Álgebra I - 2022

PRÁCTICO 3: CONJUNTOS

1. Considerar los siguientes conjuntos expresados por comprensión. En cada caso, determinar cuáles son los elementos del conjunto dado e indicar si el mismo es finito, infinito o vacío. Expresar por extensión cuando sea posible.

   $A = \left\{k^2 + \frac{k}{10} / k \in \mathbb{N} \wedge k < 6\right\}$ $\quad B = \{3\,(-1)^n\,/n \in \mathbb{N}\}$ $\quad C = \left\{x \in \mathbb{R}/x^2 = -4\right\}$

   $D = \{n \in \mathbb{Z}/5 < |n| \leq 10\}$ $\quad E = \{y \in \mathbb{R}/\,|y-5| = 2\}$ $\quad F = \left\{n^2 - n : n = 0, 1, 2, 3, 4\right\}$

2. Escribir las siguientes afirmaciones en notación conjuntista:

   a) *x es elemento de A.*
   b) *y no pertece a B.*
   c) *C no contiene al elemento z.*
   d) *A está incluido en B.*
   e) *A no es subconjunto de C.*
   f) *B no incluye a C.*

3. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones justificando su conclusión:

   a) $\{0, 1\} \subset [0, 1]$ **b)** $(0, 1) \subset [0, 1)$ **c)** $[0, 1] \subset [0, 1)$

   d) $\frac{1}{2} \in (0, 1)$ **e)** $\frac{1}{2} \in \{0, 1\}$ **f)** $(0, 1) \subset [0, 1] - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

4. Considerando a $\mathbb{N}$ como el conjunto universal ($U = \mathbb{N}$), representar los tres conjuntos siguientes en un mismo diagrama de Venn. Luego, observando dicho diagrama, hallar las relaciones de inclusión entre ellos (si las hubiera).

   $A = \{x/x|12\}$ $\quad B = \{x/x \text{ es par y menor que } 10\}$ $\quad C = \{x/x \leq 3\}$

5. Sea $A = \{x \in \mathbb{R}/2x = 4\}$ y $b = 2$, ¿es $b = A$? Explicar.

6. Dado $A = \{t, \{t\}\}$, determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

   a) $\{t\} \subset A$ **b)** $\{t\} \notin A$ **c)** $\{\{t\}\} \subset A$ **d)** $\{\{t\}\} \in A$

   e) $t \in A$ **f)** $t \not\subseteq A$ **g)** $A \subset A$ **h)** $\emptyset \in A$

7. Demostrar las siguientes inclusiones:

   a) $\left\{x \in \mathbb{R}/x^3 = 8\right\} \subset \left\{y \in \mathbb{R}/y^6 = 64\right\}$
   b) $\{n \in \mathbb{N}/15|n\} \subset \{k \in \mathbb{N}/3|k\}$

8. Si $A \subset B$ y $A \neq B$ se dice que A *está estrictamente incluido en* B (o también, que A *es un subconjunto propio de* B) y se escribe $A \subsetneq B$.

   a) Definir la relación $A \subsetneq B$ usando cuantificadores y conectivos lógicos.
   b) Demostrar que las inclusiones del ejercicio anterior son inclusiones estrictas (o propias).

9. Indicar cuáles de los siguientes conjuntos son iguales a $\{1, 2, 3\}$:

   $A = \{3, 2, 1\}$ $\quad B = \left\{x \in \left(-\infty, \frac{7}{2}\right] / x \in \mathbb{N}\right\}$ $\quad C = \{3, 2, 1, 2, 3\}$ $\quad D = \left\{n \in \mathbb{Z}/n^2 \leq 9\right\}$

10. Probar las siguientes igualdades, demostrando la doble inclusión entre los conjuntos dados:

a) $\{x \in \mathbb{R} / |x| = 2\} = \left\{x \in \mathbb{R} / x^2 = 4\right\}$
b) $\{a \in \mathbb{R} / |a| = 1\} = \{a \in \mathbb{Z} / |-a| = 1\}$

11. Dado el conjunto $A = \{x, y, z\}$, hallar $\mathcal{P}(A)$ (el conjunto de partes de A). Determinar $\#A$ y $\#\mathcal{P}(A)$.

12. Sea U un conjunto universal. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones y, cualquiera sea el caso, justificar su conclusión.

a) $\forall A, B \subset U : A \subset B \Rightarrow A \subset \mathcal{P}(B)$
b) $\forall A, B \subset U : A \subset B \Rightarrow A \in \mathcal{P}(B)$
c) $\forall A, B \subset U : A \in B \Rightarrow A \in \mathcal{P}(B)$
d) $\forall A, B \subset U : A \in B \Rightarrow \{A\} \in \mathcal{P}(B)$
e) $\forall A \subset U : \emptyset \in \mathcal{P}(A)$
f) $\forall A \subset U : \emptyset \subset \mathcal{P}(A)$

13. Sea A un conjunto conformado por 9 elementos. Responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{P}(A)$?
b) ¿Cuántos elementos de $\mathcal{P}(A)$ son vacíos?
c) ¿Cuántos elementos de $\mathcal{P}(A)$ son unitarios?
d) ¿Cuántos elementos de $\mathcal{P}(A)$ tienen cardinalidad 5?
e) ¿Cuántos elementos de $\mathcal{P}(A)$ tienen la misma cardinalidad que A?

14. Considerar el conjunto universal $U = \{k \in \mathbb{N} / k \leq 10\}$ y los siguientes subconjuntos de U:

$$A = \{1, 3, 5, 7\} \qquad B = \{5, 6, 7, 8\} \qquad C = \{3, 4, 5, 8, 9\}$$

a) Representar los cuatro conjuntos en un diagrama de Venn.
b) Identificar los siguientes conjuntos en el diagrama anterior, expresarlos por extensión y determinar su cardinalidad:

a) A^c b) $B \cup C$ c) $A \cap C$ d) $A - B$ e) $B \triangle C$

f) $A \cup (B \cap C)$ g) $A^c \cup C^c$ h) $(A \cap C)^c$ i) $(A \cup C) - B$ j) $(A - B) \cup (C - B)$

15. Sea U un conjunto universal. Demostrar:

a) $\forall A, B, C \subset U : C \subset A \wedge C \subset B \Leftrightarrow C \subset A \cap B$.
b) $\forall A, B, C \subset U : C \subset A \vee C \subset B \Rightarrow C \subset A \cup B$.
c) El condicional recíproco del dado en el ítem b) no es verdadero para todo trío de conjuntos A, B y C en U.

16. Siendo X e Y conjuntos cualesquiera (en algún universal U), demostrar que cada una de las siguientes afirmaciones es *equivalente* a $X \subset Y$:

a) $Y^c \subset X^c$ b) $X - Y = \emptyset$ c) $X \cup Y = Y$ d) $X \cap Y = X$

17. Analizar si las siguientes propiedades se cumplen para cualesquiera conjuntos A, B y C contenidos en un universal U. En caso afirmativo, demostrar. En otro caso, exhibir un contraejemplo.

a) $|A \cup B| = |A| + |B|$
b) $|A \cap B| = 0 \Rightarrow A \triangle B = A - B$
c) $(A - B)^c = B \cup A^c$
d) $A \cup C = B \cup C \Rightarrow A = B$
e) $A - (B - C) = (A - B) - C$
f) $A \cup B = U \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow B = A^c$
g) $(\forall X \subset U : X \cap A = X \cap B) \Rightarrow A = B$
h) $(\forall X \subset U : X \cup A = X \cup B) \Rightarrow A = B$

18. Usando propiedades de las operaciones entre conjuntos, simplificar las siguientes expresiones. Verificar su igualdad con las expresiones resultantes mediante diagramas de Venn.

a) $[(A \cap B) \cup (A \cap B^c)]^c$ **b)** $(A - B) \cup (A \cap B)$

c) $(A \cap B) \cup \{B \cap [(C \cap D) \cup (C \cap D^c)]\}$ **d)** $(A \triangle B) - A$

e) $(A \triangle B)^c$ **f)** $(A \triangle B)^c$ cuando $A \cap B = \emptyset$

19. Sean $A = \{a, b\}$, $B = \{2, 3\}$ y $C = \{3, 4\}$. Obtener:

a) $A \times (B \cup C)$ **b)** $(A \cup B) \times (A \cup C)$ **c)** $A \times (B \cap C)$ **d)** $(A \cap B) \times (A \cap C)$

20. Probar que $(A \times C) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times C$.

21. Probar que si, $A \subseteq B$ y $C \subseteq D$ entonces $(A \times C) \subseteq (B \times D)$.

22. Calcular:

a) $\binom{8}{3}$ **b)** $\binom{8}{0}$ **c)** $\binom{8}{5}$ **d)** $\binom{52}{50}$

23. Teniendo en cuenta la siguiente fórmula, que corresponde al *Binomio de Newton*, calcular lo pedido:

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r.$$

a) $(x + 3)^3$ **b)** $(-2 + t)^4$ **c)** $(a - b)^3$