Física II

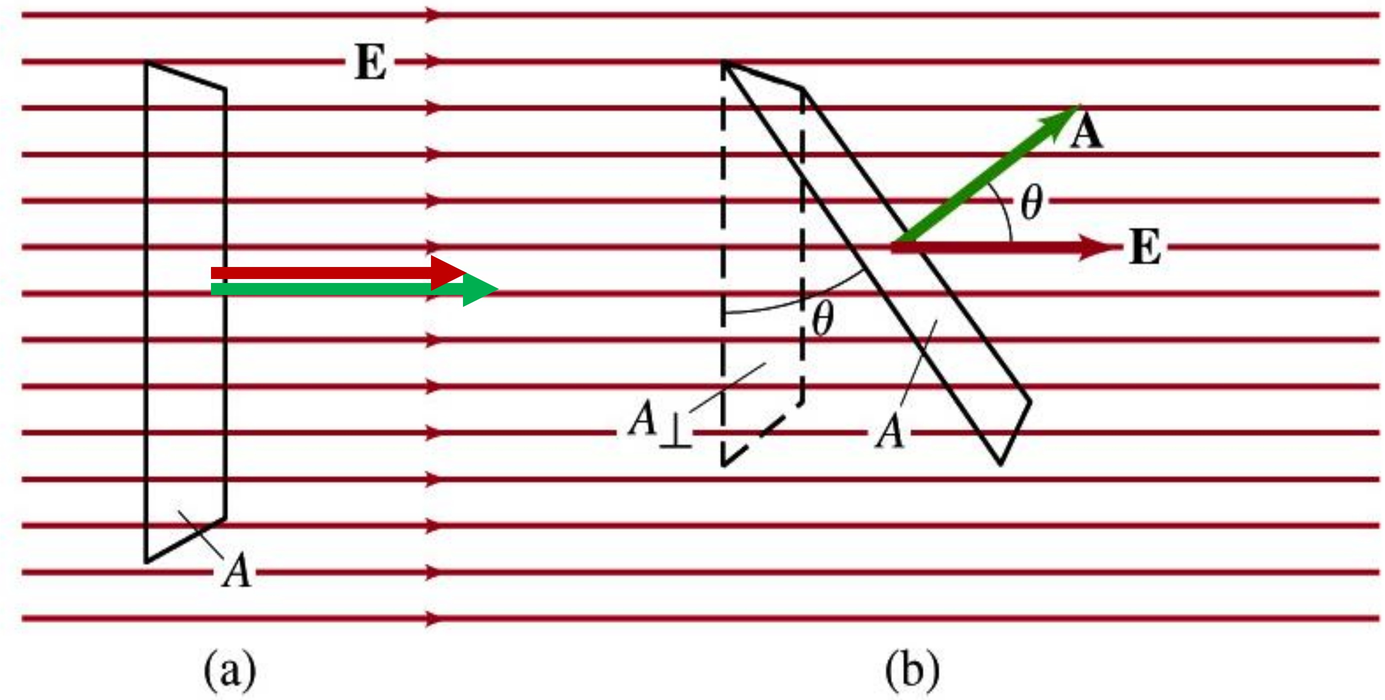
Clase # 3

– **Flujo eléctrico**
– **Ley de Gauss**

Este apunte sólo constituye una <u>guía de estudio</u> de los temas desarrollados en el curso. <u>De ninguna manera reemplaza la bibliografía sugerida</u>, la cual deberá ser consultada necesariamente por los alumnos para lograr una visión más detallada de cada temática.

Marcelo S. Nazzarro

Flujo Eléctrico



Se define al flujo eléctrico como: $\Phi_E = E\ A\cos\theta = \vec{E}\cdot\vec{A}$

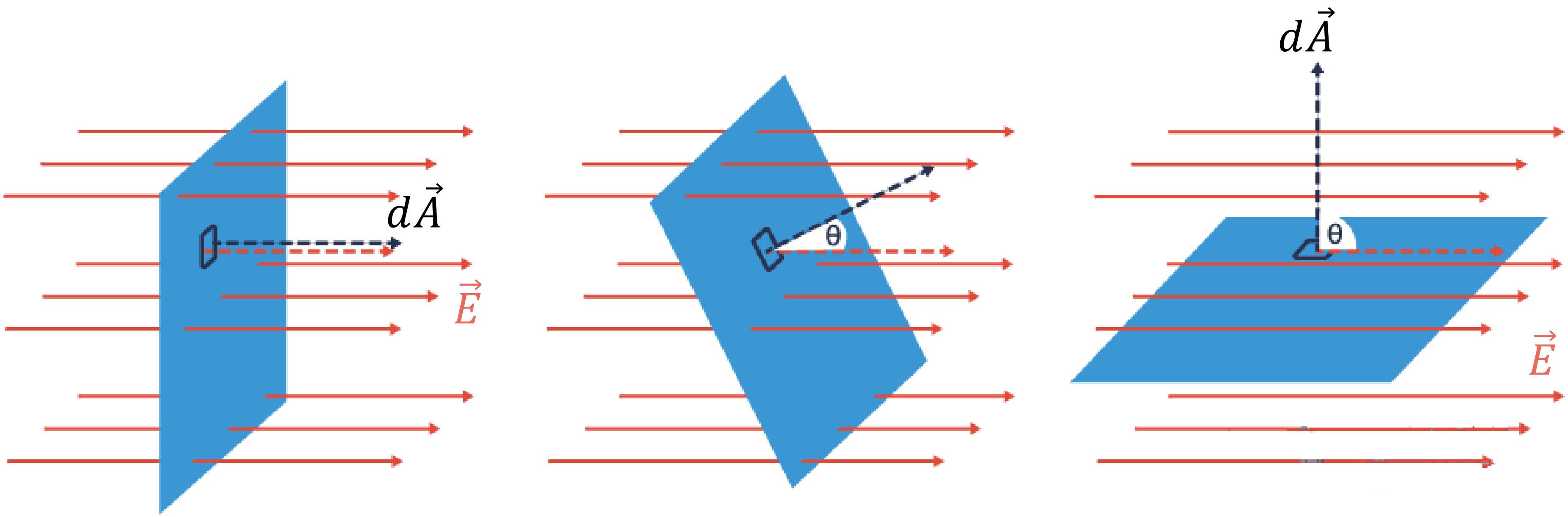
¿Cómo definir al flujo eléctrico con palabras?:

Es una medida del Nº de líneas de campo que atraviesan la superficie A

Qué analogía presenta con el flujo de un fluido?

Flujo Eléctrico

$$d\phi = \vec{E}.d\vec{A} = E\ dA\ cos\ \theta \qquad \phi = EAcos\ \theta$$

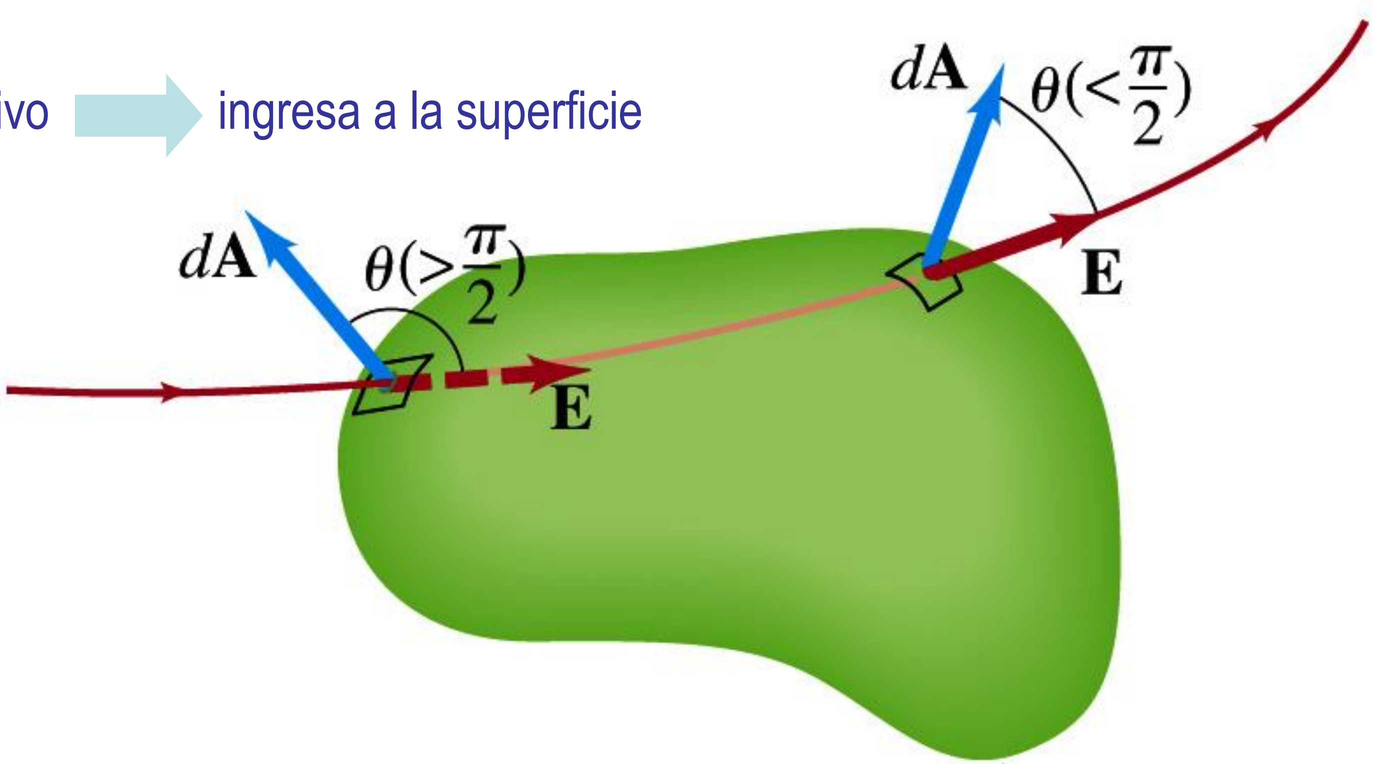


$\phi = EA\ (flujo\ máximo)$ $\qquad$ $\phi = EA\cos\theta$ $\qquad$ $\phi = 0$

Flujo eléctrico

Flujo positivo → sale de la superficie

Flujo negativo → ingresa a la superficie



Superficie cerrada

Ley de Gauss

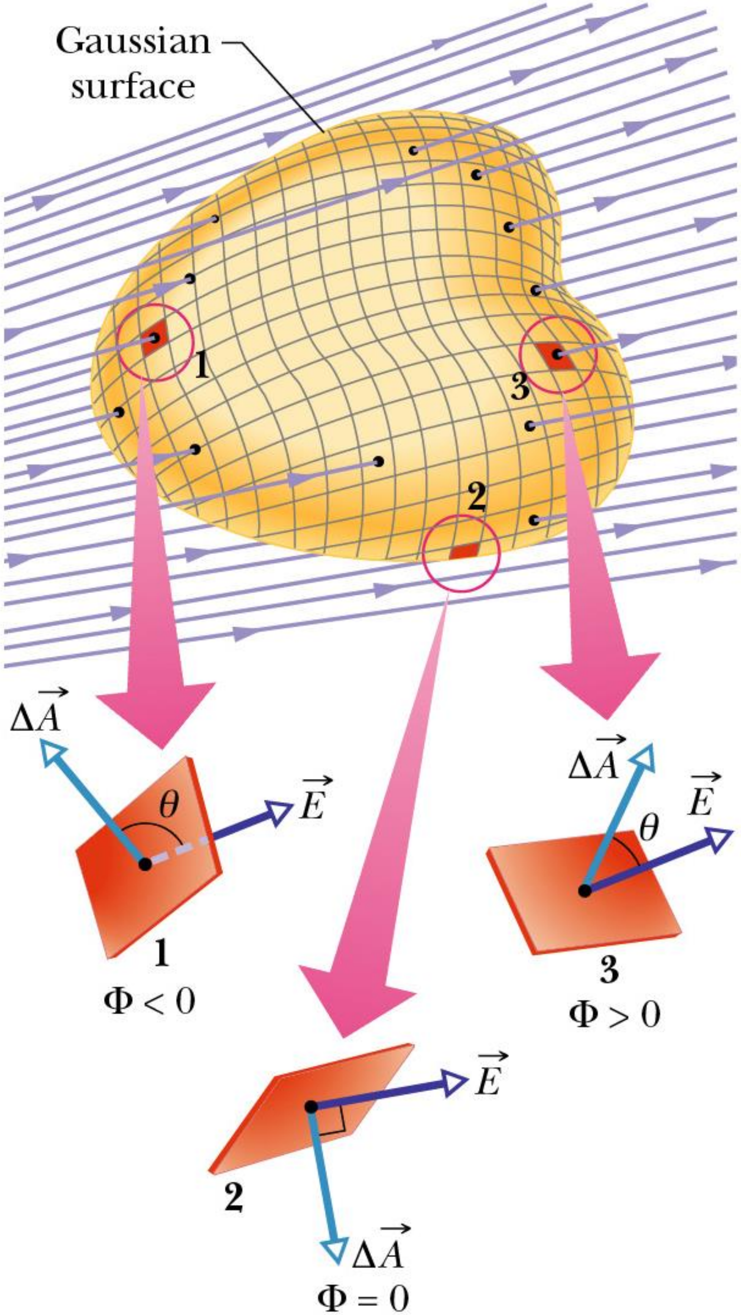
¿Cuál es el flujo eléctrico total sobre una superficie cerrada?

La integral sobre la superficie cerrada:

$$\Phi = \oint d\Phi = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A}$$

El círculo indica que la integral es sobre una superficie cerrada.

A la superficie cerrada se la denomina <u>superficie gaussiana</u>



Ley de Gauss

El flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica neta encerrada.

Ley de Gauss

La relación entre el flujo y la carga encerrada dada por la ley de Gauss es:

$$\oint \vec{E} \,.\, d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

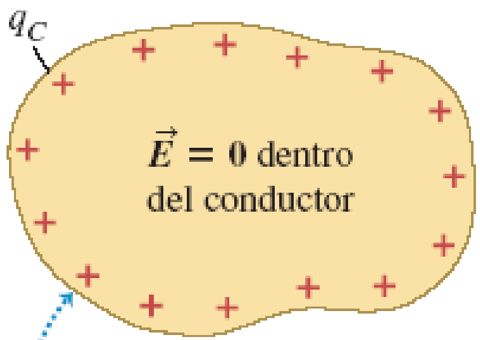
- ✓ Prueba para evaluar la existencia de carga eléctrica !!
- ✓ Podemos evaluar E sobre cualquier superficie cerrada que elijamos
- ✓ Universalidad de la ley. No importa como está distribuida la carga dentro de la Superficie.
- ✓ Se puede aplicar en muy pocos casos pero con <u>mucha facilidad</u>
- ✓ . Forma alternativa más general y elegante que la ley de Coulomb.

La Ley de Gauss es una de las **cuatro ecuaciones de Maxwell**, que forman la base de electromagnetismo (las otras tres son la ley de Gauss para el magnetismo, la ley de Faraday de la inducción y la ley de Ampère con la corrección de Maxwell).

Ley de Gauss – Distribución de la carga en un conductor hueco

Con la ley de Gauss se puede demostrar que la carga eléctrica en exceso se redistribuye sobre la superficie exterior del conductor aislado !!!!

a) Conductor sólido con carga q_C

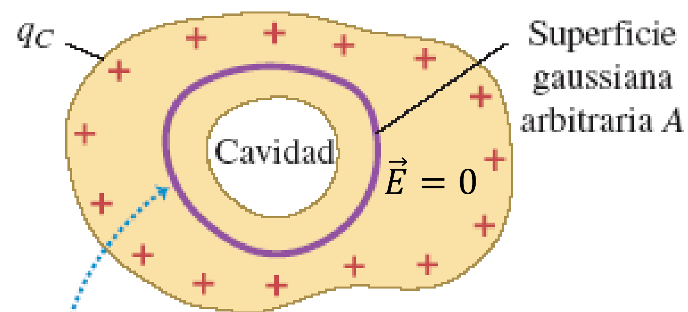


La carga q_C reside por completo en la superficie del conductor. La situación es electrostática, por lo que $\vec{E} = \mathbf{0}$ dentro del conductor.

$$\oint \vec{E} \,.\, d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

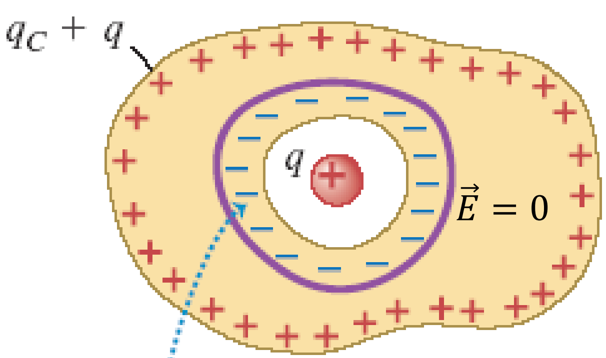
$$\boxed{\vec{E} = 0 \quad \Longrightarrow \quad q_{enc} = 0}$$

b) El mismo conductor con una cavidad interna



Como $\vec{E} = \mathbf{0}$ en todos los puntos dentro del conductor, el campo eléctrico debe ser igual a cero en todos los puntos de la superficie gaussiana.

c) Se coloca en la cavidad una carga aislada q

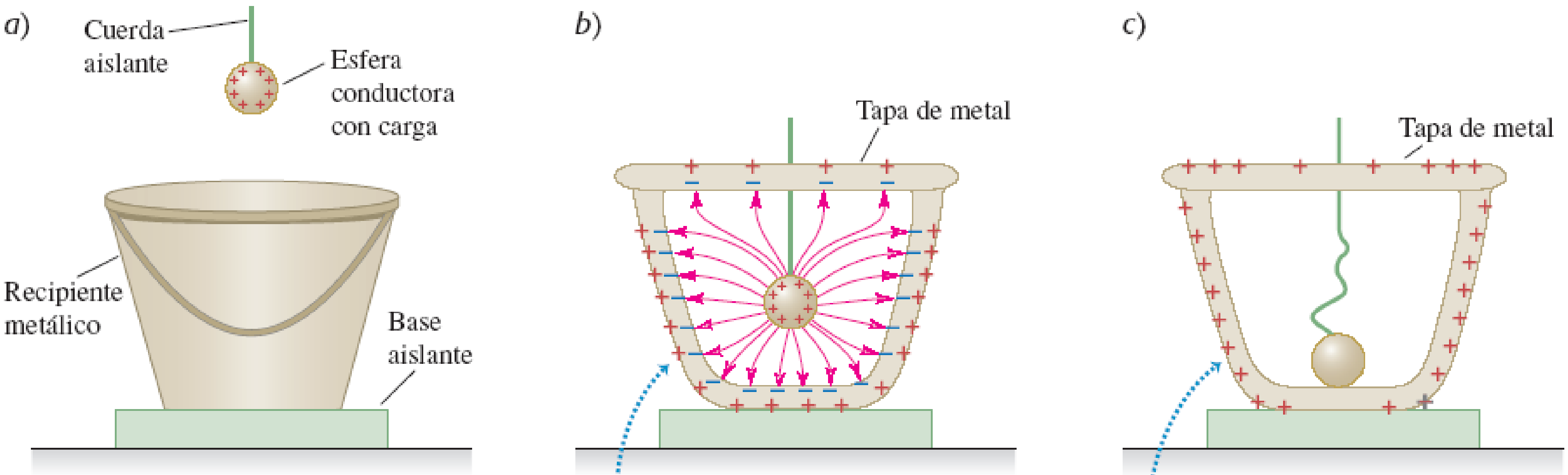


Para que $\vec{E}$ sea igual a cero en todos los puntos de la superficie gaussiana, la superficie de la cavidad debe tener una carga total de $-q$.

La Ley de Gauss establece que no puede encerrada carga, entoces sobre la superficie interna del hueco NO PUEDE HABER CARGA !!!!

Ley de Gauss – Distribución de la carga en un conductor hueco

Con la ley de Gauss se puede demostrar que la carga eléctrica en exceso se redistribuye sobre la superficie exterior del conductor aislado !!!!



La esfera con carga induce cargas en el interior y exterior del recipiente.

Una vez que la esfera toca el recipiente, se vuelve parte de la superficie interior; toda la carga se transfiere al exterior del recipiente.

Ejemplo 1 - Ley de Gauss y ley de Coulomb

Podemos deducir la Ley de Coulomb a partir de la ley de Gauss

Partimos de la Ley de Gauss

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

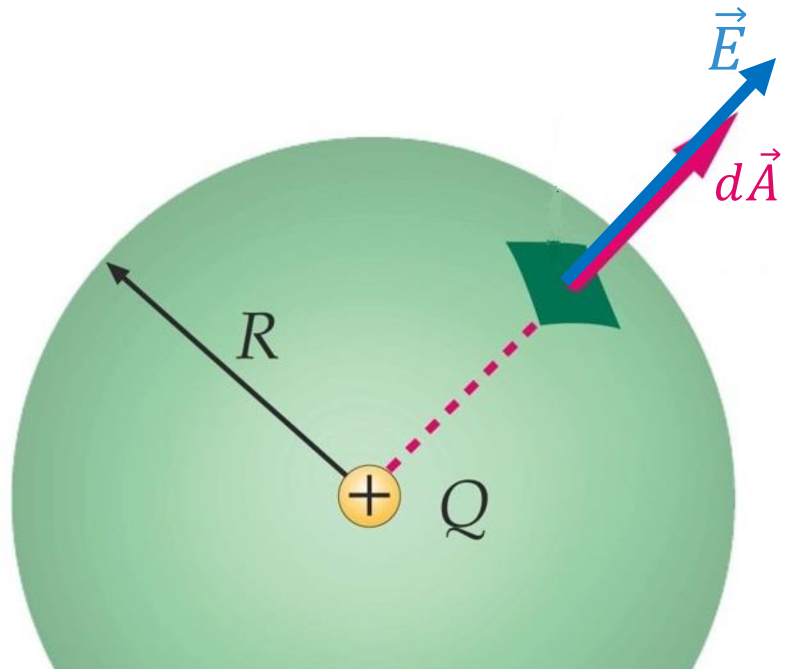
La carga encerrada por la superficie gaussiana es Q

$$\oint dA = 4\pi R^2$$

Superficie de una esfera de radio R

$$\oint EdAcos\ 0° = E\oint dA = E4\pi R^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

La magnitud de E es la misma en todos los puntos de la superficie gaussiana



$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}}$$

Campo eléctrico que ya habíamos obtenido para una carga puntual utilizando la Ley de Coulomb

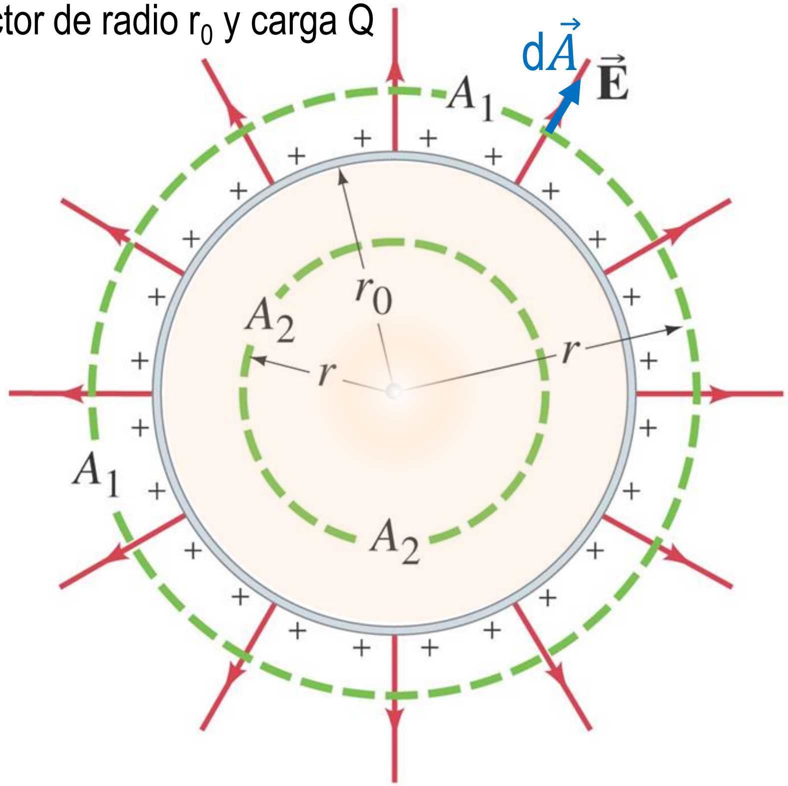
Superficie Gaussiana: En este caso es una esfera de radio R, la superficie gaussiana debe pasar por el punto donde deseamos calcular el campo eléctrico

Ejemplo 2 – Esfera maciza conductora cargada

Partimos de la Ley de Gauss

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_o}$$

- ✓ Supongamos una esfera conductor de radio r_0 y carga Q



Para $r < r_0$

- ✓ Elegimos una superficie gaussiana A_2 de radio r, donde $r < r_0$, como se muestra en la figura
- ✓ Sabemos que la carga sobre <u>cualquier conductor</u> se encuentra <u>solo en su superficie</u>
- ✓ Entonces la <u>carga encerrada</u> por la superficie gaussiana A_2 <u>es cero</u>

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_o} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = 0}$$

Para $r < r_0$

Para $r > r_0$

- ✓ Elegimos una superficie gaussiana A_1 de radio r, donde $r > r_0$, como se muestra en la figura
- ✓ Entonces la carga encerrada por la superficie gaussiana A_1 <u>es la totalidad de la carga Q</u>

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

$$\oint E dA = E \oint dA = E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

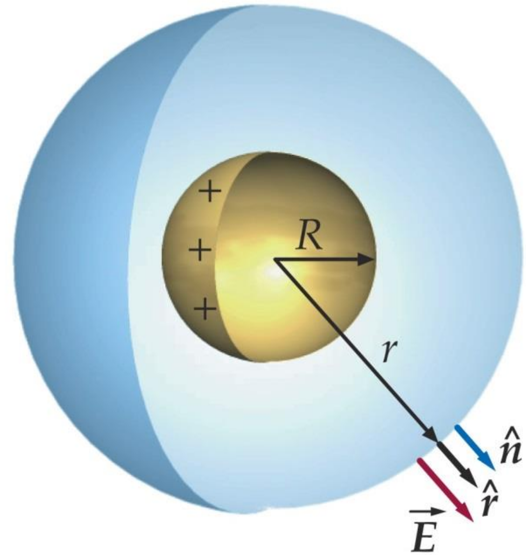
$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}}$$

Para $r > r_0$

Ejemplo 3

Cascarón esférico cargado

(Es idéntico al caso anterior)

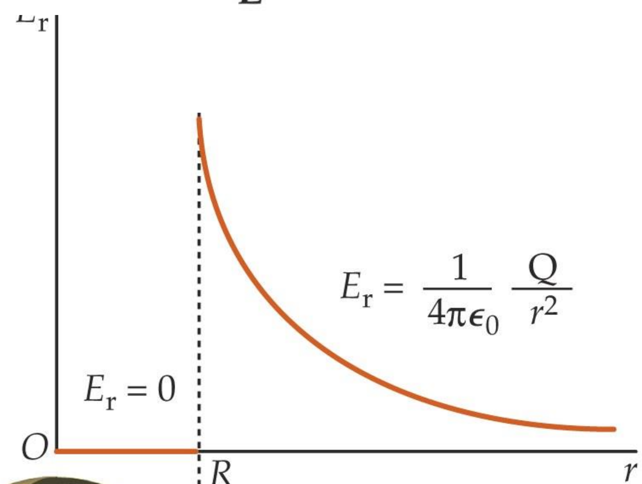


Partimos de la Ley de Gauss

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Para r < R no hay carga encerrada !!

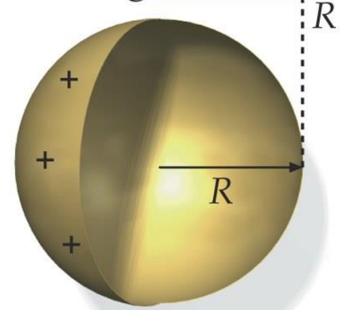
$$Q = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$



Para r > R ⇒ Q= Carga encerrada por la superficie gaussiana

$$\oint EdA = E\oint dA = EA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$EA = E4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}}$$



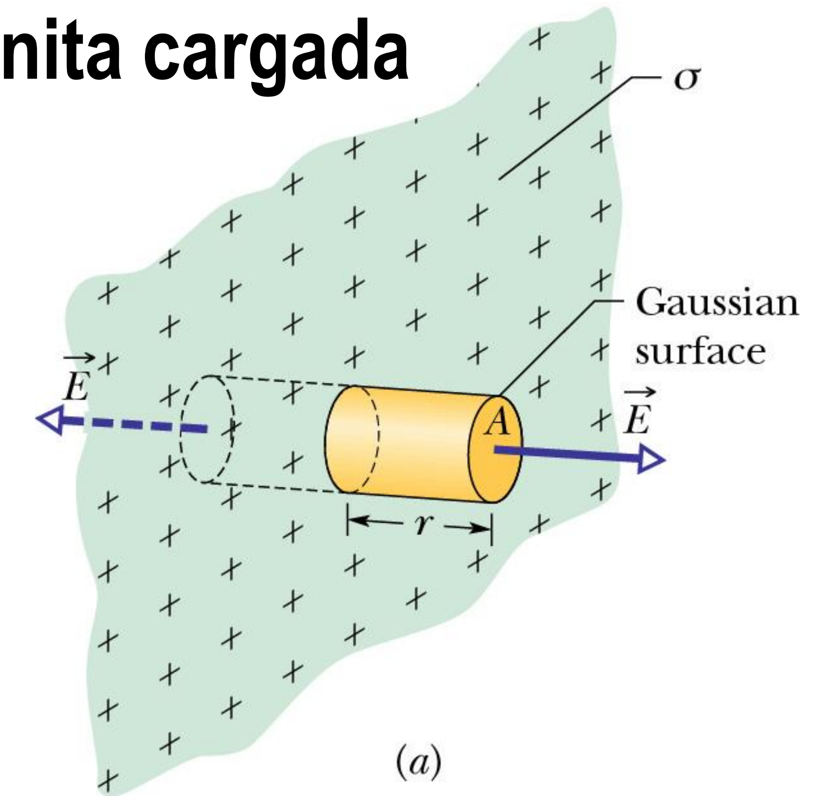
El campo eléctrico es idéntico al campo de una esfera conductora cargada !!

Ejemplo 4 – Lámina infinita cargada

$$\sigma \equiv \frac{dQ}{dA} \quad \Rightarrow \quad Q = \sigma A$$

Densidad superficial de carga

Carga encerrada por la superficie gaussiana q_{enc}



(a)

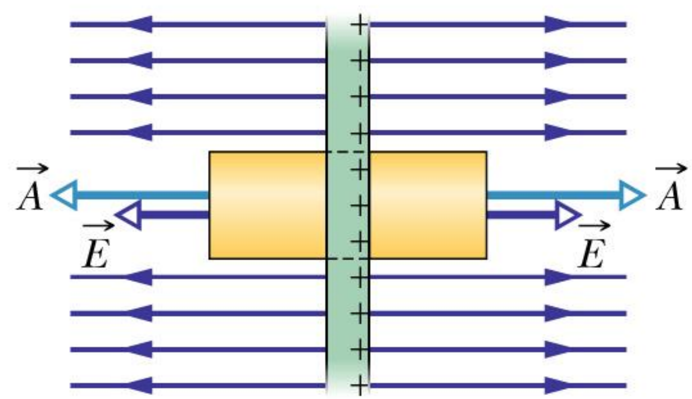
Partimos de la Ley de Gauss

$$\oint \vec{E}.\mathrm{d}\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Separamos la superficie cerrada del cilindro en tres áreas

$$\oint \vec{E}.\mathrm{d}\vec{A} = \underbrace{\int \vec{E}.\mathrm{d}\vec{A}}_{\text{Tapa izq.}} + \underbrace{\int \vec{E}.\mathrm{d}\vec{A}}_{\text{Pared cilindro}} + \underbrace{\int \vec{E}.\mathrm{d}\vec{A}}_{\text{Tapa derecha}}$$

Cero ¿por qué?



$$\oint \vec{E}.\mathrm{d}\vec{A} = EA + 0 + EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Ejemplo 5 – Línea infinita de carga

$$\lambda \equiv \frac{dQ}{d\ell} \Rightarrow \quad Q = \lambda\, h$$

Carga encerrada por la Superficie Gaussiana

Densidad lineal de carga

Partimos de la Ley de Gauss

$$\oint \vec{E}.\mathrm{d}\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_o}$$

Separamos la superficie cerrada del cilindro en tres áreas

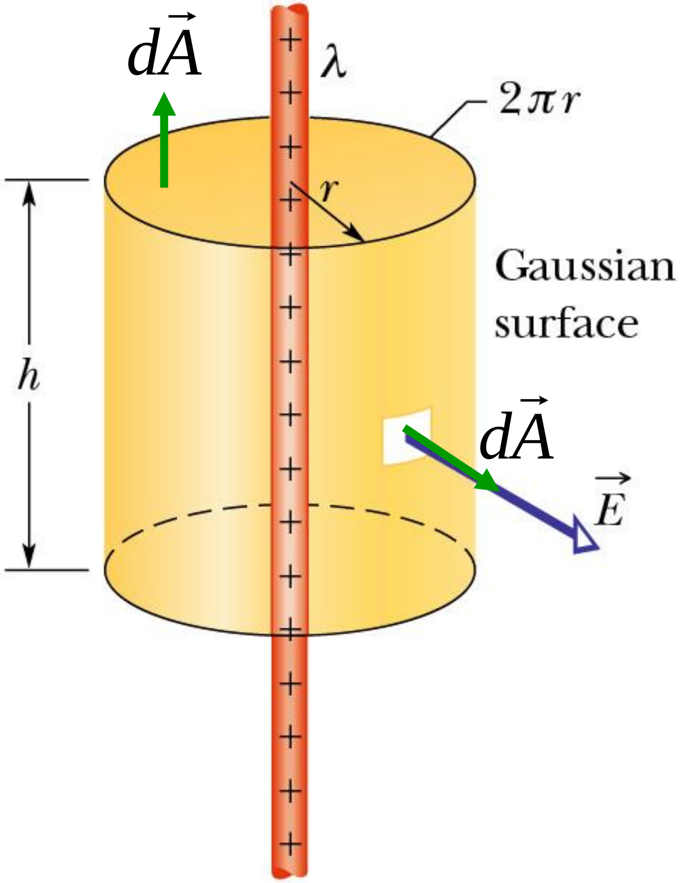
$$\oint \vec{E}.\mathrm{d}\vec{A} = \underbrace{\int \vec{E}.\mathrm{d}\vec{A}}_{\text{Tapa sup.}} + \underbrace{\int \vec{E}.\mathrm{d}\vec{A}}_{\text{Pared cilindro}} + \underbrace{\int \vec{E}.\mathrm{d}\vec{A}}_{\text{Tapa inf.}}$$

Cero

Cero

$$\oint \vec{E}.\mathrm{d}\vec{A} = 0 + E2\pi rh + 0 = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

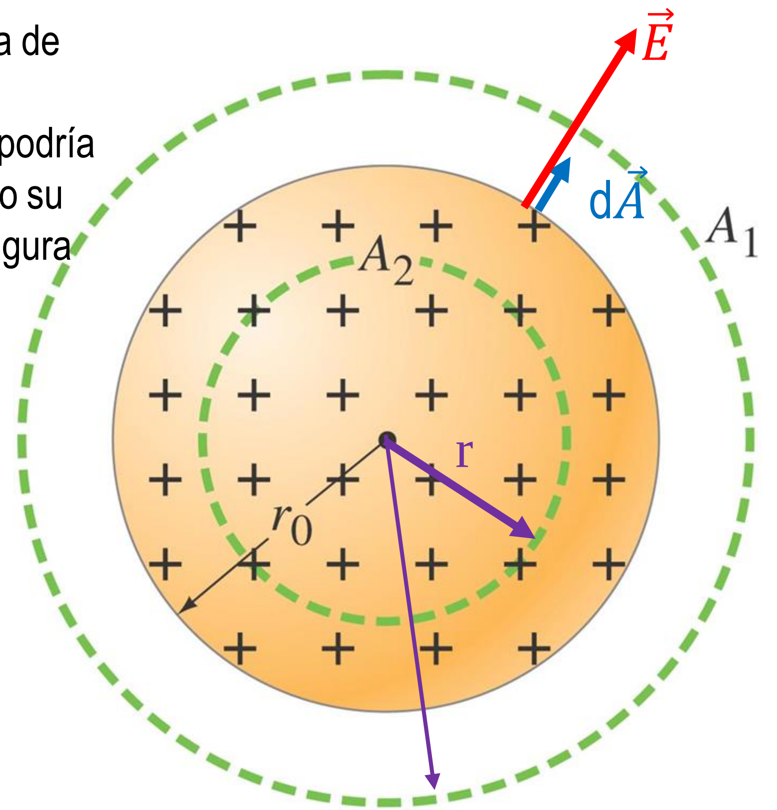


Ejemplo 6 – Esfera maciza aisladora cargada

Partimos de la Ley de Gauss

$$\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_o}$$

- ✓ Supongamos una esfera aisladora de radio r_0 y carga Q
- ✓ Si la esfera es aisladora la carga podría distribuirse uniformemente en todo su volumen como se muestra en la figura



Para r < r_0

- ✓ Elegimos una superficie gaussiana A_2 de radio r, donde r < r_0 , como se muestra en la figura
- ✓ La carga encerrada por la superficie gaussiana A_2 se calcula utilizando la densidad volumétrica de carga
- ✓ Entonces la carga encerrada por la superficie gaussiana A_2 es

$$q_{enc} = \rho V = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

Entonces $\oint \vec{E}.d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_o} = \frac{4}{3}\frac{\rho\pi r^3}{\varepsilon_o}$

- ✓ Por otro lado sabemos que la densidad volumétrica de carga la podemos calcular así

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}$$

Entonces $q_{enc} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\frac{r^3}{r_0^3}$

$$\oint E dA = E\oint dA = E 4\pi r^2 = Q\frac{r^3}{\varepsilon_o r_0^3}$$

$$\boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{r_0^3} \quad \text{Para } r < r_0}$$

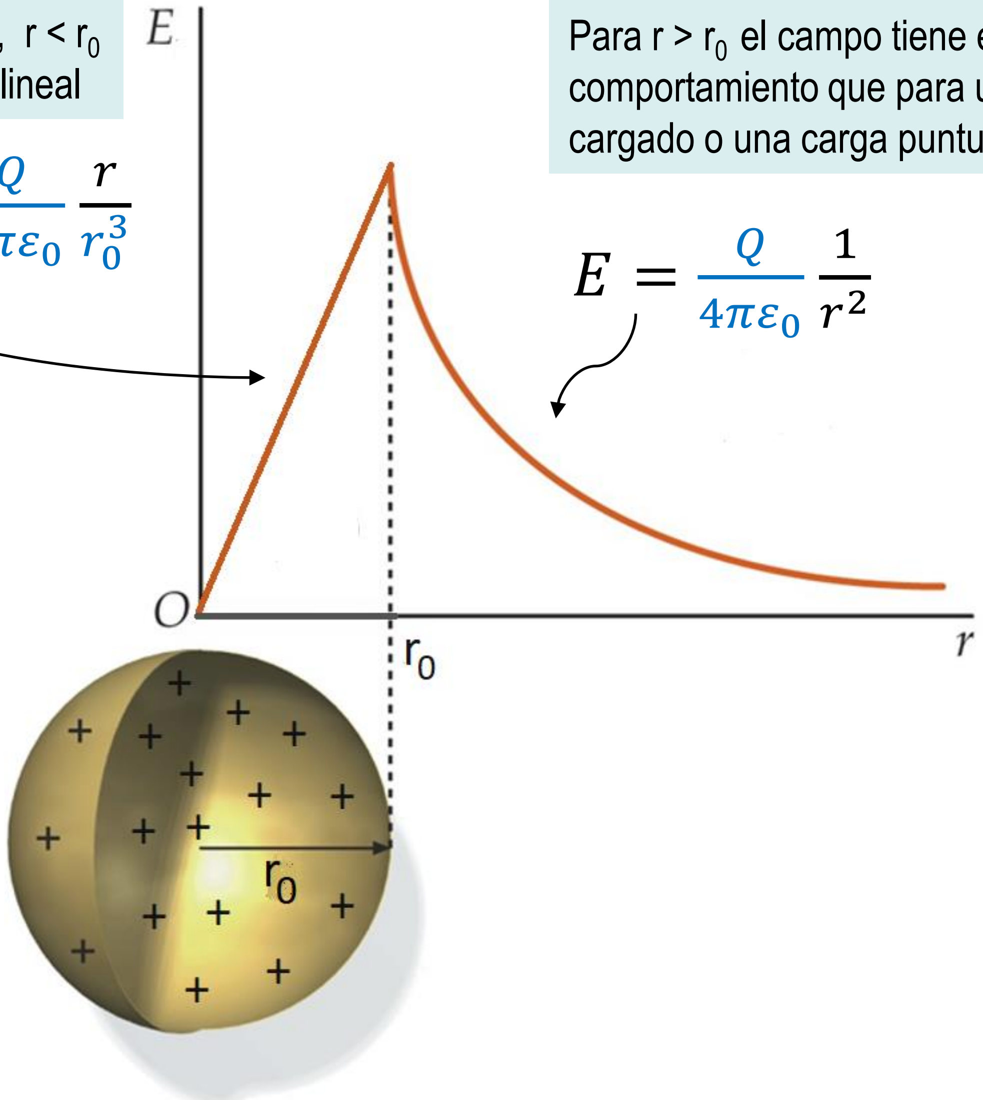
Continuación Ejemplo 6 – Esfera maciza <u>aisladora</u> cargada

En el interior, r < r_0
el campo es lineal

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{r_0^3}$$

Para r > r_0 el campo tiene el mismo comportamiento que para una esfera cargado o una carga puntual

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$$



Resumen

- ✓ Definimos Flujo Eléctrico: $d\Phi = \vec{E} \cdot d\vec{A}$
- ✓ El Flujo es negativo cuando el campo ingresa y positivo cuando sale de la superficie.
- ✓ Ley gauss: El flujo neto es proporcional a la carga encerrada por dicha superficie, y la constante de proporcionalidad es ε_0.

$$\varepsilon_0 \Phi = q_{enc}$$

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = q_{enc}$$

- ✓ Las tres geometrías más usuales para aplicar

la Ley de Gauss son:

Geometría	Densidad	Superficie Gaussiana	Campo eléctrico
Lineal	$\lambda = q/L$	Cilíndrica	$E = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ Línea de carga
Plana	$\sigma = q/A$	Cilíndrica	Conductor $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ No-conductor: $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$
Esférica	$\rho = q/V$	Esférica	$r \geq R$ $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ $r < R$ $E = \left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right) r$