

Difusión De Calor En Una Barra De Cobre

Emiliano Agoff, Facundo Otero Zappa y Sergio Stedile (Grupo 2)

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires

Licenciatura en Ciencias Físicas | Laboratorio 4, 1°C 2023 | Jue. de 8:00 a 14:00 hs.

eagoff98@gmail.com , facuotero20.88@outlook.com , sergiogstedile@gmail.com

Resumen

En este trabajo, estudiamos la difusión de calor en una barra de cobre con el objetivo de caracterizar ondas dentro de la barra y calcular la constante de difusividad térmica. Se realizaron 3 experiencias para determinar la constante de difusividad. Los resultados obtenidos en las experiencias, en algunos casos son similares al valor tabulado de difusividad térmica $(111 \pm 1) \text{ mm}^2/\text{s}$. En las experiencias donde eso no ocurrió consideramos que se debe a las pérdidas de calor en la barra, además de que el valor tabulado está calculado a 25°C . Por otro lado, no se pudo definir una única velocidad de propagación de la onda en todas las experiencias lo cual es una de nuestras hipótesis (que dentro de la barra viaja una onda con velocidad de propagación constante).

I. INTRODUCCIÓN

En termodinámica clásica, el calor se define como la forma de energía que cruza dos sistemas termodinámicos con diferentes temperaturas a través de su frontera [1]. Existen diversos tipos de transferencia de calor: la *conducción térmica*, en la cual se transfiere calor entre objetos que están en contacto físico; la *convección térmica*, en la cual se transfiere calor entre un objeto y su entorno debido al movimiento de un fluido; la *radiación térmica*, en la cual se transfiere energía por la emisión de radiación electromagnética; y la *advección*, en la cual se transfiere calor en un fluido de un lugar a otro debido a su movimiento y momento lineal.

Los principios de transferencia de calor se pueden utilizar para conservar, aumentar o disminuir la temperatura en distintos ámbitos. Los métodos de transferencia de calor tienen aplicaciones en la industria automotriz, la gestión térmica de dispositivos y sistemas electrónicos para evitar sobrecalentamientos, el control del clima, el procesamiento de materiales, la prevención de incendios, en ingeniería química e ingeniería de centrales eléctricas, entre otros.

En particular, la conducción térmica es el tipo de transferencia de calor predominante en materiales sólidos, principalmente los metales, por lo que está presente en diversas disciplinas. En este trabajo estudiamos la transferencia de calor en una barra de cobre, por lo que utilizamos la que se conoce como *ley de Fourier* o *ley de conducción del calor*, que es la ley que describe cómo se comporta el calor en el interior de los materiales sólidos y es de la forma:

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}, t) = -\kappa \nabla T(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

donde \mathbf{q} representa el flujo de calor en W/m^2 , T representa la temperatura de la barra y κ es una constante que se conoce como la *conductividad térmica*. La conductividad térmica, representa la habilidad que un material presenta para conducir el calor [2], y en el caso del cobre toma un valor de $\kappa_{\text{Cu}} = (399 \pm 1) \text{ W}/(\text{K}\cdot\text{m})$ [3].

La solución de la ley de Fourier dada por la ecuación (1), puede ser altamente compleja por lo que si consideramos que la barra de cobre de muestra presenta un área pequeña con respecto a su longitud, puede estudiarse el caso unidimensional sin perder generalidad. Por otra parte, relacionando la ley de Fourier unidimensional con la energía interna en cada punto de la barra de cobre puede obtenerse la denominada *ecuación del calor*, que relaciona cómo se comporta la temperatura a lo largo de la barra con respecto a cómo evoluciona en el tiempo, y es de la forma [4]:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2)$$

donde α es una constante que se conoce como la *difusividad térmica* y representa la tasa de transferencia de calor de un material desde su extremo con mayor temperatura hacia su extremo de menor temperatura, adquiriendo

para el cobre a una temperatura de $T = (25 \pm 1)^\circ\text{C}$, un valor de $\alpha_{\text{Cu}} = (111 \pm 1) \text{ mm}^2/\text{s}$ [5].

De esta forma, la ecuación (2) aplicada a nuestro problema de una barra de cobre de longitud finita y área pequeña que se calienta desde uno de sus extremos, suponiendo que en el otro extremo la barra permanece a temperatura ambiente, admite una solución en el estado estacionario (cuando la temperatura en cada punto no varía significativamente) de la forma [4]:

$$\Delta T(x, t) = \frac{T_0}{2} + \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} T_n e^{-\varepsilon_n x} \sin(\omega_n t - \varepsilon_n x), \quad (3)$$

donde T_0 es la temperatura máxima sobre la temperatura ambiente, $T_n = \frac{2T_0}{n\pi}$, $\omega_n = \frac{2n\pi}{\tau}$, con τ el periodo de calentamiento de la barra, y $\varepsilon_n = \sqrt{\frac{\omega_n}{2\kappa_{\text{Cu}}}}$ el coeficiente de amortiguamiento del armónico n -ésimo, donde $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Es decir, la temperatura presenta un comportamiento ondulatorio en el tiempo en dirección de la barra.

Debido a que el amortiguamiento ε_n aumenta cuanto mayor es el valor de n , los armónicos superiores decaen muy rápido y su contribución a la temperatura total no es tan significativa. Por esta razón, la temperatura de la barra puede aproximarse por el armónico fundamental, de la forma:

$$\Delta T(x, t) \cong \frac{T_0}{2} + A e^{-\varepsilon x} \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right], \quad (4)$$

donde v representa la velocidad de las ondas de temperatura en el interior de la barra, de frecuencia ω .

Tanto de la ecuación (3) como de la ecuación (4), pueden obtenerse a partir del coeficiente de amortiguamiento ε y de la velocidad v , dos expresiones para hallar la difusividad térmica de la barra de cobre, de la forma:

$$\alpha_{\text{Cu}}^\varepsilon = \frac{\pi}{\tau \varepsilon^2}, \quad (5)$$

y de la forma:

$$\alpha_{\text{Cu}}^v = \frac{\tau v^2}{4\pi}, \quad (6)$$

donde $\alpha_{\text{Cu}}^\varepsilon$ y α_{Cu}^v representan los valores de la difusividad de la barra de cobre cuando depende del coeficiente de amortiguamiento ε y de la velocidad v , respectivamente. De esta forma, podemos contrastar las mediciones realizadas con el valor de referencia enunciado anteriormente [5].

Juntando las ecuaciones (5) y (6), puede obtenerse la relación:

$$\alpha_{\text{Cu}} = \frac{v}{2\varepsilon}. \quad (7)$$

Así, contamos con dos formas de calcular la difusividad de la barra de cobre, y la ecuación (7) combina ambas expresiones.

Como método alternativo podemos analizar el comportamiento de la temperatura en la barra de cobre en el proceso transitorio de calentamiento al calentar uno de sus extremos de forma continua, de la forma [6]:

$$T(x, t) = \frac{2F_0}{\kappa_{\text{Cu}}} \left[\sqrt{\frac{\alpha_{\text{Cu}} t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha_{\text{Cu}} t}} - \frac{x}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha_{\text{Cu}} t}}\right) \right], \quad (8)$$

donde F_0 representa el flujo de calor aplicado por unidad de tiempo y área, y erfc representa a la función error complementaria.

Para terminar, resta estudiar el proceso de enfriamiento de la barra de cobre cuando ya ha sido calentada, y comienza a disminuir su temperatura hasta alcanzar la temperatura ambiente. En este caso sabemos mediante la *ley de enfriamiento de Newton*, que la evolución temporal de la temperatura de la barra será de la forma [7]:

$$T(t) = T_{\text{amb}} + (T_0 - T_{\text{amb}}) e^{-\gamma t}, \quad (9)$$

donde T_{amb} representa a la temperatura ambiente, T_0 la temperatura inicial de la barra (antes del enfriamiento) y γ es una constante que representa el coeficiente de transferencia de calor.

En el período de enfriamiento, partiendo de la definición termodinámica de la difusividad térmica, puede obtenerse

otra forma para determinar su valor que relaciona la longitud L de la barra de cobre con su período de enfriamiento τ_e , de la forma [6]:

$$\alpha_{\text{Cu}} = \frac{L^2}{\tau_e}. \quad (10)$$

De esta forma, nos encontramos en condiciones de estudiar el comportamiento ondulatorio de la temperatura en una barra de cobre y estudiar la difusión del calor en su interior así como determinar la constante de difusividad térmica.

A continuación, describiremos cómo llevamos a cabo la práctica experimental para realizar este trabajo.

II. DISPOSITIVO EXPERIMENTAL

Para poder estudiar el comportamiento de la temperatura en una barra de cobre y obtener su difusividad térmica, realizamos un esquema de conexión como el de la figura 1.

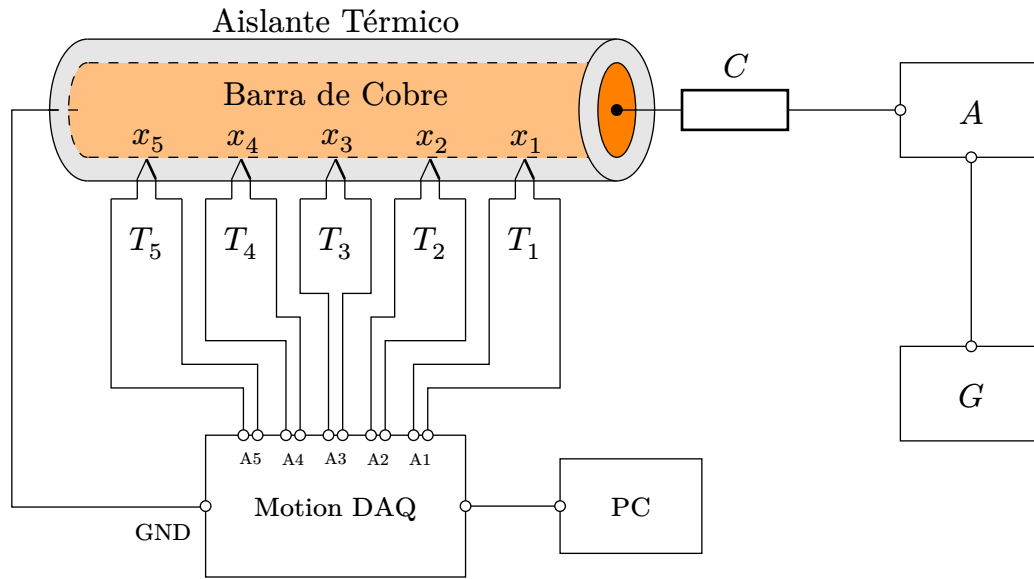


Figura 1: Esquema de conexión del dispositivo experimental utilizado (no está en escala). Un generador de funciones G envía tensión mediante un amplificador A a un calentador C que calienta una barra de cobre recubierta en un material aislante. Cinco termocuplas T_1, \dots, T_5 conectadas a un sensor Motion DAQ en los puertos A1, ..., A5, registran la temperatura en distintos puntos de la barra. Una tierra (GND) en contacto con la barra de cobre se encuentra conectada al sensor y éste a una computadora (PC).

Utilizamos un generador de funciones Tektronix AFG 3021B [8] (G) para enviar corriente a un amplificador binario de laboratorio (A), que trabajaba con una tensión de $T = (0 \text{ ó } 24 \pm 1) \text{ V}$. Mediante este instrumento, la señal amplificada se dirigía a un calentador (C) que se encontraba conectado en un extremo de una barra de cobre de longitud $L = (500.0 \pm 0.1) \text{ mm}$. Dos termocuplas tipo K (T_1 y T_2) y tres termocuplas tipo J (T_3 , T_4 y T_5), se encontraban colocadas en la superficie lateral de la barra en las posiciones $x_1 = (81.4 \pm 0.1) \text{ mm}$, $x_2 = (123.1 \pm 0.1) \text{ mm}$, $x_3 = (164.0 \pm 0.1) \text{ mm}$, $x_4 = (211.9 \pm 0.1) \text{ mm}$ y $x_5 = (249.6 \pm 0.1) \text{ mm}$, respectivamente, con respecto al extremo de la barra donde se encontraba el calentador. La barra se encontraba rodeada de un material aislante térmico para una mejor conducción del calor.

Las cinco termocuplas se encontraban conectadas a un sensor Motion DAQ en los puertos A1, A2, A3, A4 y A5, respectivamente, y éste a una computadora (PC). Para proteger al sensor DAQ, conectamos una tierra (GND) en el extremo restante de la barra con él.

Con este esquema de conexión, pudimos registrar la temperatura en las distintas posiciones x_1, \dots, x_5 de la barra donde se encontraban las termocuplas, y mediante el sensor DAQ, analizamos los datos obtenidos en la computadora.

En la siguiente sección, desarrollaremos las distintas prácticas realizadas con este dispositivo experimental, los resultados obtenidos en cada caso y sus respectivas conclusiones.

III. MÉTODOS PARA DETERMINAR LA DIFUSIVIDAD TÉRMICA DEL COBRE

A. Período De Calentamiento: Ajuste Mediante La Función Error Complementaria

1. Práctica Experimental

Con el objetivo de hallar la constante de difusividad térmica de nuestra barra de cobre, estudiamos el período de calentamiento de la barra. Para ello, mediante el esquema de conexión de la figura 1, medimos con un termómetro la temperatura ambiente cuyo valor se encontraba en $T_{\text{amb}} = (21.7 \pm 0.1)^\circ\text{C}$. Enviamos mediante el generador de funciones una onda cuadrada con una tensión pico a pico de $V = (5.0 \pm 0.1) \text{ V}$, un período de $\tau = (2.0 \pm 0.1) \text{ ms}$ y un *duty* del 30%. Realizamos una medición de temperatura con respecto al tiempo de $t = (9000 \pm 1) \text{ s}$ para cada una de las cinco termocupas y mediante la computadora, ajustamos los datos obtenidos por la ecuación (8).

2. Resultados Obtenidos

En la figura 2, podemos observar los resultados de temperatura con respecto al tiempo obtenidos por las cinco termocupas en el período de calentamiento de la barra de cobre.

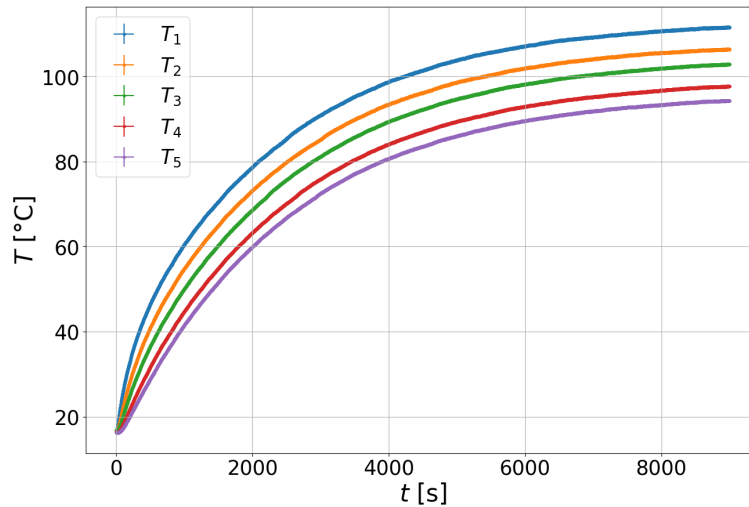


Figura 2: Evolución temporal de la temperatura en la barra de cobre en un período de $t = (9000 \pm 1) \text{ s}$ registrada por las cinco termocupas al enviar mediante el generador de funciones, una onda cuadrada con una tensión pico a pico de $V = (5.0 \pm 0.1) \text{ V}$ y un período de $\tau = (2.0 \pm 0.1) \text{ ms}$.

En primer lugar, podemos notar que todas las termocupas parten de una temperatura ligeramente inferior a la temperatura ambiente T_{amb} , y que la forma funcional de cada una de ellas es muy similar. Podemos observar que los valores de temperatura de cada termocupla son progresivamente menores y concuerdan con las posiciones de la superficie de la barra donde se encontraban, ya que las termocupas que se encontraban más próximas al calentador se calentaron más rápidamente que las más alejadas. Además, el calentamiento en cada una de ellas es monótonamente creciente y más brusco en su inicio, acercándose a un estacionario en las últimas mediciones.

En la figura 3, mostramos el ajuste no lineal realizado para la primera termocupla (T_1) mediante la ecuación (8).

Debido a que el ajuste realizado se encontraba muy alejado de los datos obtenidos para mediciones mayores a 2000 segundos, decidimos mostrar únicamente los datos ajustados iniciales. Como podemos observar en la vista ampliada de las mediciones (figura derecha), los datos se ajustaron a la ecuación (8), y pueden apreciarse distancias mayores entre las mediciones y la ecuación teórica tanto en el extremo inicial como en el extremo final. El valor de χ^2 para este ajuste es 1404597. Esto nos hace dar cuenta que el error está subestimado (ver apéndice A para ver como se estimaron). Sin embargo, el comportamiento de los datos es descripto por el modelo propuesto por la ecuación (8).

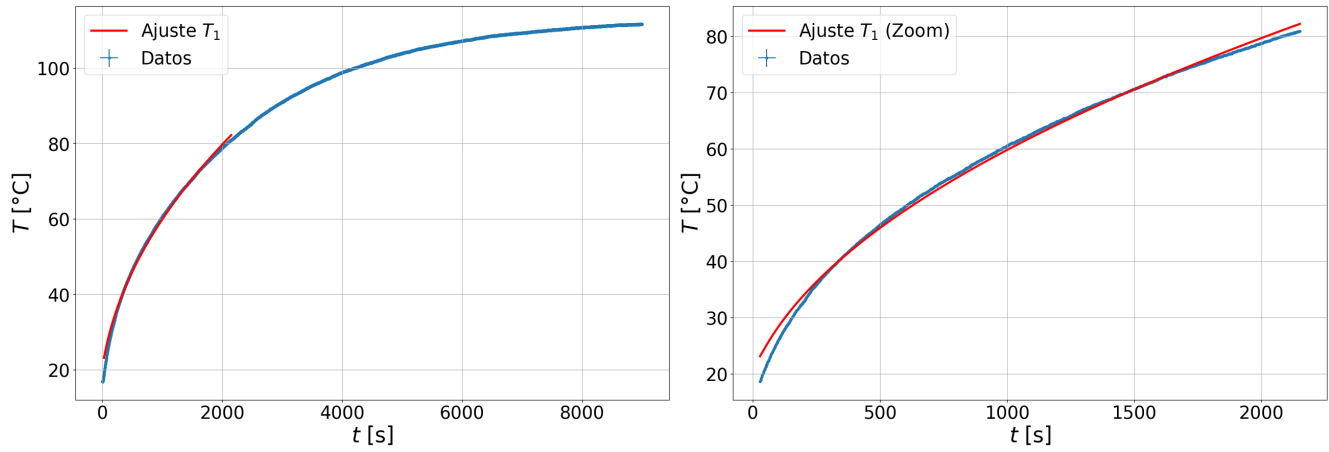


Figura 3: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (8), para las mediciones obtenidas en la figura 2 por la termocupla T_1 . En la figura derecha mostramos una vista ampliada de la región de ajuste desde el tiempo inicial hasta los 2250 segundos. Utilizamos como parámetros libres para el ajuste F_0 , t y la difusividad térmica α_{Cu} manteniendo fijos la posición de la termocupla $x = x_1$ y la conductividad térmica κ_{Cu} .

Debido a que los ajustes realizados para las cuatro termocuplas restantes fueron muy similares, mostramos únicamente el de la primera de ellas (ver apéndice B). Las constantes de difusividad térmica halladas para cada ajuste pueden observarse en la tabla 1.

Termocupla	Difusividad Térmica (mm^2/s)	Error Relativo Porcentual Respecto Al Tabulado
T_1	$\alpha_1 = 95.44 \pm 0.05$	$\sigma_1^r = 14.01\%$
T_2	$\alpha_2 = 76.83 \pm 0.03$	$\sigma_2^r = 30.78\%$
T_3	$\alpha_3 = 70.66 \pm 0.02$	$\sigma_3^r = 36.34\%$
T_4	$\alpha_4 = 60.44 \pm 0.02$	$\sigma_4^r = 45.55\%$
T_5	$\alpha_5 = 51.67 \pm 0.02$	$\sigma_5^r = 53.45\%$

Tabla 1: Constantes de difusividad térmica de la barra de cobre, obtenidas mediante el ajuste no lineal realizado por la ecuación (3) para cada termocupla en el período de calentamiento, y su respectivo error porcentual con respecto al valor tabulado en $\alpha_{Cu} = (111 \pm 1) \text{ mm}^2/\text{s}$ [5].

Como podemos notar, los valores de difusividad térmica de la barra de cobre obtenidos se encuentran próximos al valor tabulado. Mediante la primer termocupla obtuvimos el valor más cercano al esperado teóricamente con un error porcentual del 14.01 %, y pudimos notar como éste se alejó progresivamente para las siguientes termocuplas, que se encontraban más alejadas del calentador. Como es de esperarse, el error relativo aumentó consecuentemente para las termocuplas más alejadas. La constante de difusividad térmica promedio fue de $\alpha_{Cu}^{\text{pro}} = (71.01 \pm 0.01) \text{ mm}^2/\text{s}$.

3. Conclusión

En esta sección, pudimos estudiar el comportamiento de la temperatura con respecto al tiempo en la barra de cobre en el proceso de calentamiento y observar una forma funcional creciente similar en todas las termocuplas. El calentamiento de la barra fue inversamente proporcional a la distancia de la termocupla al calentador y pudimos ajustar todas las mediciones obtenidas por la ecuación (8) del modelo teórico en el intervalo inicial, lejos del estado estacionario. En este intervalo, obtuvimos las constantes de difusividad térmica del cobre con un error relativo porcentual menor al 15 % en el mejor caso, correspondiente a la primera termocupla. La difusividad térmica del cobre fue alejándose progresivamente para termocuplas más alejadas y su error relativo porcentual aumentó en consecuencia, alcanzando un valor de aproximadamente el 50 % en la última de ellas. Esto difiere con lo esperado ya que para cada termocupla obtenemos un valor distinto de difusividad térmica y los intervalos de incerteza de los mismos no se superponen.

B. Período De Enfriamiento y Velocidad de Propagación De La Onda.

1. Práctica Experimental

En esta ocasión, para determinar la difusividad térmica del cobre, utilizamos un período lo bastante largo para que se distingan bien las posiciones de los máximos de temperatura de cada termocupla, pero para asegurarnos que podamos medir una oscilación completa y que sea estacionaria estable en el tiempo, analizamos primero el proceso

de enfriamiento de la barra luego de haber sido calentada hasta el estado estacionario.

Para esto, enviamos una señal continua por medio del generador de funciones de $V = (5.0 \pm 0.1) \text{ V}$ por lo que el calentador recibía por parte del amplificador una tensión de $V = (24 \pm 1) \text{ V}$. Con esta señal, calentamos la barra de cobre hasta alcanzar el estado estacionario, y desde dicha posición apagamos la fuente de alimentación. De esta forma, registramos los datos del enfriamiento de la barra y los ajustamos por medio de la ecuación (9) para encontrar el coeficiente de transferencia de calor γ de cada termocupla y posteriormente los promediamos.

En la ecuación (9), la constante γ actúa como una frecuencia temporal, por lo que podemos definir un $\tau' = \frac{1}{\gamma_{\text{pro}}}$, obteniendo una cota superior para determinar la frecuencia de oscilación adecuada para analizar el estado estacionario. Esto se debe a que si se toma una frecuencia con un periodo cercano o mayor al valor τ' , se sabe que la temperatura va a disminuir, y cuando se encienda la señal y se vuelva a calentar el extremo de la barra, la barra no podrá recuperar la temperatura inicial, con lo que no se tendrán oscilaciones estables en el tiempo.

En estas condiciones, volvimos a calentar la barra por medio de una señal cuadrada con una tensión de $V = (5.0 \pm 0.1) \text{ V}$ con un período grande pero menor a τ' . Graficamos los datos y calculamos la velocidad de propagación en cada tramo a partir de la diferencia temporal entre los máximos Δt y la distancia entre las termocuplas Δx , tomando $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ para finalmente obtener mediante la ecuación (6) los valores de α_{Cu}^v . Discutimos los resultados obtenidos en la sección a continuación.

2. Resultados Obtenidos

En la figura 4, podemos observar los resultados de temperatura con respecto al tiempo en el período de enfriamiento de la barra registrados por las cinco termocuplas.

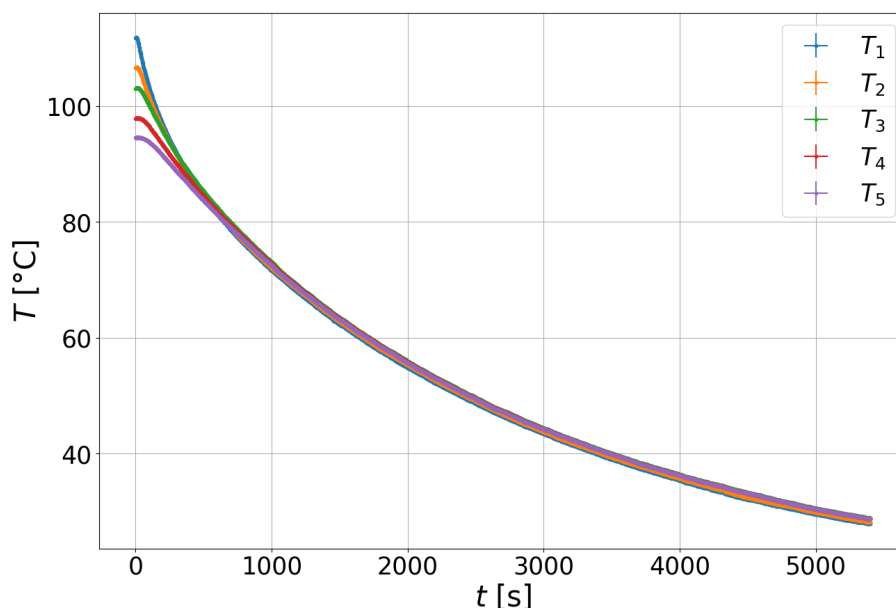


Figura 4: Gráfico de temperatura en función del tiempo para cada termocupla durante el período de enfriamiento de la barra.

Como podemos observar, las cinco termocuplas registraron un comportamiento monótonamente decreciente en la temperatura, tal y como esperábamos por la ley de enfriamiento de Newton. Además, salvo en el inicio de las mediciones, los datos se superpusieron para tiempos mayores a 500 segundos y mantuvieron esta tendencia para el resto de mediciones.

En la figura 5, mostramos el ajuste no lineal realizado para la quinta termocupla (T_5) mediante la ecuación (9).

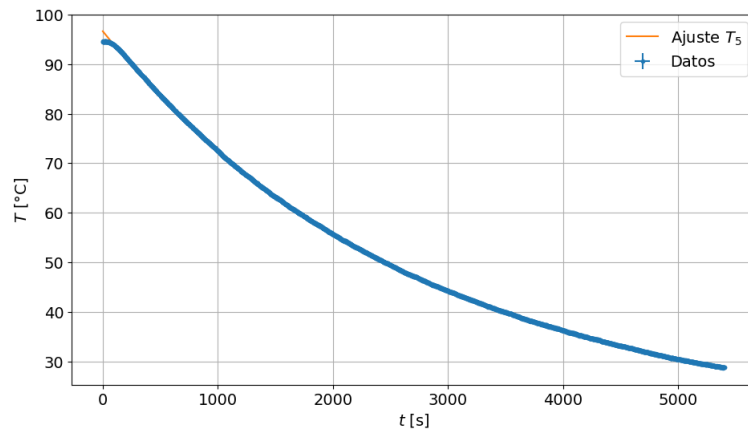


Figura 5: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (9) para las mediciones obtenidas en la figura 4 por la termocupa T_5 durante el enfriamiento de la barra, utilizando como parámetros libres T_{amb} , la temperatura ambiente; γ , el coeficiente de enfriamiento, y T_0 como la temperatura inicial. En la figura derecha mostramos los residuos del ajuste.

Debido a que los ajustes realizados para las cuatro termocupas restantes fueron muy similares, mostramos únicamente el de la última de ellas (ver apéndice C). El valor del χ^2 obtenido en este ajuste fue de 164875. Aún así, como el ajuste describe el comportamiento de los datos, concluimos que este valor se debe a una subestimación del error (ver apéndice A para el error utilizado).

En todos los ajustes realizados, dejamos como parámetro libre la temperatura ambiente T_{amb} , T_0 como el valor máximo de cada termocupa y γ el coeficiente de enfriamiento. A partir del ajuste, obtuvimos valores para la constante de enfriamiento γ , y promediándolos obtuvimos $\gamma_{\text{pro}} = (418.44 \pm 0.02) \mu\text{s}$. Con estos resultados, obtuvimos un valor de τ' de $\tau' = (2389.8 \pm 0.1) \text{s}$, y mediante la ecuación (10) obtuvimos un valor para la constante de difusividad térmica de $\alpha_{\text{Cu}} = (104.61 \pm 0.04) \text{mm}^2/\text{s}$.

Luego, para poder visualizar los máximos para cada termocupa elegimos un período $\tau = (2000.0 \pm 0.1) \text{s}$, un poco por debajo de τ' , como puede observarse en la figura 6.

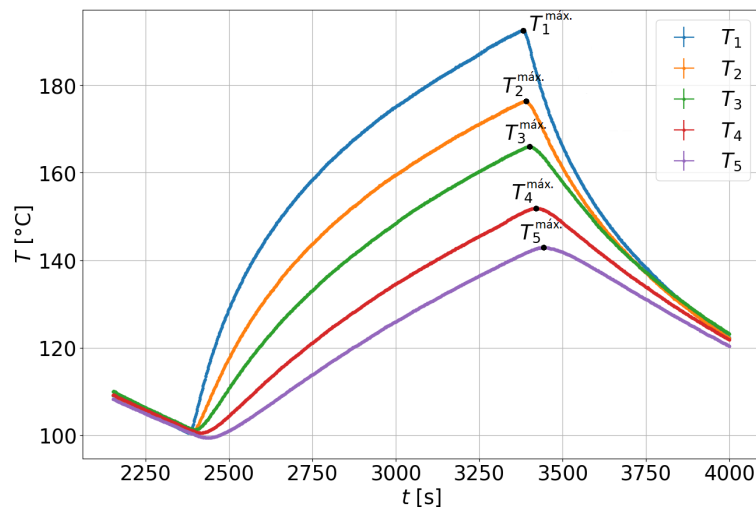


Figura 6: Gráfico de temperatura en función tiempo para cada termocupa durante el calentamiento y enfriamiento de la barra. Apreciamos los máximos para cada termocupa.

En la figura (6), calculamos las diferencias temporales entre los máximos y las velocidades de propagación v en cada tramo, además de las difusividades térmicas α_{Cu}^v correspondientes, los resultados los visualizamos en la tabla 2.

Tramo	Velocidad (mm/s)	Difusividad Térmica (mm ² /s)	Error Relativo Porcentual Respecto Al Tabulado
De T_1 a T_2	4.8 ± 0.2	$\alpha_1 = 3600 \pm 300$	$\sigma_1^r = 3143\%$
De T_2 a T_3	3.1 ± 0.1	$\alpha_2 = 1500 \pm 100$	$\sigma_2^r = 1250\%$
De T_3 a T_4	2.7 ± 0.2	$\alpha_3 = 1190 \pm 70$	$\sigma_3^r = 972\%$
De T_4 a T_5	1.3 ± 0.1	$\alpha_4 = 270 \pm 20$	$\sigma_4^r = 143\%$

Tabla 2: Resultados de velocidad de propagación v y difusividad térmica obtenidas mediante la ecuación (6) para cada tramo de distancia entre termociplas, y su respectivo error porcentual con respecto al valor tabulado en $\alpha_{Cu} = (111 \pm 1) \text{ mm}^2/\text{s}$ [5].

Como podemos ver en la tabla 2, la velocidad de las ondas en los diferentes tramos entre termocuplas fue disminuyendo sucesivamente para las termocuplas que se encontraban más alejadas al calentador, resultando en valores menores de difusividad térmica α_{Cu} . Por esta razón la barra de cobre se comporta como un medio dispersivo. No obstante cabe destacar que todos estos valores presentan una discrepancia mayor al 100 % con respecto al valor tabulado, por lo que consideramos que este método no es el mas conveniente para calcular un valor exacto de α . Definimos un valor de difusividad promedio (α_{prom}) que tiene un valor de $(1640 \pm 80) \text{ mm}^2/\text{s}$.

3. Conclusión

En esta sección, pudimos comprobar el comportamiento monótonamente decreciente de la temperatura en la barra de cobre en el período de enfriamiento para cada una de las termocuplas. Con este período, calculamos la difusividad mediante la ecuación (10) y obtuvimos un valor de $\alpha_{Cu} = (104.61 \pm 0.04) \text{ mm}^2/\text{s}$, resultado muy próximo al esperado teóricamente (un error relativo porcentual 5.76 %), por lo que este método resultó confiable.

Por otra parte, calentamos la barra para encontrar distintos tiempos máximos de temperaturas para cada termocupla, y conociendo sus posiciones y el tiempo que tardaba la onda en viajar de una a la otra, calculamos las correspondientes velocidades para cada tramo. Mediante la ecuación (6) obtuvimos la difusividad para cada tramo. Para los valores obtenidos notamos que a medida que nos alejábamos en la barra la velocidad disminuía, con lo cual la barra de cobre se comporta como un medio dispersivo. Este resultado difiere de lo que esperábamos, ya que creíamos que la velocidad de propagación de la onda era la misma en toda la barra. La difusividad térmica del cobre fue acercándose progresivamente para los tramos más alejados y su error relativo porcentual disminuyó en consecuencia, alcanzando un valor de aproximadamente el 140 % en la última de ellas. El promedio de las difusividades en la tabla 2 tiene un error relativo porcentual 1377 %.

De todas formas, concluimos que este método no es la mejor forma de calcular la difusividad térmica de la barra debido a la notable diferencia con respecto al valor tabulado.

C. Estado Estacionario: Ondas Térmicas De Propagación

1. Práctica Experimental

En esta experiencia, para hallar la constante de difusividad térmica de la barra de cobre, estudiamos el período estacionario de la barra. Para ello, en esta ocasión medimos con un termómetro la temperatura ambiente cuyo valor se encontraba en $T_0 = (26.0 \pm 0.1)^\circ\text{C}$, y enviamos una onda cuadrada con una tensión pico a pico de $V = (5.0 \pm 0.1) \text{ V}$ y con una frecuencia de $f = (0.013 \pm 0.001) \text{ Hz}$. Calentamos la barra en un tiempo de $t = (9000 \pm 1) \text{ s}$ y desde allí, registramos los valores de temperatura con respecto al tiempo.

Como las posiciones de las termocuplas son fijas y lo que medimos fue la temperatura en función del tiempo, el ajuste de los datos para cada termocupla, bajo la ecuación (4), se realizó considerando x fijo; se fijó la cantidad $\frac{2\pi}{\tau} = 2\pi \cdot 0.013 \text{ Hz}$ (de esta cantidad puede calcularse el periodo τ) ya que esa fue la frecuencia que enviamos para la cuadrada, y al aproximar por el primer armónico tiene que dominar esa frecuencia. Se dejaron como parámetros libres un offset, la amplitud del coseno (que incluiría el decaimiento, pero eso se ve al observar como cambian los datos tomados por cada termocupla) y $\frac{1}{v}$ (donde v es la velocidad de propagación de la onda). Realizando el ajuste obtenemos las fases para cada termocupla, que están relacionadas con el parámetro $\frac{1}{v}$ y la posición de cada termocupla. Así, se realiza un ajuste lineal de las fases en función de la posición y como resultado se obtiene un valor común de $\frac{1}{v}$ para todas las termocuplas. De esta forma se obtiene v , y con la ecuación (6) obtenemos el valor de difusividad térmica.

Por otro lado, considerando la amplitud máxima de las oscilaciones, es decir, valores fijos de temperatura para cada termocupla, obtuvimos el coeficiente de amortiguamiento ε analizando las temperaturas registradas por cada una de ellas con respecto a su posición respecto del extremo de la barra donde se encontraba el calentador. Con el coeficiente de amortiguamiento pudimos calcular la difusividad térmica a partir de la ecuación (5). A partir de la obtención de ambos parámetros calculamos la conductividad térmica a partir de la ecuación (7).

2. Resultados Obtenidos

En la figura 7, podemos observar el comportamiento de la temperatura con respecto al tiempo registrado por las cinco termocupas en el período estacionario.

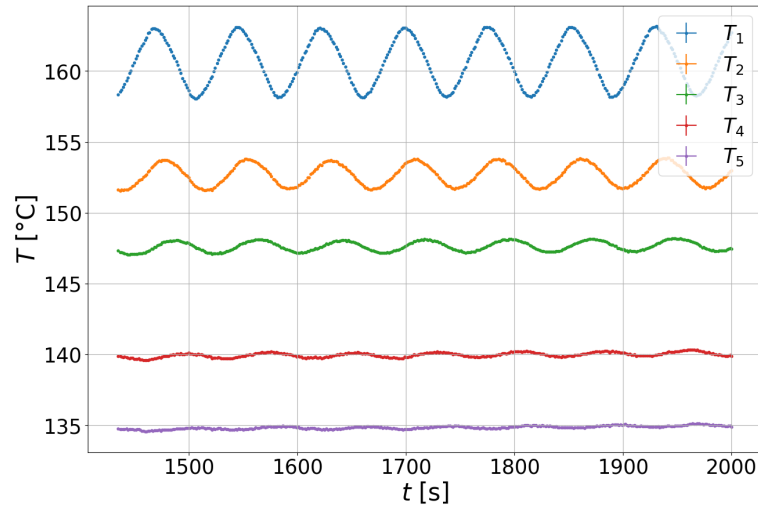


Figura 7: Comportamiento ondulatorio de la temperatura con respecto al tiempo en el estado estacionario de la barra de cobre en un período de $t = (600 \pm 1)$ s registrado por las cinco termocupas al enviar mediante el generador de funciones, una onda cuadrada con una tensión pico a pico de $V = (5.0 \pm 0.1)$ V y una frecuencia de $f = (0.013 \pm 0.001)$ Hz.

Como podemos notar, al alimentar al sistema con una onda cuadrada, el calentador se calienta y se enfría constantemente, produciendo ondas térmicas de propagación en la barra de cobre. La amplitud de estas ondas decae progresivamente con la distancia, tal y como predice la ecuación (3) y la temperatura registrada por cada termocupla es menor para distancias mayores por disipación de calor. Podemos destacar también el hecho de que las ondas observadas son muy similares a una única onda sinusoidal, por lo que en principio, la aproximación por el primer armónico parece correcta.

En la figura 8, mostramos el ajuste no lineal realizado para la primera termocupla mediante la ecuación (4).

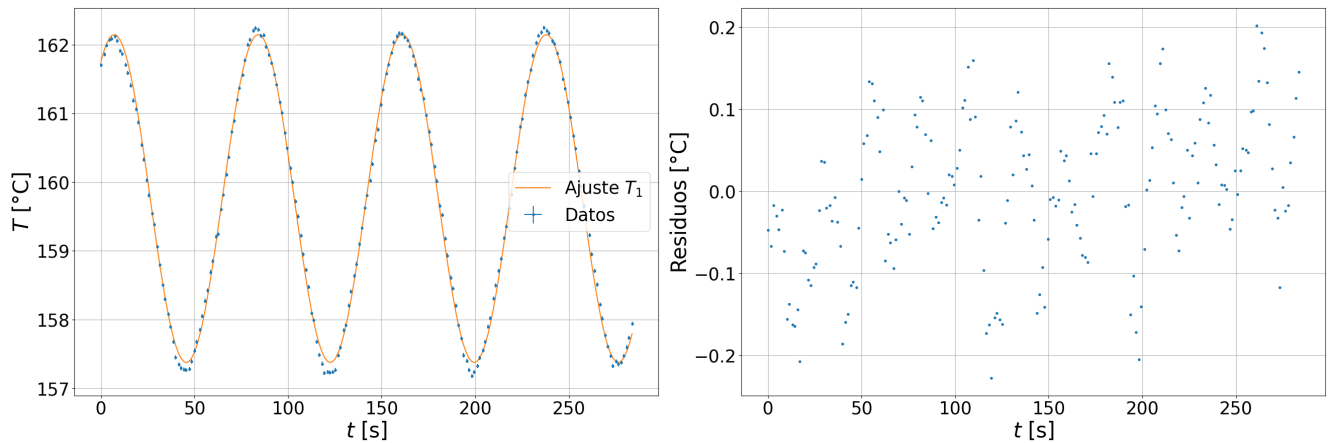


Figura 8: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (4), para las mediciones obtenidas en la figura 7 por la termocupla T_1 . En la figura derecha mostramos los residuos del ajuste. Utilizamos como parámetros libres para el ajuste $C = T_0/2$, $B = Ae^{-\epsilon x_1}$, la velocidad v y el tiempo t manteniendo fijos la posición de la termocupla $x = x_1$, y la frecuencia angular $\omega = 2\pi f$, con $f = (0.013 \pm 0.001)$ Hz.

Como podemos observar, los datos se ajustaron a la ecuación (4), pudiendo apreciarse una mayor discrepancia entre los datos y el ajuste en los máximos y mínimos de la onda sinusoidal. El χ^2 del ajuste tiene un valor de 1865419. Este valor, sumado al gráfico de residuos en la figura 8, nos hace dar cuenta de que los errores están subestimados. Esto no nos hace dudar de que el comportamiento de los datos está bien descrito por el modelo propuesto ya que los residuos son prácticamente aleatorios. Para experiencias futuras se recomienda hacer una mejor estimación de los errores.

Debido a que los ajustes realizados para las termocupas restantes fueron similares (ver apéndice D), mostramos únicamente la primera de ellas.

Con las fases obtenidas mediante el ajuste de las cinco termocupas, realizamos un ajuste lineal de las fases con respecto a la posición para hallar la velocidad de las ondas como puede observarse en la figura 9. El χ^2 tomó un valor de 1.7 y los residuos presentaron una distribución aleatoria por lo que el ajuste realizado fue bueno. La velocidad de propagación de la onda tomó un valor de $v = (24.9 \pm 0.3) \text{ mm}^2/\text{s}$. Con ella, podemos calcular la difusividad térmica mediante la ecuación (6) obteniendo un valor de $\alpha_{\text{Cu}}^v = (3810 \pm 10) \text{ mm}^2/\text{s}$.

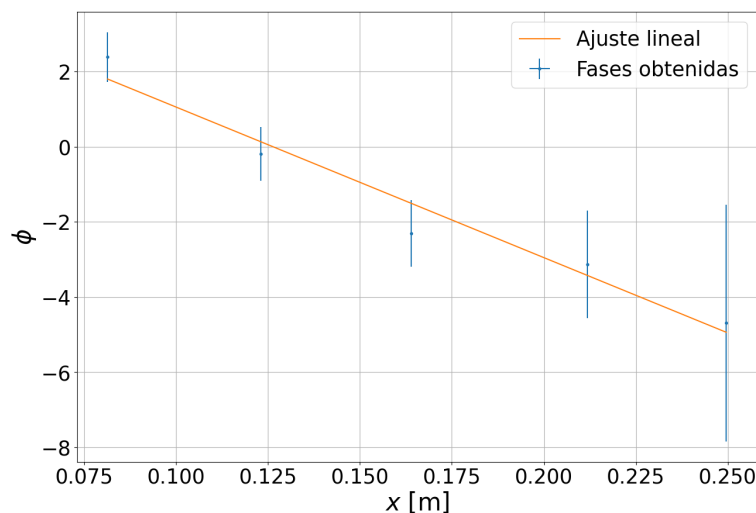


Figura 9: Ajuste lineal de las fases obtenidas para cada termocupa en función de su posición.

Por otra parte, para valores de temperatura a tiempo fijo realizamos un ajuste no lineal de los datos de temperatura en función de la posición mediante la ecuación (4). En esta ocasión consideramos al coseno como una amplitud que modificaba a la contribución de la exponencial decreciente. Contamos únicamente con 5 datos ya que utilizamos la temperatura medida por cada termocupa. En la figura 10, podemos observar el ajuste realizado cuyo valor del coeficiente de amortiguamiento fue de $\varepsilon = (3.88 \pm 0.06) \text{ m}^{-1}$. Mediante la ecuación (5), obtuvimos un valor para la constante de difusividad térmica de $\alpha_{\text{Cu}} = (2710 \pm 80) \text{ mm}^2/\text{s}$. El ajuste tiene un χ^2 de 1631 lo que nos hace dar cuenta que los errores están subestimados.

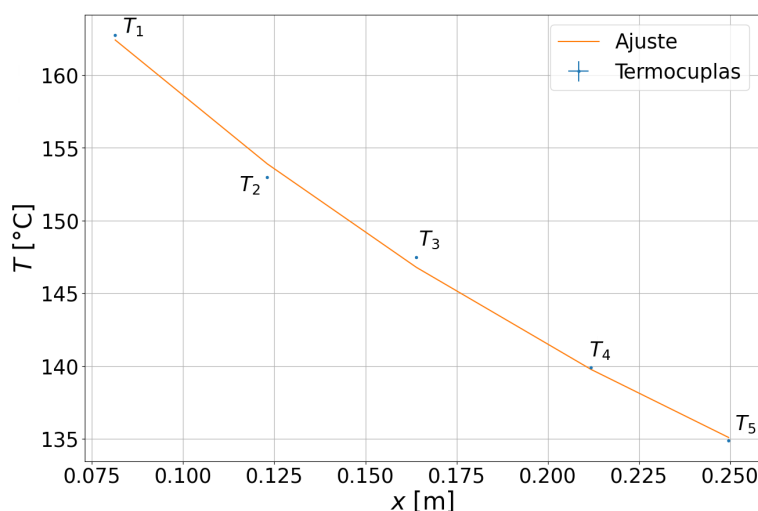


Figura 10: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (4), para un valor de temperatura, a tiempo fijo, tomado por cada termocupa.

Finalmente, teniendo los parámetros ε y v calculamos la difusividad térmica a partir de la ecuación (7) con un valor de $\alpha_{\text{Cu}} = (3210 \pm 50) \text{ mm}^2/\text{s}$, cercano al promedio entre los dos valores de $\alpha_{\text{Cu}} = (2710 \pm 80) \text{ mm}^2/\text{s}$ y $\alpha_{\text{Cu}} = (3810 \pm 10) \text{ mm}^2/\text{s}$.

3. Conclusión

Pudimos observar el comportamiento ondulatorio de la temperatura en la barra de cobre. El comportamiento de los datos es bien descrito por el modelo propuesto. Los errores fueron subestimados, se recomienda estimarlos de mejor manera para próximas experiencias (ver apéndice A para ver como se estimaron). A diferencia de los otros métodos discutidos en este trabajo, con esta medición y modelo logramos definir una velocidad de propagación de la onda común para toda la barra y que no cambia a medida que cambiamos de termocupla. También pudimos calcular el coeficiente de amortiguamiento, ε , y a partir de v y ε pudimos calcular 3 valores distintos de difusividad térmica, que están en el mismo orden de magnitud; y son aproximadamente 30 veces mas grande que el valor tabulado de difusividad del cobre. Consideramos que esta discrepancia puede deberse a que el modelo propuesto se deriva de muchas aproximaciones, además de que la barra de cobre utilizada no está hecha de cobre puro. Otra cuestión a tener en consideración es que el valor tabulado es calculado a 25 °C y nosotros trabajamos con temperaturas entre 150 °C y 160 °C.

IV. CONCLUSIONES

Concluimos que lo obtenido en las experiencias nos provee información relevante. Logramos caracterizar ondas térmicas dentro de la barra de cobre. El modelo dado por la ecuación 4 discutido en la sección 3.3, nos permitió definir una velocidad de propagación de la onda para toda la barra a pesar de que las constantes de difusividad térmica de este modelo diferían significativamente del valor tabulado.

El cálculo de difusividad a partir del ajuste de temperaturas en el transitorio por la función error complementaria (discutido en la sección 3.1), permitió obtener valores comparables con el valor tabulado pero obtuvimos distintos valores para distintas termocuplas, algo que en un principio no esperábamos.

Del método restante discutido en la sección 3.2, para el análisis de las velocidades obtuvimos valores distintos de difusividad térmica para cada tramo entre termocuplas y ninguno comparable con el valor tabulado. En cambio, para el enfriamiento, obtuvimos un valor de difusividad cercano al tabulado.

Consideramos que estas discrepancias en los métodos se deben a las pérdidas de calor de la barra y que el valor tabulado está calculado a 25 °C.

Una recomendación para futuras experiencias sería estimar de mejor manera los errores de las mediciones de temperatura realizadas por las termocuplas, ya que en este trabajo los test de confianza realizados en los ajustes no lineales mostraron una subestimación de los errores (ver apéndice A).

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Van Wylen, Gordon; Sonntag, Richard. *Fundamentals of Classical Thermodynamics*. John Wiley & Sons. Second Edition, SI Version. Página 76.
- [2] Bird, R.B.; Stewart, W.E.; Lightfoot, E.N.. *Transport Phenomena*. Transport Phenomena. Vol. 1. Página 266 (2006).
- [3] National Standard Reference Data System (NSRDS). *Thermal Conductivity of Selected Metals*. US Department of Commerce. 25 November 1966. Página 22.
- [4] <https://stefani-lab.ar/wp-content/uploads/2022/04/Difusividad-termica.pdf>
- [5] V. Casalegno, P. Vavassori, M. Valle, M. Ferraris, M. Salvo, G. Pintsuk. *Measurement of Thermal Properties of a Ceramic/Metal Joint by Laser Flash Method*. Journal of Nuclear Materials. Página 407. 2010.
- [6] J.C. Jaeger, H.S. Carslaw. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press. Second Edition (1959). Página 75.
- [7] S. Panayotova. *An Undergraduate Experiment on Thermal Properties*. European Journal of Physics. Página 308. Año 1987.
- [8] Manual de usuario generador de funciones Tektronix AFG 3021B:
<https://mmrc.caltech.edu/Tektronics/AFG3021B/AFG3021B%20Quick%20Start.pdf>

Apéndices

Apéndice A: Tratamiento de errores

Los errores para las mediciones realizadas por las termocupas se estimaron tomando una medición de 10 segundos, donde los valores de temperatura de las termocupas no variaron significativamente y estas temperaturas estaban en el orden de 100 °C. Así, utilizando el estimador de la varianza $\sum_{i=1}^N \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ se calculó la varianza para todas las termocupas. La raíz de estos valores son σ_j (desviación estándar para la termocupa j, $j = 1, 2, 3, 4, 5$), los errores de medición de la termocupa j y luego se promediaron los σ_j y se obtuvo un σ , el cual se utilizó de error para todas las mediciones.

En todas las ocasiones en que se realizó ajustes (realizados con la librería SciPy de Python), se tomó como error para los parámetros la componente adecuada de raíz cuadrada de la diagonal de la matriz de covarianza de los parámetros.

Luego, todos los resultados obtenidos en las experiencias tienen su error producto de la propagación de errores de las magnitudes con las cuales se operaron. La fórmula utilizada para propagar errores fue la siguiente:

$$\sigma_y^2 = \frac{\partial(F(x_1, x_2))^2}{\partial x_1} \delta x_1^2 + \frac{\partial(F(x_1, x_2))^2}{\partial x_2} \delta x_2^2$$

donde las x_i son las variables utilizadas para operar, las δx_i son los errores de estas variables y F es la operación realizada entre las variables y σ_y^2 el error de la variable contemplada.

Apéndice B: Período De Calentamiento: Ajuste Mediante La Función Error Complementaria.

A continuación, mostramos los ajustes no lineales realizados mediante la ecuación (8) para las termocupas T_2 , T_3 , T_4 y T_5 , cuyo resultado fue similar al ajuste realizado en la figura 3.

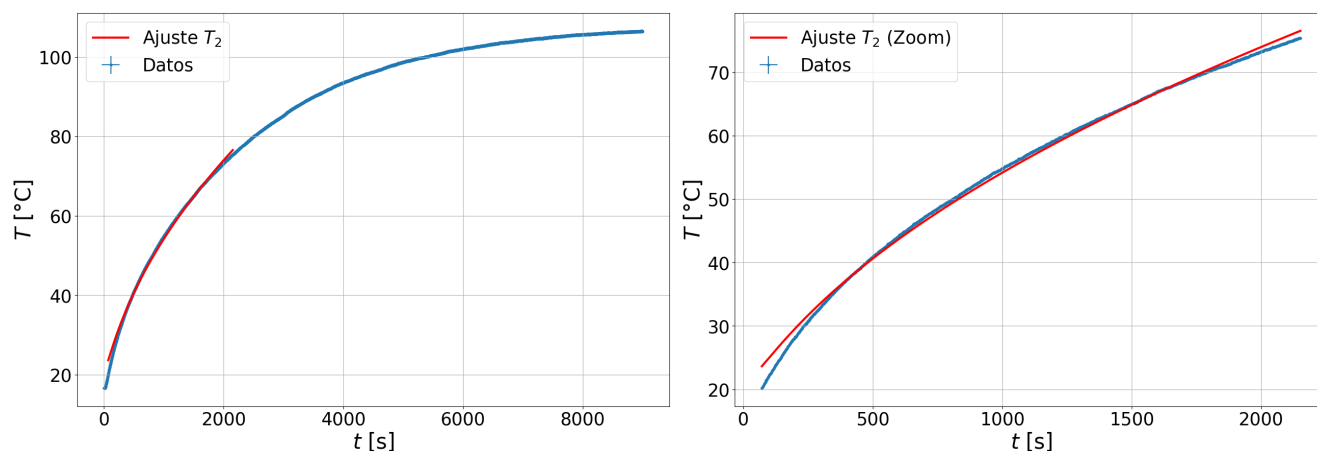


Figura 11: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (8), para las mediciones obtenidas en la figura 2 por la termocupa T_2 . En la figura derecha mostramos una vista ampliada de la región de ajuste desde el tiempo inicial hasta los 2250 segundos. Se respetaron los parámetros de ajuste de la figura 3, en este caso con la posición de la termocupa x_2 .

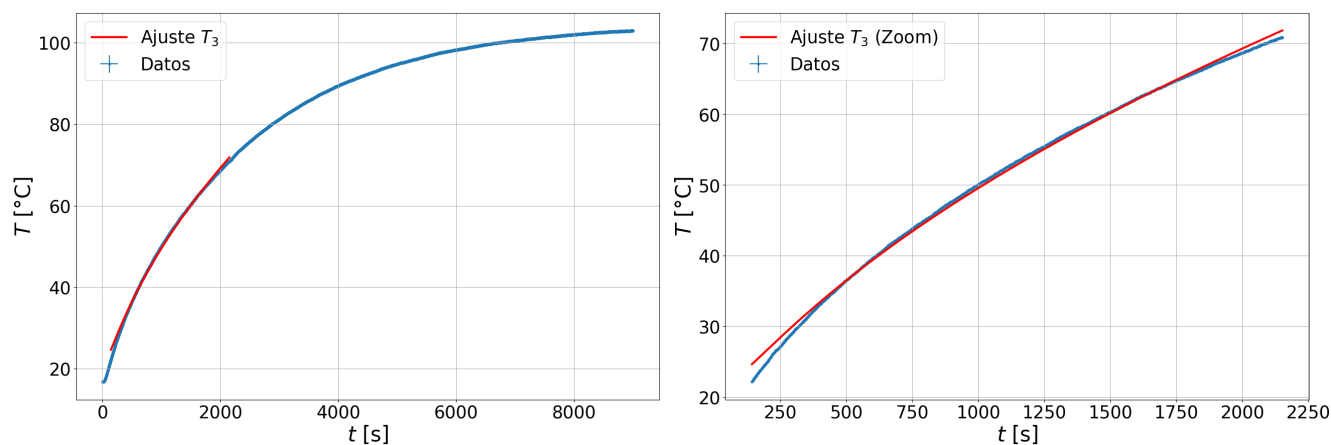


Figura 12: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (8), para las mediciones obtenidas en la figura 2 por la termocupla T_3 . En la figura derecha mostramos una vista ampliada de la región de ajuste desde el tiempo inicial hasta los 2250 segundos. Se respetaron los parámetros de ajuste de la figura 3, en este caso con la posición de la termocupla x_3 .

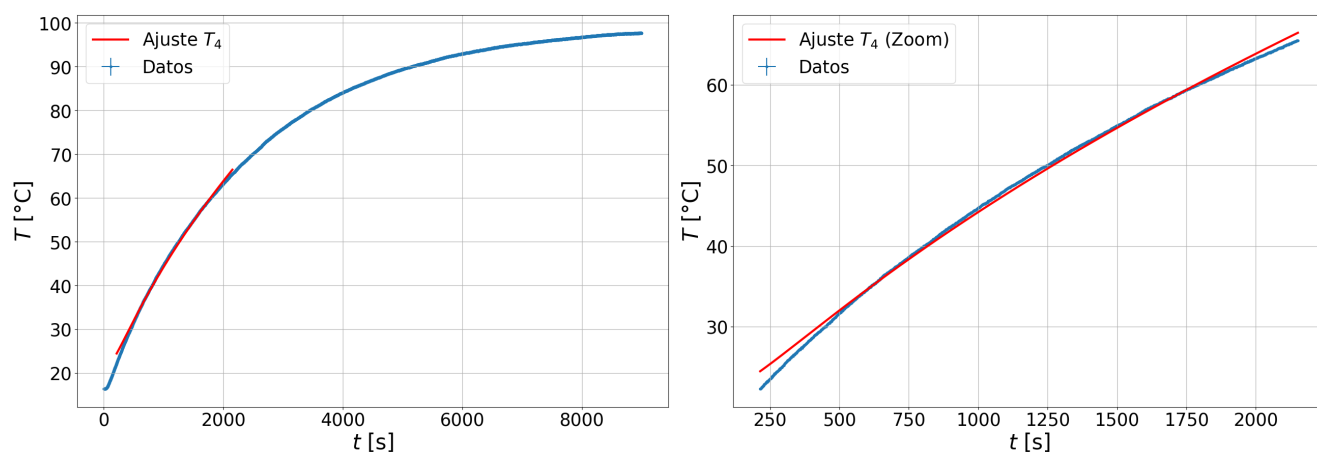


Figura 13: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (8), para las mediciones obtenidas en la figura 2 por la termocupla T_4 . En la figura derecha mostramos una vista ampliada de la región de ajuste desde el tiempo inicial hasta los 2250 segundos. Se respetaron los parámetros de ajuste de la figura 3, en este caso con la posición de la termocupla x_4 .

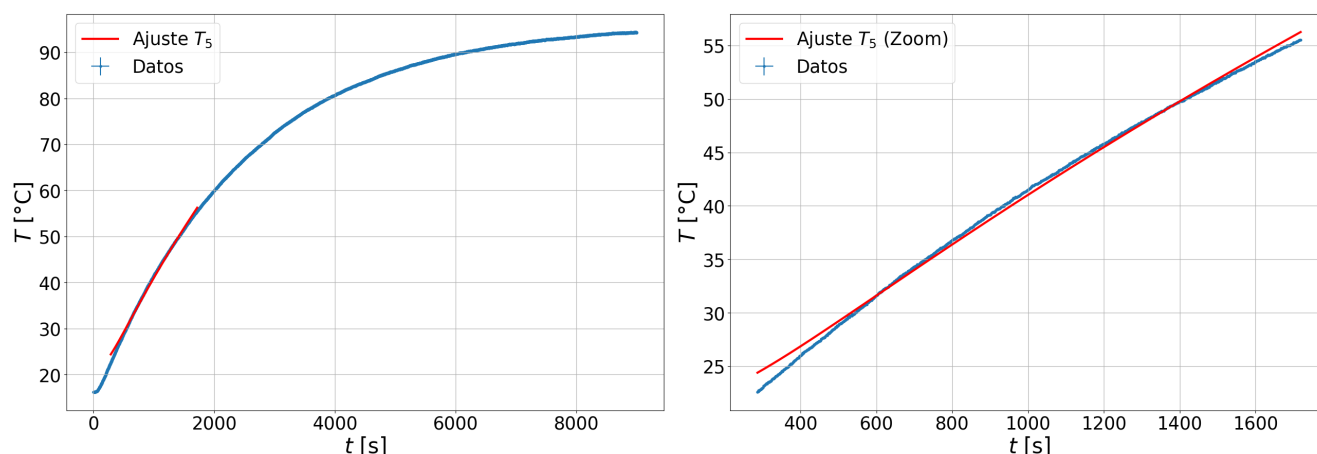


Figura 14: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (8), para las mediciones obtenidas en la figura 2 por la termocupla T_5 . En la figura derecha mostramos una vista ampliada de la región de ajuste desde el tiempo inicial hasta los 2250 segundos. Se respetaron los parámetros de ajuste de la figura 3, en este caso con la posición de la termocupla x_5 .

Apéndice C: Período De Enfriamiento y Velocidad De Propagación De La Onda.

A continuación, mostramos los ajustes no lineales realizados mediante la ecuación (9) para las termocupas T_1 , T_2 , T_3 y T_4 , cuyo resultado fue similar al ajuste realizado en la figura 5.

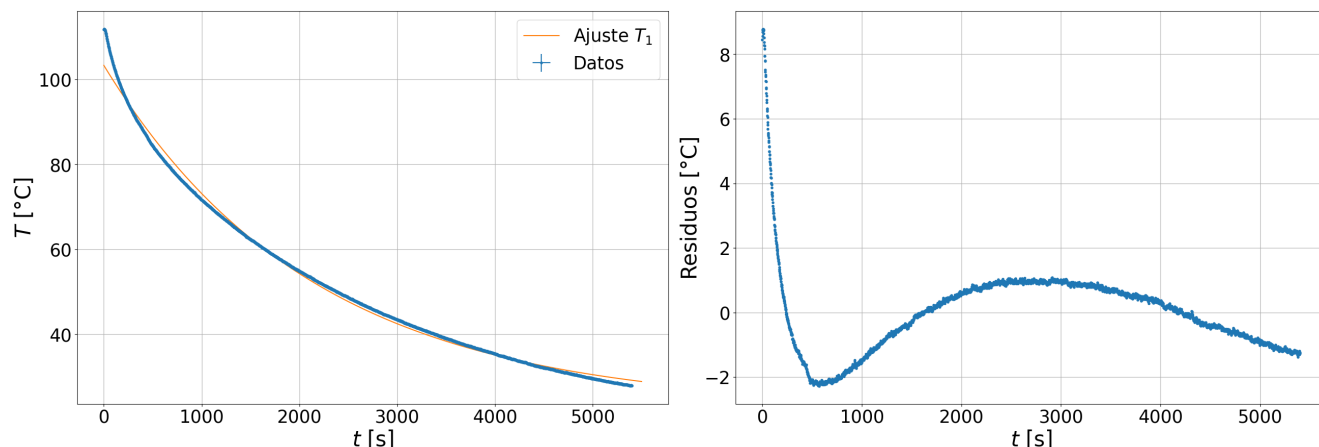


Figura 15: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (9) para las mediciones obtenidas en la figura 4 por la termocupla T_1 durante el enfriamiento de la barra.

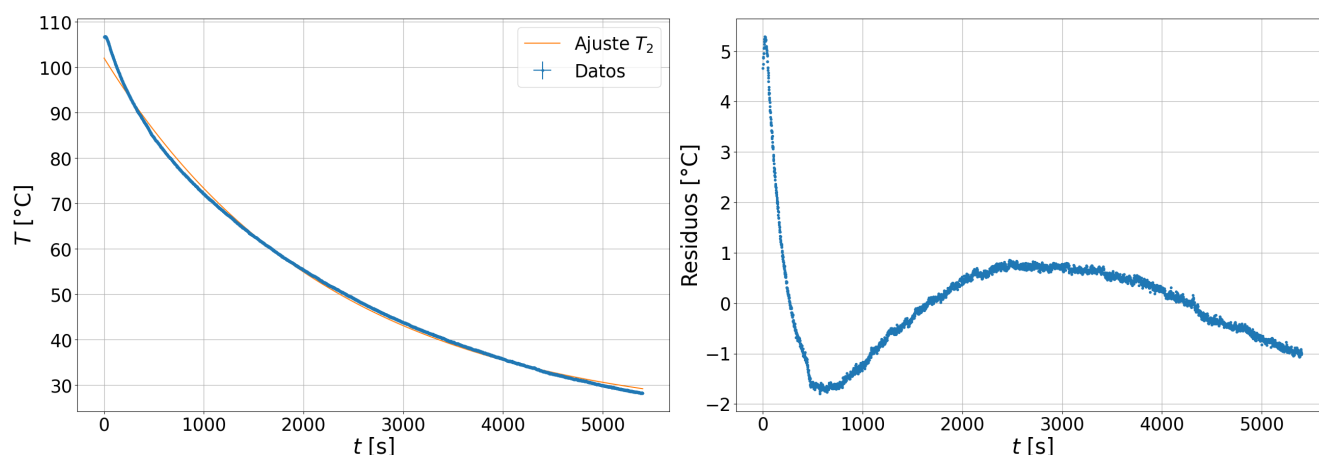


Figura 16: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (9) para las mediciones obtenidas en la figura 4 por la termocupla T_2 durante el enfriamiento de la barra.

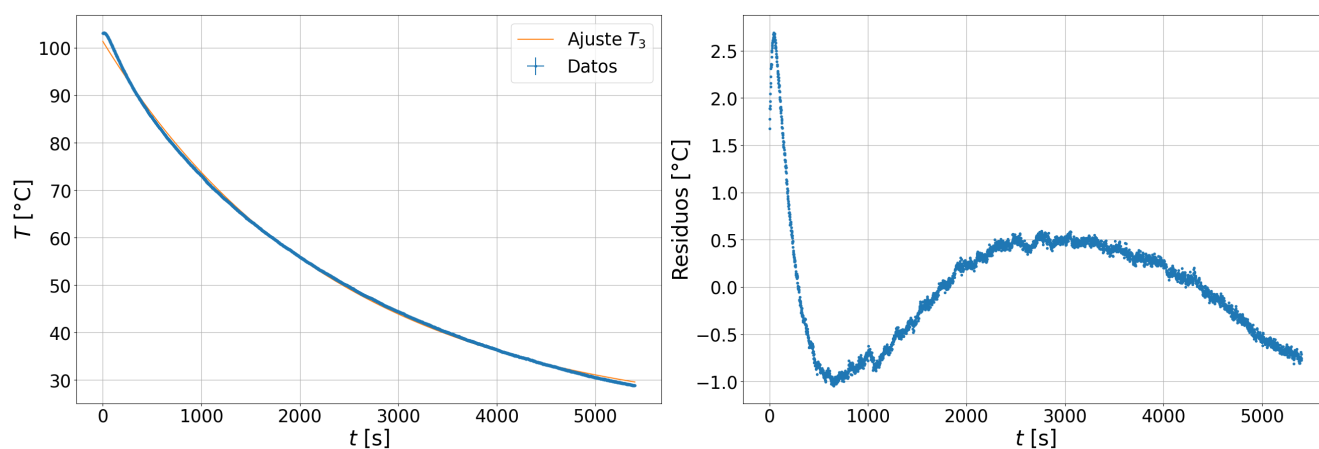


Figura 17: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (9) para las mediciones obtenidas en la figura 4 por la termocupla T_3 durante el enfriamiento de la barra.

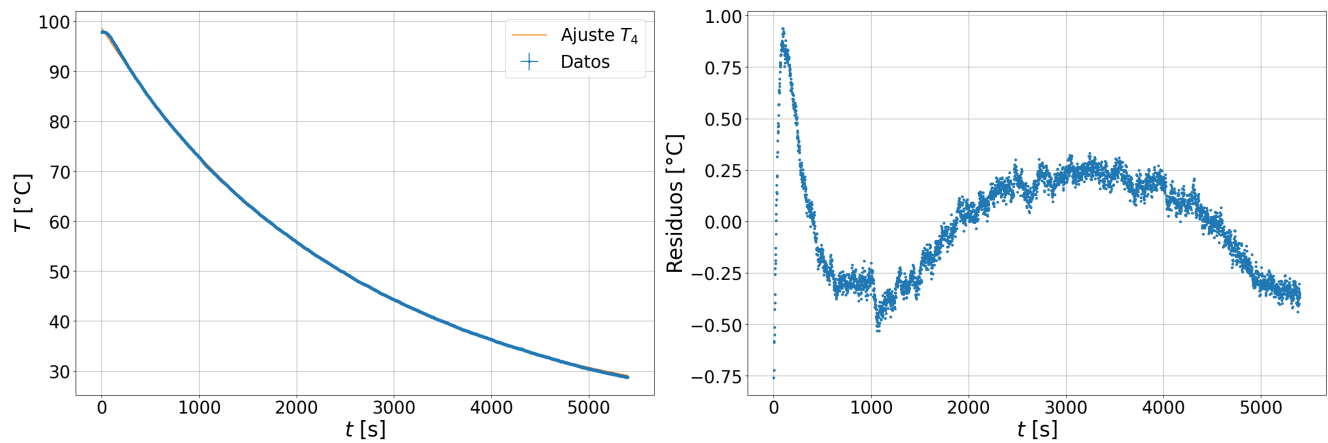


Figura 18: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (9) para las mediciones obtenidas en la figura 4 por la termocupla T_4 durante el enfriamiento de la barra.

Apéndice D: Estado Estacionario: Ondas Térmicas De Propagación.

A continuación, mostramos los ajustes no lineales realizados mediante la ecuación (4) para las termocuplas T_2 , T_3 , T_4 y T_5 , cuyo resultado fue similar al ajuste realizado en la figura 8.

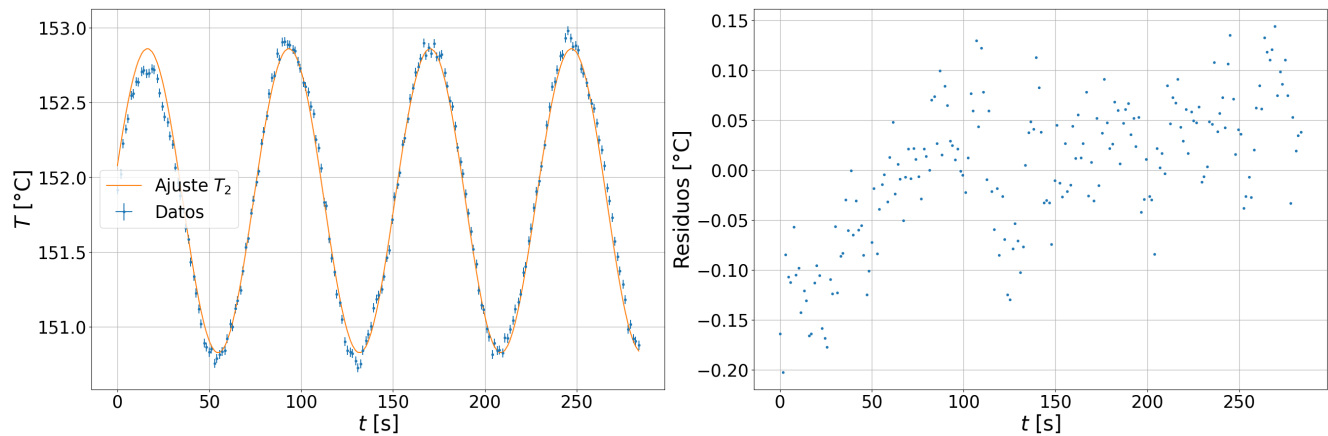


Figura 19: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (4), para las mediciones obtenidas en la figura 7 por la termocupla T_2 . En la figura derecha mostramos los residuos del ajuste.

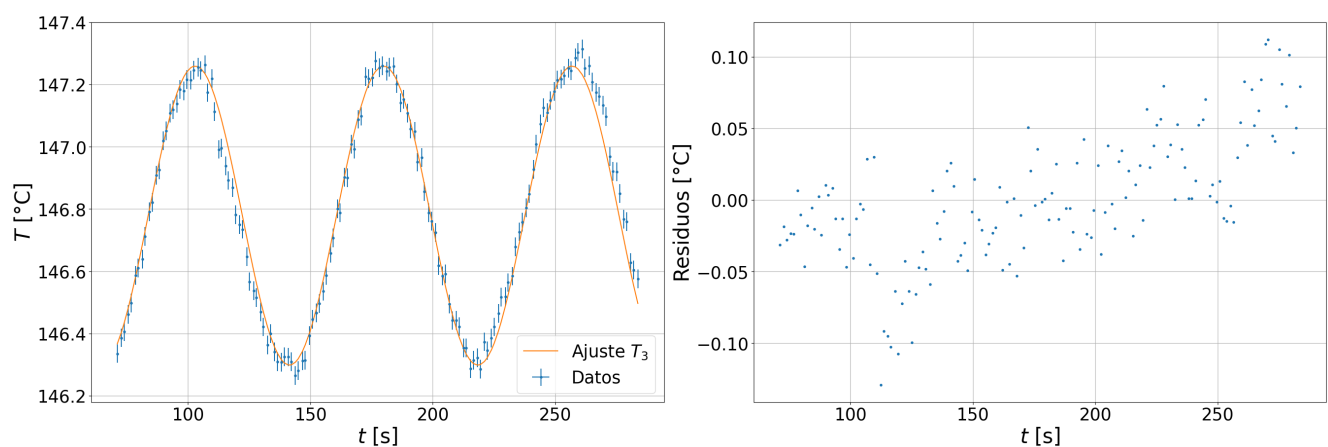


Figura 20: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (4), para las mediciones obtenidas en la figura 7 por la termocupla T_3 . En la figura derecha mostramos los residuos del ajuste.

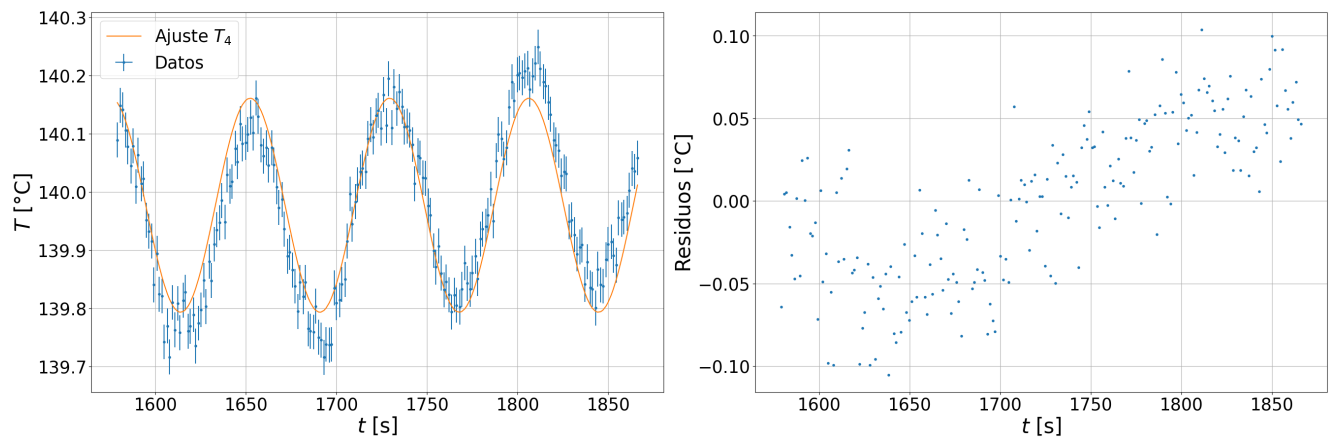


Figura 21: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (4), para las mediciones obtenidas en la figura 7 por la termocupla T_4 . En la figura derecha mostramos los residuos del ajuste.

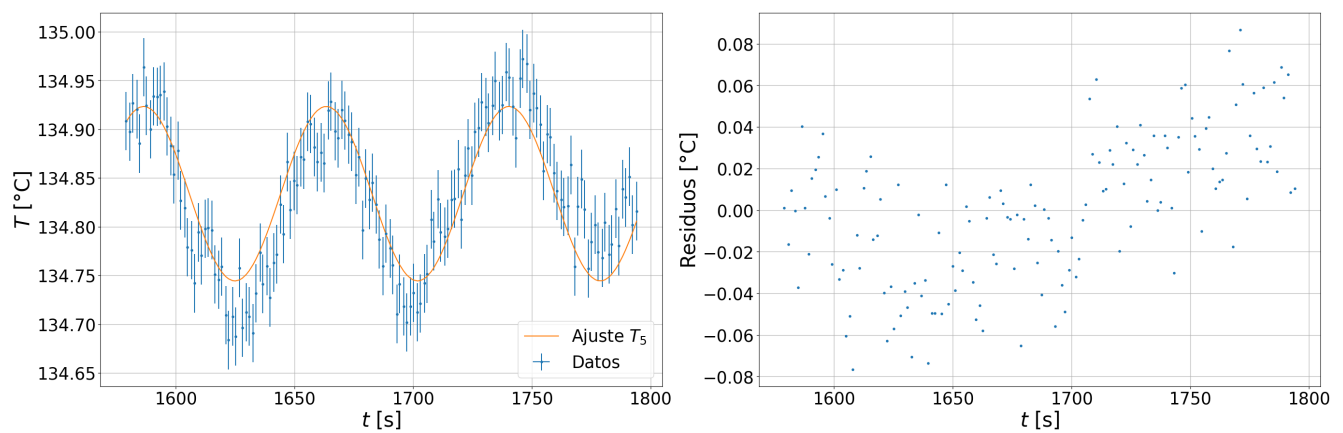


Figura 22: Ajuste no lineal realizado mediante la ecuación (4), para las mediciones obtenidas en la figura 7 por la termocupla T_5 . En la figura derecha mostramos los residuos del ajuste.