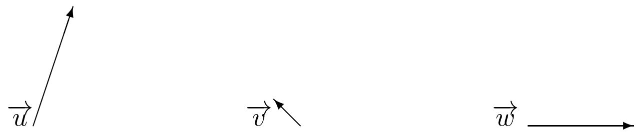
ÁLGEBRA I - 2022
Práctico 5: vectores

Mayo, 2022

1. Dados los vectores



   Realizar gráficamente las siguientes operaciones:

a)	$3\vec{v}$	**b**)	$\frac{2}{3}\vec{u}$	**c**)	$-2\vec{w}$
d)	$\vec{v}+\vec{w}$	**e**)	$\vec{u}-\vec{v}$	**f**)	$\vec{v}-\vec{u}$
g)	$2\vec{w}-3\vec{v}$	**h**)	$\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$	**i**)	$\vec{u}-\frac{5}{2}\vec{v}+3\vec{w}$

2. Sean los vectores $\vec{u}=(4,3)$ y $\vec{v}=(2,-4)$, obtener geométrica y analíticamente:

   a) $\vec{u}+\vec{v}$ **b** $\frac{1}{5}\vec{u}$ **c**) $2\vec{u}-\frac{2}{3}\vec{v}$

3. Para cada par de puntos:

a)	$P(0,0)$	y	$Q(3,4)$	**b**)	$P(-1,4)$	y	$Q(4,2)$
c)	$P(-3,2)$	y	$Q(6,5)$	**d**)	$P(0,0,0)$	y	$Q(-2,1,1)$
e)	$P(6,5,8)$	y	$Q(8,-7,-3)$				

   i) Hallar las componentes del vector con punto inicial P y punto final Q.

   ii) Calcular la norma de los vectores obtenidos. ¿Qué relación hay entre la norma mencionada y la distancia entre los puntos P y Q ?

   iii) Graficar en el mismo sistema de coordenadas $P, Q, \overrightarrow{PQ}$ y el vector posición correspondiente.

4. Demostrar que si $\vec{u}$ es diferente del vector cero, entonces $\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ tiene norma 1.

5. Dados los vectores $\vec{u}=(1,2)$; $\vec{v}=(6,-8)$ y $\vec{w}=(2,-1)$.

   i) Calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}, \vec{u}\cdot(\vec{v}+3\vec{w})$ y $|\vec{u}|(\vec{w}\cdot\vec{v})$

   ii) Hallar el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

   iii) Determinar el ángulo formado entre $\vec{w}$ y el semieje positivo de abscisas.

   iv) Determinar dos vectores de norma 1 ortogonales a $\vec{w}$.

6. Sean los vectores en $\mathbb{R}^3$, $\vec{a}=(4,1,6)$, $\vec{b}=(3,0,-2)$ y $\vec{c}=(1,2,-3)$.

   i) Calcular $\vec{a}\cdot\vec{b}$. ¿Puede decir algo respecto a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$?.

   ii) Hallar el coseno del ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{c}$.

7. Calcular $\vec{a}\cdot\vec{b}$ sabiendo que:

   a) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=4$, y el ángulo formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es $\frac{\pi}{6}$.

b) $\vec{a} = -4\vec{b}$ y $|\vec{a}| = 3$.

8. Sean los vectores $\vec{i} = (1,0)$ y $\vec{j} = (0,1)$ en $\mathbb{R}^2$. Suponga que $\vec{v}$ es un vector no nulo de modo que θ es el ángulo desde el semieje positivo de abscisas al vector $\vec{v}$.

   i) Explique por qué es posible expresar al vector $\vec{v}$ de la siguiente forma:

   $$\vec{v} = (|\vec{v}|cos\theta)\vec{i} + (|\vec{v}|sen\theta)\vec{j}$$

   ii) Dados los vectores $\vec{v}_1 = (1,2), \vec{v}_2 = (-1,2), \vec{v}_3 = (3,-4)$ y $\vec{v}_4 = (0,-5)$ graficarlos y expresarlos en la forma dada en la parte i).

9. Dados los puntos $P(4,8,1)$ y $Q(3,0,-4)$ en $\mathbb{R}^3$.

   a) Representar los puntos P y Q y los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ en un mismo sistema de ejes coordenados.
   b) Obtener las componentes de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$. Representarlos gráficamente.
   c) Calcular la distancia entre P y Q.
   d) Dar las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{PQ}$ y señalarlo en el primer gráfico.
   e) Determinar un punto cuya distancia a P sea la mitad de su distancia a Q.
   f) Obtener dos vectores paralelos a $\overrightarrow{OP}$ de módulo 2.
   g) Calcular el ángulo entre $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$.

10. Usar vectores para decidir si el triángulo formado por los puntos $P(1,-3,-2)$, $Q(2,0,-4)$ y $R(6,-2,-5)$ es rectángulo.

11. Dado el vector $\vec{v} = (3,-4)$:

    a) Obtener una ecuación que satisfagan todos los vectores (x,y) ortogonales a $\vec{v}$. Interpretar gráficamente.
    b) Obtener los vectores ortogonales a $\vec{v}$ de longitud 2.

12. Sean los vectores $\vec{u} = (-1,4,2)$ y $\vec{v} = (3,y,-6)$:

    a) Determine y de modo que los vectores dados resulten:
       i) Ortogonales
       ii) Paralelos
    b) Exprese los vectores dados en términos de los vectores unitarios canonicos $\vec{i}, \vec{j}$ y $\vec{k}$ de $\mathbb{R}^3$.

13. Todo vector no nulo $\vec{v}$ determina una única dirección. En $\mathbb{R}^3$ existen infinitas direcciones ortogonales a ésta. Dado el vector $\vec{v} = (2,-5,1)$.

    a) ¿Qué ecuación satisfacen las coordenadas de todo vector ortogonal a $\vec{v}$?
    b) Obtener cuatro vectores no nulos ortogonales a $\vec{v}$, todos ellos en distintas direcciones.

14. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^2$ de igual módulo. Demostrar las siguientes afirmaciones utilizando propiedades del producto escalar. Verificar gráficamente.

    a) $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son ortogonales.
    b) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son ortogonales, entonces el ángulo que $\vec{u} + \vec{v}$ forma con cada uno de ellos es de 45°.

15. Usando los vectores del ejercicio **1)**, obtener gráficamente las siguientes proyecciones:

    a) $\overrightarrow{proy}_{\vec{u}}\vec{w}$ **b)** $\overrightarrow{proy}_{\vec{w}}\vec{v}$ **c)** $\overrightarrow{proy}_{\vec{w}}\vec{a}$, para un $\vec{a}$ ortogonal a $\vec{w}$.

16. Obtener gráfica y analíticamente $\overrightarrow{proy}_{\vec{u}}\vec{v}$, cuando $\vec{v} = (3,1)$ y $\vec{u}$ es:

    a) $\vec{u} = (1,3)$ **b)** $\vec{u} = (-3,4)$ **c)** $\vec{u} = (2,-6)$.

17. En cada caso calcular $\overrightarrow{proy}_{\vec{b}}\vec{a}$. Representar gráficamente $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\overrightarrow{proy}_{\vec{a}}\vec{b}$ en un mismo gráfico.

    i) $\vec{a} = (3,4,5)$ y $\vec{b} = (6,8,0)$ **ii)** $\vec{a} = (6,8,0)$ y $\vec{b} = (3,4,5)$

    iii) $\vec{a} = (3,5,1)$ y $\vec{b} = (1,2,-1)$ **iv)** $\vec{a} = (3,5,1)$ y $\vec{b} = (-1,-2,1)$

18. Demostrar que para dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^n$ con $\vec{v} \neq \vec{0}$, vale la igualdad $(\vec{u} - \overrightarrow{proy}_{\vec{v}}\vec{u}) \cdot \vec{v} = 0$. Interpretar geométricamente y verificar esta interpretación en los gráficos del ejercicio anterior.

19. i) Calcular los productos vectoriales $\vec{u} \times \vec{v}$ para los siguientes casos:

    a) $\vec{u} = (3,0,-1)$ y $\vec{v} = (0,2,0)$ **b)** $\vec{u} = (0,2,0)$ y $\vec{v} = (3,0,-1)$
    c) $\vec{u} = (3,1,1)$ y $\vec{v} = (-1,2,4)$ **d)** $\vec{u} = (-1,-2,5)$ y $\vec{v} = (0,3,-2)$

    ii) En cada caso, graficar $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{u} \times \vec{v}$ en el mismo sistema.

    iii) En general, ¿qué es posible afirmar sobre la dirección, el sentido y el módulo de $\vec{u} \times \vec{v}$? Verificar analíticamente para **a)**

20. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ tales que $\vec{u} \times \vec{v} = (1,0,2)$. Calcular:

    a) $4\vec{u} \times 3\vec{v}$ **b)** $\vec{v} \times (2\vec{v} + \vec{u})$ **c)** $(\vec{v} \times \vec{u}) \cdot (5\vec{u} - \vec{v})$

21. Determinar si cada expresión tiene sentido. Si no, explique por qué. En caso afirmativo, diga si el resultado es un vector o un escalar (número).

    i) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ **ii)** $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$
    iii) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ **iv)** $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$
    iv) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \times (\vec{c} \cdot \vec{d})$ **iv)** $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d})$

22. Dados los puntos $P(4,8,1)$ y $Q(3,0,-4)$, obtener el cuarto vértice del paralelogramo con vértice en el origen de $\mathbb{R}^3$, cuyos lados están dados por los vectores $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$. Graficar y calcular su área.