Álgebra I - 2022

PRÁCTICO 6: GEOMETRÍA ANALÍTICA

1. Considerar la recta r en el plano ($\mathbb{R}^2$) con ecuación vectorial:

$$(x, y) = (-1, 3) + \lambda(4, -2) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Representarla gráficamente, señalando también su vector posición y su vector director.

b) Marcar en el gráfico del ítem a) los puntos correspondientes a $\lambda = 0, 1, 1/2, 2, -1$.

c) Obtener una representación paramétrica de r.

d) Determinar analíticamente cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta:

$$A\,(-9, 7)\,,\ B\,(-3, 3)\,,\ C\,(5, 0)\,,\ (5, 4)\,.$$

e) Expresar la recta r como un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$.

2. Considerar la recta s en el espacio ($\mathbb{R}^3$) con ecuación vectorial:

$$(x, y, z) = (2, 0, 0) + \lambda(1, 3, 0) \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Obtener una representación paramétrica de s.

b) Utilizar las ecuaciones paramétricas obtenidas en el ítem a) para determinar los puntos de intersección de s con cada uno de los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$.

c) Graficar la recta s señalando los puntos de intersección encontrados en el ítem b).

d) Expresar la recta s como un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$.

3. Hallar la ecuación vectorial y la representación paramétrica de:

a) La recta que pasa por el punto $(-2, 3)$ y tiene vector director $\overrightarrow{d} = (1, 1)$.

b) La recta que pasa por el punto $(-6, -1)$ y es paralela al vector $\overrightarrow{v} = (2, -1)$.

c) La recta que pasa por los puntos $(-5, 2)$ y $(0, 7)$.

d) La recta que pasa por el punto $(4, -1)$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{w} = (8, 1)$.

e) La recta que pasa por el punto $(1, 4)$ y es paralela a la recta $x = 2 - 3\lambda$, $y = 4$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

f) La recta que pasa por el punto $(-1, 2, 1)$ y tiene vector director $\overrightarrow{d} = (1, 1, 3)$.

g) La recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralela al vector $\overrightarrow{a} = (2, -1, 4)$.

h) La recta que pasa por los puntos $R\,(2, 1, 3)$ y $S\,(4, 0, 4)$.

i) La recta que pasa por el punto $(2, 0, 1)$ y es perpendicular a los vectores $\overrightarrow{b} = (1, 0, 2)$ y $\overrightarrow{c} = (0, 2, 1)$.

j) La recta que pasa por el punto $(2, 0, 0)$ y es paralela a la recta $\{(-2 + \lambda, -1, 1 + 6\lambda)\,/\lambda \in \mathbb{R}\}$.

4. Considerando los puntos $P\,(-5, 2)$ y $Q\,(0, 7)$ dados en el ítem c) del ejercicio 3:

a) Obtener una representación paramétrica del segmento $\overline{PQ}$.

b) Encontrar el punto medio de $\overline{PQ}$.

5. Considerando los puntos $R\,(2, 1, 3)$ y $S\,(4, 0, 4)$ dados en el ítem h) del ejercicio 3:

a) Obtener una representación paramétrica del segmento $\overline{RS}$.

b) Encontrar el punto medio de $\overline{RS}$.

6. Considerar la recta $r : (x, y) = (2, -1) + \lambda\,(1, 4)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.

a) Estudiar la posición relativa de r con respecto a cada una de las siguientes rectas:

$$r_1 : (x, y) = (0, 3) + \mu_1 (-2, 8) \quad \text{con } \mu_1 \in \mathbb{R}$$

$$r_2 : \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\mu_2 \\ y = -5 + 2\mu_2 \end{cases} \quad \text{con } \mu_2 \in \mathbb{R}$$

$$r_3 = \{(5 - 4\mu_3, 2 + 2\mu_3) / \mu_3 \in \mathbb{R}\}$$

b) Graficar las rectas r, r_1, r_2 y r_3 en un mismo sistema de coordenadas cartesianas.

7. En cada ítem, estudiar la posición relativa entre las dos rectas dadas y graficar ambas en un mismo sistema de coordenadas cartesianas.

a) $\begin{cases} x = 1 - 5\lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = -5 + \lambda \end{cases} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

b) $\begin{cases} x = 3 + 2\alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = 5 \end{cases} \begin{cases} x = -1 - 6\beta \\ y = 3 + 3\beta \\ z = 5 \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

c) $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 \end{cases} \begin{cases} x = -1 - 6\alpha \\ y = 3 + 3\alpha \\ z = 1 \end{cases} \quad (\lambda, \alpha \in \mathbb{R})$

d) $\begin{cases} x = \mu \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ z = \beta \end{cases} \quad (\mu, \beta \in \mathbb{R})$

e) $\begin{cases} x = 5 - \alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \begin{cases} x = -2 + 3\mu \\ y = 9 - 3\mu \\ z = 7 + \mu \end{cases} \quad (\alpha, \mu \in \mathbb{R})$

f) $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + \beta \\ z = 4 + \beta \end{cases} \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = -5 + \lambda \end{cases} \quad (\beta, \lambda \in \mathbb{R})$

g) $\begin{cases} x = 7 - 3\alpha \\ y = 2 - 2\alpha \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \begin{cases} x = 1 + 3\beta \\ y = -2 + 2\beta \\ z = -1 + \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

h) $\begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \begin{cases} x = 4 + \mu \\ y = -4 - 2\mu \\ z = \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

8. Para cada par de rectas del ejercicio anterior, en caso de que se corten, determinar cuál es el ángulo entre ellas.

9. **a)** Para cada uno de los siguientes planos encontrar dos puntos de $\mathbb{R}^3$ que pertenezcan a él y dos que no:

$$\theta : (x, y, z) = (1, 2, 0) + \alpha (0, 2, 3) + \beta (1, -1, 0) \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad \pi : \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 1 + 2\mu \\ z = \lambda + \mu \end{cases} \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\rho : -2x + y - 3z = 1 \qquad \tau : 2x - y = 3 \qquad \varphi : z = -1 \qquad \omega : 2(x - 1) - 3(z + 8) = 0$$

b) Expresar cada plano del ítem a) como un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^3$.

10. Para cada uno de los siguientes planos, representarlo gráficamente en $\mathbb{R}^3$. Luego, encontrar un vector normal al plano y representarlo en mismo gráfico.

a) $y = 0$ **b)** $x = -3$ **c)** $z - 5 = 0$

d) $x - y = 0$ **e)** $x + z - 2 = 0$ **f)** $z - 5y = 0$

g) $2x + 3y + 4z = 12$ **h)** $2x + y - 5z - 10 = 0$ **i)** $-3x + y - 2z + 6 = 0$

j) $-2x + 6y + 3z = 4$ **k)** $2x - 6y - 3z = 4$ **l)** $3x - y + 2z + 6 = 0$

m) $-2x - y + 5z - 10 = 0$ **n)** $x + 3y + 5z = -15$ **o)** $-x - y + z = 0$

11. Para cada uno de los planos que se describen a continuación obtener: una ecuación vectorial, una ecuación paramétrica, una ecuación implícita y una ecuación normal.

a) El plano que pasa por el punto $(-9,1,2)$ y es paralelo a los vectores $\overrightarrow{a}=(5,0,2)$ y $\overrightarrow{b}=(2,1,0)$.
b) El plano que contiene a los puntos $(0,-1,2)$, $(1,0,-1)$ y $(3,4,0)$.
c) El plano que pasa por el punto $(-2,1,0)$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{n}=(-1,2,5)$.
d) El plano que pasa por el punto $(2,0,-6)$ y es paralelo al plano $4x-y-2z=10$.
e) El plano que pasa por el punto $(0,-2,5)$ y es paralelo al plano $\pi=\{(2\lambda+3\mu,6,7-\lambda+\mu)/\lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$.
f) El plano paralelo a las rectas $r:(x,y,z)=(2,1,6)+\lambda(3,0,0)$ y $s:x=\mu,y=4,z=0$ $(\lambda,\mu\in\mathbb{R})$ y que pase por el punto (1,1,0).
g) El plano que contiene al punto $(3,0,4)$ y a la recta $t:(x,y,z)=(0,2,3)+\lambda(1,0,-1)$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.
h) El plano paralelo al eje y que contiene a la recta $l=\{(\alpha,0,1+\alpha)/\alpha\in\mathbb{R}\}$.
i) El plano perpendicular al eje x que pasa por el punto $(7,0,0)$.
j) El plano xy.

12. Encontrar los valores de las constantes h y k para los cuales el plano $\pi:hx+ky+2z+5=0$

a) pase por los puntos $P(1,2,-4)$ y $Q(-2,3,1)$.
b) sea perpendicular al vector $\overrightarrow{v}=5\overrightarrow{i}-4\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$.

13. Hallar una ecuación vectorial y una representación paramétrica para la recta que pasa por el punto (x_0,y_0,z_0) y que es ortogonal al plano $ax+by+cz+d=0$.

14. En cada ítem, estudiar la posición relativa entre la recta y el plano dados. Graficar ambos en un mismo sistema de coordenadas cartesianas.

a) $2x-y+3z=8$ y $\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-1+3\lambda \quad (\lambda\in\mathbb{R}) \\ z=-\lambda \end{cases}$
b) $\{(0,2\mu-2,\mu)/\mu\in\mathbb{R}\}$ y $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1$
c) $(x,y,z)=(0,2,3)+\alpha(3,-2,0)$ y $(x,y,z)=(0,0,4)+\beta(3,0,4)+\gamma(0,1,2)$ con $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

15. Dados los planos

$$\alpha:-8x+2y-4z=6 \qquad \beta:4x-y+2z+3=0$$

$$\gamma:-8x+2y-4z+7=0 \qquad \delta:12x-3y+9z=4$$

Estudiar la posición realativa entre:

a) α y γ b) β y γ c) α y β d) β y δ

Luego, en los casos en que los planos se corten, hallar el ángulo entre ellos.

16. Estudiar la posición relativa entre los dos planos siguientes:

$$\psi:\begin{cases} x=2+3\lambda \\ y=-1+\mu \quad ,(\lambda,\mu\in\mathbb{R}) \\ z=4+\mu \end{cases}$$

y

$$\omega:(x,y,z)=(0,0,0)+\lambda'(0,2,0)+\mu'(1,1,0),(\lambda',\mu'\in\mathbb{R})$$

17. Dado el plano $\pi:12x+13y+5z=-2$ y la recta l que pasa por los puntos $(1,1,1)$ y $(-1,1,0)$ respectivamente.

a) Determinar la distancia del punto (1,1,-5) al plano π.
b) Calcular la distancia del punto $(2,2,2)$ a la recta l.
d) Calcular la distancia de la recta l al plano π.
e) Esbozar un gráfico de lo hecho en los items anteriores.