Schmidt.

DEFINICIÓN

Un conjunto $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ en R^n es **ortogonal** si cada par de vectores distintos en S son ortogonales, es decir, si $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ para $i \neq j$. Un conjunto **ortonormal** de vectores es un conjunto ortogonal de vectores unitarios. Esto es, $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es ortonormal si $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ para $i \neq j$, y $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, k$.

EJEMPLO 1

Si $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 2)$, $\mathbf{x}_2 = (-2, 0, 1)$, y $\mathbf{x}_3 = (0, 1, 0)$, entonces $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ es un conjunto ortogonal en R^3. Los vectores

$$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

son vectores unitarios en las direcciones de $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$, respectivamente. Como también $\mathbf{x}_3$ es un vector unitario, el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{x}_3\}$ es un conjunto ortonormal. Además gen$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ es igual a gen$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{x}_3\}$. ■

EJEMPLO 2

La base canónica

$$\{(1, 0, 0,), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

es un conjunto ortonormal en R^3. En general, la base canónica para R^n es un conjunto ortonormal.

El teorema siguiente es un resultado importante sobre los conjuntos ortogonales. ■

TEOREMA 6.16

Si $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos en R^n entonces S es linealmente independiente.

Demostración Consideremos la ecuación

$$c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k = \mathbf{0}. \tag{1}$$

Al efectuar el producto punto de ambos lados de (1) por $\mathbf{u}_i$, $1 \leq i \leq k$, tenemos

$$(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_k\mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{u}_i = \mathbf{0} \cdot \mathbf{u}_i. \tag{2}$$

Aplicando propiedades (c) y (d) del teorema 4.3 de la sección 4.2, el lado izquierdo de (2) es igual a

$$c_1(\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_i) + c_2(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_i) + \cdots c_k(\mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_i),$$

y el lado derecho es 0. Como $\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_i = 0$ si $i \neq j$, (2) se convierte en

$$0 = c_i(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i) = c_i\|\mathbf{u}_i\|^2. \tag{3}$$

Como $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}$, la parte (a) del teorema 4.3 de la sección 4.2 establece que $\|\mathbf{u}_i\| \neq 0$. Esto significa que en (3) necesariamente $c_i = 0$, $1 \leq i \leq k$, es decir, que S es linealmente independiente. ■

COROLARIO 6.6

Un conjunto ortonormal de vectores en R^n es linealmente independiente.

Demostración Ejercicio T.2. ■

DEFINICIÓN

Del teorema 6.9, sección 6.4, y el corolario 6.6 se sigue que todo conjunto ortonormal de n vectores en R^n es una base para R^n (ejercicio T.3). Una **base ortogonal** (**ortonormal**) para un espacio vectorial es una base cuyos vectores forman un conjunto ortogonal (ortonormal).

El trabajo de cálculo necesario para resolver un problema generalmente se reduce cuando se trabaja con la base canónica (estándar) para R^n. Esto se debe a que tal base es ortonormal. Por ejemplo, si $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base para R^n, y $\mathbf{v}$ es un vector en V, podemos escribir $\mathbf{v}$ como

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n.$$

Los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ se obtienen resolviendo un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas (vea la sección 6.3).

Sin embargo, cuando S es ortonormal, podemos obtener los c_i con mucho menos trabajo, como lo establece el siguiente teorema.

TEOREMA 6.17 *Sean $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortonormal para R^n* y $\mathbf{v}$ *un vector en R^n. Entonces*

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n,$$

donde

$$c_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i \qquad (1 \leq i \leq n).$$

Demostración Ejercicio T.4(a). ■

COROLARIO 6.7 *Sean $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortogonal para R^n* y $\mathbf{v}$ *un vector en R^n. Entonces*

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \cdots + c_n\mathbf{u}_n,$$

donde

$$c_i = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i} \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Demostración Ejercicio T.4(b). ■

EJEMPLO 3 Sea $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ una base ortonormal para R^3, donde

$$\mathbf{u}_1 = \left(\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right), \quad \mathbf{u}_2 = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}\right), \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_3 = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right).$$

Escriba el vector $\mathbf{v} = (3, 4, 5)$ como una combinación lineal de los vectores en S.

Solución Tenemos

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + c_3\mathbf{u}_3.$$

De acuerdo con el teorema 6.17, podemos obtener los valores de c_1, c_2 y c_3 sin necesidad de resolver el sistema lineal correspondiente. Así,

$$c_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 = 1, \qquad c_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2 = 0, \qquad c_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_3 = 7,$$

con lo cual $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 + 7\mathbf{u}_3$ es la combinación lineal pedida. ■

TEOREMA 6.18 **(Proceso de Gram*-Schmidt**)** *Sea W un subespacio no nulo de R^n con base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$, Entonces, hay una base ortonormal $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ para W.*

---

*Jörgen Pederson Gram (1850-1916) fue un actuario danés.

**Erhard Schmidt (1876-1959) impartió clases en varias de las principales universidades alemanas y fue alumno de Hermann Amandus Schwarz y de David Hilbert. Hizo importantes contribuciones al estudio de las ecuaciones integrales y de las ecuaciones diferenciales parciales y, como parte de este estudio, en 1907 presentó el método para determinar una base ortonormal. En 1908 escribió un artículo sobre un sistema de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas, con el cual originó la teoría de los espacios de Hilbert y en el que utilizó su método nuevamente.

Demostración La demostración es constructiva, es decir, construiremos gradualmente la base T deseada. El primer paso consiste en encontrar una base ortogonal $T^* = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ para W.

Primero elegimos cualquiera de los vectores de S, digamos $\mathbf{u}_1$, y lo llamamos $\mathbf{v}_1$; $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$. Después buscamos un vector $\mathbf{v}_2$ en el subespacio W_1 de W generado por $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ que sea ortogonal a $\mathbf{v}_1$. Como $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$, W_1 es también el subespacio generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2\}$. Hagamos,

$$\mathbf{v}_2 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{u}_2.$$

Intentaremos determinar c_1 y c_2 de modo que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Ahora,

$$0 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 = (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{v}_1 = c_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) + c_2(\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1). \tag{4}$$

Como $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ (¿por qué?), $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 \neq 0$, y al resolver para c_1 y c_2 en (4), obtenemos

$$c_1 = -c_2\,\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}.$$

Donde podemos asignar un valor arbitrario no nulo a c_2. Si hacemos $c_2 = 1$, obtenemos

$$c_1 = -\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}.$$

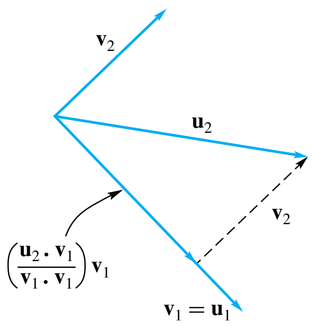


Figura 6.13 ▲

Por lo tanto,

$$\mathbf{v}_2 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1.$$

Observe que hasta este momento hemos construido un subconjunto ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de W (vea la figura 6.13).

A continuación, determinaremos un vector $\mathbf{v}_3$ que está en el subespacio W_2 de W generado por $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y es ortogonal a $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Por supuesto, W_2 es también el subespacio generado por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_3\}$ (¿por qué?). Sea,

$$\mathbf{v}_3 = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + d_3\mathbf{u}_3.$$

Trataremos que d_1 y d_2 sean tales que

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = 0.$$

Ahora,

$$0 = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 = (d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + d_3\mathbf{u}_3) \cdot \mathbf{v}_1 = d_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1) + d_3(\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1), \tag{5}$$
$$0 = \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 = (d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + d_3\mathbf{u}_3) \cdot \mathbf{v}_2 = d_2(\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2) + d_3(\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2). \tag{6}$$

En la obtención de los dos lados derechos de (5) y (6) usamos el hecho de que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Observe que $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$ (¿por qué?). Al despejar d_1 y d_2 en (5) y (6), respectivamente, obtenemos

$$d_1 = -d_3\,\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \quad \text{y} \quad d_2 = -d_3\,\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}.$$

Podemos asignar un valor arbitrario, no nulo, a d_3. Si $d_3 = 1$, obtenemos

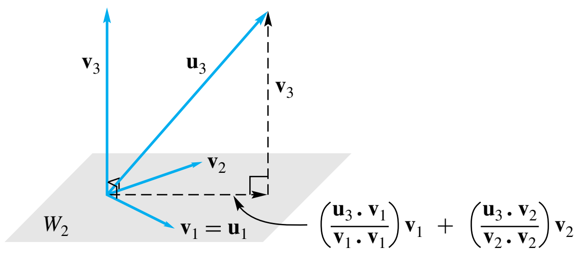
$$d_1 = -\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \quad \text{y} \quad d_2 = -\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}.$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2.$$

Observe que hasta el momento tenemos un subconjunto ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de W (vea la figura 6.14).

Figura 6.14 ▶



Ahora determinaremos un vector $\mathbf{v}_4$ en el subespacio W_3 de W generado por el conjunto $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ —y, por lo tanto, por $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_4\}$—, que sea ortogonal a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Podemos escribir

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \left(\frac{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3}\right)\mathbf{v}_3$$

Continuamos de esta manera hasta obtener un conjunto ortogonal $T^* = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ de m vectores. Entonces, T^* es una base para W. Para terminar, normalizamos los $\mathbf{v}_i$, es decir, hacemos

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{\|\mathbf{v}_i\|}\mathbf{v}_i \qquad (1 \leq i \leq m),$$

entonces $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ es una base ortonormal para W. ■

A continuación resumimos el proceso de Gram-Schmidt.

El proceso de Gram-Schmidt para calcular una base ortonormal $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ para un subespacio no nulo W de R^n, dada una base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ para W, es como sigue.

Paso 1. Haga $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$.

Paso 2. Calcule los vectores $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_m$, de manera sucesiva, uno a la vez, por medio de la fórmula

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i - \left(\frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2 - \cdots - \left(\frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v}_{i-1}}{\mathbf{v}_{i-1} \cdot \mathbf{v}_{i-1}}\right)\mathbf{v}_{i-1}.$$

El conjunto de vectores $T^* = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ es un conjunto ortogonal.

Paso 3. Haga

$$\mathbf{w}_i = \frac{1}{\|\mathbf{v}_i\|}\mathbf{v}_i \qquad (1 \leq i \leq m).$$

Entonces $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ es una base ortonormal para W.

Observación No es difícil mostrar que si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores en R^n tales que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, entonces $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = 0$, para cualquier escalar c (ejercicio T.7). Este resultado se puede utilizar para simplificar los cálculos manuales en el proceso de Gram-Schmidt. Tan pronto como en el paso 2 se calcula un vector $\mathbf{v}_i$, se lo multiplica por un escalar que permita eliminar fracciones, si se han presentado. Nosotros haremos uso de este resultado al trabajar con el proceso de Gram-Schmidt.

EJEMPLO 4 Considere la base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ para R^3, donde

$$\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (-1, 0, -1) \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_3 = (-1, 2, 3).$$

Utilice el proceso de Gram-Schmidt para transformar S a una base ortonormal para R^3.

Solución ***Paso 1.*** Sea $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$.
Paso 2. Ahora calculamos $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 = (-1, 0, -1) - \left(\tfrac{-2}{3}\right)(1, 1, 1) = \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{1}{3}\right).$$

Al multiplicar $\mathbf{v}_2$ por 3, para eliminar las fracciones, obtenemos $(-1, 2, -1)$, que ahora utilizamos como $\mathbf{v}_2$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2 \\ &= (-1, 2, 3) - \tfrac{4}{3}(1, 1, 1) - \tfrac{2}{6}(-1, 2, -1) = (-2, 0, 2).\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$T^* = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{(1, 1, 1), (-1, 2, -1), (-2, 0, 2)\}$$

es una base ortogonal para R^3.
Paso 3. Sean

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \\ \mathbf{w}_2 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, -1) \\ \mathbf{w}_3 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{8}}(-2, 0, 2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}T &= \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} \\ &= \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}\end{aligned}$$

es una base ortonormal para R^3. ■

EJEMPLO 5 Sea W el subespacio de R^4 con base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, donde

$$\mathbf{u}_1 = (1, -2, 0, 1), \quad \mathbf{u}_2 = (-1, 0, 0, -1) \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_3 = (1, 1, 0, 0).$$

Utilice el proceso de Gram-Schmidt para transformar S a una base ortonormal para W.

Solución ***Paso 1.*** Sea $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1, -2, 0, 1)$.
Paso 2. Ahora calculamos $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \left(\frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 &= (-1, 0, 0, -1) - \left(\tfrac{-2}{6}\right)(1, -2, 0, 1) \\ &= \left(-\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, 0, -\tfrac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

Multiplicamos $\mathbf{v}_2$ por 3, para eliminar las fracciones, y obtenemos $(-2, -2, 0, -2)$, que será nuestro $\mathbf{v}_2$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_3 - \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\right)\mathbf{v}_1 - \left(\frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2}\right)\mathbf{v}_2 \\ &= (1, 1, 0, 0) - \left(\tfrac{-1}{6}\right)(1, -2, 0, 1) - \left(\tfrac{-4}{12}\right)(-2, -2, 0, -2) \\ &= \left(\tfrac{1}{2}, 0, 0, -\tfrac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Multiplicamos $\mathbf{v}_3$ por 2, para eliminar las fracciones, y obtenemos $(1, 0, 0, -1)$, como $\mathbf{v}_3$. Por lo tanto,

$$T^* = \{(1, -2, 0, 1), (-2, -2, 0, 2), (1, 0, 0, -1)\}$$

es una base ortogonal para W.
Paso 3. Sean

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|}\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 0, 1) \\ \mathbf{w}_2 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_2\|}\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{12}}(-2, -2, 0, -2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 0, -1) \\ \mathbf{w}_3 &= \frac{1}{\|\mathbf{v}_3\|}\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1).\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}T &= \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} \\ &= \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}\end{aligned}$$

es una base ortonormal para W. ■

Observaciones

1. En el proceso de solución del ejemplo 5, tan pronto como calculamos un vector lo multiplicamos por un escalar adecuado para eliminar las fracciones presentes. Este paso opcional produce cálculos más sencillos para trabajo a mano. Con este enfoque, la base resultante, aunque ortogonal, podría diferir de la base ortogonal obtenida sin eliminar fracciones. La mayor parte de las implementaciones del proceso de Gram-Schmidt en computador, incluyendo los desarrollados con MATLAB, no eliminan las fracciones.
2. Una observación final respecto al proceso de Gram-Schmidt: en la demostración del teorema 6.18 se obtuvo primero una base ortogonal T^* y después se normalizaron sus vectores para obtener la base ortonormal T. Por supuesto, un camino alternativo es normalizar cada vector tan pronto como se obtiene.

Términos clave

Conjunto ortogonal
Conjunto ortonormal
Base ortogonal
Base ortonormal
Proceso de Gram-Schmidt

6.8 Ejercicios

1. ¿Cuáles de los siguientes son conjuntos ortogonales de vectores?

(a) $\{(1, -1, 2), (0, 2, -1), (-1, 1, 1)\}$

(b) $\{(1, 2, -1, 1), (0, -1, -2, 0), (1, 0, 0, -1)\}$

(c) $\{(0, 1, 0, -1), (1, 0, 1, 1), (-1, 1, -1, 2)\}$

2. ¿Cuáles de los siguientes son conjuntos ortonormales de vectores?

(a) $\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\}$

(b) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), (0, 1, 0)\right\}$

(c) $\{(0, 2, 2, 1), (1, 1, -2, 2), (0, -2, 1, 2)\}$

En los ejercicios 3 y 4, $V = R^3$.

3. Sean $\mathbf{u} = (1, 1, -2)$ y $\mathbf{v} = (a, -1, 2)$. ¿Para qué valores de a son ortogonales los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$?

4. Sean $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, y $\mathbf{v} = \left(a, \frac{1}{\sqrt{2}}, -b\right)$. ¿Para que valores de a y b el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es ortonormal?

5. Utilice el proceso de Gram-Schmidt para determinar una base ortonormal para el subespacio de R^3 con base $\{(1, -1, 0), (2, 0, 1)\}$.

6. Utilice el proceso de Gram-Schmidt para determinar una base ortonormal para el subespacio de R^3 con base $\{(1, 0, 2), (-1, 1, 0)\}$.

7. Utilice el proceso de Gram-Schmidt para determinar una base ortonormal para el subespacio de R^4 con base $\{(1, -1, 0, 1), (2, 0, 0, -1), (0, 0, 1, 0)\}$.

8. Utilice el proceso de Gram-Schmidt para determinar una base ortonormal para el subespacio de R^4 con base $\{(1, 1, -1, 0), (0, 2, 0, 1), (-1, 0, 0, 1)\}$.

9. Utilice el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base $\{(1, 2), (-3, 4)\}$ de R^2 en (a) una base ortogonal; (b) una base ortonormal.

10. (a) Utilice el proceso de Gram-Schmidt para transformar la base $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ de R^3 en una base ortonormal para R^3.

(b) Utilice el teorema 6.17 para escribir $(2, 3, 1)$ como combinación lineal de la base obtenida en la parte (a).

11. Determine una base ortonormal para R^3 que incluya los vectores $\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ y $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

12. Utilice el proceso de Gram-Schmidt para construir una base ortonormal para el subespacio W de R^3 *generado* por $\{(1, 1, 1), (2, 2, 2), (0, 0, 1), (1, 2, 3)\}$.

13. Utilice el proceso de Gram-Schmidt para construir una base ortonormal para el subespacio W de R^4 *generado* por $\{(1, 1, 0, 0), (2, -1, 0, 1), (3, -3, 0, -2), (1, -2, 0, -3)\}$.

14. Determine una base ortonormal para el subespacio de R^3 que consiste en todos los vectores de la forma $(a, a + b, b)$.

15. Determine una base ortonormal para el subespacio de R^4 que consiste en todos los vectores de la forma

$$(a, a + b, c, b + c).$$

16. Determine una base ortonormal para el subespacio de R^3 que consiste en todos los vectores (a, b, c) tales que

$$a + b + c = 0.$$

17. Determine una base ortonormal para el subespacio de R^4 que consiste en todos los vectores de la forma (a, b, c, d) tales que

$$a - b - 2c + d = 0.$$

18. Determine una base ortonormal para el espacio solución del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

19. Determine una base ortonormal para el espacio solución del sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

20. Considere la base ortonormal

$$S = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

para R^2. Use el teorema 6.17 para escribir el vector $(2, 3)$ como combinación lineal de los vectores en S.

21. Considere la base ortonormal

$$S = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), (0, 1, 0)\right\}$$

para R^3. Use el teorema 6.17 para escribir el vector $(2, -3, 1)$ como combinación lineal de los vectores en S.

Ejercicios Teóricos

T.1. Verifique que la base canónica para R^n es un conjunto ortonormal.

T.2. Demuestre el corolario 6.6.

T.3. Demuestre que un conjunto ortonormal de n vectores en R^n es una base para R^n.

T.4. (a) Demuestre el teorema 6.17.

(b) Demuestre el corolario 6.7.

T.5. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores en R^n. Demuestre que si $\mathbf{u}$ es ortogonal a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, entonces $\mathbf{u}$ es ortogonal a todo vector en gen$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$.

T.6. Sea $\mathbf{u}$ un vector fijo en R^n. Demuestre que el conjunto de los vectores en R^n que son ortogonales a $\mathbf{u}$ es un subespacio de R^n.

T.7. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores en R^n. Demuestre que si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, entonces $\mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v}) = 0$ para cualquier escalar c.

T.8. Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto ortonormal en R^n. Sea A la matriz dada por $A = [\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_n]$. Muestre que A es no singular y calcule si inversa. Dé tres ejemplos diferentes de tales matrices en R^2 o R^3.

T.9. Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es un conjunto ortogonal en R^n. Sea A la matriz cuya columna j es $\mathbf{v}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Demuestre o refute: A es no singular.

T.10. Sea $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una base ortonormal para un subespacio W de R^n, donde $n > k$. Analice cómo construir una base ortonormal para V que incluya a S.

T.11. Sean $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ una base ortonormal para R^n, $S = \text{gen}\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ y $T = \text{gen}\{\mathbf{u}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Demuestre que cualesquiera sean los vectores $\mathbf{x}$ en S y $\mathbf{y}$ en T, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Ejercicios con MATLAB

El proceso de Gram-Schmidt toma una base S, para un subespacio W de R^n, y produce una base ortonormal T para W. El algoritmo dado en esta sección para producir la base ortonormal T está implementado en la rutina **gschmidt** *en* MATLAB. *Digite* **help gschmidt** *para consultar las instrucciones.*

ML.1. Utilice **gschmidt** para obtener una base ortonormal para R^3 a partir de la base

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Su respuesta estará en forma decimal; rescríbala en términos de $\sqrt{2}$.

ML.2. Utilice **gschmidt** para obtener una base ortonormal para R^4 a partir de la base $S = \{(1, 0, 1, 1), (1, 2, 1, 3), (0, 2, 1, 1), (0, 1, 0, 0)\}$.

ML.3. $S = \{(0, -1, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$ es una base para R^3. Determine una base ortonormal T a partir de S, y después calcule $[\mathbf{v}]_T$ para cada uno de los vectores siguientes.

(a) $\mathbf{v} = (1, 2, 0)$ (b) $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$

(c) $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$.

ML.4. Determine una base ortonormal para el subespacio de R^4 que consta de los vectores de la forma

$$(a, 0, a + b, b + c),$$

donde a, b y c son números reales cualesquiera.

6.9 COMPLEMENTOS ORTOGONALES

Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial V. Sea $W_1 + W_2$ el conjunto de todos los vectores $\mathbf{v}$ en V tales que $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, donde $\mathbf{w}_1$ está en W_1 y $\mathbf{w}_2$ está en W_2. En el ejercicio T.10 de la sección 6.2 le pedimos demostrar que $W_1 + W_2$ es un subespacio de V. En el ejercicio T.11 de la sección 6.2 le pedimos demostrar que si $V = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, entonces V es la suma directa de W_1 y W_2, lo cual denotamos como $V = W_1 \oplus W_2$. En este caso, cada vector de V se puede escribir de manera única como $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$, con $\mathbf{w}_1$ en W_1 y $\mathbf{w}_2$ en W_2. (Vea ejercicio T.11 de la sección 6.2.) En esta sección demostraremos que si W es un subespacio de R^n, entonces R^n se puede escribir como suma directa de W con otro subespacio de R^n. Este subespacio será utilizado para examinar una relación básica entre cuatro espacios vectoriales asociados con una matriz.

DEFINICIÓN Sea W un subespacio de R^n. Un vector $\mathbf{u}$ en R^n es **ortogonal** a W si es ortogonal a cada vector de W. El conjunto de vectores en R^n que son ortogonales a todos los vectores de W se llama **el complemento ortogonal** de W en R^n y se denota $W^\perp$ (se lee "W ortogonal", "W perp",o "complemento ortogonal de W").

EJEMPLO 1 Sea W el subespacio de R^3 constituido por los múltiplos del vector

$$\mathbf{w} = (2, -3, 4).$$

$W = \text{gen}\{\mathbf{w}\}$, de modo que W es un subespacio de dimensión 1 de R^3. Entonces un vector $\mathbf{u}$ en R^3 pertenece a $W^\perp$ si, y sólo si $\mathbf{u}$ es ortogonal a $c\mathbf{w}$, cualquiera sea el escalar c. Se puede mostrar que $W^\perp$ es el plano cuya normal es el vector $\mathbf{w}$. ■

Observe que si W es un subespacio de R^n, entonces el vector cero siempre pertenece a $W^{\perp}$ (ejercicio T.1). Además, el complemento ortogonal de R^n es el subespacio cero y el complemento ortogonal del subespacio cero es el propio R^n (ejercicio T.2).

TEOREMA 6.19 *Sea W un subespacio de R^n. Entonces*

(a) $W^{\perp}$ *es un subespacio de* R^n.

(b) $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$.

Demostración (a) Sean $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ vectores en $W^{\perp}$. Entonces, $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son ortogonales a cada vector $\mathbf{w}$ en W. Ahora tenemos

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{w} + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{w} = 0 + 0 = 0,$$

de modo que $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ está en $W^{\perp}$. Además, sean $\mathbf{u}$ en $W^{\perp}$ y c un escalar. Cualquiera sea el vector $\mathbf{w}$ en W, tenemos

$$(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) = c0 = 0,$$

de modo que $c\mathbf{u}$ está en $W^{\perp}$. Hemos mostrado así, que $W^{\perp}$ es cerrado bajo la suma de vectores y la multiplicación por escalares; por lo tanto, es un subespacio de R^n.

(b) Supongamos que $\mathbf{u}$ es un vector en $W \cap W^{\perp}$. Entonces $\mathbf{u}$ está en W y en $W^{\perp}$, por lo cual $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$. De esto se sigue que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, según el teorema 4.3 de la sección 4.2. ■

En el ejercicio T.3 se le pide mostrar que si un subespacio W de R^n está generado por un conjunto de vectores S, entonces un vector $\mathbf{u}$ en R^n pertenece a $W^{\perp}$ si, y sólo si $\mathbf{u}$ es ortogonal a todo vector en S. Este resultado es útil para determinar $W^{\perp}$, como se muestra en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 2 Sea W el subespacio de R^4 con base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, donde

$$\mathbf{w}_1 = (1, 1, 0, 1) \text{ y } \mathbf{w}_2 = (0, -1, 1, 1).$$

Determine una base para $W^{\perp}$.

Solución Sea $\mathbf{u} = (a, b, c, d)$ un vector en $W^{\perp}$. Entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_1 = 0$ y $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_2 = 0$. Entonces,

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_1 = a + b + d = 0 \text{ y } \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_2 = -b + c + d = 0.$$

Al resolver el sistema homogéneo

$$\begin{aligned} a + b \phantom{{}+c} + d &= 0 \\ - b + c + d &= 0, \end{aligned}$$

obtenemos (verifique)

$$a = -r - 2s, \quad b = r + s, \quad c = r, \quad d = s.$$

Haciendo alternativamente r = 1, s = 0 y r = 0, s = 1,

$$\mathbf{u} = (-r - 2s, r + s, r, s) = r(-1, 1, 1, 0) + s(-2, 1, 0, 1).$$

Por lo tanto, los vectores $(-1, 1, 1, 0)$ y $(-2, 1, 0, 1)$ generan a $W^{\perp}$. Como no son múltiplos uno del otro, son linealmente independientes y forman una base para $W^{\perp}$.

TEOREMA 6.20 Sea *W un subespacio de* R^n. *Entonces*

$$R^n = W \oplus W^{\perp}.$$

Demostración Sea dim $W = m$. Entonces W tiene una base formada por m vectores. Con el proceso de Gram-Schmidt podemos obtener, a partir de ella, una base ortonormal para W. Sea $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ la base ortonormal obtenida. Si $\mathbf{v}$ es un vector en R^n, sean

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_m)\mathbf{w}_m \tag{1}$$

y

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}. \tag{2}$$

Como $\mathbf{w}$ es una combinación lineal de vectores en S, $\mathbf{w}$ pertenece a W. Mostraremos que $\mathbf{u}$ está en $W^{\perp}$ mostrando que $\mathbf{u}$ es ortogonal a todo vector de S, base para W. Para cada $\mathbf{w}_i$, en S, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}_i &= (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i - \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}_i \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i - [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_m)\mathbf{w}_m] \cdot \mathbf{w}_i \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_i)(\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

porque $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j = 0$ para $i \neq j$ y $\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_i = 1$, $1 \leq i \leq m$. Entonces, $\mathbf{u}$ es ortogonal a todo vector de W y, por lo tanto, está en $W^{\perp}$. Como,

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u},$$

entonces $R^n = W + W^{\perp}$. Además, según la parte (b) del teorema 6.19, $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$. En consecuencia,

$$R^n = W \oplus W^{\perp}. \qquad \blacksquare$$

Observación Como señalamos al principio de esta sección, también concluimos que los vectores $\mathbf{w}$ y $\mathbf{u}$ definidos por las ecuaciones (1) y (2) son únicos.

EJEMPLO 3 En el ejemplo 2, es una base para el subespacio W,

$$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\} = \{(1, 1, 0, 1), (0, -1, 1, 1)\}$$

y establecimos que es una base para $W^{\perp}$.

$$\{\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\} = \{(-1, 1, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)\}$$

Si $\mathbf{v} = (-1, 1, 4, 3)$, determinaremos un vector $\mathbf{w}$ en W y un vector $\mathbf{u}$ en $W^{\perp}$, tales que $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$.

Solución Siguiendo el procedimiento utilizado en la demostración del teorema 6.20, el proceso de Gram-Schmidt proporciona una base ortonormal para W,

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 0, 1) \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, -1, 1, 1)$$

(verifique). Sea

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2\\ &= \sqrt{3}\mathbf{u}_1 + 2\sqrt{3}\mathbf{u}_2\\ &= (1, 1, 0, 1) + 2(0, -1, 1, 1)\\ &= (1, -1, 2, 3).\end{aligned}$$

Entonces calculamos

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w} = (-1, 1, 4, 3) - (1, -1, 2, 3) = (-2, 2, 2, 0).$$

(Verifique que $\mathbf{u}$ está en $W^{\perp}$.) Esto implica que $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}$, para $\mathbf{w}$ en W y $\mathbf{u}$ en $W^{\perp}$.

TEOREMA 6.21 Si *W es un subespacio de R^n, entonces*

$$(W^{\perp})^{\perp} = W.$$

Demostración En primer lugar, si $\mathbf{w}$ es un vector en W, entonces $\mathbf{w}$ es ortogonal a todo vector $\mathbf{u}$ en $W^{\perp}$, de modo que $\mathbf{w}$ está en $(W^{\perp})^{\perp}$. Por lo tanto, W es un subespacio de $(W^{\perp})^{\perp}$. Recíprocamente, sea $\mathbf{v}$ un vector arbitrario en $(W^{\perp})^{\perp}$. Entonces, por el teorema 6.20, $\mathbf{v}$ puede escribirse como

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u},$$

donde $\mathbf{w}$ está en W y $\mathbf{u}$ está en $W^{\perp}$. Como $\mathbf{u}$ está en $W^{\perp}$, es ortogonal a $\mathbf{v}$ y a $\mathbf{w}$. Se tiene, entonces,

$$0 = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{w}+\mathbf{u}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}$$

es decir,

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = 0,$$

lo cual implica que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Entonces $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, de modo que $\mathbf{v}$ pertenece a W. Hemos mostrado que también $(W^{\perp})^{\perp}$ es un subespacio de W. Por lo tanto, $(W^{\perp})^{\perp} = W$. ■

Observación Como W es el complemento ortogonal de $W^{\perp}$ y $W^{\perp}$ es el complemento ortogonal de W, se dice que W y $W^{\perp}$ son **complementos ortogonales**.

RELACIONES ENTRE LOS ESPACIOS VECTORIALES FUNDAMENTALES ASOCIADOS CON UNA MATRIZ

Si A es una matriz de $m \times n$, asociamos con ella los siguientes cuatro espacios vectoriales fundamentales: el espacio nulo de A (un subespacio de R^n), el espacio fila de A (un subespacio de R^m), el espacio nulo de A^T (un subespacio de R^m) y el espacio columna de A (un subespacio de R^m). El teorema siguiente muestra que las parejas formadas por estos espacios vectoriales son complementos ortogonales.

TEOREMA 6.22 *Si A es una matriz dada de $m \times n$, entonces:*

(a) *El espacio nulo de A es el complemento ortogonal del espacio fila de A.*

(b) *El espacio nulo de A^T es el complemento ortogonal del espacio columna de A.*

Demostración (a) Antes de probar el resultado, verifiquemos que los dos espacios vectoriales cuya igualdad queremos establecer tienen igual dimensión. Si r es el rango de A, entonces la dimensión del espacio nulo de A es $n - r$ (teorema 6.12 de la sección 6.6). Como la dimensión del espacio fila de A es r entonces, de acuerdo con el teorema 6.20, la dimensión de su complemento ortogonal es $n - r$. Ahora, sea $\mathbf{x}$ un vector del espacio nulo de A. Entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ vectores en R^n que denotan las filas de A. Entonces, las entradas de la matriz $A\mathbf{x}$ de $m \times 1$ son $\mathbf{v}_1\mathbf{x}$, $\mathbf{v}_2\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{v}_m\mathbf{x}$ y tenemos

$$\mathbf{v}_1\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{v}_2\mathbf{x} = 0, \ldots, \quad \mathbf{v}_m\mathbf{x} = 0. \tag{3}$$

Por lo tanto, $\mathbf{x}$ es ortogonal a los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$, que generan al espacio fila de A. En consecuencia, $\mathbf{x}$ es ortogonal a todo vector del espacio fila de A, de modo que $\mathbf{x}$ pertenece al complemento ortogonal del espacio fila de A. Se concluye, con base en el ejercicio T.7 de la sección 6.4, que el espacio nulo de A es igual al complemento ortogonal del espacio fila de A.

(b) Para establecer el resultado, reemplace A por A^T en la parte (a) para concluir que el espacio nulo de A^T es el complemento ortogonal del espacio fila de A^T. Como el espacio fila de A^T es el espacio columna de A, esto demuestra la parte (b). ■

EJEMPLO 4 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calcule los cuatro espacios vectoriales fundamentales asociados con A, y compruebe el teorema 6.22.

Solución Primero obtenemos la forma escalonada reducida por filas de A (verifique)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Al resolver el sistema lineal $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$, encontramos (verifique) que

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base para el espacio nulo de A. Además,

$$T = \{(1, 0, 7, 2, 4), (0, 1, 3, 1, 1)\}$$

es una base para el espacio fila de A. Como los vectores en S y T son ortogonales, S es una base para el complemento ortogonal del espacio fila de A, tomando los vectores de S en forma horizontal. Ahora,

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

y su forma escalonada reducida por filas (verifique) es

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La solución del sistema lineal $A^T\mathbf{x} = \mathbf{0}$, indica que (verifique)

$$S' = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base para el espacio nulo de A^T. Además, las filas no nulas de C, leídas verticalmente, proporcionan la base siguiente para el espacio columna de A:

$$T' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Como los vectores en S' y T' son ortogonales, se sigue que S' es una base para el complemento ortogonal del espacio columna de A. ■

EJEMPLO 5 Determine una base para el complemento ortogonal del subespacio W de R^5 generado por los vectores

$$\mathbf{w}_1 = (2, -1, 0, 1, 2), \qquad \mathbf{w}_2 = (1, 3, 1, -2, -4),$$
$$\mathbf{w}_3 = (3, 2, 1, -1, -2), \qquad \mathbf{w}_4 = (7, 7, 3, -4, -8),$$
$$\mathbf{w}_5 = (1, -4, -1, -1, -2).$$

Solución 1 Sea $\mathbf{u} = (a, b, c, d, e)$ un vector arbitrario en $W^\perp$. Como $\mathbf{u}$ es ortogonal a cada uno de los vectores dados que generan a W, tenemos un sistema lineal de cinco ecuaciones con cinco incógnitas, cuya matriz de coeficientes es (verifique)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & -2 \\ 7 & 7 & 3 & -4 & -8 \\ 1 & -4 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Al resolver el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, obtenemos la base siguiente para el espacio solución (verifique):

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Estos vectores, tomados en forma horizontal, proporcionan una base para $W^{\perp}$.

Solución 2 Forme la matriz cuyas filas son los vectores dados. Ésta es la matriz A de la solución 1, y entonces el espacio fila de A es W. Por el teorema 6.22, $W^{\perp}$ es el espacio nulo de A. Obtenemos así la misma base para $W^{\perp}$ que en la solución 1. ■

El ejemplo siguiente ilustra geométricamente el teorema 6.22.

EJEMPLO 6 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 7 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

La forma escalonada reducida por filas de A es (verifique)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces, el espacio fila de A es un subespacio bidimensional de R^3, esto es, un plano que pasa por el origen. Una base para este espacio es $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$. El espacio nulo de A es un subespacio de dimensión 1 de R^3 con base

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

(verifique). Como este vector de la base es ortogonal a los dos vectores de la base dada para el espacio fila de A, el espacio nulo de A es ortogonal al espacio fila de A; esto es, el espacio nulo de A es el complemento ortogonal del espacio fila de A.

Ahora, la forma escalonada reducida por filas de A^T es (verifique)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Entonces

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

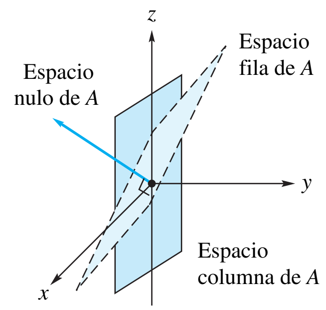


Figura 6.15 ▲

es una base para el espacio nulo de A^T (verifique), lo cual indica que el espacio nulo de A^T es una recta que pasa por el origen. Además,

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

es una base para el espacio columna de A^T (verifique), así que el espacio columna de A^T es un plano que pasa por el origen. Como cada vector de la base para el espacio nulo de A^T es ortogonal a cada vector de la base para el espacio columna de A^T, el espacio nulo de A^T es el complemento ortogonal del espacio columna de A^T. Estos resultados se ilustran en la figura 6.15. ■

PROYECCIONES Y APLICACIONES

En el teorema 6.20 y en la observación que sigue al teorema, mostramos que si W es un subespacio de R^n con una base ortonormal $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ y $\mathbf{v}$ es un vector en R^n, entonces existen vectores únicos $\mathbf{w}$ en W y $\mathbf{u}$ en $W^\perp$, tales que

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{u}.$$

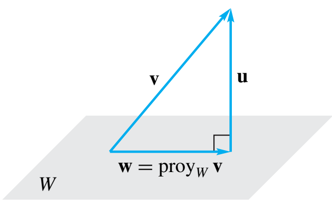


Figura 6.16 ▲

Además, como vimos en la ecuación (1),

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_m)\mathbf{w}_m,$$

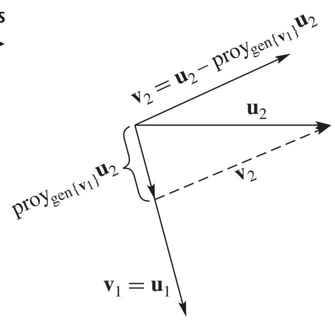
Este vector $\mathbf{w}$ se denomina **proyección ortogonal** de $\mathbf{v}$ sobre W y se denota por $\text{proy}_W\,\mathbf{v}$. La figura 6.16, ilustra el teorema 6.20 cuando W es un subespacio bidimensional de R^3 (un plano que pasó por el origen).

Con frecuencia una base ortonormal tiene muchas fracciones, así que es útil tener también una fórmula que proporcione $\text{proy}_W\,\mathbf{v}$ cuando W tiene una base *ortogonal*. En el ejercicio T.6, se le pide mostrar que si $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ es una base ortogonal para W, entonces

$$\text{proj}_W\,\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1\cdot\mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2\cdot\mathbf{w}_2}\mathbf{w}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{w}_m}{\mathbf{w}_m\cdot\mathbf{w}_m}\mathbf{w}_m.$$

Observación El proceso de Gram-Schmidt descrito en el teorema 6.18 puede reformularse en términos de proyecciones en cada paso. Así, los vectores en la figura 6.13 (el primer paso en el proceso de Gram-Schmidt) pueden rescribirse (reetiquetarse) como sigue:

Figura 6.13 vectores renombrados (reetiquetado) ►



EJEMPLO 7 Sea W el subespacio de dimensión dos de R^3 con base ortonormal $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, donde

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Usando el producto interno estándar sobre R^3, determine la proyección ortogonal de

$$\mathbf{v} = (2, 1, 3)$$

sobre W, y un vector $\mathbf{u}$ ortogonal a cada vector en W.

Solución De acuerdo con la ecuación (1),

$$\mathbf{w} = \operatorname{proj}_W \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 = -1\,\mathbf{w}_1 + \frac{5}{\sqrt{2}}\,\mathbf{w}_2 = \left(\frac{11}{6}, \frac{1}{3}, \frac{19}{6}\right)$$

y

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w} = \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right).$$ ■

En la figura 6.16 es claro que la distancia de $\mathbf{v}$ al plano W está dada por la longitud del vector $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$, esto es, por

$$\|\mathbf{v} - \operatorname{proy}_W \mathbf{v}\|.$$

Demostramos la validez general de este resultado en el teorema 6.23.

EJEMPLO 8 Sea W el subespacio de R^3 definido en el ejemplo 7 y sea $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$. Determine la distancia de $\mathbf{v}$ a W.

Solución Primero calcule

$$\operatorname{proy}_W \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 = \frac{1}{3}\,\mathbf{w}_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathbf{w}_2 = \left(\frac{13}{18}, -\frac{1}{9}, \frac{5}{18}\right).$$

Entonces

$$\mathbf{v} - \operatorname{proy}_W \mathbf{v} = (1, 1, 0) - \left(\frac{13}{18}, -\frac{1}{9}, \frac{5}{18}\right) = \left(\frac{5}{18}, \frac{10}{9}, -\frac{5}{18}\right)$$

y

$$\|\mathbf{v} - \operatorname{proy}_W \mathbf{v}\| = \sqrt{\frac{25}{324} + \frac{100}{81} + \frac{25}{324}} = \frac{5\sqrt{2}}{6},$$

entonces, la distancia de $\mathbf{v}$ a W es $\dfrac{5\sqrt{2}}{6}$. ■

En el ejemplo 8, $\|\mathbf{v} - \operatorname{proy}_W \mathbf{v}\|$ representa la distancia, en el 3-espacio, de $\mathbf{v}$ al plano W. Podemos generalizar esta noción de distancia, y hablar de distancia de un vector de R^n a un subespacio W de R^n. Podemos demostrar que el vector de W que está más cercano a $\mathbf{v}$ es de hecho $\operatorname{proy}_W \mathbf{v}$, de este modo $\|\mathbf{v} - \operatorname{proy}_W \mathbf{v}\|$ representa la distancia de $\mathbf{v}$ a W.

TEOREMA 6.23 *Sea W un subespacio de R^n. Entonces dado el vector $\mathbf{v}$ en R^n, el vector en W más cercano a $\mathbf{v}$ es* $\operatorname{proy}_W \mathbf{v}$. *Esto es, para $\mathbf{w}$ en W, $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ es mínima cuando* $\mathbf{w} = \operatorname{proy}_W \mathbf{v}$.

Demostración Sea $\mathbf{w}$ cualquier vector en W. Entonces

$$\mathbf{v} - \mathbf{w} = (\mathbf{v} - \text{proy}_W\, \mathbf{v}) + (\text{proy}_W\, \mathbf{v} - \mathbf{w}).$$

Como $\mathbf{w}$ y $\text{proy}_W\, \mathbf{v}$ están ambos en W, $\text{proy}_W\, \mathbf{v} - \mathbf{w}$ está en W. Por el teorema 6.20, $\mathbf{v} - \text{proy}_W\, \mathbf{v}$ es ortogonal a cada vector en W, de modo que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 &= (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \\ &= \big((\mathbf{v} - \text{proy}_W \mathbf{v}) + (\text{proy}_W \mathbf{v} - \mathbf{w})\big) \cdot \big((\mathbf{v} - \text{proy}_W \mathbf{v}) + (\text{proy}_W \mathbf{v} - \mathbf{w})\big) \\ &= \left\|\mathbf{v} - \text{proy}_W \mathbf{v}\right\|^2 + \left\|\text{proy}_W \mathbf{v} - \mathbf{w}\right\|^2.\end{aligned}$$

Si $\mathbf{w} \neq \text{proy}_W\, \mathbf{v}$, entonces $\|\text{proy}_W\, \mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2$ es positivo y

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 > \|\mathbf{v} - \text{proy}_W\, \mathbf{v}\|^2.$$

Se sigue, entonces, que $\text{proy}_W\, \mathbf{v}$ es el vector en W que minimiza a $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2$ y, por lo tanto, minimiza a $\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$. ■

En el ejemplo 7,

$$\mathbf{w} = \text{proy}_W\, \mathbf{v} = \left(\tfrac{11}{6}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{19}{6}\right)$$

es el vector de $W = \text{gen}\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ que está más cerca de $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$.

Términos clave

Vector ortogonal	Espacios vectoriales fundamentales asociados con una matriz
Complemento(s) ortogonal(es)	Proyección ortogonal

6.9 Ejercicios

1. Sea W un subespacio de R^3 con base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, donde $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 1)$ y $\mathbf{w}_2 = (1, 1, 1)$. Exprese $\mathbf{v} = (2, 2, 0)$ como suma de un vector $\mathbf{w}$ en W y un vector $\mathbf{u}$ en $W^\perp$.

2. Sea W un subespacio de R^4 con base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, donde $\mathbf{w}_1 = (1, 1, 1, 0)$ y $\mathbf{w}_2 = (1, 0, 0, 0)$. Exprese $\mathbf{v} = (1, 1, 0, 0)$ como suma de un vector $\mathbf{w}$ en W y un vector $\mathbf{u}$ en $W^\perp$.

3. Sea W un subespacio de R^3 generado por el vector $\mathbf{w} = (2, -3, 1)$.

(a) Determine una base $W^\perp$.

(b) Describa geométricamente $W^\perp$. (Puede utilizar una descripción verbal o gráfica.)

4. Sea $W = \text{gen}\{(1, 2, -1), (-1, 3, 2)\}$.

(a) Determine una base para $W^\perp$.

(b) Describa geométricamente $W^\perp$. (Puede utilizar una descripción verbal o gráfica.)

5. Sea W el subespacio de R^5 generado por los vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4, \mathbf{w}_5$, donde

$$\mathbf{w}_1 = (2, -1, 1, 3, 0), \quad \mathbf{w}_2 = (1, 2, 0, 1, -2),$$
$$\mathbf{w}_3 = (4, 3, 1, 5, -4), \quad \mathbf{w}_4 = (3, 1, 2, -1, 1),$$
$$\mathbf{w}_5 = (2, -1, 2, -2, 3).$$

Determine una base para $W^\perp$.

En los ejercicios 6 y 7, calcule los cuatro espacios vectoriales fundamentales asociados con A y compruebe el teorema 6.22.

6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 0 & -4 & -6 \\ 4 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -9 & 5 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 8 y 9, determine $\text{proy}_W\, \mathbf{v}$ *para el vector* $\mathbf{v}$ *y el subespacio* W dados.

8. Sea W el subespacio de R^3 con base

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \qquad \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

(a) $\mathbf{v} = (3, 4, -1)$ (b) $\mathbf{v} = (2, 1, 3)$

(c) $\mathbf{v} = (-5, 0, 1)$

9. Sea W el subespacio de R^4 con base $(1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)$.

(a) $\mathbf{v} = (2, 1, 3, 0)$ (b) $\mathbf{v} = (0, -1, 1, 0)$

(c) $\mathbf{v} = (0, 2, 0, 3)$

10. Sea W el subespacio de R^3 con base ortonormal $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$, donde

$$\mathbf{w}_1 = (0, 1, 0) \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Escriba el vector $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ como $\mathbf{w} + \mathbf{u}$, con $\mathbf{w}$ en W y $\mathbf{u}$ en $W^{\perp}$.

11. Sea W el subespacio de R^4 con base ortonormal $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, donde

$$\mathbf{w}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \mathbf{w}_2 = (0, 0, 1, 0),$$

$$\text{y} \quad \mathbf{w}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Escriba el vector $\mathbf{v} = (1, 0, 2, 3)$ como $\mathbf{w} + \mathbf{u}$, con $\mathbf{w}$ en W y $\mathbf{u}$ en $W^{\perp}$.

12. Sea W el subespacio de R^3 definido en el ejercicio 10 y sea $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$. Determine la distancia de $\mathbf{v}$ a W.

13. Sea W el subespacio de R^4 definido en el ejercicio 11 y sea $\mathbf{v} = (1, 2, -1, 0)$. Determine la distancia de $\mathbf{v}$ a W.

14. Determine la distancia del punto $(2, 3, -1)$ al plano $3x - 2y + z = 0$. (*Sugerencia:* primero determine una base ortonormal para el plano.)

Ejercicios teóricos

T.1. Demuestre que si W es un subespacio de R^n, entonces el vector cero de R^n pertenece a $W^{\perp}$.

T.2. Demuestre que el complemento ortogonal de R^n es el subespacio nulo y el complemento ortogonal del subespacio nulo es R^n.

T.3. Demuestre que si W es un subespacio de R^n que es generado por un conjunto de vectores S, entonces $\mathbf{u}$ en R^n pertenece a $W^{\perp}$ si, y sólo si $\mathbf{u}$ es ortogonal a cada vector en S.

T.4. Sea A una matriz de $m \times n$. Muestre que cada vector $\mathbf{v}$ en R^n puede escribirse de manera única como $\mathbf{w} + \mathbf{u}$, donde $\mathbf{w}$ está en el espacio nulo de A y $\mathbf{u}$ está en el espacio columna de A^T.

T.5. Sea W un subespacio de R^n. Muestre que si $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r$ es una base para W y $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_s$ es una base para $W^{\perp}$, entonces $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_s$ es una base para R^n y $n = \dim W + \dim W^{\perp}$.

T.6. Sea W un subespacio de R^n y sea $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ una base ortogonal para W. Muestre que si $\mathbf{v}$ es un vector en R^n, entonces

$$\text{proy}_W \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_2}{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2}\mathbf{w}_2 + \cdots + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_m}{\mathbf{w}_m \cdot \mathbf{w}_m}\mathbf{w}_m.$$

T.7. Sea W el espacio fila de la matriz A de $m \times n$. Muestre que si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{x}$ está en $W^{\perp}$.

Ejercicios con MATLAB

ML.1. Determine la proyección de $\mathbf{v}$ sobre w. (Recuerde que en MATLAB tenemos disponibles las rutinas **dot** y **norm**.)

(a) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ML.2. Sea $S = \{\mathbf{w1}, \mathbf{w2}\}$, donde

$$\mathbf{w1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

y sea $W = \text{gen } S$.

(a) Muestre que S es una base ortogonal para W.

(b) Sea

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $\text{proy}_{\mathbf{w1}} \mathbf{v}$.

(c) Para el vector $\mathbf{v}$ de la parte (b), calcule $\text{proy}_W \mathbf{v}$.

ML.3. El plano P en R^3 tiene la base ortogonal $\{\mathbf{w1}, \mathbf{w2}\}$, donde

$$\mathbf{w1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine la proyección de

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

sobre P.

(b) Determine la distancia de $\mathbf{v}$ a P.

ML.4. Sea W el subespacio de R^4 con base

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine $\text{proy}_W \mathbf{v}$.

(b) Determine la distancia de $\mathbf{v}$ a W.

ML.5. Sean

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Muestre que el sistema $T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente.

(b) Como $T\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente, $\mathbf{b}$ no está en el espacio columna de T. Un enfoque para determinar una solución aproximada es determinar un vector $\mathbf{y}$ en el espacio columna de T, de modo que $T\mathbf{y}$ esté tan cerca como sea posible a $\mathbf{b}$. Podemos hacer esto determinando la proyección $\mathbf{p}$ de $\mathbf{b}$ sobre el espacio columna de T. Determine esta proyección de $\mathbf{p}$ (la cual será $T\mathbf{y}$).

Ideas clave para repaso

- **Espacio vectorial.** Vea la página 272.
- **Teorema 6.2.** Sea V un espacio vectorial con operaciones $\oplus$ y $\odot$ y sea W un subconjunto no vacío de V. Entonces W es un subespacio de V si y sólo si
  (α) Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores arbitrarios en W, entonces $\mathbf{u} \oplus \mathbf{v}$ está en W.
  (β) Si $\mathbf{u}$ está en W y c es un escalar, entonces $c \odot \mathbf{u}$ está en W.
- $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es linealmente dependiente si y sólo si uno de los vectores en S es combinación lineal de los otros vectores de S.
- **Teorema 6.5.** Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V, entonces todo vector en V puede escribirse en una y sólo una forma como combinación lineal de los vectores en S.
- **Teorema 6.7.** Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para un espacio vectorial V y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores en V, entonces $r \leq n$.
- **Corolario 6.1.** Todas las bases para un espacio vectorial V deben tener el mismo número de vectores.
- **Teorema 6.9.** Sea V un espacio vectorial de dimensión n, y sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de n vectores en V.
  (a) Si S es linealmente independiente, entonces es una base para V.
  (b) Si S genera a V, entonces es una base para V:
- **Base para el espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.** Vea la página 320.
- **Teorema 6.11.** Rango fila de A = rango columna de A.
- **Teorema 6.12.** Si A es una matriz de $m \times n$, entonces rango A + nulidad $A = n$.
- **Teorema 6.13.** Una matriz A de $n \times n$ es no singular si y sólo si rango $A = n$.
- **Corolario 6.2.** Si A es una matriz de $n \times n$, entonces rango $A = n$ si y sólo si $\det(A) \neq 0$.
- **Corolario 6.5.** Si A es de $n \times n$, entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial si y sólo si rango $A < n$.
- **Teorema 6.14.** El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución si y sólo si rango A = rango $[A \mid \mathbf{b}]$.
- **Lista de equivalencias no singulares.** Las afirmaciones siguientes son equivalentes para una matriz A de $n \times n$.
  1. A es no singular.
  2. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la única solución para $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
  3. A es equivalente por filas a I_n.
  4. El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución para cada matriz $\mathbf{b}$ de $n \times 1$.
  5. $\det(A) \neq 0$.
  6. A tiene rango n.
  7. A tiene nulidad 0.
  8. Las filas de A forman un conjunto linealmente independiente de n vectores en R^n.
  9. Las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente de n vectores en R^n.
- **Teorema 6.15.** Sean $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ bases para el espacio vectorial V, de dimensión n. Sea $P_{S \leftarrow T}$ la matriz de transición de T a S. Entonces $P_{S \leftarrow T}$ es no singular y $P_{S \leftarrow T}^{-1}$ es la matriz de transición de S a T.
- **Teorema 6.16.** Un conjunto ortogonal de vectores no nulos en R^n es linealmente independiente.
- **Teorema 6.17.** Si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ es una base ortonormal para R^n y $\mathbf{v}$ es un vector en R^n, entonces $\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$.
- **Teorema 6.18 (Proceso de Gram-Schmidt).** Vea las páginas 354 y 355.
- **Teorema 6.20.** Sea W un subespacio de R^n. Entonces $R^n = W \oplus W^\perp$.
- **Teorema 6.22.** Si A es una matriz dada de $m \times n$, entonces
  (a) El espacio nulo de A es el complemento ortogonal del espacio fila de A.
  (b) El espacio nulo de A^T es el complemento ortogonal del espacio columna de A.

Términos clave

Factorización QR

7.1 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 6, calcule la factorización QR de A.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Ejercicio teórico

T.1. En la demostración del teorema 7.1, muestre que r_{ii} no es cero; primero exprese $\mathbf{u}_i$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_i$, y luego calcule $r_{ii} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{w}_i$.

T.2. Demuestre que toda matriz no singular tiene una factorización QR.

7.2 MÍNIMOS CUADRADOS

Requisitos. Lectura de las secciones 1.6, Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales; 1.7, La inversa de una matriz; 4.2, n-vectores, y 6.9, Complementos ortogonales.

Como recordará, en el capítulo 1 se dijo que un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, de $m \times n$, es inconsistente si no tiene solución. En la demostración del teorema 6.14 de la sección 6.6, demostramos que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente si y sólo si $\mathbf{b}$ pertenece al espacio columna de A. De forma equivalente, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente si y sólo si $\mathbf{b}$ *no* está en el espacio columna de A. Los sistemas inconsistentes aparecen en muchas situaciones, por lo que debemos saber cómo tratarlos. Nuestro método consiste en modificar el problema de manera que no sea indispensable que la ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se satisfaga. En cambio, buscamos un vector $\widehat{\mathbf{x}}$ en R^n, tal que $A\widehat{\mathbf{x}}$ sea tan cercano a $\mathbf{b}$ como sea posible. Si W es el espacio generado por las columnas de A, el teorema 6.23 de la sección 6.9 implica que el vector en W más cercano a $\mathbf{b}$ es $\text{proy}_W \mathbf{b}$. Es decir, $\|\mathbf{b} - \mathbf{w}\|$, para $\mathbf{w}$ en W, se minimiza cuando $\mathbf{w} = \text{proy}_W \mathbf{b}$. En consecuencia, si encontramos $\widehat{\mathbf{x}}$ tal que $A\widehat{\mathbf{x}} = \text{proy}_W \mathbf{b}$, estamos seguros de que $\|\mathbf{b} - A\widehat{\mathbf{x}}\|$ será lo más pequeña posible. Como se indica en la demostración del teorema 6.23, $\mathbf{b} - \text{proy}_W \mathbf{b} = \mathbf{b} - A\widehat{\mathbf{x}}$ es ortogonal a todo vector en W. (Vea la figura 7.1.) Esto implica que $\mathbf{b} - A\widehat{\mathbf{x}}$ es ortogonal a cada columna de A. En términos de una ecuación matricial, tenemos que

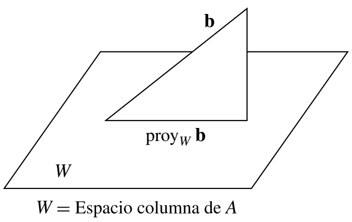


Figura 7.1 ▲

$$A^T(A\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$$

o, de manera equivalente,

$$A^T A\widehat{\mathbf{x}} = A^T\mathbf{b}.$$

Por lo tanto, $\widehat{\mathbf{x}}$ es una solución para

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}. \tag{1}$$

Cualquier solución de (1) es una **solución por mínimos cuadrados** del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. (**Cuidado:** en general, $A\widehat{\mathbf{x}} \neq \mathbf{b}$.) La ecuación (1) es el **sistema normal** de ecuaciones asociadas con $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ o, simplemente, el sistema normal. Observe que si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es consistente, una solución para este sistema es una solución por mínimos cuadrados. En particular, si A es no singular, una solución por mínimos cuadrados para $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es la solución usual, $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ (vea el ejercicio T.2).

Para calcular una solución por mínimos cuadrados $\widehat{\mathbf{x}}$ del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, procedemos como sigue. Sea $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ una base ortonormal para el espacio W generado por las columnas de A. Entonces, la ecuación (1) de la sección 6.9 produce

$$\text{proy}_W \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_1)\mathbf{w}_1 + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_2)\mathbf{w}_2 + \cdots + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_m)\mathbf{w}_m.$$

Recuerde que para determinar una base ortonormal de W, primero determinamos una base de W por medio de la transformación de A^T a su forma escalonada reducida por filas, y luego consideramos las transpuestas de las filas no nulos como base de W. A continuación aplicamos el proceso de Gram-Schmidt a esta base para encontrar una base ortonormal de W. El procedimiento es teóricamente válido, si suponemos que la aritmética es exacta; sin embargo, aun los errores numéricos mínimos, digamos por redondeo, pueden afectar los resultados. En consecuencia, se necesitan algoritmos más elaborados para las aplicaciones numéricas. (Vea D. Hill, *Experiments in Computational Matrix Algebra,* Nueva York, Random House,1988, distribuido por McGraw-Hill.) No analizaremos el caso general en este libro, aunque sí estudiaremos un importante caso particular.

Observación Otro método para determinar $\text{proy}_W \mathbf{b}$ es el siguiente. Despejamos $\widehat{\mathbf{x}}$, que es la solución por mínimos cuadrados del sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, en la ecuación (1). Entonces, $A\widehat{\mathbf{x}}$ será $\text{proy}_W \mathbf{b}$.

TEOREMA 7.2 *Si A es una matriz de $m \times n$ tal que* rango $A = n$, *entonces A^TA es no singular y el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución por mínimos cuadrados, dada por $\widehat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$. Es decir, el sistema normal de ecuaciones tiene una única solución.*

Demostración Si A tiene rango n, las columnas de A son linealmente independientes. La matriz A^TA es no singular si el sistema lineal $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sólo tiene la solución nula. Al multiplicar, por la izquierda, ambos lados de $A^TA\mathbf{x} = \mathbf{0}$ por $\mathbf{x}^T$, obtenemos

$$\mathbf{0} = \mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{x}) = (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{x}).$$

De acuerdo con el teorema 4.3 de la sección 4.2, resulta entonces que $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Pero esto implica que tenemos una combinación lineal de las columnas linealmente independientes de A igual a cero, por lo cual $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. En consecuencia, A^TA es no singular y la ecuación (1) tiene la solución única $\widehat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$. ■

El procedimiento para determinar la solución por mínimos cuadrados $\widehat{\mathbf{x}}$ de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es el siguiente.

Paso 1. Formamos A^TA y $A^T\mathbf{b}$.

Paso 2. Mediante una reducción de Gauss-Jordan, resolvemos para $\mathbf{x}$ el sistema normal $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

EJEMPLO 1 Determine una solución por mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Solución Utilizando una reducción por filas, podemos demostrar que rango $A = 4$ (verifique). Enseguida formamos el sistema normal $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ (verifique),

$$\begin{bmatrix} 26 & 5 & -1 & 5 \\ 5 & 23 & 13 & 17 \\ -1 & 13 & 24 & 6 \\ 5 & 17 & 6 & 23 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 24 \\ 4 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

De acuerdo con el teorema 7.2, el sistema normal tiene una única solución. Al aplicar la reducción de Gauss-Jordan, tenemos la única solución por mínimos cuadrados (verifique)

$$\widehat{\mathbf{x}} \approx \begin{bmatrix} 0.9990 \\ -2.0643 \\ 1.1039 \\ 1.8902 \end{bmatrix}.$$

Si W es el espacio columna de A, entonces (verifique)

$$\operatorname{proy}_W \mathbf{b} = A\widehat{\mathbf{x}} \approx \begin{bmatrix} 1.4371 \\ 4.8181 \\ -1.8852 \\ 0.9713 \\ 2.6459 \\ 5.2712 \end{bmatrix},$$

que es el vector en W que minimiza $\|\mathbf{b} - \mathbf{w}\|$, $\mathbf{w}$ en W. Es decir,

$$\min_{\mathbf{w} \text{ en } W} \|\mathbf{b} - \mathbf{w}\| = \|\mathbf{b} - A\widehat{\mathbf{x}}\|. \qquad \blacksquare$$

Cuando A es una matriz de $m \times n$ cuyo rango es n, desde el punto de vista del cálculo es mejor resolver la ecuación (1) mediante una reducción de Gauss-Jordan que determinar $(A^TA)^{-1}$ y luego formar el producto $(A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$. Un método todavía mejor consiste en utilizar la factorización QR de A, misma que se analiza en la sección siguiente.

MÍNIMOS CUADRADOS MEDIANTE FACTORIZACIÓN QR

Sea $A = QR$ una factorización QR de A. Al sustituir A con esta expresión en la ecuación (1), obtenemos

$$(QR)^T(QR)\mathbf{x} = (QR)^T\mathbf{b}$$

o

$$R^T(Q^TQ)R\mathbf{x} = R^TQ^T\mathbf{b}.$$

Como las columnas de Q forman un conjunto ortonormal, tenemos que $Q^TQ = I_m$, de modo que

$$R^TR\mathbf{x} = R^TQ^T\mathbf{b}.$$

Ya que R^T es una matriz no singular, obtenemos

$$R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}.$$

Al utilizar el hecho de que R es triangular superior, podemos resolver fácilmente este sistema lineal mediante una sustitución regresiva, para obtener $\widehat{\mathbf{x}}$.

EJEMPLO 2 Resuelva el ejemplo 1 mediante la factorización QR de A.

Solución Nos servimos del proceso de Gram-Schmidt y realizamos todos los cálculos en MATLAB. Como puede ver, Q está dada por (verifique)

$$Q = \begin{bmatrix} -0.1961 & -0.3851 & 0.5099 & 0.3409 \\ -0.3922 & -0.1311 & -0.1768 & 0.4244 \\ 0.3922 & -0.7210 & -0.4733 & -0.2177 \\ -0.7845 & -0.2622 & -0.1041 & -0.5076 \\ 0 & -0.4260 & 0.0492 & 0.4839 \\ -0.1961 & 0.2540 & -0.6867 & 0.4055 \end{bmatrix}$$

y R está dada por (verifique)

$$R = \begin{bmatrix} -5.0990 & -0.9806 & 0.1961 & -0.9806 \\ 0 & -4.6945 & -2.8102 & -3.4164 \\ 0 & 0 & -4.0081 & 0.8504 \\ 0 & 0 & 0 & 3.1054 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$Q^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4.7068 \\ -0.1311 \\ 2.8172 \\ 5.8699 \end{bmatrix}.$$

Finalmente, al resolver

$$R\mathbf{x} = Q^T\mathbf{b}$$

vemos que (verifique)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.9990 \\ -2.0643 \\ 1.1039 \\ 1.8902 \end{bmatrix},$$

lo cual coincide con $\widehat{\mathbf{x}}$, resultado que se obtuvo en el ejemplo 1. ■

AJUSTE POR MÍNIMOS CUADRADOS

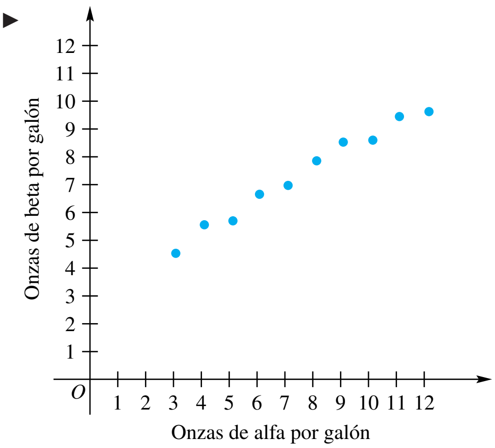
El problema de recolectar y analizar datos está presente en muchos aspectos de las actividades humanas. Con frecuencia medimos un valor de y para un valor dado de x y luego localizamos los puntos (x, y) en una gráfica. Aprovechamos la gráfica resultante para establecer una relación entre las variables x y y que luego sirva para predecir nuevos valores de y para valores dados de x.

EJEMPLO 3 En la fabricación del producto XXX, la cantidad de compuesto beta presente es controlada por la cantidad del ingrediente alfa utilizada en el proceso. Al fabricar un galón de XXX, se registraron la cantidad de alfa usada y la cantidad de beta presente, obteniéndose los siguientes datos:

Alfa usada (*onzas/galón*)	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Beta presente (*onzas/galón*)	4.5	5.5	5.7	6.6	7.0	7.7	8.5	8.7	9.5	9.7

Los puntos de la tabla se grafican en la figura 7.2. ■

Figura 7.2 ▶



Suponga que la relación entre la cantidad de alfa utilizada y la cantidad de beta presente está dada por una ecuación lineal, de modo que la gráfica sea una línea recta. En vista de lo anterior, no sería razonable unir los puntos trazando una curva que pase por todos ellos. Además, los datos tienen una naturaleza *probabilística*, es decir, no son *deterministas*, en el sentido de que si repitiéramos el experimento encontraríamos valores ligeramente distintos de beta para los mismos valores de alfa, pues todas las mediciones están sujetas a errores experimentales. De esta manera, los puntos graficados no están, necesariamente, sobre una línea recta. A continuación aplicamos el método de mínimos cuadrados para obtener la línea recta que "mejor se ajusta" a los datos proporcionados. Esta línea es la **recta de mínimos cuadrados**.

Suponga que se nos han dado n puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, donde por lo menos dos de las x_i son distintas. Estamos interesados en determinar la recta de mínimos cuadrados

$$y = b_1x + b_0 \tag{2}$$

que "mejor se ajusta a los datos". Si los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ estuvieran exactamente sobre la recta de mínimos cuadrados, tendríamos que

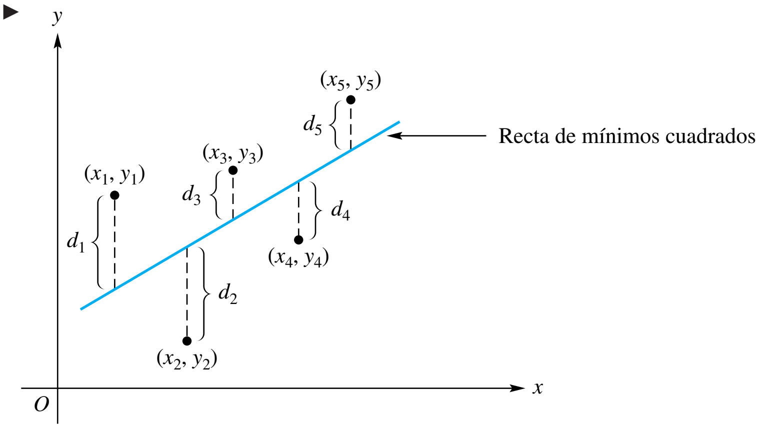
$$y_i = b_1x_i + b_0. \tag{3}$$

Como algunos de estos puntos no están necesariamente sobre la recta, tenemos

$$y_i = b_1x_i + b_0 + d_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

donde d_i es la desviación vertical del punto (x_i, y_i) a la recta (deseada) de mínimos cuadrados. La cantidad d_i puede ser positiva, negativa o cero. En la figura 7.3 se muestran cinco puntos de la recta de mínimos cuadrados $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)$, y sus desviaciones correspondientes, $d_1, d_2, \ldots, d_5$.

Figura 7.3 ▶



Si hacemos

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix},$$

podemos escribir las n ecuaciones en (4) como una sola ecuación matricial

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}.$$

Como por lo general el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es inconsistente, determinamos una solución por mínimos cuadrados $\widehat{\mathbf{x}}$ de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Recuerde que por lo menos dos de las x_i son distintas, de modo que rango $A = 2$. El teorema 7.2 implica entonces que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución por mínimos cuadrados, dada por $\widehat{\mathbf{x}} = (A^T A)^{-1} A^T\mathbf{b}$. En consecuencia podemos estar seguros de que $A\widehat{\mathbf{x}}$ estará lo más cerca posible de $\mathbf{b}$. Como $\mathbf{d} = \mathbf{b} - A\widehat{\mathbf{x}}$, la magnitud de $\mathbf{d}$ será lo más pequeña posible (la magnitud de un vector se analiza en la sección 4.2). Para cada x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sea $\widehat{y}_i = b_1 x_i + b$. Entonces, $(x_i, \widehat{y}_i)$ son los puntos sobre la recta de mínimos cuadrados. El material de la sección 4.2 nos permite afirmar que $\|\mathbf{d}\|$ se ha minimizado. De manera equivalente,

$$\|\mathbf{d}\|^2 = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2$$

será minimizada.

El procedimiento para determinar la recta de mínimos cuadrados $y = b_1 x + b_0$ para los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, donde por lo menos dos de las x_i son diferentes, es el siguiente.

Paso 1. Sean

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

Paso 2. Resolvemos el sistema normal

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

en términos de $\mathbf{x}$, mediante una reducción de Gauss-Jordan.

EJEMPLO 4 (a) Determinar una ecuación para la recta de mínimos cuadrados asociada a los datos del ejemplo 3.

(b) Utilizar la ecuación obtenida del inciso (a) para predecir el número de onzas de beta presentes en un galón del producto XXX si se utilizan 30 onzas de alfa por cada galón.

Solución (a) Tenemos

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ 5.5 \\ 5.7 \\ 6.6 \\ 7.0 \\ 7.7 \\ 8.5 \\ 8.7 \\ 9.5 \\ 9.7 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \\ 6 & 1 \\ 7 & 1 \\ 8 & 1 \\ 9 & 1 \\ 10 & 1 \\ 11 & 1 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$A^T A = \begin{bmatrix} 645 & 75 \\ 75 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 598.6 \\ 73.4 \end{bmatrix}.$$

Al resolver el sistema normal $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$ mediante una reducción de Gauss-Jordan obtenemos (verifique)

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.583 \\ 2.967 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$b_1 = 0.583 \text{ y } b_0 = 2.967.$$

Por lo tanto, una ecuación para la recta de mínimos cuadrados que se muestra en la figura 7.4, es

$$y = 0.583x + 2.967, \tag{5}$$

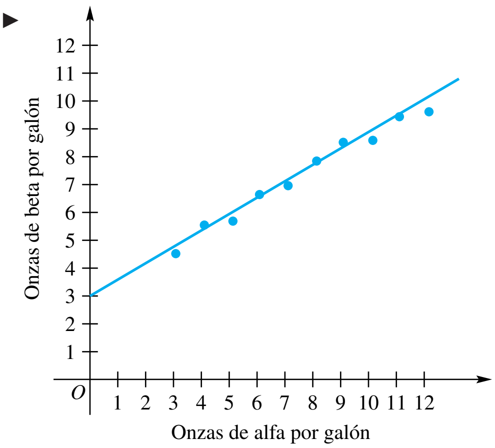
donde y es la cantidad de beta presente y x es la cantidad de alfa utilizada.

(b) Si $x = 30$, al sustituir en (5), obtenemos

$$y = 20.457.$$

En consecuencia, habrá 20.457 onzas de beta presentes en un galón de XXX. ■

Figura 7.4 ▶



AJUSTE POLINOMIAL POR MÍNIMOS CUADRADOS

Este método para obtener el ajuste lineal por mínimos cuadrados para un conjunto dado de puntos, puede generalizarse con facilidad para resolver el problema de determinar un polinomio de grado dado que "mejor se ajuste" a los datos proporcionados.

Por lo tanto, suponga que se nos han dado n puntos de datos

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$$

donde al menos $m + 1$ de los x_i son distintos, y que queremos construir un modelo matemático de la forma

$$y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \qquad m \leq n - 1,$$

que "mejor se ajuste" a estos datos. Al igual que en el ajuste lineal por mínimos cuadrados, dado que algunos de los n puntos de datos no están exactamente sobre la gráfica del polinomio de mínimos cuadrados, tenemos

$$y_i = a_m x_i^m + a_{m-1} x_i^{m-1} + \cdots + a_1 x_i + a_0 + d_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (6)$$

Si hacemos

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} x_1^m & x_1^{m-1} & \cdots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^m & x_2^{m-1} & \cdots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^m & x_n^{m-1} & \cdots & x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_m \\ a_{m-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix},$$

y

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix},$$

podemos escribir las n ecuaciones en (6) como la ecuación matricial

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x} + \mathbf{d}.$$

Como en el caso del ajuste lineal por mínimos cuadrados, una solución $\widehat{\mathbf{x}}$ del sistema normal

$$A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

es una solución por mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Con esta solución, podemos garantizar que $\|\mathbf{d}\| = \|\mathbf{b} - A\widehat{\mathbf{x}}\|$ se minimiza.

El procedimiento para determinar el polinomio por mínimos cuadrados

$$y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

que mejor se ajusta a los datos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, donde $m \leq n - 1$ y por lo menos $m + 1$ de los x_i son distintos, es el siguiente.

Paso 1. Formamos

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} x_1^m & x_1^{m-1} & \cdots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^m & x_2^{m-1} & \cdots & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^m & x_n^{m-1} & \cdots & x_n^2 & x_n & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_m \\ a_{m-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}.$$

Paso 2. Mediante una reducción de Gauss-Jordan, resolvemos para $\mathbf{x}$ el sistema normal $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

EJEMPLO 5 Los siguientes datos muestran los contaminantes atmosféricos y_i (respecto de cierta norma de calidad del aire) en intervalos de media hora, t_i.

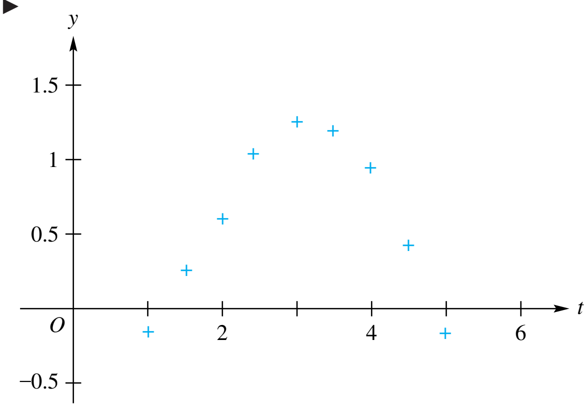
t_i	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
y_i	-0.15	0.24	0.68	1.04	1.21	1.15	0.86	0.41	-0.08

La figura 7.5 muestra una gráfica de los puntos, misma que sugiere que un polinomio cuadrático

$$y = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$$

puede producir un buen modelo de estos datos.

Figura 7.5 ►



Ahora tenemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2.25 & 1.5 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6.25 & 2.5 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 12.25 & 3.5 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 20.25 & 4.5 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0.15 \\ 0.24 \\ 0.68 \\ 1.04 \\ 1.21 \\ 1.15 \\ 0.86 \\ 0.41 \\ -0.08 \end{bmatrix}.$$

El rango de A es 3 (verifique), y el sistema normal es

$$\begin{bmatrix} 1583.25 & 378 & 96 \\ 378 & 96 & 27 \\ 96 & 27 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 54.65 \\ 16.71 \\ 5.36 \end{bmatrix}.$$

Al aplicar la reducción de Gauss-Jordan obtenemos (verifique)

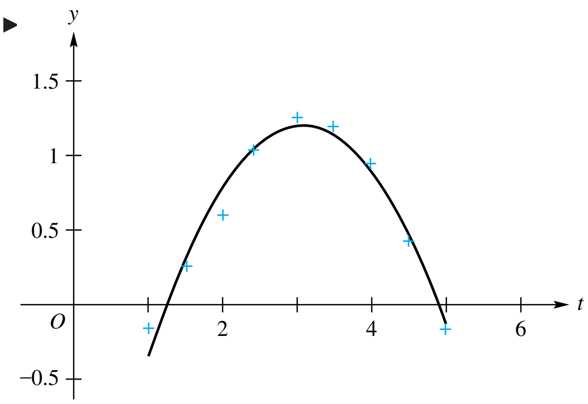
$$\widehat{\mathbf{x}} \approx \begin{bmatrix} -0.3274 \\ 2.0067 \\ -1.9317 \end{bmatrix},$$

de modo que obtenemos el modelo polinomial cuadrático

$$y = -0.3274t^2 + 2.0067t - 1.9317.$$

La figura 7.6 muestra el conjunto de datos, indicándolos mediante el símbolo + y la gráfica de y. Vemos que y está cerca de cada punto de datos, pero no es preciso que pase por ellos. ■

Figura 7.6 ▶



Términos clave

Solución por mínimos cuadrados
Sistema normal
Rectas de mínimos cuadrados
Polinomio de mínimos cuadrados

CAPÍTULO 8

VALORES PROPIOS, VECTORES PROPIOS Y DIAGONALIZACIÓN

En los primeros siete capítulos de este libro hemos utilizado números reales como las entradas de las matrices, y como escalares. De acuerdo con esto, sólo hemos tratado con espacios vectoriales reales y con el espacio vectorial B^n, en donde los escalares y las entradas de un vector son los dígitos binarios 0 y 1. En este capítulo estudiaremos las matrices que tienen entradas complejas y espacios vectoriales complejos. Puede consultar el apéndice A para ver una introducción a los números complejos y al álgebra lineal con números complejos.

8.1 VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS

Todas las matrices que consideraremos en este capítulo serán cuadradas. Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces, como hemos visto en las secciones 1.5 y 4.3, la función $L: R^n \to R^n$ definida por $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, para $\mathbf{x}$ en R^n, es una transformación lineal. Una cuestión de considerable importancia en una gran variedad de problemas de aplicación, es la determinación de vectores $\mathbf{x}$, si los hay, tales que $\mathbf{x}$ y $A\mathbf{x}$ sean paralelos (vea los ejemplos 1 y 2). Tal dificultad aparece en todas las aplicaciones relacionadas con las vibraciones: en aerodinámica, elasticidad, física nuclear, mecánica, ingeniería química, biología, ecuaciones diferenciales, etcétera. En esta sección formularemos el problema con precisión, y definiremos parte de la terminología pertinente; en la siguiente resolveremos el problema para matrices simétricas, y analizaremos brevemente la situación en el caso general.

DEFINICIÓN Sea A una matriz de $n \times n$. El número real λ es un **valor propio** (también conocidos como, valores característicos, autovalores o incluso eigenvalores) de A si existe un vector $\mathbf{x}$ *distinto* de cero en R^n tal que

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{1}$$

Todo vector $\mathbf{x}$ distinto de cero que satisfaga (1) es un **vector propio de** A, **asociado con el valor propio** λ. Los valores propios también se llaman **valores característicos**, **autovalores**, **valores latentes** o **eigenvalores** (del alemán *eigen*, que significa “propio”). De manera similar, los vectores propios también se llaman **vectores característicos**, **autovectores**, **vectores latentes** o **eigenvectores**.

Observe que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ siempre satisface (1), pero $\mathbf{0}$ no es un vector propio, pues, como hemos insistido, un vector propio debe ser un vector no nulo.

Observación En la definición anterior, el número λ puede ser real o complejo, y el vector $\mathbf{x}$ puede tener componentes reales o complejos.

EJEMPLO 1 Si A es la matriz identidad I_n, el único valor propio es $\lambda = 1$; todo vector distinto de cero en R^n es un vector propio de A, asociado con el valor propio $\lambda = 1$:

$$I_n\mathbf{x} = 1\mathbf{x}. \quad \blacksquare$$

EJEMPLO 2 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. Además,

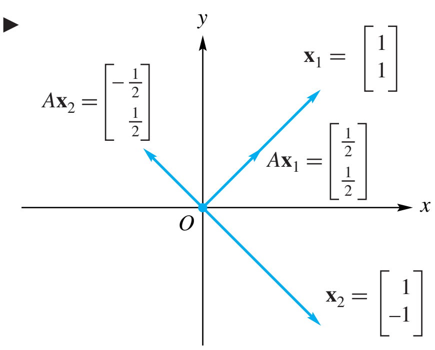
$$A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A asociado al valor propio $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$. La figura 8.1 muestra que $\mathbf{x}_1$ y $A\mathbf{x}_1$ son paralelos, lo mismo que $\mathbf{x}_2$ y $A\mathbf{x}_2$. Esto ilustra el hecho de que $\mathbf{x}$ es un vector propio de A y, por lo tanto, $\mathbf{x}$ y $A\mathbf{x}$ son paralelos. $\blacksquare$

Figura 8.1 ▶



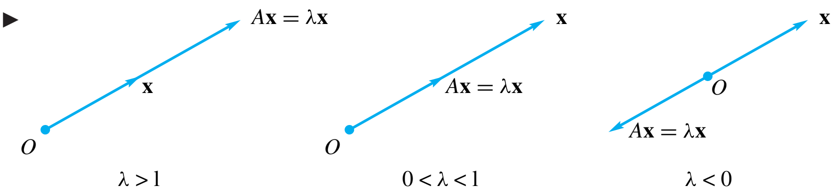
Sea λ un valor propio de A con el vector propio correspondiente $\mathbf{x}$. En la figura 8.2 mostramos $\mathbf{x}$ y $A\mathbf{x}$ para los casos $\lambda > 1$, $0 < \lambda < 1$ y $\lambda < 0$.

Un valor propio λ de A puede tener asociados muchos vectores propios distintos. De hecho, si $\mathbf{x}$ es un vector propio de A asociado con λ (es decir, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$) y r es cualquier número real distinto de cero, entonces

$$A(r\mathbf{x}) = r(A\mathbf{x}) = r(\lambda\mathbf{x}) = \lambda(r\mathbf{x}).$$

En consecuencia, $r\mathbf{x}$ también es un vector propio de A, asociado con λ.

Figura 8.2 ▶



Observación Como puede ver, dos vectores propios asociados con el mismo valor propio no necesitan tener la misma dirección. Sólo deben ser paralelos. Por lo tanto, resulta fácil verificar, en el ejemplo 2, que $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, es otro vector propio asociado con el valor propio $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

EJEMPLO 3 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

de modo que $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A, asociado con el valor propio $\lambda_1 = 0$. Además,

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con el valor propio $\lambda_2 = 1$ (verifique). ■

El ejemplo 3 resalta el hecho de que, aunque por definición el vector cero no puede ser un vector propio, el número cero sí puede ser un valor propio.

CÁLCULO DE VALORES PROPIOS Y DE VECTORES PROPIOS

Hasta este momento, hemos encontrado los valores propios y los vectores propios asociados a una matriz dada por medio de inspección, argumentos geométricos o enfoques algebraicos muy sencillos. En el ejemplo siguiente, sin embargo, calcularemos los valores propios y los vectores propios asociados de una matriz utilizando un método un poco más sistemático.

EJEMPLO 4 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Queremos determinar los valores propios de A y sus vectores propios asociados. En consecuencia, queremos determinar todos los números reales λ y todos los vectores no nulos

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

que satisfagan (1), es decir,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

La ecuación (2) se convierte en

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \lambda x_1 \\ -2x_1 + 4x_2 &= \lambda x_2, \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)x_1 - \qquad\quad x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (\lambda - 4)x_2 &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

La ecuación (3) es un sistema homogéneo de dos ecuaciones en dos incógnitas. El corolario 3.4 de la sección 3.2 implica que el sistema homogéneo en (3) tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante de su matriz de coeficientes es cero; es decir, si y sólo si

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Esto significa que

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) + 2 = 0,$$

o

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 = (\lambda - 3)(\lambda - 2).$$

Por lo tanto,

$$\lambda_1 = 2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 3$$

son los valores propios de A. Para determinar todos los vectores propios de A asociados con $\lambda_1 = 2$, formamos el sistema lineal

$$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x},$$

o

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Esto da como resultado

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2x_1 \\ -2x_1 + 4x_2 &= 2x_2 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} (2 - 1)x_1 - \qquad\quad x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (2 - 4)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 - 2x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Observe que podríamos haber obtenido este último sistema homogéneo simplemente sustituyendo $\lambda = 2$ en (3). Todas las soluciones de este último sistema están dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ x_2 &= \text{cualquier número real } r. \end{aligned}$$

Por lo tanto, todos los vectores propios asociados con el valor propio $\lambda_1 = 2$ están dados por $\begin{bmatrix} r \\ r \end{bmatrix}$, donde r es cualquier número real distinto de cero. En particular,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio asociado con $\lambda_1 = 2$. De manera análoga, para $\lambda_2 = 3$ obtenemos, a partir de (3),

$$\begin{aligned} (3-1)x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 + (3-4)x_2 &= 0 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Todas las soluciones de este último sistema homogéneo están dadas por

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}x_2 \\ x_2 &= \text{cualquier número real } r. \end{aligned}$$

Por lo tanto, todos los vectores propios asociados con el valor propio $\lambda_2 = 3$ están dados por $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}r \\ r \end{bmatrix}$, donde r es cualquier número real distinto de cero. En particular,

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

es un vector propio asociado con $\lambda_2 = 3$. ■

En los ejemplos 1, 2 y 3 encontramos los valores y vectores propios por inspección, mientras que en el ejemplo 4 procedimos de una manera más sistemática. A continuación presentamos el procedimiento del ejemplo 4 como método estándar.

DEFINICIÓN Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de $n \times n$. El determinante

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

es el **polinomio característico de** A. La ecuación

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = 0$$

es la **ecuación característica de** A.

EJEMPLO 5 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de A es (verifique)

$$\begin{aligned} f(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 1 \\ -1 & \lambda - 0 & -1 \\ -4 & 4 & \lambda - 5 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6. \end{aligned}$$ ■

Recuerde que, como se indicó en el capítulo 3, en el desarrollo de un determinante de una matriz de $n \times n$, cada término es un producto de n elementos de la matriz, el cual tiene exactamente un elemento de cada fila (renglón) y un elemento de cada columna. En consecuencia, si desarrollamos $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$, obtenemos un polinomio de grado n. Un polinomio de grado n con coeficientes reales tiene n raíces (contando las repeticiones), algunas de las cuales pueden ser números complejos. La expresión relacionada con λ^n en el polinomio característico de A proviene del producto

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn}),$$

de modo que el coeficiente de λ^n es 1. Entonces, podemos escribir

$$f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n.$$

Si hacemos $\lambda = 0$ en $\det(\lambda I_n - A)$, al igual que en la expresión de la derecha, obtenemos $\det(-A) = c_n$, lo cual muestra que el término constante c_n es $(-1)^n \det(A)$. Con este resultado se establece el siguiente teorema.

TEOREMA 8.1 *Una matriz A de $n \times n$ es singular si y sólo si* 0 *es un valor propio de A.*

Demostración Ejercicio T.7(b). ■

A continuación ampliaremos nuestra lista de equivalencias no singulares.

Lista de equivalencias no singulares

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una matriz A de $n \times n$.

1. A es no singular.
2. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la única solución para $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. A es equivalente por filas (renglones) a I_n.
4. El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución para cada matriz $\mathbf{b}$ de $n \times 1$.
5. $\det(A) \neq 0$.
6. A tiene rango n.
7. A tiene nulidad 0.
8. Las filas de A forman un conjunto linealmente independiente de n vectores en R^n.
9. Las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente de n vectores en R^n.
10. Cero *no* es un valor propio de A.

En el siguiente teorema relacionaremos el polinomio característico de una matriz con sus valores propios.

TEOREMA 8.2 *Los valores propios de A son las raíces del polinomio característico de A.*

Demostración Sea λ un valor propio de A, asociado con el vector propio $\mathbf{x}$. Entonces, $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, lo cual se puede escribir como

$$A\mathbf{x} = (\lambda I_n)\mathbf{x}$$

o

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{5}$$

un sistema homogéneo de n ecuaciones en n incógnitas. Este sistema tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante de su matriz de coeficientes se anula (corolario 3.4 de la sección 3.2), es decir, si y sólo si $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Recíprocamente, si λ es una raíz real del polinomio característico de A, entonces $\det(\lambda I_n - A) = 0$, de modo que el sistema homogéneo (5) tiene una solución no trivial $\mathbf{x}$. Por lo tanto, λ es un valor propio de A. ■

En consecuencia, para determinar los valores propios de una matriz dada A, debemos determinar las raíces de su polinomio característico $f(\lambda)$. Hay muchos métodos para determinar aproximaciones a las raíces de un polinomio, algunos más eficaces que otros; de hecho, muchos programas de computadora permiten determinar las raíces de un polinomio. Dos resultados que suelen ser útiles a este respecto son (1) el producto de todas las raíces del polinomio

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

es $(-1)^n a_n$, y (2) si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros, $f(\lambda)$ no puede tener una raíz racional que no sea un entero. Así, uno sólo debe verificar los factores enteros de a_n como posibles raíces racionales de $f(\lambda)$. Por supuesto, $f(\lambda)$ podría tener raíces irracionales o complejas. Sin embargo, para minimizar el esfuerzo de cálculo y para conveniencia del lector, muchos de los polinomios característicos considerados en el resto del capítulo tendrán sólo raíces enteras, y cada una será un factor del término constante del polinomio característico de A. Los vectores propios correspondientes se obtienen al sustituir el valor de λ en la ecuación (5) y resolver el sistema homogéneo resultante. La solución de esta clase de problema se analizó ya en la sección 6.5.

EJEMPLO 6 Considere la matriz del ejemplo 5. El polinomio característico es

$$f(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6.$$

Las posibles raíces enteras de $f(\lambda)$ son ± 1, ± 2, ± 3 y ± 6. Al sustituir estos valores en $f(\lambda)$, tenemos que $f(1) = 0$, de modo que $\lambda = 1$ es una raíz de $f(\lambda)$. Por lo tanto, $(\lambda - 1)$ es un factor de $f(\lambda)$. Al dividir $f(\lambda)$ entre $(\lambda - 1)$, obtenemos (verifique)

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6).$$

Al factorizar $\lambda^2 - 5\lambda + 6$, tenemos

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Entonces, los valores propios de A son

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = 2, \qquad \lambda_3 = 3.$$

Para determinar un vector propio $\mathbf{x}_1$, asociado con $\lambda_1 = 1$, formamos el sistema lineal

$$(1I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

$$\begin{bmatrix} 1-1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & 1-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una solución es

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}r \\ \frac{1}{2}r \\ r \end{bmatrix}$$

para cualquier número real r. Por lo tanto, para $r = 2$,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_1 = 1$.

Para determinar un vector propio $\mathbf{x}_2$ asociado con $\lambda_2 = 2$, formamos el sistema lineal

$$(2I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} 2-1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 2-5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una solución es

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}r \\ \frac{1}{4}r \\ r \end{bmatrix}$$

para cualquier número real r. En consecuencia, para $r = 4$,

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_2 = 2$.

Para determinar un vector propio $\mathbf{x}_3$ asociado con $\lambda_3 = 3$, formamos el sistema lineal

$$(3I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0},$$

y vemos que una solución es (verifique)

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{4}r \\ \frac{1}{4}r \\ r \end{bmatrix}$$

para cualquier número real r. Así, para $r = 4$,

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_3 = 3$. ■

EJEMPLO 7 Calcule los valores propios y los vectores propios asociados de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solución El polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 0 & 0 & -3 \\ -1 & \lambda - 0 & 1 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda - 3$$

(verifique). Determinamos que $\lambda = 3$ es una raíz de $p(\lambda)$. Al dividir $p(\lambda)$ entre $(\lambda - 3)$, obtenemos $p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 1)$. Entonces, los valores propios de A son

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i.$$

Para obtener un vector propio $\mathbf{x}_1$ asociado con $\lambda_1 = 3$, sustituimos $\lambda = 3$ en (5), lo cual nos da como resultado

$$\begin{bmatrix} 3 - 0 & 0 & -3 \\ -1 & 3 - 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinamos que el vector $\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$ es una solución para cualquier número real r (verifique). Al hacer $r = 1$, concluimos que

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_1 = 3$. Para obtener un vector propio $\mathbf{x}_2$ asociado con $\lambda_2 = i$, sustituimos $\lambda = i$ en (5), lo que da como resultado

$$\begin{bmatrix} i - 0 & 0 & -3 \\ -1 & i - 0 & 1 \\ 0 & -1 & i - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Determinamos que el vector $\begin{bmatrix} (-3i)r \\ (-3 + i)r \\ r \end{bmatrix}$ es una solución para cualquier número r (verifique). Al hacer $r = 1$, concluimos que

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -3i \\ -3 + i \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A asociado con $\lambda_2 = i$. De manera similar, determinamos que

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 3i \\ -3 - i \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio de A, asociado con $\lambda_3 = -i$. ■

El procedimiento para determinar los valores propios y los vectores propios asociados de una matriz, es como sigue.

Paso 1. Determine las raíces del polinomio característico $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$. Éstas son los valores propios de A.

Paso 2. Para cada valor propio λ, determine todas las soluciones no triviales para el sistema homogéneo $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Éstos son los vectores propios de A, asociados con el valor propio λ.

Por supuesto, el polinomio característico de una matriz dada puede tener algunas raíces complejas, e incluso podría carecer por completo de raíces reales. Sin embargo, en el importante caso de las matrices simétricas, todas las raíces del polinomio característico son reales. Estableceremos este resultado en la sección 8.3 (teorema 8.6).

Los valores propios y los vectores propios satisfacen muchas propiedades de gran interés. Por ejemplo, si A es una matriz triangular superior (inferior) o una matriz diagonal, los valores propios de A son los elementos de la diagonal principal de A (ejercicio T.3). El conjunto S que consiste en todos los vectores propios de A asociados con λ_j, junto con el vector nulo, es un subespacio de R^n (ejercicio T.1), denominado **espacio propio asociado con** λ_j (también se le conoce como espacio invariante). En los ejercicios de esta sección se desarrollan otras propiedades.

Es preciso hacer hincapié en que el método para determinar los valores propios de una transformación lineal o matriz por medio de la obtención de las raíces del polinomio característico no es práctico para $n > 4$, ya que incluye la evaluación de un determinante. En cursos de análisis numérico se estudian métodos numéricos eficientes para la determinación de valores propios y los vectores propios asociados.

Precaución Al determinar los valores propios y los vectores propios asociados de una matriz A, evite cometer el error común de transformar primero A a la forma escalonada reducida por filas B, y luego determinar los valores y vectores propios de B. Para comprender rápidamente cómo falla este enfoque, considere la matriz A, definida en el ejemplo 4. Sus valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Como A es una matriz no singular, cuando la transformamos a la forma escalonada reducida por filas B, tenemos que $B = I_2$. Los valores propios de I_2 son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$.

A continuación examinaremos brevemente tres aplicaciones de valores y vectores propios. Las primeras dos ya se han analizado en el texto; la tercera es nueva. El capítulo 9 se dedica por completo a un estudio más profundo de varias aplicaciones adicionales de valores y vectores propios.

CADENAS DE MARKOV

En las secciones 1.4 y 2.5 se analizaron ya las cadenas o procesos de Markov. Sea T una matriz regular de transición de un proceso de Markov. En el teorema 2.5 mostramos que conforme $n \to \infty$, T^n tiende a una matriz A, cuyas columnas son idénticas al vector $\mathbf{u}$. Además, el teorema 26 demostró que $\mathbf{u}$ es un vector de estado estable, que es el único vector de probabilidad que satisface la ecuación matricial $T\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Esto significa que $\lambda = 1$ es un valor propio de T y $\mathbf{u}$ es un vector propio asociado. Por último, como las columnas de A suman 1, de acuerdo con el ejercicio T.14 se deduce que $\lambda = 1$ es un valor propio de A.

MODELOS ECONÓMICOS LINEALES

En la sección 2.6 analizamos el modelo cerrado de Leontief, que consiste en una sociedad formada por un agricultor, un carpintero y un sastre, cada uno de los cuales produce una unidad de un bien específico durante un año. La matriz de intercambio A proporciona la parte de cada bien que consume cada individuo a lo largo del año. El problema al que se enfrenta el planeador económico, consiste en determinar los precios p_1, p_2 y p_3 de los tres bienes, de modo que nadie gane ni pierda dinero. Es decir, lo que se busca es un estado de equilibrio. Sea $\mathbf{p}$ el vector de precios. Entonces, el problema radica en determinar una solución $\mathbf{p}$ para el sistema lineal $A\mathbf{p} = \mathbf{p}$, cuyos componentes p_i sean no negativos e integren por lo menos un valor positivo. El ejercicio T.14 implica que $\lambda = 1$ es un valor propio de A, y $\mathbf{p}$ es un vector propio asociado.

DISTRIBUCIÓN ESTABLE DE EDADES EN UNA POBLACIÓN

Considere una población de animales que pueden vivir hasta una edad máxima de n años (o cualquier otra unidad de tiempo). Supongamos que la cantidad de machos en la población es siempre un porcentaje fijo de la población de hembras. De esta manera, al analizar el crecimiento de toda la población podemos ignorar la población de machos y concentrar nuestra atención en la población de hembras. Dividimos la población de hembras en $n + 1$ grupos de edad, como sigue:

$x_i^{(k)}$ = número de hembras de edad i que están vivas en el instante k, $0 \leq i \leq n$;

f_i = fracción de las hembras de edad i que seguirán vivas un año después;

b_i = número promedio de hembras nacidas de una hembra de edad i.

Sea

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_0^{(k)} \\ x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} \qquad (k \geq 0)$$

el vector de distribución de edades en el instante k.

El número de hembras en el primer grupo de edad (edad cero) en el instante $k + 1$ es simplemente el número total de hembras nacidas entre el instante k y el instante $k + 1$. Hay $x_0^{(k)}$ hembras en el primer grupo de edad en el instante k, y cada una de ellas, en promedio, procrea una descendencia de b_0 hembras, de modo que el primer grupo de edad engendra un total de $b_0 x_0^{(k)}$ hembras. De manera similar, las $x_1^{(k)}$ hembras del segundo grupo de edad (edad 1) procrean un total de $b_1 x_1^{(k)}$ hembras. En consecuencia,

$$x_0^{(k+1)} = b_0 x_0^{(k)} + b_1 x_1^{(k)} + \cdots + b_n x_n^{(k)}. \tag{6}$$

La cantidad $x_1^{(k+1)}$ de hembras en el segundo grupo de edad en el instante $k + 1$ es el número de hembras del primer grupo de edad en el instante k que están vivas un año después. Por lo tanto,

$$x_1^{(k+1)} = \begin{pmatrix} \text{fracción de las hembras del} \\ \text{primer grupo de edad que} \\ \text{están vivas un año después} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{número de hembras del} \\ \text{primer grupo de edad} \end{pmatrix}.$$

o

$$x_1^{(k+1)} = f_0 x_0^{(k)},$$

y, en general,

$$x_j^{(k+1)} = f_{j-1} x_{j-1}^{(k)} \qquad (1 \leq j \leq n). \tag{7}$$

Utilizando notación matricial, podemos escribir (6) y (7) como

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = A\mathbf{x}^{(k)} \qquad (k \geq 1), \tag{8}$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ f_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{n-1} & 0 \end{bmatrix},$$

y A se denomina **matriz de Leslie***. Podemos utilizar la ecuación (8) para intentar determinar una distribución de la población por grupos de edad en el instante $k + 1$, de modo que el número de hembras en cada grupo de edad en el instante $k + 1$ sea un múltiplo fijo del número de hembras en el grupo de edad correspondiente en el instante k. Es decir, si λ es el factor, queremos que

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \lambda\mathbf{x}^{(k)}$$

o bien,

$$A\mathbf{x}^{(k)} = \lambda\mathbf{x}^{(k)}.$$

En consecuencia, λ es un valor propio de A y $\mathbf{x}^{(k)}$ es un vector propio correspondiente. Si $\lambda = 1$, el número de hembras en cada grupo de edad será el mismo cada año. Si podemos determinar un vector propio $\mathbf{x}^{(k)}$ correspondiente al valor propio $\lambda = 1$, decimos que tenemos una **distribución estable de edades**.

EJEMPLO 8 Consideremos un escarabajo que puede vivir un máximo de dos años y cuya dinámica de población está representada por la matriz de Leslie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Determinamos que $\lambda = 1$ es un valor propio de A con el vector propio correspondiente

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Así, si el número de hembras en los tres grupos es proporcional a 6:3:1, tenemos una distribución estable de edades. Es decir, si tenemos 600 hembras en el primer grupo de edad, 300 en el segundo y 100 en el tercero, el número de hembras en cada grupo de edad será el mismo cada año. ■

Los problemas de crecimiento poblacional del tipo considerado en el ejemplo 8 tienen aplicaciones en la cría de animales. Para un análisis más amplio de aplicaciones elementales de los valores y vectores propios, vea D. R. Hill, *Experiments in Computational Matrix Algebra,* Nueva York, Random House, 1988, o D. R. Hill y D. E. Zitarelli, *Linear Algebra Labs with MATLAB,* 3a. edición, Upper Saddle River, Nueva Jersey: Prentice Hall, 2004.

Los ejercicios teóricos de esta sección contienen muchas propiedades útiles de los valores propios. Recomendamos al lector que redacte una lista de hechos relativos a los valores propios y a los vectores propios.

*Vea P.H. Leslie, “On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics”, *Biometrika* 33, 1945.

Términos clave

Valor propio (eigenvalor)
Valor característico
Valor latente
Vector propio (eigenvector)
Polinomio característico
Ecuación característica
Raíces del polinomio característico
Espacio propio (espacio variante)
Matriz de Leslie
Distribución estable de edades

8.1 Ejercicios

1. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que $\lambda_1 = 1$ es un valor propio de A y que

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} r \\ 2r \end{bmatrix}$, $r \neq 0$, es un vector propio asociado.

(b) Verifique que $\lambda_1 = 4$ es un valor propio de A y que

$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} r \\ -r \end{bmatrix}$, $r \neq 0$, es un vector propio asociado.

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que $\lambda_1 = -1$ es un valor propio de A y que

$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado.

(b) Verifique que $\lambda_2 = 2$ es un valor propio de A y que

$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado.

(c) Verifique que $\lambda_3 = 4$ es un valor propio de A y que

$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ es un vector propio asociado.

En los ejercicios 3 a 7, determine el polinomio característico de cada matriz.

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 8 a 15, determine el polinomio característico, los valores propios y los vectores propios de cada matriz.

8. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **9.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ **11.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **13.** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ **15.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

16. Determine el polinomio característico, los valores propios y los vectores propios asociados de cada una de las matrices siguientes.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2-i & 2i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

17. Determine todos los valores propios y los vectores propios asociados de cada una de las matrices siguientes.

(a) $\begin{bmatrix} -1 & -1+i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 18 y 19, determine bases para los espacios propios (vea el ejercicio T.1) asociados a cada valor propio.

18. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **19.** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 20 a 23, determine una base para el espacio propio (vea el ejercicio T.1) asociado con λ.

20. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda = 1$ **21.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$

22. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\lambda = 3$

23. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\lambda = 2$

24. Sea $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Determine una base para el espacio propio asociado con el valor propio $\lambda_1 = 2i$.

(b) Determine una base para el espacio propio asociado con el valor propio $\lambda_2 = -2i$.

25. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$.

(a) Determine una base para el espacio propio asociado con el valor propio $\lambda_1 = 3$.

(b) Determine una base para el espacio propio asociado con el valor propio $\lambda_2 = 3i$.

26. Sea A la matriz del ejercicio 1. Determine los valores propios y los vectores propios de A^2, y verifique el ejercicio T.5.

27. Considere un organismo que puede vivir hasta una edad máxima de dos años, y cuya matriz de Leslie es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine una distribución estable de edades.

28. Considere un organismo que puede vivir hasta una edad máxima de 2 años, y cuya matriz de Leslie es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Demuestre que existe una distribución estable de edades, y determínela.

Ejercicios teóricos

T.1. Sea λ_j un valor propio particular de la matriz A de $n \times n$. Demuestre que el subconjunto S de R^n, consistente en todos los vectores propios de A asociados con λ_j forma, junto con el vector cero, un subespacio de R^n. Este subespacio se llama **espacio propio** asociado al valor propio λ_j.

T.2. ¿Por qué es preciso incluir el vector cero en el subconjunto S en el ejercicio T.1?

T.3. Demuestre que si A es una matriz triangular superior (inferior) o una matriz diagonal, los valores propios de A son los elementos de la diagonal principal de A.

T.4. Demuestre que A y A^T tienen los mismos valores propios. ¿Podríamos decir algo acerca de los vectores propios asociados de A y A^T?

T.5. Si λ es un valor propio de A con vector propio asociado $\mathbf{x}$, demuestre que λ^k es un valor propio de $A^k = A \cdot A \cdots A$ (k factores) con vector propio asociado $\mathbf{x}$, donde k es un entero positivo.

T.6. Una matriz A de $n \times n$ es **nilpotente** si $A^k = O$ para algún entero positivo k. Demuestre que si A es nilpotente, entonces el único valor propio de A es 0. (*Sugerencia:* utilice el ejercicio T.5.)

T.7. Sea A una matriz de $n \times n$.

(a) Demuestre que $\det(A)$ es el producto de todas las raíces del polinomio característico de A.

(b) Demuestre que A es singular si y sólo si 0 es un valor propio de A.

T.8. Sea λ un valor propio de la matriz no singular A con vector propio asociado $\mathbf{x}$. Demuestre que $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1} con vector propio asociado $\mathbf{x}$.

T.9. Sea A cualquier matriz real de $n \times n$.

(a) Demuestre que el coeficiente de λ^{n-1} en el polinomio característico de A está dado por $-\text{Tr}(A)$, donde $\text{Tr}(A)$ denota la traza de A (vea el ejercicio complementario T.1 del capítulo 1).

(b) Demuestre que $\text{Tr}(A)$ es la suma de los valores propios de A.

(c) Demuestre que el término constante del polinomio característico de A es $\pm$ veces el producto de los valores propios de A.

(d) Demuestre que $\det(A)$ es el producto de los valores propios de A.

T.10. Sea A una matriz de $n \times n$ con valores propios λ_1 y λ_2, donde $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sean S_1 y S_2 los espacios propios asociados con λ_1 y λ_2, respectivamente. Explique por qué el vector nulo es el único vector que pertenece a S_1 y a S_2.

T.11. Sea λ un valor propio de A con vector propio asociado $\mathbf{x}$. Demuestre que $\lambda + r$ es un valor propio de $A + rI_n$ con vector propio asociado $\mathbf{x}$. Así, sumar a A un múltiplo escalar de la matriz identidad sólo desplaza los valores propios en el múltiplo escalar.

T.12. Sea A una matriz cuadrada.

(a) Suponga que el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial $\mathbf{x} = \mathbf{u}$. Demuestre que $\mathbf{u}$ es un vector propio de A.

(b) Suponga que 0 es un valor propio de A, y que $\mathbf{v}$ es un vector propio asociado. Demuestre que el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial.

T.13. Sean A y B matrices de $n \times n$ tales que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ y $B\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$. Demuestre que:

(a) $(A + B)\mathbf{x} = (\lambda + \mu)\mathbf{x}$

(b) $(AB)\mathbf{x} = (\lambda\mu)\mathbf{x}$

T.14. Demuestre que si A es una matriz tal que sus columnas suman 1, entonces $\lambda = 1$ es un valor propio de A. (*Sugerencia*: considere el producto $A^T\mathbf{x}$, donde $\mathbf{x}$ es un vector tal que todas sus entradas son 1, y utilice el ejercicio T.4.)

T.15. Sea A una matriz de $n \times n$, y considere el operador lineal en R^n definido por $L(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$, para $\mathbf{u}$ en R^n. Un subespacio W de R^n se denomina **invariante** bajo L si para todo $\mathbf{w}$ en W, $L(\mathbf{w})$ también está en W. Demuestre que un espacio propio de A es invariante bajo L (vea el ejercicio T.1).

Ejercicios con MATLAB

MATLAB cuenta con un par de comandos útiles para determinar el polinomio característico y los valores propios de una matriz. El comando **poly(A)** *proporciona los coeficientes del polinomio característico de la matriz A, comenzando con el término de mayor grado. Si hacemos* $\mathbf{v} =$ **poly(A)** *y luego utilizamos el comando* **roots(v)**, *obtenemos las raíces del polinomio característico de A. Este procedimiento también determina valores propios complejos, mismos que se analizan en el apéndice A.2.*

Una vez que se tiene un valor propio λ de A, empleamos **rref** *o* **homsoln** *para determinar un vector propio correspondiente a partir del sistema lineal* $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

ML.1. Determine, mediante MATLAB, el polinomio característico de cada una de las siguientes matrices.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

ML.2. Utilice los comandos **poly** y **roots** de MATLAB para determinar los valores propios de las siguientes matrices:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

ML.3. En cada uno de los siguientes casos, λ es un valor propio de A. Utilice MATLAB para determinar un vector propio correspondiente.

(a) $\lambda = 3$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\lambda = -1$, $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(c) $\lambda = 2$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

ML.4. Considere un organismo que puede vivir un máximo de dos años, y cuya matriz de Leslie es

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ 0.9 & 0 & 0 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine una distribución estable de edades.

8.2 DIAGONALIZACIÓN

En esta sección mostraremos cómo determinar los valores propios y los vectores propios asociados de una matriz A dada, mediante la determinación de los valores y vectores propios de una matriz relacionada B, que tiene los mismos valores propios y vectores propios que A. La matriz B tiene la útil propiedad de que sus valores propios se obtienen con facilidad; en consecuencia, al hacerlo determinamos también los valores propios de A. En la sección 8.3, este enfoque nos dará mucha información sobre el problema de valores y vectores propios. Por conveniencia, sólo trabajaremos con matrices cuya totalidad de las entradas y valores propios son números reales.

MATRICES SEMEJANTES (SIMILARES)

DEFINICIÓN Se dice que una matriz B es **semejante** o **similar** a una matriz A, si existe una matriz no singular P tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

EJEMPLO 1 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

la matriz del ejemplo 4, sección 8.1. Sea

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, B es semejante a A. ■

Dejaremos al lector (ejercicio T.1) la demostración de la validez de las siguientes propiedades elementales de la semejanza.

1. A es semejante a A.
2. Si B es semejante a A, entonces A es semejante a B.
3. Si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

De acuerdo con la propiedad 2, podemos reemplazar las proposiciones “A es semejante a B” y “B es semejante a A” por “A y B son semejantes”.

DEFINICIÓN Diremos que la matriz A es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal. En este caso, también decimos que A **puede diagonalizarse**.

EJEMPLO 2 Si A y B son como en el ejemplo 1, A es diagonalizable, ya que es semejante a B. ■

TEOREMA 8.3 *Matrices semejantes tienen los mismos valores propios.*

Demostración Sean A y B semejantes. Entonces, $B = P^{-1}AP$ para alguna matriz no singular P. A continuación demostraremos que A y B tienen los mismos polinomios característicos, $f_A(\lambda)$ y $f_B(\lambda)$, respectivamente. Tenemos

$$\begin{aligned} f_B(\lambda) &= \det(\lambda I_n - B) = \det(\lambda I_n - P^{-1}AP) \\ &= \det(P^{-1}\lambda I_n P - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I_n - A)P) \\ &= \det(P^{-1})\det(\lambda I_n - A)\det(P) \qquad (1) \\ &= \det(P^{-1})\det(P)\det(\lambda I_n - A) \\ &= \det(\lambda I_n - A) = f_A(\lambda). \end{aligned}$$

Como $f_A(\lambda) = f_B(\lambda)$, resulta que A y B tienen los mismos valores propios. ■

El ejercicio T.3, sección 8.1, implica que los valores propios de una matriz diagonal son las entradas de su diagonal principal. El teorema siguiente establece la condición para que una matriz sea diagonalizable.

TEOREMA 8.4 *Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independientes.*

Demostración Suponga que A es semejante a D. Entonces,

$$P^{-1}AP = D,$$

es una matriz diagonal, de manera que

$$AP = PD. \tag{2}$$

Sea

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix},$$

y sea $\mathbf{x}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$ la j-ésima columna de P. De acuerdo con el ejercicio T.9, sección 1.3, resulta que la j-ésima columna de la matriz AP es $A\mathbf{x}_j$, y la j-ésima columna de PD es $\lambda_j \mathbf{x}_j$.

Por lo tanto, con base en (2), tenemos

$$A\mathbf{x}_j = \lambda_j \mathbf{x}_j. \tag{3}$$

Como P es una matriz no singular, de acuerdo con el teorema 6.13, sección 6.6, sus columnas son linealmente independientes y, por lo tanto, todas son distintas de cero. En consecuencia, λ_j es un valor propio de A, y $\mathbf{x}_j$ es un vector propio correspondiente.

Recíprocamente, suponga que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son n valores propios de A, y que los vectores propios correspondientes, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, son linealmente independientes. Sea $P = [\mathbf{x}_1 \ \ \mathbf{x}_2 \ \cdots \ \mathbf{x}_n]$ la matriz cuya j-ésima columna es $\mathbf{x}_j$. Como las columnas de P son linealmente independientes, el teorema 6.13 de la sección 6.6 implica que P es no singular. A partir de (3) obtenemos (2), lo cual implica que A es diagonalizable. Esto completa la demostración. ■

Observación Si A es una matriz diagonalizable, $P^{-1}AP = D$, donde D es una matriz diagonal. La demostración del teorema 8.4 implica que los elementos de la diagonal de D son los valores propios de A. Además, P es una matriz cuyas columnas son, respectivamente, n vectores propios linealmente independientes de A. Observe también que, según el teorema 8.4, el orden de las columnas de P determina el orden de las entradas de la diagonal de D.

EJEMPLO 3 Sea A como en el ejemplo 1. Los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. (Vea el ejemplo 4, sección 8.1.) Los vectores propios correspondientes

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes. Por lo tanto, A es diagonalizable. Aquí

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

En consecuencia, como en el ejemplo 1,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, si $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = 2$, entonces

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

■

EJEMPLO 4 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 1$. Los vectores propios asociados con λ_1 y λ_2 son vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} r \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde r es cualquier número real distinto de cero. Como A no tiene dos vectores propios linealmente independientes, concluimos que A no es diagonalizable. ■

El siguiente es un teorema útil, ya que identifica una clase amplia de matrices que pueden diagonalizarse.

TEOREMA 8.5 *Si todas las raíces del polinomio característico de una matriz A de $n \times n$ son distintas (es decir, si todas son diferentes entre sí), A es diagonalizable.*

Demostración Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los valores propios (eigenvalores) distintos de A, y sea $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ un conjunto de vectores propios asociados. Queremos demostrar que S es linealmente independiente.

Suponga que S es linealmente dependiente. Entonces, el teorema 6.4 de la sección 6.3 implica que algún vector $\mathbf{x}_j$ es una combinación lineal de los vectores que le preceden en S. Podemos suponer que $S_1 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}\}$ es linealmente independiente pues, de otra forma, uno de los vectores en S_1 sería una combinación lineal de los que le preceden y podríamos elegir un nuevo conjunto S_2, y así sucesivamente. En consecuencia, tenemos que S_1 es linealmente independiente y que

$$\mathbf{x}_j = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_{j-1}\mathbf{x}_{j-1}, \tag{4}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_{j-1}$ son escalares. Premultiplicando ambos lados de la ecuación (4) por A (multiplicando por la izquierda), obtenemos

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}_j &= A(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_{j-1}\mathbf{x}_{j-1}) \\ &= c_1A\mathbf{x}_1 + c_2A\mathbf{x}_2 + \cdots + c_{j-1}A\mathbf{x}_{j-1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Como $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j$ son valores propios de A, y $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_j$ son sus vectores propios asociados, sabemos que $A\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i$ para $i = 1, 2, \ldots, j$. Al sustituir en (5), tenemos

$$\lambda_j\mathbf{x}_j = c_1\lambda_1\mathbf{x}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_{j-1}\lambda_{j-1}\mathbf{x}_{j-1}. \tag{6}$$

Al multiplicar (4) por λ_j, obtenemos

$$\lambda_j\mathbf{x}_j = \lambda_jc_1\mathbf{x}_1 + \lambda_jc_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_jc_{j-1}\mathbf{x}_{j-1}. \tag{7}$$

Restando (7) de (6), tenemos

$$\begin{aligned}0 &= \lambda_j \mathbf{x}_j - \lambda_j \mathbf{x}_j \\ &= c_1(\lambda_1 - \lambda_j)\mathbf{x}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_j)\mathbf{x}_2 + \cdots + c_{j-1}(\lambda_{j-1} - \lambda_j)\mathbf{x}_{j-1}.\end{aligned}$$

Como S_1 es linealmente independiente, debemos tener

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_j) = 0, \quad c_2(\lambda_2 - \lambda_j) = 0, \ldots, \quad c_{j-1}(\lambda_{j-1} - \lambda_j) = 0.$$

Ahora,

$$\lambda_1 - \lambda_j \neq 0, \quad \lambda_2 - \lambda_j \neq 0, \ldots, \quad \lambda_{j-1} - \lambda_j \neq 0$$

(ya que las λ son distintas), lo que implica que

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_{j-1} = 0.$$

De acuerdo con la ecuación (4), concluimos que $\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$, lo cual es imposible si $\mathbf{x}_j$ es un vector propio. Por lo tanto, S es linealmente independiente y, según el teorema 8.4, A es diagonalizable. ■

Observación En la demostración del teorema 8.5, en realidad hemos establecido el siguiente resultado (de mayor importancia): sea A una matriz de $n \times n$, y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, donde k son valores propios distintos de A, con vectores propios asociados $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$. Entonces, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ son linealmente independientes (ejercicio T.11).

Si no todas las raíces del polinomio característico de A son distintas, A puede o no ser diagonalizable. El polinomio característico de A puede escribirse como el producto de n factores, cada uno de la forma $\lambda - \lambda_j$, donde λ_j es una raíz del polinomio característico, y los valores propios de A son las raíces del polinomio característico de A. Así, el polinomio característico puede escribirse como

$$(\lambda - \lambda_1)^{k_1}(\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{k_r},$$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ son los valores propios distintos de A, y $k_1, k_2, \ldots, k_r$ son enteros cuya suma es n. El entero k_i se denomina **multiplicidad** de λ_i. De esta manera, en el ejemplo 4 $\lambda = 1$ es un valor propio de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de multiplicidad 2. Es posible demostrar que A puede diagonalizarse si y sólo si para cada valor propio λ_j, de multiplicidad k_j, pueden encontrarse k_j vectores propios linealmente independientes. Esto significa que el espacio solución del sistema lineal $(\lambda_j I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene dimensión k_j. También puede demostrarse que si λ_j es un valor propio de A, de multiplicidad k_j, es imposible encontrar más de k_j vectores propios linealmente independientes asociados con λ_j. Consideremos los ejemplos siguientes.

EJEMPLO 5 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de A es $f(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$, así que los valores propios de A son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ y $\lambda_3 = 1$. En consecuencia, $\lambda_2 = 1$ es un valor propio de multiplicidad 2. Consideremos ahora los vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, mismos que se obtienen resolviendo el sistema lineal $(1I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una solución es cualquier vector de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde r es cualquier número, así que la dimensión del espacio solución del sistema lineal $(1I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es 1. No existen dos vectores linealmente independientes asociados con $\lambda_2 = 1$. Por lo tanto, A no puede diagonalizarse. ■

EJEMPLO 6 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de A es $f(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$, de manera que los valores propios de A son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1$; nuevamente, $\lambda_2 = 1$ es un valor propio de multiplicidad 2. Consideremos ahora el espacio solución de $(1I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, esto es, de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una solución es cualquier vector de la forma

$$\begin{bmatrix} 0 \\ r \\ s \end{bmatrix}$$

para cualesquiera números r y s. En consecuencia, podemos tomar como vectores propios $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ los vectores

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A continuación buscamos un vector propio asociado con $\lambda_1 = 0$. Para ello tenemos que resolver el sistema homogéneo $(0I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, o

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una solución es cualquier vector de la forma

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \\ -t \end{bmatrix}$$

para cualquier número t. Así,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

es un vector propio asociado con $\lambda_1 = 0$. Como $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ son linealmente independientes, A puede diagonalizarse. ■

Por lo tanto, una matriz de $n \times n$ no puede diagonalizarse si no tiene n vectores propios linealmente independientes.

El procedimiento para diagonalizar una matriz A es el siguiente.

Paso 1. Formamos el polinomio característico $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ de A.

Paso 2. Determinamos las raíces del polinomio característico de A.

Paso 3. Para cada valor propio λ_j de A, de multiplicidad k_j, determinamos una base para el espacio solución de $(\lambda_j I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (el espacio propio asociado con λ_j). Si la dimensión del espacio propio es menor que k_j, entonces A no es diagonzalizable. De acuerdo con ello, determinamos n vectores propios linealmente independientes de A. En la sección 6.5 resolvimos el problema de determinar una base para el espacio solución de un sistema homogéneo.

Paso 4. Sea P la matriz cuyas columnas son los n vectores propios linealmente independientes determinados en el paso 3. Entonces, $P^{-1}AP = D$, es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son los valores propios de A correspondientes a las columnas de P.

Vista preliminar de una aplicación

La sucesión de Fibonacci (sección 9.1)

La sucesión de números

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

se llama *sucesión de Fibonacci*. Los dos primeros números son 1 y 1, y el siguiente se obtiene al sumar los dos números que le preceden. Así, en general, $u_0 = 1$ y $u_1 = 1$; entonces, para $n \geq 2$

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}. \tag{*}$$

La sucesión de Fibonacci aparece en una amplia variedad de aplicaciones, como en la distribución de hojas en ciertos árboles, el orden de las semillas en los girasoles, las técnicas de búsqueda en métodos numéricos, la generación de números aleatorios en estadística y otras.

La ecuación anterior sirve para calcular los valores de u_n *de manera sucesiva* para cualquier valor de n, lo cual podría ser tedioso si n es grande. Además de (*), podemos escribir

$$u_{n-1} = u_{n-1} \tag{**}$$

y definir

$$\mathbf{w}_k = \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ u_k \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad 0 \leq k \leq n-1.$$

Entonces, (*) y (**) pueden escribirse en forma matricial como

$$\mathbf{w}_{n-1} = A\mathbf{w}_{n-2}.$$

Al diagonalizar la matriz A, obtenemos la siguiente fórmula para calcular u_n en forma directa:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

La sección 9.1 proporciona un breve análisis de la sucesión de Fibonacci.

Ecuaciones diferenciales (sección 9.2) (Requiere conocimientos de cálculo)

Una ecuación diferencial es aquella que relaciona una función desconocida y sus derivadas. Las ecuaciones diferenciales aparecen en una amplia gama de aplicaciones.

Por ejemplo, supongamos que tenemos un sistema formado por dos tanques conectados entre sí, cada uno de los cuales contiene salmuera. El tanque R contiene $x(t)$ libras de sal en 200 galones de agua, y el tanque S contiene $y(t)$ libras de sal en 300 galones de agua. La mezcla en cada tanque se mantiene uniforme revolviéndola constantemente. Cuando $t = 0$, la salmuera se bombea del tanque R al tanque S a 20 galones/minuto, y del tanque S al tanque R a 20 galones/minuto. (Vea la figura A.)

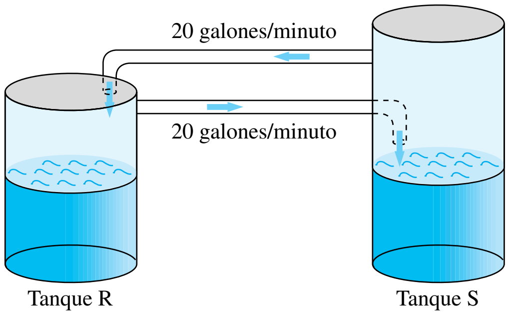


Figura A

Al plantear un modelo matemático para este problema, tenemos que $x(t)$ y $y(t)$ deben satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\tfrac{1}{10}x(t) + \tfrac{2}{30}y(t) \\ y'(t) &= \tfrac{1}{10}x(t) - \tfrac{2}{30}y(t), \end{aligned}$$

el cual podemos escribir de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{30} \\ \frac{1}{10} & -\frac{2}{30} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

En la sección 9.2 se presenta una introducción a la solución de sistemas lineales homogéneos de ecuaciones diferenciales.

Sistemas dinámicos (sección 9.3) (Se requieren conocimientos de cálculo)

Los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden en los que las derivadas no dependen de manera explícita de la variable independiente, se conocen como sistemas dinámicos (o autónomos). Concentremos nuestra atención en el caso de sistemas lineales homogéneos de dos ecuaciones que pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned}$$

para el que se especifican las condiciones iniciales $x(0) = k_1$, $y(0) = k_2$. Al determinar los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

podemos predecir el comportamiento de la curva, dado por los pares ordenados $(x(t), y(t))$, denominada trayectoria del sistema.

En la sección 9.3 se proporciona una introducción elemental a los sistemas dinámicos.

Términos clave

Matrices semejantes (similares)	Diagonalizarse	Multiplicidad de un valor propio
Diagonalizable	Valores propios (eigenvalores)	Matriz defectuosa

8.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 a 8, determine si la matriz dada es diagonalizable.

1. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ **2.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ **4.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **6.** $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **8.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

9. Determine una matriz no diagonal de 2×2, cuyos valores propios sean 2 y -3, y cuyos vectores propios asociados sean

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente.

10. Determine una matriz no diagonal de 3×3 cuyos valores propios sean -2, -2 y 3, y cuyos vectores propios asociados sean

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente.

En los ejercicios 11 a 22, determine, si es posible, una matriz no singular P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

11. $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ **12.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **14.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 8 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **18.** $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

19. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ **20.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

21. $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

23. Sea A una matriz de 2×2 cuyos valores propios sean 3 y 4, y cuyos vectores propios asociados sean

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Sin hacer cálculos, determine una matriz diagonal D que sea semejante a A, y una matriz no singular P tal que $P^{-1}AP = D$.

24. Sea A una matriz de 3×3 cuyos valores propios sean -3, 4, y 4, y cuyos vectores propios asociados sean

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Sin hacer cálculos, determine una matriz diagonal D que sea semejante a A, y una matriz no singular P tal que $P^{-1}AP = D$.

En los ejercicios 25 a 28, determine dos matrices que sean semejantes a A.

25. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **26.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

27. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

28. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 29 a 32, determine si la matriz dada es semejante a una matriz diagonal.

29. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **30.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ **32.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 33 a 36, demuestre que cada matriz es diagonalizable, y determine una matriz diagonal semejante a la matriz dada.

33. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ **34.** $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

35. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ **36.** $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 37 a 40, demuestre que la matriz dada no es diagonalizable.

37. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **38.** $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

39. $\begin{bmatrix} 10 & 11 & 3 \\ -3 & -4 & -3 \\ -8 & -8 & -1 \end{bmatrix}$ **40.** $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Se dice que una matriz A es ***defectuosa*** *si tiene un valor propio λ de multiplicidad $m > 1$, para el que el espacio propio asociado tiene una base con menos de m vectores; esto es, la dimensión del espacio propio asociado con λ es menor que m. En los ejercicios 41 a 44, utilice los valores propios de la matriz dada para determinar si la matriz es defectuosa.*

41. $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, $\lambda = 8, 8$

42. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\lambda = 3, 3, 5$

43. $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$, $\lambda = 0, 0, 3$

44. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda = 1, 1, -1, -1$

45. Sea $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule D^9.

46. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Calcule A^9. (*Sugerencia:* determine una matriz P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal D, y demuestre que $A^9 = PD^9P^{-1}$).

Ejercicios teóricos

T.1. Demuestre que:

(a) A es semejante a A.

(b) Si B es semejante a A, entonces A es semejante a B.

(c) Si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C.

T.2. Demuestre que si A es no singular y diagonalizable, entonces A^{-1} es diagonalizable.

T.3. Sea

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Determine condiciones necesarias y suficientes para que A sea diagonalizable.

T.4. Sean A y B matrices de $n \times n$ no singulares. Demuestre que AB^{-1} y $B^{-1}A$ tienen los mismos valores propios.

T.5. Demuestre o refute la siguiente afirmación: toda matriz no singular es semejante a una matriz diagonal.

T.6. Si A y B son no singulares, demuestre que AB y BA son semejantes.

T.7. Demuestre que si A es diagonalizable, entonces:

(a) A^T es diagonalizable.

(b) A^k es diagonalizable, donde k es un entero positivo.

T.8. Demuestre que si A y B son matrices semejantes, A^k y B^k son semejantes para cualquier entero k no negativo.

T.9. Demuestre que si A y B son matrices semejantes, $\det(A) = \det(B)$.

T.10. Sea A una matriz de $n \times n$, y sea $B = P^{-1}AP$ semejante a A. Demuestre que si $\mathbf{x}$ es un vector propio de A asociado con el valor propio λ de A, $P^{-1}\mathbf{x}$ es un vector propio de B asociado con el valor propio λ de la matriz B.

T.11. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ valores propios distintos de una matriz A, con vectores propios asociados $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$. Demuestre que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ son linealmente independientes. (*Sugerencia:* vea la demostración del teorema 8.5.)

T.12. Demuestre que si A y B son matrices semejantes, tienen el mismo polinomio característico.

Ejercicios con MATLAB

ML.1. Utilice MATLAB para determinar si A es diagonalizable. Si lo es, determine una matriz no singular P, tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

ML.2. Utilice MATLAB y la sugerencia del ejercicio 46 para calcular A^{30}, donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

ML.3. Repita el ejercicio ML.2 para

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1.5 & -1.5 \\ -2 & 2.5 & -1.5 \\ -2 & 2.0 & -1.0 \end{bmatrix}.$$

Despliegue su respuesta tanto en el formato **format short** como en el formato **format long**.

ML.4. Utilice MATLAB para investigar las sucesiones

$$A, A^3, A^5, \ldots \text{ y } A^2, A^4, A^6, \ldots$$

para la matriz A del ejercicio ML.2. Escriba una descripción breve del comportamiento de estas sucesiones. Describa $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

8.3 DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES SIMÉTRICAS

En esta sección analizaremos la diagonalización de las matrices simétricas (una matriz de $n \times n$ con entradas reales tales que $A = A^T$). Restringiremos nuestro análisis a este caso, debido a que es más fácil de resolver que el caso general, y a que las matrices simétricas se presentan en muchos problemas de aplicación.

Como un ejemplo de tal tipo de problema, consideremos la tarea de identificar la cónica representada por la ecuación

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 = 9,$$

la cual puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 9.$$

Observe que se trata de una matriz simétrica. Este problema se analiza con detalle en la sección 9.5. Aquí sólo haremos notar que su resolución exige la determinación de los valores y vectores propios de la matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Luego se rotan los ejes x y y para obtener un nuevo conjunto de ejes que estén a lo largo de los vectores propios de la matriz. En el nuevo conjunto es fácil identificar la cónica dada.

Omitiremos la demostración del siguiente —e importante— teorema (vea D.R. Hill, *Experiments in Computational Matrix Algebra*, Nueva York, Random House, 1988).

TEOREMA 8.6 *Todas las raíces del polinomio característico de una matriz simétrica son números reales.* ■

TEOREMA 8.7 *Si A es una matriz simétrica, los vectores propios correspondientes a valores propios distintos de A son ortogonales.*

Demostración En primer lugar, dejaremos que el lector verifique (ejercicio T.1) la propiedad de que si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores en R^n, entonces

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A^T\mathbf{y}). \tag{1}$$

Sean $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ vectores propios de A, asociados con los valores propios distintos λ_1 y λ_2 de A. Entonces, tenemos

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1 \quad \text{y} \quad A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) &= (\lambda_1\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{x}_2 = (A\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{x}_2 \\ &= \mathbf{x}_1 \cdot (A^T\mathbf{x}_2) = \mathbf{x}_1 \cdot (A\mathbf{x}_2) \\ &= \mathbf{x}_1 \cdot (\lambda_2\mathbf{x}_2) = \lambda_2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2), \end{aligned} \tag{2}$$

donde utilizamos el hecho de que $A = A^T$. En consecuencia,

$$\lambda_1(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) = \lambda_2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)$$

y al restar, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) - \lambda_2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, concluimos que $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$, de modo que $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son ortogonales. ■

EJEMPLO 1 Dada la matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

determinamos que el polinomio característico de A es (verifique)

$$f(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda - 4)(\lambda + 1),$$

de modo que los valores propios de A son

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 4, \quad \text{y} \quad \lambda_3 = -1.$$

Entonces podemos determinar los vectores propios asociados resolviendo el sistema homogéneo $(\lambda_j I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $j = 1, 2, 3$, y obtener los vectores propios correspondientes (verifique)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es fácil verificar que $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ es un conjunto ortogonal de vectores en R^3 (y, por lo tanto, que es linealmente independiente, según el teorema 6.16 de la sección 6.8). Es consecuencia, A es diagonalizable y semejante a

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

■

Recordemos que si A se puede diagonalizar, existe una matriz P no singular tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. Además, las columnas de P son vectores propios de A. Si los vectores propios de A forman un conjunto ortogonal S, como ocurre cuando A es simétrica y los valores propios de A son distintos, entonces, dado que cualquier múltiplo escalar de un vector propio de A es también un vector propio de A, podemos normalizar S para obtener un conjunto ortonormal $T = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ de vectores propios de A. La j-ésima columna de P es el vector propio $\mathbf{x}_j$ asociado con λ_j; a continuación examinaremos el tipo de matriz que debe ser P. Podemos escribir P como

$$P = [\mathbf{x}_1 \;\; \mathbf{x}_2 \cdots \mathbf{x}_n].$$

Entonces,

$$P^T = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \mathbf{x}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^T \end{bmatrix},$$

donde $\mathbf{x}_i^T$, $1 \leq i \leq n$, es la transpuesta de la matriz (o vector) $\mathbf{x}_i$ de $n \times 1$. Vemos que la entrada i, j-ésima en P^TP es $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j$ (verifique). Como

$$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

entonces $P^TP = I_n$. Así, $P^T = P^{-1}$. Tales matrices son lo bastante importantes como para tener un nombre especial.

DEFINICIÓN Una matriz no singular A es una **matriz ortogonal** si

$$A^{-1} = A^{\mathrm{T}}.$$

También podemos decir que una matriz no singular A es ortogonal si $A^TA = I_n$.

EJEMPLO 2 Sea

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Es fácil verificar que $A^TA = I_n$. Por lo tanto, A es una matriz ortogonal. ■

EJEMPLO 3 Sea A la matriz del ejemplo 1. Ya sabemos que el conjunto de vectores propios

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es ortogonal. Si normalizamos estos vectores, vemos que

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \right\}$$

es un conjunto ortonormal de vectores. La matriz P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal, es la matriz cuyas columnas son los vectores en T. En consecuencia,

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}.$$

Dejaremos al lector que verifique (ejercicio T.4) que P es una matriz ortogonal, y que

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

■

No es difícil demostrar el siguiente teorema, como verá al resolver el ejercicio T.3.

TEOREMA 8.8 *La matriz A de $n \times n$ es ortogonal si y sólo si las columnas (y las filas) de A forman un conjunto ortonormal de vectores en R^n.* ■

Si A es una matriz ortogonal, resulta sencillo demostrar que $\det(A) = \pm 1$ (ejercicio T.4).

Ahora veremos qué ocurre en el caso general con una matriz simétrica; aunque A tenga valores propios con multiplicidades mayores que uno, es posible ver que A puede diagonalizarse. Omitiremos la demostración de este teorema, pero usted puede consultarla en J. M. Ortega, *Matrix Theory, a Second Course,* Nueva York, Plenum Press, 1987.

TEOREMA 8.9 *Si A es una matriz simétrica de $n \times n$, entonces existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP = D$*, es *una matriz diagonal. Los valores propios de* A *están sobre la diagonal principal de D.* ■

De acuerdo con lo anterior, no sólo ocurre que una matriz simétrica siempre es diagonalizable, sino que es diagonalizable por medio de una matriz ortogonal. En tal caso, decimos que A es **ortogonalmente diagonalizable**.

Puede demostrarse que si una matriz simétrica A tiene un valor propio λ_j, de multiplicidad k_j, el espacio solución del sistema lineal $(\lambda_j I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (el espacio propio de λ_j) tiene dimensión k_j. Esto significa que existen k_j vectores propios de A linealmente independientes, asociados con el valor propio λ_j. A partir del proceso de Gram-Schmidt, podemos construir una base ortonormal para el espacio solución, obteniendo un conjunto de k_j vectores propios ortonormales, asociados con el valor propio λ_j. Como los vectores propios asociados con valores propios distintos son ortogonales, si formamos el conjunto de todos los vectores propios, obtenemos un conjunto ortonormal. Por lo tanto, la matriz P cuyas columnas son los vectores propios, es ortogonal.

El procedimiento para diagonalizar una matriz simétrica A mediante una matriz ortogonal P es el siguiente.

Paso 1. Formamos el polinomio característico $f(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.

Paso 2. Determinamos las raíces del polinomio característico de A. Éstas serán todas reales.

Paso 3. Para cada valor propio λ_j de A, de multiplicidad k_j, determinamos una base de k_j vectores propios para el espacio solución de $(\lambda_j I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (el espacio propio de λ_j).

Paso 4. Para cada espacio propio, transformamos la base obtenida en el paso 3 en una base ortonormal mediante el proceso de Gram-Schmidt. La totalidad de estas bases ortonormales determina un conjunto ortonormal de n vectores propios de A, linealmente independientes.

Paso 5. Sea P la matriz cuyas columnas son los n vectores propios linealmente independientes determinados en el paso 4. Entonces P es una matriz ortogonal, y $P^{-1}AP = P^TAP = D$, es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son los valores propios de A correspondientes a las columnas de P.

EJEMPLO 4 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de A es (verifique)

$$f(\lambda) = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4),$$

de modo que los valores propios son

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -2 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = 4.$$

Es decir, -2 es un vector propio cuya multiplicidad es 2. A continuación resolvemos el sistema lineal homogéneo $(-2I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para determinar los vectores propios asociados con λ_1 y λ_2:

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Una base para el espacio solución de (4) consiste en los vectores propios (verifique)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora, $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ no son ortogonales, pues $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 \neq 0$. Podemos emplear el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal del espacio solución de (4) (el espacio propio de $\lambda_1 = -2$) como sigue. Sean

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \left(\frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}_1}{\mathbf{y}_1 \cdot \mathbf{y}_1}\right)\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sea

$$\mathbf{y}_2^* = 2\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

El conjunto $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2^*\}$ es un conjunto ortogonal de vectores propios. Al normalizar estos vectores propios, obtenemos

$$\mathbf{z}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_1\|}\mathbf{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{z}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{y}_2^*\|}\mathbf{y}_2^* = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

El conjunto $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ es una base ortonormal de vectores propios de A para el espacio solución de (4). Ahora determinaremos una base para el espacio solución de $(4I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

que consta de (verifique)

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Al normalizar este vector, obtenemos el vector propio

$$\mathbf{z}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

como una base ortonormal del espacio solución de (5). Como los vectores propios asociados a valores propios distintos son ortogonales, observamos que $\mathbf{z}_3$ es ortogonal tanto a $\mathbf{z}_1$ como a $\mathbf{z}_2$. En consecuencia, el conjunto $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}$ es una base ortonormal de R^3, formada por vectores propios de A. La matriz P es la matriz cuya j-ésima columna es $\mathbf{z}_j$:

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Dejaremos que el lector verifique que

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Vea también los ejercicios 17 y 18. ■

EJEMPLO 5 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

El polinomio característico de A es (verifique)

$$f(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3)^2,$$

de modo que los valores propios son

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = 3, \quad \text{y} \quad \lambda_4 = 3.$$

Determinamos (verifique) que una base para el espacio solución de

$$(-1I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{6}$$

consiste en los vectores propios

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

que son ortogonales. Al normalizar estos vectores propios, obtenemos

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

como una base ortonormal de vectores propios para el espacio solución de (6). También vemos (verifique) que una base para el espacio solución de

$$(3I_3 - A)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{7}$$

consiste en los vectores propios

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

que son ortogonales. Al normalizar estos vectores propios, obtenemos

$$\mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

como una base ortonormal de vectores propios para el espacio solución de (7). Como los vectores propios asociados con valores propios distintos son ortogonales, concluimos que

$$\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$$

es una base ortonormal para R^4, formada por vectores propios de A. La matriz P es la matriz cuya j-ésima columna es $\mathbf{z}_j$:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

■

Supongamos ahora que A es una matriz de $n \times n$, ortogonalmente diagonalizable. De acuerdo con ello, tenemos una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal D. Entonces $P^{-1}AP = D$, o bien $A = PDP^{-1}$. Como $P^{-1} = P^T$, podemos escribir $A = PDP^T$. Entonces

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$$

($D = D^T$, pues D es una matriz diagonal). En consecuencia, A es simétrica. Este resultado, junto con el teorema 8.9, conduce al siguiente teorema.

TEOREMA 8.10 *Una matriz A de $n \times n$ es ortogonalmente diagonzalizable si y sólo si A es simétrica.* ■

Aquí debemos hacer algunos comentarios respecto de las matrices no simétricas. El teorema 8.5 nos garantiza que A es diagonalizable si todas las raíces de su polinomio característico son distintas. Por otro lado, en la sección 8.2 estudiamos ejemplos de matrices no simétricas con valores propios repetidos que eran diagonalizables, y otras que no lo eran. Hay algunas diferencias importantes entre los casos simétrico y no simétrico, mismas que se resumen a continuación. Si A es no simétrica, no todas las raíces de su polinomio característico son necesariamente números reales; si un valor propio λ_j tiene multiplicidad k_j, el espacio solución de $(\lambda_j I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ puede tener dimensión $< k_j$; aun cuando todas las raíces del polinomio característico de A fueran reales, podría ocurrir que A no tuviese n vectores propios linealmente independientes (lo cual significa que A no se puede diagonalizar); los vectores propios asociados con valores propios distintos pueden no ser ortogonales. Así, en el ejemplo 6 de la sección 9.1, los vectores propios $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_3$ asociados con los valores propios $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_3 = 1$, respectivamente, no son ortogonales. Si una matriz A no se puede diagonalizar, con frecuencia podemos encontrar una matriz B semejante a A que es "casi diagonal"; en este caso se dice que la matriz B está en la **forma canónica de Jordan**. El estudio de este tema rebasa el alcance de este libro, pero pueden encontrarse análisis completos en libros avanzados de álgebra lineal.*

Observe que en muchas aplicaciones sólo es necesario determinar una matriz diagonal D que sea semejante a la matriz dada A; es decir, no tenemos que encontrar la matriz P tal que $P^{-1}AP = D$. Muchas de las matrices por diagonalizar en los problemas de aplicación son simétricas, o bien todas las raíces de su polinomio característico son reales. Por supuesto, los métodos que se presentaron en este capítulo para determinar valores propios no son recomendables para matrices mayores de 4×4, debido a la necesidad de evaluar determinantes. En cursos de análisis numérico se estudian métodos eficientes para diagonalizar una matriz simétrica.

*Por ejemplo, consulte K. Hoffman y R. Kunze, *Linear Algebra*, 2a., Upper Saddle River, Nueva Jersey: Prentice Hall, Inc., 1971, o bien, J.M. Ortega, Matrix Theory, a Second Course, Nueva York: Plenum Press, 1987.

En las secciones 9.4, Formas cuadráticas, 9.5, Secciones cónicas, y 9.6, Superficies cuádricas, se utiliza material de esta sección; usted puede optar por estudiarlas en este momento.

Vista preliminar de una aplicación

Formas cuadráticas (sección 9.4)
Secciones cónicas (sección 9.5)
Superficies cuádricas (sección 9.6)

Las secciones cónicas son las curvas que se obtienen al intersecar un cono circular recto con un plano. Según la posición del plano respecto del cono, el resultado puede ser una elipse, una circunferencia, una parábola, una hipérbola, o formas degeneradas de las anteriores, como un punto, una recta, un par de rectas, o el conjunto vacío. Estas curvas aparecen en una amplia gama de aplicaciones en la vida cotidiana, desde la órbita de los planetas hasta los dispositivos de navegación y el diseño de los faros en los automóviles.

Las secciones cónicas están en forma canónica cuando su centro está en el origen y sus focos se ubican sobre un eje coordenado. En este caso se pueden identificar fácilmente mediante ecuaciones muy sencillas. Por ejemplo, la gráfica de la ecuación

$$x^2 + 4xy - 2y^2 = 8,$$

que aparece en la figura A, es una hipérbola, que no está en la forma canónica. Esta ecuación puede escribirse en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 8.$$

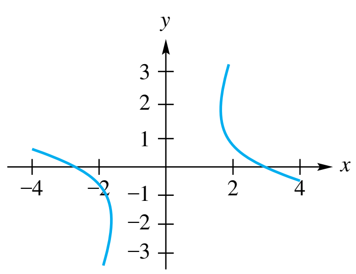


Figura A

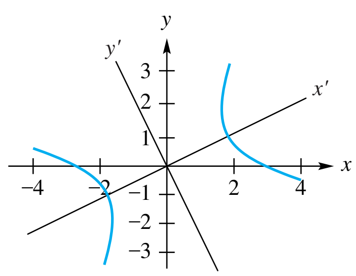


Figura B

El lado izquierdo de esta ecuación es un ejemplo de forma cuadrática, tema que estudiaremos en la sección 9.4. Al diagonalizar la matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

que aparece en la forma cuadrática, podemos transformar la ecuación dada en

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{\frac{8}{3}} = 1,$$

cuya gráfica es la hipérbola en forma canónica que aparece en la figura B. Como puede ver, los ejes x y y se han rotado hasta los ejes x' y y'. En la sección 9.5 se analiza la rotación de ejes para identificar las secciones cónicas.

La sección 9.6 analiza el problema análogo de identificación de superficies cuádricas en R^3.

A continuación se ofrece un resumen de las propiedades de los valores propios y los vectores propios.

RESUMEN DE PROPIEDADES DE VALORES PROPIOS Y VECTORES PROPIOS

Sea A una matriz de $n \times n$.

- Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores propios asociados con el valor propio λ de A, si $\mathbf{x} + \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ implica que $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ también es un vector propio asociado con λ.
- Si $\mathbf{x}$ es un vector propio asociado con el valor propio λ de A, $k\mathbf{x}$, $k \neq 0$ también es un vector propio asociado con λ.
- Si λ es un valor propio de A y $\mathbf{x}$ es un vector propio asociado, para cualquier entero no negativo k, λ^k es un valor propio de A^k y $\mathbf{x}$ es un vector propio asociado.
- Si λ y μ son valores propios distintos de A con vectores propios asociados $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$, respectivamente, $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son linealmente independientes. Esto es, *vectores propios asociados con valores propios distintos, son linealmente independientes.*
- A y A^T tienen los mismos valores propios.
- Si A es una matriz diagonal, triangular superior o triangular inferior, sus valores propios son las entradas de su diagonal principal.
- Todos los valores propios de una matriz simétrica son reales.
- Los vectores propios asociados con valores propios distintos de una matriz simétrica son ortogonales.
- $\det(A)$ es el producto de todas las raíces del polinomio característico de A. [De manera equivalente, $\det(A)$ es el producto de los valores propios de A.]
- A es singular si y sólo si 0 es un valor propio de A.
- Matrices semejantes tienen los mismos valores propios.
- A es diagonalizable si y sólo si A tiene n vectores propios linealmente independientes.
- Si A tiene n valores propios distintos, A es diagonalizable.

Términos clave

Matriz ortogonal
Ortogonalmente diagonalizable
Forma canónica de Jordan

8.3 Ejercicios

1. Verifique que

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

es una matriz ortogonal.

2. Determine la inversa de cada una de las siguientes matrices ortogonales.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

3. Verifique el teorema 8.8 para las matrices del ejercicio 2.

4. Verifique que la matriz P del ejemplo 3 es una matriz ortogonal.

En los ejercicios 5 a 10, diagonalice ortogonalmente cada matriz dada A, proporcionando la matriz diagonal D y la matriz ortogonal diagonalizante P.

5. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 11 a 18, diagonalice ortogonalmente cada matriz dada.

11. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Ejercicios teóricos

T.1. Demuestre que si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores en R^n, entonces $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A^T\mathbf{y})$.

T.2. Demuestre que si A es una matriz ortogonal de $n \times n$, y $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores en R^n, entonces $(A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

T.3. Demuestre el teorema 8.8.

T.4. Demuestre que si A es una matriz ortogonal, entonces $\det(A) = \pm 1$.

T.5. Demuestre el teorema 8.9 para el caso 2×2, estudiando las posibles raíces del polinomio característico de A.

T.6. Demuestre que si A y B son matrices ortogonales, entonces AB es una matriz ortogonal.

T.7. Demuestre que si A es una matriz ortogonal, entonces A^{-1} también es ortogonal.

T.8. (a) Verifique que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

es ortogonal.

(b) Demuestre que si A es una matriz ortogonal de 2×2, entonces existe un número real θ tal que

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

o

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

T.9. Demuestre que si $A^TA\mathbf{y} = \mathbf{y}$ para cada $\mathbf{y}$ en R^n, entonces $A^TA = I_n$.

T.10. Demuestre que si A es no singular y ortogonalmente diagonalizable, entonces A^{-1} es ortogonalmente diagonizable.

Ejercicios con MATLAB

El comando **eig** *de* MATLAB *produce los valores propios y un conjunto de vectores ortonormales para una matriz simétrica A. Utilice el comando en la forma*

$$[\mathbf{V}, \mathbf{D}] = \mathbf{eig}(\mathbf{A})$$

La matriz V contendrá los vectores propios ortonormales, y la matriz D será diagonal con los valores propios correspondientes.

ML.1. Utilice **eig** para determinar los valores propios de A y una matriz ortogonal P de modo que P^TAP sea diagonal.

(a) $A = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

ML.2. El comando **eig** se puede aplicar a cualquier matriz, pero la matriz V de vectores propios no es necesariamente ortogonal. Utilice **eig** para determinar cuáles matrices A son tales que V es ortogonal. Si V no es ortogonal, analice brevemente si puede o no reemplazarse por una matriz ortogonal de vectores propios.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ideas clave para el repaso

- **Teorema 8.2.** Los valores propios de A son las raíces reales del polinomio característico de A.
- **Teorema 8.3.** Matrices semejantes tienen los mismos valores propios.
- **Teorema 8.4.** Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independientes. En este caso, A es semejante a una matriz diagonal D, con $D = P^{-1}AP$, cuyos elementos en la diagonal son los valores propios de A, mientras que P es una matriz cuyas columnas son los n vectores propios linealmente independientes de A.
- **Teorema 8.6.** Todas las raíces del polinomio característico de una matriz simétrica son números reales.
- **Teorema 8.7.** Si A es una matriz simétrica, los vectores propios correspondientes a valores propios distintos de A son ortogonales.
- **Teorema 8.8.** La matriz A de $n \times n$ es ortogonal si y sólo si las columnas de A forman un conjunto ortonormal de vectores en R^n.
- **Teorema 8.9.** Si A es una matriz simétrica de $n \times n$, existe una matriz ortogonal P ($P^{-1} = P^T$) tal que $P^{-1}AP = D$, una matriz diagonal. Los valores propios de A están sobre la diagonal principal de D.
- **Lista de equivalencias no singulares.** Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una matriz A de $n \times n$.

  1. A es no singular.

  2. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la única solución para $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

  3. A es equivalente por filas a I_n.

  4. El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución para cada matriz $\mathbf{b}$ de $n \times 1$.

  5. $\det(A) \neq 0$.

  6. A tiene rango n.

  7. A tiene nulidad 0.

  8. Las filas de A forman un conjunto linealmente independiente de n vectores en R^n.

  9. Las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente de n vectores en R^n.

  10. Cero *no* es un valor propio de A.

Ejercicios complementarios

1. Determine el polinomio característico, los valores propios y los vectores propios de la matriz

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}.$$

En los ejercicios 2 y 3, determine si la matriz dada es diagonalizable.

2. $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 4 y 5, determine, de ser posible, una matriz no singular P y una matriz diagonal D, de modo que A sea semejante a D.

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -6 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. De ser posible, determine una matriz diagonal D tal que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

sea semejante a D.

7. Determine bases para los espacios propios asociados a cada valor propio de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

8. ¿La matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$$

es ortogonal?

En los ejercicios 9 y 10, diagonalice ortogonalmente la matriz dada A, proporcionando la matriz ortogonal P y la matriz diagonal D.

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

CAPÍTULO 10

TRANSFORMACIONES LINEALES Y MATRICES

En la sección 4.3 presentamos la definición, las propiedades básicas y algunos ejemplos de transformaciones lineales de R^n en R^m. En este capítulo estudiaremos las transformaciones lineales de un espacio vectorial V en un espacio vectorial W.

10.1 DEFINICIONES Y EJEMPLOS

DEFINICIÓN Sean V y W espacios vectoriales. Una **transformación lineal** L de V en W es una función que asigna a cada vector $\mathbf{u}$ en V un único vector $L(\mathbf{u})$ en W tal que:

(a) $L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$ cualesquiera sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V.

(b) $L(k\mathbf{u}) = kL(\mathbf{u})$, para cada $\mathbf{u}$ en V y cada escalar k.

Observe que, en (a) de la definición anterior, el signo $+$ en $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ del lado izquierdo de la ecuación se refiere a la operación de suma en V, mientras que el signo $+$ en $L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v})$ del lado derecho de la ecuación se refiere a la operación de suma en W. De manera análoga, en (b) el producto escalar $k\mathbf{u}$ está en V, mientras que el producto escalar $kL(\mathbf{u})$ está en W.

Como en la sección 4.3, indicaremos que L transforma V en W (aunque no sea una transformación lineal), así

$$L : V \to W.$$

Puede suceder que V y W sean iguales. En este caso la transformación lineal $L : V \to V$ también se denomina **operador lineal** sobre V.

En las secciones 4.3 y 2.3 dimos varios ejemplos de transformaciones lineales que transforman R^n en R^m. Por ejemplo, las siguientes son trasformaciones lineales que ya consideramos:

Proyección: $L : R^3 \to R^2$, definida como $L(x, y, z) = (x, y)$.

Dilatación: $L : R^3 \to R^3$, definida como $L(\mathbf{u}) = r\mathbf{u}$, $r > 1$.

Contracción: $L : R^3 \to R^3$, definida como $L(\mathbf{u}) = r\mathbf{u}$, $0 < r < 1$.

Reflexión: $L : R^2 \to R^2$, definida como $L(x, y) = (x, -y)$.

Rotación: $L : R^2 \to R^2$, definida como $L(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \mathbf{u}$.

Inclinación (corte) en dirección x: $L: R^2 \to R^2$, definida como $L(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$, donde k es un escalar.

Inclinación (corte) en dirección y: $L: R^2 \to R^2$, definida como $L(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}\mathbf{u}$, donde k es un escalar.

Recuerde que P_1 es el espacio vectorial de todos los polinomios de grado ≤ 1; en general, P_n es el espacio vectorial de todos los polinomios de grado $\leq n$, y M_{nn} es el espacio vectorial de todas las matrices de $n \times n$.

Como en la sección 4.3, para verificar que una función dada es una transformación lineal, debemos comprobar que se cumplan las condiciones (a) y (b) de la definición anterior.

EJEMPLO 1 Sea $L: P_1 \to P_2$ definida como

$$L(at + b) = t(at + b).$$

Demostraremos que L es una transformación lineal.

Solución Sean $at + b$ y $ct + d$ vectores en P_1, y sea k un escalar. Entonces,

$$\begin{aligned} L[(at + b) + (ct + d)] &= t[(at + b) + (ct + d)] \\ &= t(at + b) + t(ct + d) = L(at + b) + L(ct + d) \end{aligned}$$

y

$$L[k(at + b)] = t[k(at + b)] = k[t(at + b)] = kL(at + b).$$

Por lo tanto, L es una transformación lineal. ■

EJEMPLO 2 Sea $L: P_1 \to P_2$ definida como

$$L[p(t)] = tp(\mathrm{t}) + t^2.$$

¿L es una transformación lineal?

Solución Sean $p(t)$ y $q(t)$ vectores en P_1, y sea k un escalar. Entonces,

$$L[p(t) + q(t)] = t[p(t) + q(t)] + t^2 = tp(t) + tq(t) + t^2,$$

y

$$L[p(t)] + L[q(t)] = [tp(t) + t^2] + [tq(t) + t^2] = t[p(t) + q(t)] + 2t^2.$$

Como $L[p(t) + q(t)] \neq L[p(t)] + L[q(t)]$, concluimos que L no es una trasformación lineal. ■

EJEMPLO 3 Sea $L: M_{mn} \to M_{nm}$ definida como

$$L(A) = A^T$$

para A en M_{mn}. ¿Es L una transformación lineal?

Solución Sean A y B matrices en M_{mn}. Entonces, de acuerdo con el teorema 1.4 de la sección 1.4, tenemos que

$$L(A + B) = (A + B)^T = A^T + B^T = L(A) + L(B),$$

y, si k es un escalar,

$$L(kA) = (kA)^T = kA^T = kL(A).$$

Por lo tanto, L es una transformación lineal. ■

EJEMPLO 4

(Requiere conocimientos de cálculo) Sea W el espacio vectorial de todas las funciones con valores reales, y sea V el subespacio de todas las funciones diferenciables. Sea $L : V \to W$ definida como

$$L(f) = f',$$

donde f' es la derivada de f. Las propiedades de la derivada, permiten demostrar (ejercicio 13) que L es una transformación lineal. ■

EJEMPLO 5

(Requiere conocimientos de cálculo) Sea $V = C[0, 1]$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas con valores reales, definidas en $[0, 1]$. Sea $W = R^1$. Definimos $L : V \to W$ como

$$L(f) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Las propiedades de la integral permiten demostrar (ejercicio 14) que L es una transformación lineal. ■

EJEMPLO 6

Sea V un espacio vectorial de dimensión n, y sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ una base para V. Si $\mathbf{v}$ es un vector en V, entonces

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n,$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son las coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto a S (vea la sección 6.7). Definimos $L : V \to R^n$ como

$$L(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_S.$$

Es fácil demostrar (ejercicio 15) que L es una transformación lineal. ■

EJEMPLO 7

Sea A una matriz de $m \times n$. En la sección 4.3 observamos que si $L : R^n \to R^m$ se define como

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

para $\mathbf{x}$ en R^n, entonces L es una transformación lineal (vea el ejercicio 16). En el ejemplo 3 y en el ejercicio 12 de la sección 4.3 aparecen algunos casos específicos de esta clase de transformación lineal. ■

Los dos teoremas siguientes proporcionan algunas propiedades básicas de las transformaciones lineales.

TEOREMA 10.1

Si $L : V \to W$ es una transformación lineal, entonces

$$L(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) = c_1L(\mathbf{v}_1) + c_2L(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_kL(\mathbf{v}_k)$$

para cualesquiera vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ en V, y cualesquiera escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$.

Demostración Ejercicio T.1. ■

TEOREMA 10.2

Sea $L : V \to W$ una transformación lineal. Entonces

(a) $L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, *donde* $\mathbf{0}_V$ y $\mathbf{0}_W$ *son los vectores cero en V y W, respectivamente.*

(b) $L(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) - L(\mathbf{v})$.

Demostración (a) Tenemos

$$\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V.$$

Entonces,

$$L(\mathbf{0}_V) = L(\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V) = L(\mathbf{0}_V) + L(\mathbf{0}_V). \tag{1}$$

Al sumar $-L(\mathbf{0}_V)$ a ambos lados de la ecuación (1), obtenemos

$$L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W.$$

(b) Ejercicio T.2. ■

La demostración del corolario siguiente es semejante a la de su análogo, el corolario 4.1 de la sección 4.3.

COROLARIO 10.1 *Sea $T: V \to W$ una función. Si $T(\mathbf{0}_V) \neq \mathbf{0}_W$, entonces T no es una transformación lineal.*

Demostración Ejercicio T.3. ■

Observaciones

1. Podríamos haber resuelto de manera más sencilla el ejemplo 2, por medio del corolario 10.1. El razonamiento sería el siguiente: como $T(0) = t(0) + t^2 = t^2$, entonces T no es una transformación lineal.
2. Sea $T: V \to W$ una función. Observe que $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ *no* implica que T sea una transformación lineal. Por ejemplo, considere $T: R^2 \to R^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a^2 \\ b^2 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

pero T no es una transformación lineal (verifique).

Una función f que transforma un conjunto V en un conjunto W puede especificarse mediante una fórmula que asigna a cada elemento de V un único elemento de W. Por otro lado, también podemos especificar una función indicando junto a cada elemento de V el elemento que se le asigna en W. Un ejemplo es una lista de los nombres de todos los clientes con cuenta de crédito en una tienda de departamentos, junto con el número de la cuenta. A primera vista, parece imposible describir de esta forma una transformación lineal $L: V \to W$ de un espacio vectorial $V \neq \{\mathbf{0}\}$ en un espacio vectorial W, pues V tiene una infinidad de elementos. Sin embargo, el siguiente teorema, muy utilizado, nos dice que una vez conocido el efecto de L sobre una base de V, L queda completamente determinada. En consecuencia, si V es un espacio vectorial de dimensión finita es posible describir L con sólo conocer las imágenes de un número finito de vectores de V.

TEOREMA 10.3 *Sea $L: V \to W$ una transformación lineal de un espacio vectorial V de dimensión n en un espacio vectorial W. Además, sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base de V.* Si $\mathbf{u}$ *es cualquier vector en V, entonces $L(\mathbf{u})$ queda completamente determinada por* $\{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2), \ldots, L(\mathbf{v}_n)\}$.

Demostración Como $\mathbf{u}$ está en V, podemos escribir

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n, \tag{2}$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son escalares determinados de manera única. Entonces,

$$L(\mathbf{u}) = L(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1L(\mathbf{v}_1) + c_2L(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_nL(\mathbf{v}_n),$$

de acuerdo con el teorema 10.1. En consecuencia, $L(\mathbf{u})$ queda completamente determinada por los elementos $L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2), \ldots, L(\mathbf{v}_n)$. ■

En la demostración del teorema 10.3, los escalares c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ que satisfacen la ecuación (2) dependen de los vectores de la base S. Por lo tanto, si modificamos la base S, podrían cambiar algunos de los c_i.

EJEMPLO 8 Sea $L: P_1 \to P_2$ una transformación lineal para la cual sabemos que

$$L(t+1) = t^2 - 1 \qquad \text{y} \qquad L(t-1) = t^2 + t.$$

(a) ¿A qué es igual $L(7t+3)$?
(b) ¿A qué es igual $L(at+b)$?

Solución (a) Primero observamos que $\{t+1, t-1\}$ es una base para P_1 (verifique). A continuación, vemos que (verifique)

$$7t + 3 = 5(t+1) + 2(t-1).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} L(7t+3) &= L(5(t+1) + 2(t-1)) \\ &= 5L(t+1) + 2L(t-1) \\ &= 5(t^2-1) + 2(t^2+t) = 7t^2 + 2t - 5. \end{aligned}$$

(b) Al escribir $at+b$ como combinación lineal de los vectores de la base dada, obtenemos (verifique)

$$at + b = \left(\frac{a+b}{2}\right)(t+1) + \left(\frac{a-b}{2}\right)(t-1).$$

Entonces,

$$\begin{aligned} L(at+b) &= L\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)(t+1) + \left(\frac{a-b}{2}\right)(t-1)\right) \\ &= \left(\frac{a+b}{2}\right)L(t+1) + \left(\frac{a-b}{2}\right)L(t-1) \\ &= \left(\frac{a+b}{2}\right)(t^2-1) + \left(\frac{a-b}{2}\right)(t^2+t) \\ &= at^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)t - \left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

■

Términos clave

Transformación lineal
Operador lineal

10.1 Ejercicios

1. ¿Cuáles de las siguientes son transformaciones lineales?

(a) $L(x, y) = (x + y, x - y)$

(b) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 1 \\ y - z \end{bmatrix}$

(c) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

2. ¿Cuáles de las siguientes son transformaciones lineales?

(a) $L(x, y, z) = (0, 0)$

(b) $L(x, y, z) = (1, 2, -1)$

(c) $L(x, y, z) = (x^2 + y, y - z)$

3. Sea $L : P_1 \to P_2$ definida como se indica. ¿L es una transformación lineal? Justifique su respuesta.

(a) $L[p(t)] = tp(t) + p(0)$

(b) $L[p(t)] = tp(t) + t^2 + 1$

(c) $L(at + b) = at^2 + (a - b)t$

4. Sea $L : P_2 \to P_1$ definida como se indica. ¿L es una transformación lineal? Justifique su respuesta.

(a) $L(at^2 + bt + c) = at + b + 1$

(b) $L(at^2 + bt + c) = 2at - b$

(c) $L(at^2 + bt + c) = (a + 2)t + (b - a)$

5. Sea $L : P_2 \to P_2$ definida como se indica. ¿L es una transformación lineal? Justifique su respuesta.

(a) $L(at^2 + bt + c) = (a + 1)t^2 + (b - c)t + (a + c)$

(b) $L(at^2 + bt + c) = at^2 + (b - c)t + (a - b)$

(c) $L(at^2 + bt + c) = 0$

6. Sea C una matriz fija de $n \times n$, y sea $L : M_{nn} \to M_{nn}$ definida como $L(A) = CA$. Demuestre que L es una transformación lineal.

7. Sea $L : M_{22} \to M_{22}$ definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b & c - d \\ c + d & 2a \end{bmatrix}.$$

¿L es una transformación lineal?

8. Sea $L : M_{22} \to M_{22}$ definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a - 1 & b + 1 \\ 2c & 3d \end{bmatrix}.$$

¿L es una transformación lineal?

9. Sea $L : M_{22} \to R^1$ definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d.$$

¿L es una transformación lineal?

10. Sea $L : M_{22} \to R^1$ definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + b - c - d + 1.$$

¿L es una transformación lineal?

11. Considere la función $L : M_{34} \to M_{24}$, definida como

$$L(A) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} A$$

para cada A en M_{34}.

(a) Determine $L\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right)$.

(b) Demuestre que L es una transformación lineal.

12. Sea $L : M_{nn} \to R^1$ definida por $L(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$, para una matriz $A = [a_{ij}]$ de $n \times n$. ¿L es una transformación lineal?

13. (***Requiere conocimientos de cálculo***) Verifique que la función del ejemplo 4 es una transformación lineal.

14. (***Requiere conocimientos de cálculo***) Verifique que la función del ejemplo 5 es una transformación lineal.

15. Verifique que la función del ejemplo 6 es una transformación lineal.

16. Verifique que la función del ejemplo 7 es una transformación lineal.

17. Sea $L : R^2 \to R^2$ una transformación lineal para la cual sabemos que $L(1, 1) = (1, -2)$, $L(-1, 1) = (2, 3)$.

(a) ¿A qué es igual $L(-1, 5)$?

(b) ¿A qué es igual $L(a_1, a_2)$?

18. Sea $L : P_2 \to P_3$ una transformación lineal para la cual sabemos que $L(1) = 1$, $L(t) = t^2$ y $L(t^2) = t^3 + t$.

(a) Determine $L(2t^2 - 5t + 3)$.

(b) Determine $L(at^2 + bt + c)$.

19. Sea $L : P_1 \to P_1$ una transformación lineal para la cual sabemos que $L(t + 1) = 2t + 3$ y $L(t - 1) = 3t - 2$.

(a) Determine $L(6t - 4)$.

(b) Determine $L(at + b)$.

Ejercicios teóricos

T.1. Demuestre el teorema 10.1.

T.2. Demuestre el inciso (b) del teorema 10.2.

T.3. Demuestre el corolario 10.1.

T.4. Demuestre que $L: V \to W$ es una transformación lineal si y sólo si

$$L(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = aL(\mathbf{u}) + bL(\mathbf{v}),$$

para cualesquiera escalares a y b y cualesquiera vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V.

T.5. Considere la función $\text{Tr}: M_{nn} \to R^1$ (la **traza**): si $A = [a_{ij}]$ está en V, entonces $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$. Demuestre que Tr es una transformación lineal (vea el ejercicio complementario T.1 del capítulo 1).

T.6. Sea $L: M_{nn} \to M_{nn}$ la función definida como

$$L(A) = \begin{cases} A^{-1} & \text{si } A \text{ es no singular} \\ O & \text{si } A \text{ es singular} \end{cases}$$

para cada A en M_{nn}. ¿L es una transformación lineal?

T.7. Sean V y W espacios vectoriales. Demuestre que la función $O: V \to W$ definida como $O(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$ es una transformación lineal Se le llama **transformación lineal nula**.

T.8. Sea $I: V \to V$ definida como $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, para $\mathbf{v}$ en V. Demuestre que I es una transformación lineal. Se conoce como el **operador identidad** sobre V.

T.9. Sea $L: V \to W$ una transformación lineal de un espacio vectorial V en un espacio vectorial W. La **imagen** de un subespacio V_1 de V se define como

$$L(V_1) = \{\mathbf{w} \text{ en } W \mid \mathbf{w} = L(\mathbf{v}) \text{ para algún } \mathbf{v} \text{ en } V_1\}.$$

Demuestre que $L(V_1)$ es un subespacio de W.

T.10. Sean L_1 y L_2 transformaciones lineales de un espacio vectorial V en un espacio vectorial W. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base para V. Demuestre que si $L_1(\mathbf{v}_i) = L_2(\mathbf{v}_i)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces $L_1(\mathbf{v}) = L_2(\mathbf{v})$ para cualquier $\mathbf{v}$ en V.

T.11. Sea $L: V \to W$ una transformación lineal de un espacio vectorial V en un espacio vectorial W. La **preimagen** (o **imagen inversa**) de un subespacio W_1 de W se define como

$$L^{-1}(W_1) = \{\mathbf{v} \text{ en } V \mid L(\mathbf{v}) \text{ está en } W_1\}.$$

Demuestre que $L^{-1}(W_1)$ es un subespacio de V.

T.12. Sea $T: V \to W$ la función definida por $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \mathbf{b}$, para $\mathbf{v}$ en V, donde $\mathbf{b}$ es un vector fijo, no nulo, en V. T se denomina **traslación** por el vector $\mathbf{v}$. ¿Es T una transformación lineal? Justifique su respuesta.

T.13. Sea $L: V \to V$ un operador lineal. Un subespacio no vacío U de V se denomina **invariante** bajo L, si $L(U)$ está contenido en U. Sean A una matriz de $n \times n$ y λ un valor propio de A. Sea $L: R^n \to R^n$ definida por $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Demuestre que el espacio propio de A asociado con λ (vea el ejercicio T.1 en la sección 8.1) es un subespacio invariante de R^n.

Ejercicios con MATLAB

MATLAB *no se puede utilizar para demostrar que una función entre espacios vectoriales es una transformación lineal. Sin embargo, puede usarse para comprobar que una función no es una transformación lineal. Los ejercicios siguientes ilustran este punto.*

ML.1. Sea $L: M_{nn} \to R^1$ definida como $L(A) = \det(A)$.

(a) Determine un par de matrices A y B de 2×2 tales que

$$L(A + B) \neq L(A) + L(B).$$

Utilice MATLAB para realizar los cálculos. Los resultados muestran que L no es una transformación lineal.

(b) Determine un par de matrices A y B de 3×3 tales que

$$L(A + B) \neq L(A) + L(B).$$

Utilice MATLAB para realizar los cálculos. Ellos muestran que L no es una transformación lineal.

ML.2. Sea $L: M_{nn} \to R^1$ definida como $L(A) = \text{rango}(A)$.

(a) Determine un par de matrices A y B de 2×2 tales que

$$L(A + B) \neq L(A) + L(B).$$

Esto implica que L no es una transformación lineal. Utilice MATLAB para realizar los cálculos.

(b) Determine un par de matrices A y B de 3×3 tales que

$$L(A + B) \neq L(A) + L(B).$$

Esto implica que L no es una transformación lineal. Utilice MATLAB para realizar los cálculos.

10.2 EL NÚCLEO Y LA IMAGEN DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

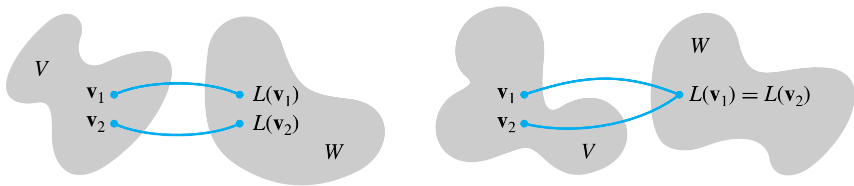
En esta sección estudiaremos algunos tipos especiales de transformaciones lineales; formularemos los conceptos de transformación lineal uno a uno (inyectiva) y transformación lineal sobre (sobreyectiva). También desarrollaremos métodos para determinar si una transformación lineal dada es inyectiva o sobre.

DEFINICIÓN

Una transformación lineal $L : V \to W$ es **uno a uno** (o **inyectiva**) si para todo $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en V, $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ implica que $L(\mathbf{v}_1) \neq L(\mathbf{v}_2)$. Una afirmación equivalente es que L es uno a uno si para todo $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ en V, $L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2)$ implica que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

Esta definición dice que L es uno a uno si $L(\mathbf{v}_1)$ y $L(\mathbf{v}_2)$ son distintos cuando $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son distintos (figura 10.1).

Figura 10.1 ►



(a) L es uno a uno. (b) L no es uno a uno.

EJEMPLO 1

Sea $L : R^2 \to R^2$ definida como

$$L(x, y) = (x + y, x - y).$$

Para determinar si L es uno a uno, hacemos

$$\mathbf{v}_1 = (a_1, a_2) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2 = (b_1, b_2).$$

Entonces, si

$$L(\mathbf{v}_1) = L(\mathbf{v}_2),$$

tenemos

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= b_1 + b_2 \\ a_1 - a_2 &= b_1 - b_2. \end{aligned}$$

Al sumar esta ecuaciones, tenemos que $2a_1 = b_1$, o $a_1 = b_1$, lo cual implica que $a_2 = b_2$. Por lo tanto, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, y L es uno a uno. ■

EJEMPLO 2

Sea $L : R^3 \to R^2$ la transformación lineal definida en el ejemplo 6 de la sección 1.5 (la función proyección) como

$$L(x, y, z) = (x, y).$$

Como $(1, 3, 3) \neq (1, 3, -2)$, pero

$$L\,(1, 3, 3) = L(1, 3, -2) = (1, 3),$$

concluimos que L no es uno a uno. ■

A continuación desarrollaremos formas más eficientes para determinar si una transformación lineal dada es uno a uno.

DEFINICIÓN

Sea $L : V \to W$ una transformación lineal. El **núcleo** (o **kernel**) de L, o núcleo(L) [ker(L)], es el subconjunto de V que consta de todos los vectores $\mathbf{v}$ tales que $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$.

Observe que la propiedad (a) del teorema 10.2, sección 10.1, nos garantiza que núcleo(L) nunca es un conjunto vacío, pues $\mathbf{0}_V$ está en núcleo(L).

EJEMPLO 3 Sea $L: R^3 \to R^2$ definida como en el ejemplo 2. El vector $(0, 0, 2)$ está en núcleo(L), pues $L(0, 0, 2) = (0, 0)$. Sin embargo, el vector $(2, -3, 4)$ no está en núcleo(L), pues $L(2, -3, 4) = (2, -3)$. Para determinar núcleo(L), debemos encontrar todos los $\mathbf{x}$ en R^3 tales que $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Es decir, buscamos $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, de modo que

$$L(\mathbf{x}) = L(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{0} = (0, 0).$$

Pero $L(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)$. Entonces, $(x_1, x_2) = (0, 0)$, esto es $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y x_3 puede ser cualquier número real. Por lo tanto, núcleo(L) consta de todos los vectores en R^3 de la forma $(0, 0, r)$, donde r es cualquier número real. Es claro que núcleo(L) es el eje z en el espacio tridimensional R^3. ■

EJEMPLO 4 Si L se define como en el ejemplo 1, entonces núcleo(L) consta de todos los vectores $\mathbf{x}$ en R^2 tales que $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. En consecuencia, debemos resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$$

en términos de x y de y. La única solución es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, de modo que núcleo(L) $= \{\mathbf{0}\}$. ■

EJEMPLO 5 Si $L: R^4 \to R^2$ se define como

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ z + w \end{bmatrix},$$

entonces núcleo(L) consta de todos los vectores $\mathbf{u}$ en R^4, tales que $L(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Esto conduce al sistema lineal

$$\begin{aligned} x + y \qquad\quad &= 0 \\ z + w &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, núcleo(L) consta de todos los vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} r \\ -r \\ s \\ -s \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

donde r y s son números reales cualesquiera. ■

En el ejemplo 5, núcleo(L) consta de todas las combinaciones lineales de

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

un subespacio de R^4. El teorema siguiente generaliza este resultado.

TEOREMA 10.4 *Si $L: V \to W$ es una transformación lineal, entonces* núcleo(L) *es un subespacio de V.*

Demostración En primer lugar, observa que núcleo(L) no es un conjunto vacío, pues contiene el vector $\mathbf{0}_V$, por lo menos. Supongamos que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ están en núcleo(L). Entonces, como L es una transformación lineal,

$$L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W + \mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W,$$

de modo que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ está en núcleo(L). Además, si c es un escalar, como L es una transformación lineal,

$$L(c\mathbf{u}) = cL(\mathbf{u}) = c\mathbf{0}_W = \mathbf{0}_W,$$

de modo que $c\mathbf{u}$ está en núcleo(L). Por lo tanto, núcleo(L) es un subespacio de V. ■

EJEMPLO 6 Si L es como en el ejemplo 1, entonces núcleo(L) es el subespacio $\{\mathbf{0}\}$; su dimensión es igual a cero.

EJEMPLO 7 Si L es como en el ejemplo 2, entonces una base para núcleo(L) es

$$\{(0, 0, 1)\}$$

y dim(núcleo(L)) = 1. La dimensión del núcleo de L se llama también la **nulidad** de L. Con esta terminología, en el ejemplo 7 pudimos haber escrito nulidad(L) = 1. En este caso, núcleo(L) es el eje z del espacio tridimensional R^3. ■

EJEMPLO 8 Si L es como en el ejemplo 5, entonces una base para núcleo(L) consta de los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

por lo tanto, nulidad(L) = 2. ■

Si $L : R^n \to R^m$ es una transformación lineal definida como $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz de $m \times n$, entonces el núcleo de L es el espacio solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

El análisis de los elementos de núcleo(L) nos permite decidir si L es, o no, uno a uno.

TEOREMA 10.5 *Una transformación lineal $L : V \to W$ es uno a uno si y sólo si* núcleo(L) = $\{\mathbf{0}_V\}$.

Demostración Supongamos que L es uno a uno. Demostraremos que núcleo(L) = $\{\mathbf{0}_V\}$. Sea $\mathbf{x}$ un vector en núcleo(L). Entonces $L(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_W$. Por otro lado, sabemos que $L(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$, de modo que $L(\mathbf{x}) = L(\mathbf{0}_V)$. Como L es uno a uno, concluimos que $\mathbf{x} = \mathbf{0}_V$. Por lo tanto, núcleo($L$) = $\{\mathbf{0}_V\}$.

Recíprocamente, supongamos que núcleo(L) = $\{\mathbf{0}_V\}$. Queremos demostrar que L es uno a uno. Supongamos que $L(\mathbf{u}) = L(\mathbf{v})$ para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en V. Entonces,

$$L(\mathbf{u}) - L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W,$$

de modo que, según el teorema 10.2, $L(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$, lo que significa que $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ está en núcleo(L). Por lo tanto, $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}_V$, y esto implica que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Por consiguiente, L es uno a uno. ■

Observe que también podemos enunciar el teorema 10.5 así: *L es uno a uno si y sólo si* nulidad(L) = 0.

Con la demostración del teorema 10.5 hemos establecido también el siguiente resultado:

COROLARIO 10.2 *Si $L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ y $L(\mathbf{y}) = \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ pertenece a* núcleo(L). *En otras palabras, cualesquiera dos soluciones de $L(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ difieren por un elemento del núcleo (kernel) de L.*

Demostración Ejercicio T.1. ■

EJEMPLO 9 La transformación lineal del ejemplo 1 es uno a uno; la del ejemplo 2 no lo es. ■

En la sección 10.3 demostraremos que, dada cualquier transformación lineal $L : R^n \to R^m$, podemos determinar una única matriz A de $m \times n$ tal que si $\mathbf{x}$ está en R^n, entonces $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. De acuerdo con esto, para determinar el núcleo de L debemos hallar el espacio solución del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, lo cual significa que sólo requerimos utilizar técnicas con las cuales estamos familiarizados.

DEFINICIÓN Si $L: V \to W$ es una transformación lineal, la **imagen** de L, que se denota imag(L), es el conjunto de vectores en W que son imágenes, bajo L, de vectores en V. En consecuencia, un vector $\mathbf{w}$ está en imag(L) si podemos encontrar algún vector $\mathbf{v}$ en V tal que $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Si imag($L$) $= W$, decimos que L es **sobre**. Esto es, L es sobre si y sólo si, dado cualquier $\mathbf{w}$ en W, existe un $\mathbf{v}$ en V tal que $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

TEOREMA 10.6 *Si $L: V \to W$ es una transformación lineal,* imag(L) *es un subespacio de W.*

Demostración Primero observemos que imag(L) no es un conjunto vacío, pues $\mathbf{0}_W = L(\mathbf{0}_V)$, de modo que $\mathbf{0}_W$ está en imag(L). Ahora, sean $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ vectores en imag(L). Entonces $\mathbf{w}_1 = L(\mathbf{v}_1)$ y $\mathbf{w}_2 = L(\mathbf{v}_2)$ para ciertos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en V. Tenemos,

$$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2),$$

lo cual implica que $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ está en imag(L). Además, si c es un escalar, $c\mathbf{w}_1 = cL(\mathbf{v}_1) = L(c\mathbf{v}_1)$, de modo que $c\mathbf{w}_1$ está en imag(L). Por lo tanto, imag(L) es un subespacio de W. ■

EJEMPLO 10 Sea L la transformación lineal definida en el ejemplo 2. Para determinar si L es sobre, elegimos cualquier vector $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ en R^2 y buscamos un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ en R^3 tal que $L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Como $L(\mathbf{x}) = (x_1, x_2)$, vemos que si $x_1 = y_1$ y $x_2 = y_2$, entonces $L(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Por lo tanto, L es sobre, y la dimensión de imag(L) es 2. La dimensión de la imagen de L, dim(imag(L)), se conoce con el nombre de **rango** de L, que denotaremos en adelante con rango(L). En el ejemplo 10, rango(L) = 2. ■

EJEMPLO 11 Sea $L: R^3 \to R^3$ definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

(a) ¿L es sobre?
(b) Determine una base para imag(L).
(c) Determine núcleo(L).
(d) ¿L es uno a uno?

Solución (a) Dado cualquier

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

en R^3, donde a, b y c son números reales cualesquiera, ¿podemos determinar

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

de modo que $L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$? Buscamos una solución del sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

para lo cual determinamos la forma escalonada reducida por filas de la matriz aumentada (verifique)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-b-a \end{array}\right].$$

En consecuencia, sólo existe solución cuando $c - b - a = 0$, de modo que L no es sobre; esto es, existen valores de a, b y c para los cuales no existe un vector $\mathbf{v}$ en R^3 tal que

$$L(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

(b) Para determinar una base de imag(L), observemos que

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_3 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 \\ 2a_1 + a_2 + 3a_3 \end{bmatrix}$$

$$= a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Esto significa que

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

genera imag(L). Es decir, imag(L) es el subespacio de R^3 generado por las columnas de la matriz que definen a L.

Los dos primeros vectores de este conjunto son linealmente independientes, pues no son múltiplos constantes uno del otro. El tercer vector es la suma de los dos primeros. Por lo tanto, los dos primeros vectores forman una base para imag(L), y dim(imag(L)) = 2.

(c) Para determinar núcleo(L), debemos encontrar todos los vectores $\mathbf{v}$ en R^3 tales que $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_{R^3}$. Al resolver el sistema homogéneo resultante, encontramos que (verifique) $a_1 = -a_3$ y $a_2 = -a_3$. Por lo tanto, núcleo(L) consta de todos los vectores de la forma

$$\begin{bmatrix} -r \\ -r \\ r \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

donde r es cualquier número real. Entonces, nulidad(L) = 1.

(d) Dado que núcleo$L \neq \{\mathbf{0}_{R^3}\}$, se sigue, de acuerdo con el teorema 10.5, que L no es uno a uno. ■

El problema de encontrar una base para núcleo(L) siempre se reduce a encontrar una base para el espacio solución de un sistema homogéneo; hemos resuelto este último problema en el ejemplo 1 de la sección 6.5.

Si imag(L) es un subespacio de R^m, podemos obtener una base para imag(L) con el método analizado en la demostración constructiva alternativa del teorema 6.6, o mediante el procedimiento dado en la sección 6.6. Ambos métodos se ilustran en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 12 Sea $L: R^4 \to R^3$ definida como

$$L(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_1 + a_3).$$

Determine una base para imag(L).

Solución Tenemos

$$L(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1(1, 0, 1) + a_2(1, 0, 0) + a_3(0, 1, 1) + a_4(0, 1, 0).$$

En consecuencia,

$$S = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0)\}$$

genera imag(L). Para determinar un subconjunto de S que sea una base para imag(L), procedemos como en el teorema 6.6, escribiendo primero

$$a_1(1, 0, 1) + a_2(1, 0, 0) + a_3(0, 1, 1) + a_4(0, 1, 0) = (0, 0, 0).$$

La forma escalonada reducida por filas de la matriz aumentada de este sistema homogéneo es (verifique)

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Como los unos (1s) principales aparecen en las columnas 1, 2 y 3, concluimos que los primeros tres vectores de S forman una base para imag(L). Así,

$$\{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$$

es una base para imag(L).

En forma alternativa, podemos proceder como en la sección 6.6 y formar la matriz cuyas filas son los vectores dados

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Al transformar esta matriz a su forma escalonada reducida por filas, obtenemos (verifique)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base para imag(L). ■

Para determinar si una transformación lineal es uno a uno o sobre, debemos resolver un sistema lineal. Ésta es una demostración más de la frecuencia con la que debemos resolver sistemas lineales para responder muchas preguntas de álgebra lineal. Por último, en el ejemplo 11, en el cual nulidad(L) = 1, rango(L) = 2 y dim(dominio(L)) = 3, se cumple que

$$\text{nulidad}(L) + \text{rango}(L) = \dim(\text{dominio}(L)).$$

Con el teorema siguiente se demuestra la validez general de tan importante resultado.

TEOREMA 10.7 *Si $L: V \to W$ es una transformación lineal de un espacio vectorial V, de dimensión n, en un espacio vectorial W, entonces*

$$\text{nulidad}(L) + \text{rango}(L) = \dim V. \tag{1}$$

Demostración Sea $k = \text{nulidad}(L)$. Si $k = n$, entonces $\text{núcleo}(L) = V$ (ejercicio T.7, sección 6.4), lo cual implica que $L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W$ para todo $\mathbf{v}$ en V. Por lo tanto, $\text{imag}(L) = \{\mathbf{0}_W\}$. En consecuencia, $\text{rango}(L) = 0$, y la conclusión es válida. Ahora, supongamos que $1 \leq k < n$. Demostraremos que $\text{rango}(L) = n - k$. Sea $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ una base para núcleo(L). De acuerdo con el teorema 6.8, podemos extender esta base a una base

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

para V. Demostraremos que el conjunto

$$T = \{L(\mathbf{v}_{k+1}), L(\mathbf{v}_{k+2}), \ldots, L(\mathbf{v}_n)\}$$

es una base para imag(L).

En primer lugar, demostraremos que T genera a imag(L). Sea $\mathbf{w}$ cualquier vector en imag(L). Entonces, $\mathbf{w} = L(\mathbf{v})$ para algún $\mathbf{v}$ en V. Como S es una base para V, podemos encontrar números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= L(\mathbf{v})\\ &= L(a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k + a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n)\\ &= a_1L(\mathbf{v}_1) + a_2L(\mathbf{v}_2) + \cdots + a_kL(\mathbf{v}_k) + a_{k+1}L(\mathbf{v}_{k+1}) + \cdots + a_nL(\mathbf{v}_n)\\ &= a_{k+1}L(\mathbf{v}_{k+1}) + \cdots + a_nL(\mathbf{v}_n)\end{aligned}$$

puesto que $L(\mathbf{v}_1) = \text{L}(\mathbf{v}_2) = \cdots = L(\mathbf{v}_k) = \mathbf{0}$, pues $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ están en núcleo(L). Por lo tanto T, genera a imag(L).

Para mostrar que T es linealmente independiente suponga que

$$a_{k+1}L(\mathbf{v}_{k+1}) + a_{k+2}L(\mathbf{v}_{k+2}) + \cdots + a_nL(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W.$$

Por la parte (b) del teorema 10.2,

$$L(a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + a_{k+2}\mathbf{v}_{k+2} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}_W.$$

Entonces, el vector $a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + a_{k+2}\mathbf{v}_{k+2} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ está en núcleo(L), y podemos escribir

$$a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + a_{k+2}\mathbf{v}_{k+2} + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k,$$

donde $b_1, b_2, \ldots, b_k$ son números reales determinados de manera única. Entonces tenemos

$$b_1\mathbf{v}_1 + b_2\mathbf{v}_2 + \cdots + b_k\mathbf{v}_k - a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} - a_{k+2}\mathbf{v}_{k+2} - \cdots - a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V.$$

Como S es linealmente independiente, deducimos que

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_n = 0.$$

Por lo tanto, T es linealmente independiente, y forma una base para imag(L).

Si $k = 0$, núcleo(L) no tiene una base; suponemos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para V. La demostración continúa entonces como se acaba de explicar. ■

Observe que con la adopción de los términos **nulidad** y **rango** para las dimensiones del núcleo y la imagen de L, la conclusión del teorema 10.7 es muy similar a la del teorema 6.12. Esto no es una coincidencia; en la sección siguiente mostraremos cómo asociar a L una única matriz de $m \times n$, cuyas propiedades reflejan las de L.

El ejemplo siguiente ilustra de manera gráfica el teorema 10.7.

EJEMPLO 13 Sea $L : R^3 \to R^3$ la transformación lineal definida por

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_3 \\ a_1 + a_2 \\ a_2 - a_3 \end{bmatrix}.$$

Un vector $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ está en núcleo(L) si

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Debemos encontrar una base para el espacio solución del sistema homogéneo

$$\begin{aligned} a_1 + \quad a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 &= 0 \\ a_2 - a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, una base para núcleo(L) es $\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$; en consecuencia, nulidad(L) $= 1$ y el núcleo de la transformación es una recta que pasa por el origen.

Adicionalmente, todo vector en imag(L) es de la forma $\begin{bmatrix} a_1 + a_3 \\ a_1 + a_2 \\ a_2 - a_3 \end{bmatrix}$, que puede escribirse como

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, una base para imag(L) es

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

(explique), de modo que rango(L) = dim(imag(L)) = 2. Esto indica que la imagen de la transformación L es un plano que pasa por el origen. Estos resultados se ilustran en la figura 10.2. Observe que,

$$\dim R^3 = 3 = \text{nulidad}(L) + \text{rango}(L) = 1 + 2,$$

una confirmación del teorema 10.7. ■

Hemos visto que una transformación lineal puede ser uno a uno y no ser sobre, o ser sobre y no uno a uno. Sin embargo, el siguiente corolario muestra que cada una de estas propiedades implica la otra si los espacios vectoriales V y W tienen igual dimensión.

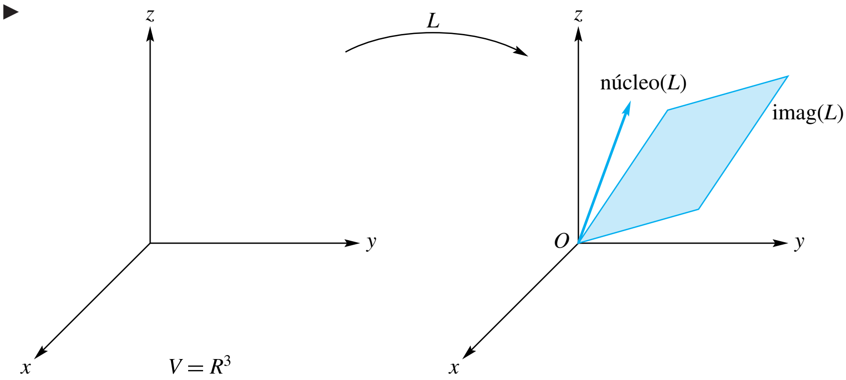
COROLARIO 10.3 *Sea $L : V \to W$ es una transformación lineal, y sea* $\dim V = \dim W$.

(a) *Si L es uno a uno, entonces es sobre.*

(b) *Si L es sobre, entonces es uno a uno.*

Demostración Ejercicio T.2. ■

Figura 10.2 ▶



EJEMPLO 14 Sea $L: P_2 \to P_2$ la transformación lineal definida como

$$L(at^2 + bt + c) = (a + 2b)t + (b + c).$$

(a) ¿$-4t^2 + 2t - 2$ está en núcleo(L)?
(b) ¿$t^2 + 2t + 1$ está en imag(L)?
(c) Determine una base para núcleo(L).
(d) ¿L es uno a uno?
(e) Determine una base para imag(L).
(f) ¿L es sobre?
(g) Verifique el teorema 10.7.

Solución (a) Como

$$L(-4t^2 + 2t - 2) = (-4 + 2 \cdot 2)t + (-2 + 2) = 0,$$

concluimos que $-4t^2 + 2t - 2$ está en núcleo(L).

(b) El vector $t^2 + 2t + 1$ está en imag(L) si podemos determinar un vector $at^2 + bt + c$ en P_2 tal que

$$L(at^2 + bt + c) = t^2 + 2t + 1.$$

Como $L(at^2 + bt + c) = (a + 2b)t + (b + c)$, tenemos que

$$(a + 2b)t + (b + c) = t^2 + 2t + 1.$$

Podemos escribir el lado izquierdo de esta ecuación como $0t^2 + (a + 2b)t + (b + c)$. En consecuencia,

$$0t^2 + (a + 2b)t + (b + c) = t^2 + 2t + 1.$$

Entonces debemos tener

$$\begin{aligned} 0 &= 1 \\ a + 2b &= 2 \\ b + c &= 1. \end{aligned}$$

Como este sistema lineal tiene no solución, el vector dado no está en imag(L).

(c) El vector $at^2 + bt + c$ está en núcleo(L) si

$$L(at^2 + bt + c) = \mathbf{0},$$

es decir, si

$$(a + 2b)t + (b + c) = 0.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} a + 2b \qquad &= 0. \\ b + c &= 0. \end{aligned}$$

Al llevar la matriz aumentada de este sistema lineal a su forma escalonada reducida por filas, encontramos (verifique) que una base para el espacio solución es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

de modo que una base para núcleo(L) es $\{2t^2 - t + 1\}$.

(d) Como núcleo(L) no tiene solamente el vector cero, L no es uno a uno.

(e) Todo vector en imag(L) es de la forma

$$(a + 2b)t + (b + c),$$

de modo que los vectores t y 1 generan a imag(L). Estos vectores forman una base para imag(L) porque también son linealmente independientes.

(f) La dimensión de P_2 es 3, mientras que imag(L) es un subespacio de P_2 de dimensión 2, de modo que imag(L) $\neq P_2$. Por lo tanto, L no es sobre.

(g) De acuerdo con (c), nulidad(L) = 1 y, según (e), rango(L) = 2, de modo que

$$3 = \dim P_2 = \text{nulidad}(L) + \text{rango}(L),$$

lo cual es una verificación del teorema 10.7 ■

Si $L: R^n \to R^n$ es una transformación lineal definida como $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz de $n \times n$, podemos utilizar el teorema 10.7, la ecuación (1) y el corolario 6.2 para demostrar (ejercicio T.4) que L es uno a uno si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Haremos un último comentario en relación con un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es una matriz de $n \times n$. Consideremos de nuevo la transformación lineal $L: R^n \to R^n$ definida como $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, para $\mathbf{x}$ en R^n. Si A es una matriz no singular, entonces

$$\dim(\text{imag}(L)) = \text{rango } A = n,$$

de modo que

$$\dim(\text{núcleo}(L)) = 0.$$

Por lo tanto, L es uno a uno y, en consecuencia, es sobre. Esto significa que el sistema lineal dado tiene una única solución (por supuesto, ya habíamos llegado a este resultado a partir de otras consideraciones). Ahora suponga que A es singular; entonces, rango $A < n$. Esto significa que $\dim(\text{núcleo}(L)) = n - \text{rango } A > 0$, de modo que L no es uno a uno ni sobre. De acuerdo con esto, existe un vector $\mathbf{b}$ en R^n, para el que el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no tiene solución. Además, como A es singular, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial $\mathbf{x}_0$. Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución $\mathbf{y}$, entonces $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$ es una solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (verifique). Entonces, si A es singulary existe una solución para $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, esta solución no es única.

Términos clave

Uno a uno (inyectiva)
Imagen
Sobre
Nulidad
Rango

10.2 Ejercicios

1. Sea $L: R^2 \to R^2$ la transformación lineal definida como $L(a_1, a_2) = (a_1, 0)$.

(a) ¿$(0, 2)$ está en núcleo(L)? (b) ¿$(2, 2)$ está en núcleo(L)?

(c) ¿$(3, 0)$ está en imag(L)? (d) ¿$(3, 2)$ está en imag(L)?

(e) Determine núcleo(L). (f) Determine imag(L).

2. Sea $L: R^2 \to R^2$ la transformación lineal definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}.$$

(a) ¿$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ está en núcleo(L)? (b) ¿$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ está en núcleo(L)?

(c) ¿$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ está en imag(L)? (d) ¿$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ está en imag(L)?

(e) Determine núcleo(L).

(f) Determine un conjunto de vectores que generen a imag(L).

3. Sea $L: R^2 \to R^3$ definida como

$$L(x, y) = (x, x + y, y).$$

(a) Determine núcleo(L).

(b) ¿L es uno a uno?

(c) ¿L es sobre?

4. Sea $L: R^4 \to R^3$ definida como

$$L(x, y, z, w) = (x + y, z + w, x + z).$$

(a) Determine una base para núcleo(L).

(b) Determine una base para imag(L).

(c) Verifique el teorema 10.7.

5. Sea $L: R^5 \to R^4$ definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine una base para núcleo(L).

(b) Determine una base para imag(L).

(c) Verifique el teorema 10.7.

6. Sea $L: R^3 \to R^3$ definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

(a) ¿L es uno a uno?

(b) Determine la dimensión de imag(L).

7. Sea $L: R^4 \to R^3$ definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ y - z \\ z - w \end{bmatrix}.$$

(a) ¿L es sobre?

(b) Determine la dimensión de núcleo(L).

(c) Verifique el teorema 10.7.

8. Sea $L: R^3 \to R^3$ definida como

$$L(x, y, z) = (x - y, x + 2y, z).$$

(a) Determine una base para núcleo(L).

(b) Determine una base para imag(L).

(c) Verifique el teorema 10.7.

9. Verifique el teorema 10.7 para las siguientes transformaciones lineales.

(a) $L(x, y) = (x + y, y)$.

(b) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

(c) $L(x, y, z) = (x + y - z, x + y, y + z)$.

10. Sea $L: R^4 \to R^4$ definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}.$$

(a) Determine una base para núcleo(L).

(b) Determine una base para imag(L).

(c) Verifique el teorema 10.7.

11. Sea $L: P_2 \to P_2$ la transformación lineal definida como $L(at^2 + bt + c) = (a + c)t^2 + (b + c)t$.

(a) ¿$t^2 - t - 1$ está en núcleo(L)?

(b) ¿$t^2 + t - 1$ está en núcleo(L)?

(c) ¿$2t^2 - t$ está en imag(L)?

(d) ¿$t^2 - t + 2$ está en imag(L)?

(e) Determine una base para núcleo(L).

(f) Determine una base para imag(L).

12. Sea $L: P_3 \to P_3$ la transformación lineal definida como

$$L(at^3 + bt^2 + ct + d) = (a - b)t^3 + (c - d)t.$$

(a) ¿$t^3 + t^2 + t - 1$ está en núcleo(L)?

(b) ¿$t^3 - t^2 + t - 1$ está en núcleo(L)?

(c) ¿$3t^3 + t$ está en imag(L)?

(d) ¿$3t^3 - t^2$ está en imag(L)?

(e) Determine una base para núcleo(L).

(f) Determine una base para imag(L).

13. Sea $L: M_{22} \to M_{22}$ la transformación lineal definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + b & b + c \\ a + d & b + d \end{bmatrix}.$$

(a) Determine una base para núcleo(L).

(b) Determine una base para imag(L).

14. Sea $L: P_2 \to R^2$ la transformación lineal definida como $L(at^2 + bt + c) = (a, b)$.

(a) Determine una base para núcleo(L).

(b) Determine una base para imag(L).

15. Sea $L: M_{22} \to M_{22}$ la transformación lineal definida como

$$L(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{v} - \mathbf{v}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine una base para núcleo(L).

(b) Determine una base para imag(L).

16. Sea $L: M_{22} \to M_{22}$ la transformación lineal definida como $L(A) = A^T$.

(a) Determine una base para núcleo(L).

(b) Determine una base para imag(L).

17. (***Requiere conocimientos de cálculo***) Sea $L: P_2 \to P_1$ la transformación lineal definida como

$$L[p(t)] = p'(t).$$

(a) Determine una base para núcleo(L).

(b) Determine una base para imag(L).

18. (***Requiere conocimientos de cálculo***) Sea $L: P_2 \to R^1$ la transformación lineal definida como

$$L[p(t)] = \int_0^1 p(t)\,dt.$$

(a) Determine una base para núcleo(L).

(b) Determine una base para imag(L).

19. Sea $L: R^4 \to R^6$ una transformación lineal.

(a) Si nulidad(L) = 2, ¿cuánto vale rango(L)?

(b) Si rango(L) = 3, ¿cuánto vale nulidad(L)?

20. Sea $L: V \to R^5$ una transformación lineal.

(a) Si L es sobre y nulidad(L) = 2, ¿cuánto vale dim V?

(b) Si L es uno a uno y sobre, ¿cuánto vale dim V?

Ejercicios teóricos

T.1. Demuestre el corolario 10.2.

T.2. Demuestre el corolario 10.3.

T.3. Sea A una matriz de $m \times n$ y sea $L: R^n \to R^m$ definida como $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para $\mathbf{x}$ en R^n. Demuestre que el espacio generado por las columnas de A es la imagen de L.

T.4. Sea $L: R^n \to R^n$ una transformación lineal definida por $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz de $n \times n$. Demuestre que L es uno a uno si y sólo si $\det(A) \neq 0$. [*Sugerencia*: utilice el teorema 10.7, la ecuación (1) y el corolario 6.2.]

T.5. Sea $L: V \to W$ una transformación lineal. Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ genera a V, demuestre que $\{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2), \dots, L(\mathbf{v}_k)$ genera imag(L).

T.6. Sea $L: V \to W$ una transformación lineal.

(a) Demuestre que rango(L) $\leq$ dim V.

(b) Demuestre que si L es sobre, entonces dim $W \leq$ dim V.

T.7. Sea $L: V \to W$ una transformación lineal, y sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto de vectores en V. Demuestre que si $T = \{L(\mathbf{v}_1), L(\mathbf{v}_2), \dots, L(\mathbf{v}_n)\}$ es linealmente independiente, también S lo es. (*Sugerencia*: suponga que S es linealmente dependiente. ¿Qué puede decir de T?)

T.8. Sea $L: V \to W$ una transformación lineal. Demuestre que L es uno a uno si y sólo si rango(L) = dim V.

T.9. Sea $L: V \to W$ una transformación lineal. Demuestre que L es uno a uno si y sólo si la imagen de cualquier conjunto linealmente independiente de vectores en V es un conjunto linealmente independiente de vectores en W.

T.10. Sea $L: V \to W$ una transformación lineal, y sea dim V = dim W. Demuestre que L es uno a uno si y sólo si la imagen bajo L de una base de V es una base de W.

T.11. Sea V un espacio vectorial de dimensión n, y sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base para V. Sea $L: V \to R^n$ definida por $L(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]_S$. Demuestre que

(a) L es una transformación lineal.

(b) L es uno a uno.

(c) L es sobre.

Ejercicios con MATLAB

Para usar MATLAB *en esta sección, deberá leer antes la sección 12.8. Determine una base para el núcleo y para la imagen de la transformación lineal* $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ *para cada una de las siguientes matrices* A.

ML.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 5 \\ -2 & -3 & -8 & -7 \end{bmatrix}$

ML.2. $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -7 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

ML.3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -3 & 1 & 11 \\ -4 & -4 & 7 & -2 & -19 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

10.3 LA MATRIZ DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

En el teorema 4.8 mostramos que si $L: R^n \rightarrow R^m$ es una transformación lineal, entonces existe una única matriz A de $m \times n$ tal que $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para $\mathbf{x}$ en R^n. En esta sección generalizamos este resultado para el caso de una transformación lineal $L: V \rightarrow W$ de un espacio vectorial V de dimensión finita en un espacio vectorial W de dimensión finita.

LA MATRIZ DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

TEOREMA 10.8 *Sea $L: V \rightarrow W$ una transformación lineal de un espacio vectorial V, de dimensión n, en un espacio vectorial W de dimensión m ($n \neq 0$ y $m \neq 0$), y sean $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ bases de V y W, respectivamente. Entonces, la matriz A de $m \times n$, cuya j-ésima columna es el vector de coordenadas $[L(\mathbf{v}_j)]_T$ de $L(\mathbf{v}_j)$ con respecto a T, se asocia con L y tiene la siguiente propiedad: si $\mathbf{x}$ está en V, entonces*

$$\left[L(\mathbf{x})\right]_T = A\left[\mathbf{x}\right]_S, \tag{1}$$

donde $[\mathbf{x}]_S$ y $[L(\mathbf{x})]_T$ son los vectores de coordenadas de $\mathbf{x}$ y $L(\mathbf{x})$ con respecto a las bases S y T, respectivamente. Además, A es la única matriz con esta propiedad.

Demostración La demostración es constructiva; es decir, mostraremos la forma de construir la matriz A. Esto es más complicado que la demostración del teorema 4.8. Consideremos el vector $\mathbf{v}_j$ en V para $j = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $L(\mathbf{v}_j)$ es un vector en W, y como T es una base para W, podemos expresar este vector como una combinación lineal de los vectores en T de manera única. En consecuencia,

$$L(\mathbf{v}_j) = c_{1j}\mathbf{w}_1 + c_{2j}\mathbf{w}_2 + \cdots + c_{mj}\mathbf{w}_m \qquad (1 \leq j \leq n). \tag{2}$$

Esto significa que el vector de coordenadas de $L(\mathbf{v}_j)$ con respecto a T es

$$\left[L(\mathbf{v}_j)\right]_T = \begin{bmatrix} c_{1j} \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{mj} \end{bmatrix}.$$

A continuación definiremos la matriz A de $m \times n$, eligiendo $[L(\mathbf{v}_j)]_T$ como la j-ésima columna de A, y demostraremos que esta matriz satisface las propiedades que se indican en el teorema. Dejaremos el resto de la demostración como el ejercicio T.1, e ilustraremos ampliamente el resultado en los ejemplos siguientes. ■

DEFINICIÓN La matriz A del teorema 10.8 se conoce como la **matriz que representa a L con respecto a las bases S y T**, o la **matriz de L con respecto a S y T**.

Resumamos ahora el procedimiento dado en el teorema 10.8.

El procedimiento para calcular la matriz de una transformación lineal $L: V \rightarrow W$ con respecto a las bases $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ para V y W, respectivamente, es el siguiente.

Paso 1. Calcular $L(\mathbf{v}_j)$ para $j = 1, 2, \ldots, n$.

Paso 2. Determinar el vector de coordenadas $[L(\mathbf{v}_j)]_T$ de $L(\mathbf{v}_j)$ con respecto a la base T. Esto significa que $L(\mathbf{v}_j)$ debe expresarse como una combinación lineal de los vectores en T [vea la ecuación (2)].

Paso 3. La matriz A de L con respecto a S y T se forma eligiendo a $[L(\mathbf{v}_j)]_T$ como la j-ésima columna de A.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{x} \arrow[r, "L"] \arrow[d] & L(\mathbf{x}) \arrow[d] \\ [\mathbf{x}]_S \arrow[r, "A"] & [L(\mathbf{x})]_T = A[\mathbf{x}]_S \end{tikzcd}$$

Figura 10.3 ▲

La figura 10.3 proporciona una interpretación gráfica de la ecuación (1), es decir, del teorema 10.8. La flecha horizontal superior representa la transformación lineal L del espacio vectorial V de dimensión n en el espacio vectorial W de dimensión m, y lleva el vector $\mathbf{x}$ de V al vector $L(\mathbf{x})$ de W. La flecha horizontal inferior representa la matriz A. Entonces, $[L(\mathbf{x})]_T$, un vector de coordenadas en R^m, se obtiene multiplicando $[\mathbf{x}]_S$, un vector de coordenadas en R^n, por la matriz A. Esto indica que siempre podemos trabajar con matrices en vez de transformaciones lineales.

Los físicos y otras personas que trabajan mucho con transformaciones lineales hacen la mayor parte de sus cálculos con las matrices de tales transformaciones.

EJEMPLO 1

Sea $L: R^3 \to R^2$ definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ y-z \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Sean

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \qquad \text{y} \qquad T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$$

bases para R^3 y R^2, respectivamente, donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determinaremos la matriz A de L con respecto a S y T. Tenemos que

$$L(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$
$$L(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} 0+1 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$L(\mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} 0+0 \\ 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Como T es la base canónica de R^2, los vectores de coordenadas de $L(\mathbf{v}_1)$, $L(\mathbf{v}_2)$ y $L(\mathbf{v}_3)$ con respecto a T son iguales a $L(\mathbf{v}_1)$, $L(\mathbf{v}_2)$ y $L(\mathbf{v}_3)$, respectivamente. Es decir,

$$\left[L(\mathbf{v}_1)\right]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \left[L(\mathbf{v}_2)\right]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \left[L(\mathbf{v}_3)\right]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

■

EJEMPLO 2 Sea $L : R^3 \to R^2$ definida como en el ejemplo 1. Ahora sean

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \quad \text{y} \quad T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$$

bases para R^3 y R^2, respectivamente, donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determinar la matriz de L con respecto a S y T.

Solución Tenemos

$$L(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad L(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L(\mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para determinar los vectores de coordenadas $[L(\mathbf{v}_1)]_T$, $[L(\mathbf{v}_2)]_T$ y $[L(\mathbf{v}_3)]_T$, escribimos

$$L(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$L(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b_1\mathbf{w}_1 + b_2\mathbf{w}_2 = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$L(\mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es decir, debemos resolver tres sistemas lineales, cada uno de los cuales consta de dos ecuaciones con dos incógnitas. Como su matriz de coeficientes es la misma, los resolvemos todos a la vez, como en el ejemplo 4 de la sección 6.7. En consecuencia, formamos la matriz

$$\left[\begin{array}{rr:r:r:r} 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

cuya forma escalonada reducida por filas es (verifique)

$$\left[\begin{array}{rr:r:r:r} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{array}\right].$$

Esto indica que la matriz A de L con respecto a S y T es

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

La ecuación (1) es, entonces,

$$\big[L(\mathbf{x})\big]_T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} \big[\mathbf{x}\big]_S . \tag{4}$$

Para ilustrar la ecuación (4), sea

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Entonces, según la definición de L dada por la ecuación (3), tenemos

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1+6 \\ 6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ahora (verifique)

$$\left[\mathbf{x}\right]_S = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Entonces, según (4)

$$\left[L(\mathbf{x})\right]_T = A\left[\mathbf{x}\right]_S = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{11}{3} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$L(\mathbf{x}) = \frac{10}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{11}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix},$$

valor que coincide con el valor previamente encontrado de $L(\mathbf{x})$. ■

Observe que las matrices obtenidas en los ejemplos 1 y 2 son diferentes, aunque L sea la misma en ambos casos. Aunque la demostración está más allá del alcance de este libro, es posible comprobar que existe una relación entre estas dos matrices.

El procedimiento utilizado en el ejemplo 2 se puede utilizar en la determinación de la matriz que representa una transformación lineal $L: R^n \to R^m$ con respecto a bases dadas S y T para R^n y R^m, respectivamente.

El procedimiento para calcular la matriz que representa una transformación lineal $L: R^n \to R^m$ con respecto a las bases $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ para R^n y R^m, respectivamente, es el siguiente.

Paso 1. Calcular $L(\mathbf{x}_j)$ para $j = 1, 2, \ldots, n$.

Paso 2. Formar la matriz

$$\left[\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{w}_m \;\vdots\; L(\mathbf{v}_1) \;\vdots\; L(\mathbf{v}_2) \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; L(\mathbf{v}_n)\right],$$

que se lleva a su forma escalonada reducida por filas, para obtener la matriz

$$[I_n \;\vdots\; A].$$

Paso 3. La matriz A representa la transformación L con respecto a las bases S y T.

EJEMPLO 3 Sea $L: R^3 \to R^2$ la transformación definida en el ejemplo 1, y sean

$$S = \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\} \qquad \text{y} \qquad T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\},$$

donde $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ son como en el ejemplo 2. Entonces, la matriz de L con respecto a S y T es

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}.$$

■

Observación Observe que si cambiamos el orden de los vectores en las bases S y T, la matriz A de L puede cambiar.

EJEMPLO 4 Sea $L : R^3 \to R^2$ definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Sean

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \qquad \text{y} \qquad T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$$

las bases naturales de R^3 y R^2, respectivamente. Determine la matriz de L con respecto a S y T.

Solución Tenemos

$$L(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\mathbf{w}_1 + 1\mathbf{w}_2, \quad \text{de modo que} \quad \left[L(\mathbf{v}_1)\right]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$L(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2, \quad \text{de modo que} \quad \left[L(\mathbf{v}_2)\right]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Además,

$$\left[L(\mathbf{v}_3)\right]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{(verifique).}$$

Entonces, la matriz de L con respecto a S y T es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

■

Observación Por supuesto, la razón para que A coincida con la matriz usada en la definición de L, es que se están utilizando las bases naturales para R^3 y R^2.

EJEMPLO 5 Sea $L : R^3 \to R^2$ definida como en el ejemplo 4. Ahora sean

$$S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} \qquad \text{y} \qquad T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$$

donde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Hallar la matriz de L con respecto a S y T.

Solución Tenemos

$$L(\mathbf{v}_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad L(\mathbf{v}_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad L(\mathbf{v}_3) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ahora formamos (verifique)

$$\left[\mathbf{w}_1 \quad \mathbf{w}_2 \mid L(\mathbf{v}_1) \mid L(\mathbf{v}_2) \mid L(\mathbf{v}_3)\right] = \left[\begin{array}{cc:c:c:c} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right].$$

La forma escalonada reducida por filas es (verifique)

$$\left[\begin{array}{cc:c:c:c} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right],$$

de modo que la matriz de L con respecto a S y T es

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz es bastante distinta de aquella que definió a L. En consecuencia, aunque una matriz A puede ser usada en la definición de una transformación lineal L, no podemos concluir que ésta sea necesariamente la matriz que representa a L con respecto a las bases dadas, S y T. ■

EJEMPLO 6 Sea $L : P_1 \to P_2$ definida como $L[p(t)] = tp(t)$.

(a) Determinaremos la matriz de L con respecto a las bases $S = \{t, 1\}$ y $T = \{t^2, t, 1\}$ para P_1 y P_2, respectivamente.

(b) Si $p(t) = 3t - 2$, calcularemos $L[p(t)]$, directamente y utilizando la matriz obtenida en (a).

Solución (a) Tenemos

$$L(t) = t \cdot t = t^2 = 1(t^2) + 0(t) + 0(1), \quad \text{de modo que} \quad \left[L(t)\right]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$L(1) = t \cdot 1 = t = 0(t^2) + 1(t) + 0(1), \quad \text{de modo que} \quad \left[L(1)\right]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz de L con respecto a S y T es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Al calcular $L[P(t)]$ en forma directa, tenemos

$$L[p(t)] = tp(t) = t(3t - 2) = 3t^2 - 2t.$$

Para calcular $L[p(t)]$ mediante A, primero escribimos

$$p(t) = 3 \cdot t + (-2)1, \quad \text{de modo que} \quad \left[p(t)\right]_S = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$\left[L[p(t)]\right]_T = A\left[p(t)\right]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$L[P(t)] = 3t^2 + (-2)t + 0(1) = 3t^2 - 2t. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 7 Sea $L: P_1 \to P_2$ definida como en el ejemplo 6.

(a) Determine la matriz de L con respecto a las bases $S = \{t,\ 1\}$ y $T = \{t^2,\ t - 1,\ t + 1\}$ para P_1 y P_2, respectivamente.

(b) Si $p(t) = 3t - 2$, calcule $L[p(t)]$ empleando la matriz obtenida en (a).

Solución (a) Tenemos (verifique)

$$L(t) = t^2 = 1(t^2) + 0(t-1) + 0(t+1), \quad \text{de modo que} \quad \left[L(t)\right]_T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$L(1) = t = 0(t^2) + \tfrac{1}{2}(t-1) + \tfrac{1}{2}(t+1), \quad \text{de modo que} \quad \left[L(1)\right]_T = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Entonces, la matriz de L con respecto a S y T es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(b) Tenemos

$$\left[L[p(t)]\right]_T = A\left[p(t)\right]_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$L[p(t)] = 3t^2 + (-1)(t-1) + (-1)(t+1) = 3t^2 - 2t. \qquad \blacksquare$$

Suponga que $L: V \to W$ es una transformación lineal, y que A es la matriz de L con respecto a ciertas bases para V y W. Entonces, el problema de determinar núcleo(L) se reduce a encontrar el espacio solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Además, el problema de determinar imag(L) se reduce a hallar el espacio generado por las columnas de A.

Si $L: V \to V$ es un operador lineal (una transformación lineal de un espacio vectorial en sí mismo) y V es un espacio vectorial de dimensión n, para obtener una matriz que represente a L, fijamos bases S y T para V y obtenemos la matriz de L con respecto a S y T. Sin embargo, en este caso es frecuente elegir $S = T$. En este caso, y para evitar redundancia, nos referimos a A como la **matriz de L con respecto a S**. Si $L: R^n \to R^n$

es un operador lineal, la matriz que representa a L con respecto a la base canónica para R^n ya se analizó en el teorema 4.8 de la sección 4.3; se le llamó **matriz estándar** que representa a L.

Sea $I: V \to V$ el operador lineal identidad en un espacio vectorial de dimensión n, definido por $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para cada $\mathbf{v}$ en V. Si S es una base para V, la matriz de I con respecto a S es I_n (ejercicio T.2). Sea T otra base para V. Entonces, la matriz de I con respecto a S y T es la matriz de transición (vea la sección 6.7) de la base S a la base T (ejercicio T.5).

Si $L: R^n \to R^n$ es un operador lineal definido como $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, para $\mathbf{x}$ en R^n, podemos demostrar que L es uno a uno y sobre, si y sólo si A es no singular.

A partir de lo anterior, podemos ampliar nuestra lista de equivalencias no singulares.

Lista de equivalencias no singulares

Las siguientes afirmaciones son equivalentes para una matriz A de $n \times n$.

1. A es no singular.
2. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la única solución para $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. A es equivalente por filas a I_n.
4. El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución para cada matriz $\mathbf{b}$ de $n \times 1$.
5. $\det(A) \neq 0$.
6. A tiene rango n.
7. A tiene nulidad 0.
8. Las filas de A forman un conjunto linealmente independiente de n vectores en R^n.
9. Las columnas de A forman un conjunto linealmente independiente de n vectores en R^n.
10. Cero *no* es un valor propio de A.
11. El operador lineal $L: R^n \to R^n$ definido por $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, para $\mathbf{x}$ en R^n, es uno a uno y sobre.

UN CAMBIO DE BASE PRODUCE UNA NUEVA MATRIZ QUE REPRESENTA UN OPERADOR LINEAL

Si $L: V \to V$ es un operador lineal y S es una base para V, la matriz A que representa a L con respecto a S cambiará si utilizamos, en vez de S, la base T para V. El siguiente teorema nos dice cómo determinar la matriz de L con respecto a T, utilizando la matriz A.

TEOREMA 10.9 *Sea $L: V \to V$ un operador lineal, donde V es un espacio vectorial de dimensión n. Sean $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ y $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ bases para V, y sea P la matriz de transición de T a S.* Si A es la matriz que representa a L con respecto a S, entonces $P^{-1}AP$ es la matriz que representa a L con respecto a T.*

Demostración Si P es la matriz de transición de T a S y $\mathbf{x}$ es un vector en V, entonces la ecuación (5) de la sección 6.7, establece que

$$[\mathbf{x}]_S = P[\mathbf{x}]_T, \tag{5}$$

donde la j-ésima columna de P es el vector de coordenadas $[\mathbf{w}_j]_S$ de $\mathbf{w}_j$ con respecto a S. Con base en el teorema 6.15 (sección 6.7), sabemos que P^{-1} es la matriz de transición

*En la sección 6.7, P se denotó como $P_{S\leftarrow T}$. Para simplificar la notación, en esta sección la denotaremos por P.

de S a T, donde la j-ésima columna de P^{-1} es el vector de coordenadas $[\mathbf{v}_j]_T$ de $\mathbf{v}_j$ con respecto a T. De acuerdo con la ecuación (5) de la sección 6.7, tenemos

$$[\mathbf{y}]_T = P^{-1}[\mathbf{y}]_S \tag{6}$$

para $\mathbf{y}$ en V. Si A es la matriz que representa a L con respecto a S, entonces

$$[L(\mathbf{x})]_S = A[\mathbf{x}]_S \tag{7}$$

para $\mathbf{x}$ en V. Al sustituir $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$ en (6), tenemos

$$[L(\mathbf{x})]_T = P^{-1}[L(\mathbf{x})]_S.$$

Si utilizamos primero (7) y luego (5) en esta última ecuación, obtenemos

$$[L(\mathbf{x})]_T = P^{-1}[L(\mathbf{x})]_S = P^{-1}A[\mathbf{x}]_S = P^{-1}AP[\mathbf{x}]_T.$$

La ecuación

$$[L(\mathbf{x}]_T = P^{-1}\,AP[\mathbf{x}]_T$$

implica que $B = P^{-1}\,AP$ es la matriz que representa a L con respecto a T. ■

Podemos ilustrar el teorema 10.9 mediante el diagrama de la figura 10.4. Esta figura muestra que hay dos formas de ir de $\mathbf{x}$ en V a $L(\mathbf{x})$: directamente, con la matriz B; o de manera indirecta, con las matrices P, A y P^{-1}.

Figura 10.4 ▶

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{x} \arrow[r, "L"] \arrow[d] & L(\mathbf{x}) \arrow[d] \\
{[\mathbf{x}]_T} \arrow[r, "B"] \arrow[d, "P"] & {[L(\mathbf{x})]_T = B[\mathbf{x}]_T = P^{-1}AP[\mathbf{x}]_T} \\
P[\mathbf{x}]_T \arrow[r, "A"] & AP[\mathbf{x}]_T \arrow[u, "P^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

EJEMPLO 8 Sea $L : R^2 \to R^2$ definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - 2a_2 \end{bmatrix}.$$

Sean

$$S = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \quad \text{y} \quad T = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

bases para R^2. Podemos demostrar fácilmente (verifique) que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

es la matriz que representa a L con respecto a S.

La matriz de transición P de T a S es la matriz cuya j-ésima columna es el vector de coordenadas del j-ésimo vector de la base T con respecto a S. En consecuencia,

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz de transición de S a T es (verifique)

$$P^{-1} = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces, la matriz que representa a L con respecto a T es (verifique)

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, podemos calcular directamente la matriz de L con respecto a T. Tenemos

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad L\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora formamos la matriz

$$\left[\begin{array}{rr:r:r} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right],$$

cuya forma escalonada reducida por filas es

$$\left[\begin{array}{rr:r:r} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Por lo tanto, la matriz que representa a L con respecto a T es

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

como antes. ■

REVISIÓN DE LA DIAGONALIZACIÓN Y DE LA SEMEJANZA DE MATRICES

Recordemos que, como se dijo en la sección 8.2, una matriz B de $n \times n$ es semejante a una matriz A de $n \times n$ si existe una matriz no singular P tal que $B = P^{-1}AP$. Entonces, el teorema 10.9 implica que cualesquiera dos matrices que representen el mismo operador lineal $L : V \to V$ con respecto a bases diferentes, son semejantes. Recíprocamente, se puede demostrar (aunque no lo haremos aquí) que si A y B son matrices semejantes, ellas representan la misma transformación lineal $L : V \to V$ con respecto a dos bases para V.

El siguiente teorema es consecuencia del teorema 8.4.

TEOREMA 10.10 *Considere el operador lineal $L : R^n \to R^n$ definido por $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para $\mathbf{x}$ en R^n. Entonces, A es diagonalizable con n vectores propios linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ si y sólo si la matriz de L con respecto a $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ es diagonal.*

Demostración Supongamos que A es diagonalizable. De acuerdo con el teorema 8.4, A tiene n vectores propios linealmente independientes, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, con valores propios correspondientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Como n vectores linealmente independientes en R^n forman una base (teorema 6.9 de la sección 6.4), concluimos que $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ es una base para R^n. Ahora,

$$L(\mathbf{x}_j) = A\mathbf{x}_j = \lambda_j\mathbf{x}_j = 0\mathbf{x}_1 + \cdots + 0\mathbf{x}_{j-1} + \lambda_j\mathbf{x}_j + 0\mathbf{x}_{j+1} + \cdots + 0\mathbf{x}_n,$$

de modo que el vector de coordenadas $[L(\mathbf{x}_j)]_S$ de $L(\mathbf{x}_j)$ con respecto a S es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longleftarrow j\text{-ésima fila.} \tag{8}$$

Por lo tanto, la matriz de L con respecto a S es

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Recíprocamente, supongamos que existe una base $S = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ para R^n con respecto a la cual la matriz de L es diagonal, digamos, de la forma en (9). Entonces, el vector de coordenadas de $L(\mathbf{x}_j)$ con respecto a S es (8), de modo que

$$L(\mathbf{x}_j) = 0\mathbf{x}_1 + \cdots + 0\mathbf{x}_{j-1} + \lambda_j\mathbf{x}_j + 0\mathbf{x}_{j+1} + \cdots + 0\mathbf{x}_n = \lambda_j\mathbf{x}_j.$$

Como $L(\mathbf{x}_j) = A\mathbf{x}_j$, tenemos

$$A\mathbf{x}_j = \lambda_j\mathbf{x}_j,$$

lo cual significa que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son vectores propios de A. Como dichos vectores forman una base para R^n, son linealmente independientes y, de acuerdo con el teorema 8.4, concluimos que A es diagonalizable. ■

Observación Sea $L: R^n \to R^n$ una transformación lineal definida por $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Si A es diagonalizable, según el teorema 8.4, R^n tiene una base S formada por vectores propios de A. Además, por el teorema 10.10 la matriz de L con respecto a S es la matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal principal son los valores propios de A. En consecuencia, el problema de diagonalizar A se convierte en el de determinar una base S para R^n tal que la matriz de L con respecto a S sea diagonal.

MATRICES ORTOGONALES. REVISIÓN

A continuación veremos las implicaciones geométricas de las matrices ortogonales. Sea A una matriz ortogonal de $n \times n$, y consideremos la transformación lineal $L: R^n \to R^n$ definida por $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, para $\mathbf{x}$ en R^n. Primero calculemos $L(\mathbf{x}) \cdot L(\mathbf{y})$ para vectores cualesquiera $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en R^n. Utilizando el ejercicio T.14 de la sección 1.3, y el hecho de que $A^TA = I_n$, tenemos

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}) \cdot L(\mathbf{y}) = (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{y}) &= (A\mathbf{x})^T(A\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{x}^T(A^TA)\mathbf{y} \\ &= \mathbf{x} \cdot (A^TA\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (I_n\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \end{aligned} \tag{10}$$

Esto significa que L conserva el producto interior de dos vectores y, por lo tanto, L conserva longitudes. Por supuesto, es claro que si θ es el ángulo entre los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en R^n, entonces el ángulo entre $L(\mathbf{x})$ y $L(\mathbf{y})$ también es θ (ejercicio T.8). Una transformación lineal que satisface la ecuación (10) es una **isometría**. Recíprocamente, sea $L: R^n \to R^n$ una isometría, de modo que

$$L(\mathbf{x}) \cdot L(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

para vectores cualesquiera $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en R^n. Sea A la matriz de L con respecto a la base canónica para R^n. Entonces

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Si $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ son vectores arbitrarios en R^n, tenemos, utilizando la ecuación (1), sección 8.3,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = L(\mathbf{x}) \cdot L(\mathbf{y}) = (A\mathbf{x}) \cdot (A\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (A^TA\mathbf{y}).$$

Como esto es válido para todo $\mathbf{x}$ en R^n, concluimos, de acuerdo con el ejercicio T.8 de la sección 4.2, que

$$A^TA\mathbf{y} = \mathbf{y}$$

para cualquier $\mathbf{y}$ en R^n. El ejercicio T.20 de la sección 1.4 implica entonces que $A^TA = I_n$, de modo que A es una matriz ortogonal.

Términos clave

Matriz que representa una transformación lineal
Isometría

10.3 Ejercicios

1. Sea $L: R^2 \to R^2$ definida como

$$L(x, y) = (x - 2y, x + 2y).$$

Sea $S = \{(1, -1), (0, 1)\}$ una base para R^2, y sea T la base canónica (o natural) de R^2. Determine la matriz que representa a L con respecto a

(a) S (b) S y T (c) T y S (d) T

(e) Calcule $L(2, -1)$ empleando la definición de L y las matrices obtenidas en (a), (b), (c) y (d).

2. Sea $L: R^2 \to R^2$ definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y \\ 2x - y \end{bmatrix}.$$

Sea S la base canónica de R^2 y sea

$$T = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

otra base para R^2. Determine la matriz que representa a L con respecto a

(a) S (b) S y T (c) T y S (d) T

(e) Calcule

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

con la definición de L y las matrices obtenidas en (a), (b), (c), y (d).

3. Sea $L: R^2 \to R^3$ definida como

$$L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2y \\ 2x + y \\ x + y \end{bmatrix}.$$

Sean S y T las bases canónicas de R^2 y R^3, respectivamente. Además, sean

$$S' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

y

$$T' = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

bases para R^2 y R^3, respectivamente. Determine la matriz que representa a L con respecto a

(a) S y T (b) S' y T'

(c) Calcule

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$$

utilizando la definición de L y las matrices obtenidas en (a) y (b).