

Análisis hidrostático de campos de velocidades bidimensionales y modelado de la estructura básica de una estrella

F. Otero Zappa* y L. Diaz†

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas & Naturales, Universidad de Buenos Aires,
Pabellón 1, Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina*

9 de Febrero del 2024

En el presente trabajo se resolvieron analítica y numéricamente los ejercicios 4 y 12 de la Práctica 1: Cinemática e Hidrostática, del curso de verano correspondiente a Estructura de la Materia 1.

I. Introducción

En este trabajo, utilizaremos las definiciones del vector posición y vector velocidad en coordenadas cartesianas bidimensionales y coordenadas polares, cuyas expresiones son conocidas en el formalismo de la mecánica clásica. También utilizaremos las definiciones del elemento de longitud en coordenadas cartesianas 2D y polares correspondientes del análisis vectorial.

A. Coordenadas Cartesianas Bidimensionales

1. Vector Posición

Dado (x, y) un sistema de coordenadas cartesianas bidimensional en el plano, el vector posición \mathbf{r} se define como:

$$\mathbf{r}(t) := x(t)\hat{\mathbf{x}} + y(t)\hat{\mathbf{y}} \quad (1)$$

2. Vector Velocidad

El vector velocidad \mathbf{v} se define como la derivada del vector posición, y es de la forma:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{\mathbf{x}} + \dot{y}(t)\hat{\mathbf{y}} \quad (2)$$

3. Elemento De Longitud Vectorial

El elemento de línea vectorial se define como:

$$d\ell := dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} \quad (3)$$

B. Coordenadas Polares

1. Vector Posición

Dado (ρ, φ) un sistema de coordenadas polares en el plano, el vector posición \mathbf{r} se define como:

$$\mathbf{r}(t) := \rho(t)\hat{\boldsymbol{\rho}} \quad (4)$$

2. Vector Velocidad

El vector velocidad \mathbf{v} se define como la derivada del vector posición, y es de la forma:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\rho}(t)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho(t)\dot{\varphi}(t)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (5)$$

3. Elemento De Longitud Vectorial

El elemento de línea vectorial se define como:

$$d\ell := d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (6)$$

*email: facuotero20.88@outlook.com

†email: luiz_diaz1997@hotmail.com

4. Versor $\hat{\mathbf{x}}$ En Coordenadas Polares

En este trabajo, resultará de utilidad poder representar al versor $\hat{\mathbf{x}}$ en la base de coordenadas polares (ρ, φ) . Aplicando trigonometría básica y relacionando los versores de las ternas (x, y) y (ρ, φ) mediante el ángulo φ , se obtiene que:

$$\hat{\mathbf{x}}(\rho, \varphi) = \cos(\varphi)\hat{\rho} - \sin(\varphi)\hat{\varphi} \quad (7)$$

5. Versor $\hat{\rho}$ En Coordenadas Cartesianas

Además, utilizaremos al versor $\hat{\rho}$ en la base de coordenadas cartesianas (x, y) , cuya expresión es de la forma:

$$\hat{\rho}(x, y) = \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (8)$$

6. Versor $\hat{\varphi}$ En Coordenadas Cartesianas

El versor $\hat{\varphi}$ en la base de coordenadas cartesianas (x, y) , es de la forma:

$$\hat{\varphi}(x, y) = \frac{-y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (9)$$

C. Líneas De Corriente

Más adelante utilizaremos las líneas de corriente que permiten visualizar los fluidos. En ellas, el tiempo t es un parámetro fijo y se definen como la derivada del elemento de longitud vectorial con respecto a un parametrizador s , de la forma:

$$\frac{d\ell(s)}{ds} = \mathbf{v}(\ell(s), t), \quad (10)$$

donde \mathbf{v} es el campo de velocidades de estudio evaluado en el elemento de longitud con parametrizador s en un tiempo fijo t .

D. Líneas De Traza

Para hallar las líneas de traza de un campo de velocidades, el procedimiento consiste en describir en representación lagrangiana la colección de elementos de fluido que en algún $t' \leq t$ pasaron por la posición \mathbf{x}_r (una posición inicial). Para ello, se reemplaza a las ecuaciones de trayectoria $\mathbf{X}(\mathbf{r}_0, t)$ por t' y definiendo:

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}_0, t') := \mathbf{x}_r, \quad (11)$$

luego, se invierte la expresión anterior para hallar $\mathbf{r}_0(\mathbf{x}_r, t')$ y se reemplaza en la expresión general para finalmente obtener:

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}_0(\mathbf{x}_r, t'), t), \quad (12)$$

una expresión para la trayectoria en función de la posición inicial \mathbf{x}_r y los tiempos t y t' .

E. Método De Runge-Kutta 4 (RK4)

El *método de Runge-Kutta 4* es un método numérico de un paso útil para resolver ecuaciones diferenciales no lineales, con un error local de $\tau(t_j, x(t_j), h) = \mathcal{O}(h^4)$ donde h , es el paso del método numérico. En este trabajo utilizaremos este método, cuya expresión es de la forma:

$$x_{j+1} = x_j + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \text{ con } 1 \leq j \leq N \quad (13)$$

donde los coeficientes k_i con $1 \leq i \leq 4$ se definen como:

- $k_1 := f(t_j, x_j)$
- $k_2 := f\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2}k_1\right)$
- $k_3 := f\left(t_j + \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2}k_2\right)$
- $k_4 := f(t_j + h, x_j + hk_3)$

F. Operador Gradiente

Para el ejercicio 12, utilizaremos el operador gradiente en coordenadas esféricas, cuya expresión es de la forma:

$$\nabla\varphi(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial\varphi(r, \theta, \varphi)}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi(r, \theta, \varphi)}{\partial\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial\varphi(r, \theta, \varphi)}{\partial\varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (14)$$

II. Ejercicio 4: Campos De Velocidades Bidimensionales

Enunciado: Hallar las trayectorias, las líneas de corriente y las trazas de una partícula ubicada en la posición (x_0, y_0) a $t = 0$, para los siguientes campos de velocidades bidimensionales:

- (i) Una corriente uniforme constante superpuesta a otra corriente uniforme ortogonal a la primera. La velocidad de la segunda corriente está modulada en forma armónica en el tiempo con período τ .
- (ii) Un flujo con campo de velocidad dado por:

$$\mathbf{v}(x, y, t) = \frac{\alpha x}{1 + \beta t} \hat{\mathbf{x}} + c \hat{\mathbf{y}}$$

- (iii) Una fuente lineal de caudal constante superpuesta a una corriente uniforme cuya velocidad V aumenta linealmente con el tiempo.
- (iv) Un sumidero lineal superpuesto a un torbellino cuya circulación decrece exponencialmente con un tiempo característico τ .

A. (i) Resolución Analítica

En este ítem, se cuenta con un campo de velocidades \mathbf{v} bidimensional con dos corrientes de fluido uniformes y ortogonales entre sí, de las cuales una de ellas está modulada armónicamente con período τ . De esta forma, si consideramos una corriente V_x uniforme (constante) en dirección $\hat{\mathbf{x}}$ y una corriente V_y uniforme modulada por una función coseno con frecuencia $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ en dirección $\hat{\mathbf{y}}$, el campo será de la forma:

$$\boxed{\mathbf{v}(x, y, t) = V_x \hat{\mathbf{x}} + V_y \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \hat{\mathbf{y}}}, \quad (15)$$

donde en un principio $V_x, V_y \in \mathbb{R}$.

1. Trayectorias

Para hallar las trayectorias de una partícula ubicada en una posición (x_0, y_0) a $t = 0$ igualamos el campo dado por la Ec. (15) con la expresión del vector velocidad en coordenadas cartesianas bidimensionales dado por la Ec. (2), de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y, t) &= \mathbf{v}(t) \\ V_x \hat{\mathbf{x}} + V_y \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \hat{\mathbf{y}} &= \dot{x}(t) \hat{\mathbf{x}} + \dot{y}(t) \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Igualando componente a componente, se tiene que:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = V_x \\ \frac{dy(t)}{dt} = V_y \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \end{cases}.$$

Integrando ambas expresiones (la primera es una función constante y la segunda es un coseno que requiere una sustitución), se obtienen directamente las ecuaciones de la trayectoria tanto para la coordenada x como la coordenada y , de la forma:

$$\boxed{x(t) = x_0 + V_x t} \quad (16)$$

$$\boxed{y(t) = y_0 + \frac{V_y \tau}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right)} \quad (17)$$

2. Líneas De Corriente

Para hallar las líneas de corriente, partiendo de la Ec. (10), tenemos:

$$\begin{aligned} d\ell(s) &= \mathbf{v} ds \\ dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} &= V_x ds \hat{\mathbf{x}} + V_y \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) ds \hat{\mathbf{y}}, \end{aligned}$$

Donde reemplazamos la definición del elemento de longitud dado por la Ec. (3) y el campo de velocidades dado por la Ec. (15). Igualando componente a componente y dividiendo las ecuaciones, se llega a:

$$\begin{cases} dx = V_x ds \\ dy = V_y \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) ds \end{cases} \Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} = \frac{V_y}{V_x} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right).$$

Por lo que integrando se obtiene una ecuación para las líneas de corriente, de la forma:

$$\boxed{y(x) = y_0 + \frac{V_y}{V_x} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) (x - x_0)} \quad (18)$$

3. Líneas De Traza

Para obtener las líneas de traza procedemos de acuerdo a la Sec. 1.4, evaluamos las expresiones de la trayectoria para x e y en t' , invertimos y reemplazamos nuevamente en las expresiones de trayectoria:

$$\begin{cases} x(t') = x_0 + V_x t' = x_r \\ y(t') = y_0 + \frac{V_y \tau}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t'}{\tau}\right) = y_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = x_r - V_x t' \\ y_0 = y_r - \frac{V_y \tau}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t'}{\tau}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_r + V_x(t - t') \\ y(t) = y_r + \frac{V_y \tau}{2\pi} \left[\sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) - \sin\left(\frac{2\pi t'}{\tau}\right) \right] \end{cases}.$$

De la expresión de $x(t)$ podemos despejar t' para obtener:

$$t' = \frac{x_r - x(t)}{V_x} + t, \quad (19)$$

y reemplazando esta expresión en la ecuación de trayectoria para $y(t)$ se obtiene finalmente una ecuación de trayectoria para $y(x)$, de la forma:

$$\boxed{y(x) = y_r + \frac{V_y \tau}{2\pi} \left\{ \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) - \sin\left[\frac{2\pi(x_r - x)}{V_x \tau} + \frac{2\pi t}{\tau}\right] \right\}} \quad (20)$$

B. (i) Resolución Numérica

Para resolver numéricamente el campo de velocidades dado por la Ec. (15), seguimos el siguiente procedimiento:

1. Adimensionalización

Reducimos la dimensión del problema definiendo la variable $t' = \frac{2\pi t}{\tau}$, y dividimos a la ecuación por V_x , para obtener el campo de velocidades adimensional:

$$\frac{d\mathbf{X}'}{dt'} = \hat{\mathbf{x}} + \alpha \cos(t') \hat{\mathbf{y}}, \quad (21)$$

donde definimos al parámetro $\alpha := \frac{V_y}{V_x} \in \mathbb{R}_{>0}$.

2. Trayectoria

Para poder graficar las ecuaciones de la trayectoria, utilizamos el método de Runge-Kutta 4 dado por la Ec. (13), escribimos la función adimensionalizada dada por la Ec. (21) y utilizando una cantidad de $N = 10000$ puntos, un intervalo de tiempo $dt = 0.001$, elegimos arbitrariamente el parámetro α para los valores de $\alpha = 0.25, 1$ y 2 , como puede observarse en la Fig. 1.

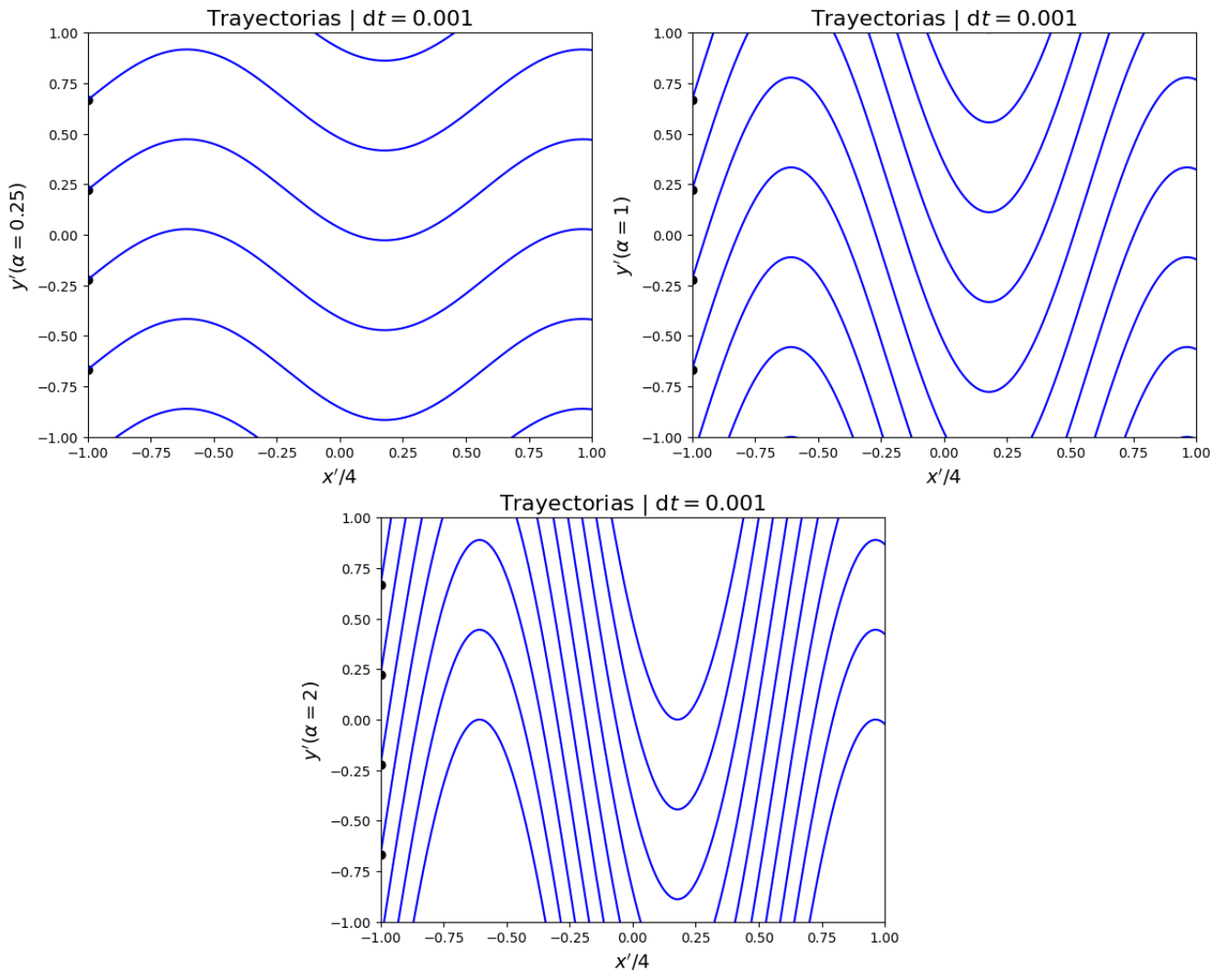


Figura 1: representación de las trayectorias obtenidas del campo de velocidades adimensionalizado dado por la Ec. (21) para unos valores de $\alpha = 0.25, 1, 2$.

Podemos ver que como es de esperarse, el aumento del parámetro α incrementa la amplitud de la onda coseno de acuerdo con la Ec. (21). Observación: dividimos a las posiciones x' por 4 únicamente para una mejor visualización de las trayectorias.

3. Líneas De Corriente

Con respecto a las líneas de corriente, utilizando el método de Runge-Kutta 4 nuevamente y función adimensionalizada dada por la Ec. (21), y en esta ocasión una cantidad de $N = 15000$ puntos, en un intervalo de tiempo $ds = 0.001$, volvimos a graficar obteniendo el resultado dado por la Fig. 2.

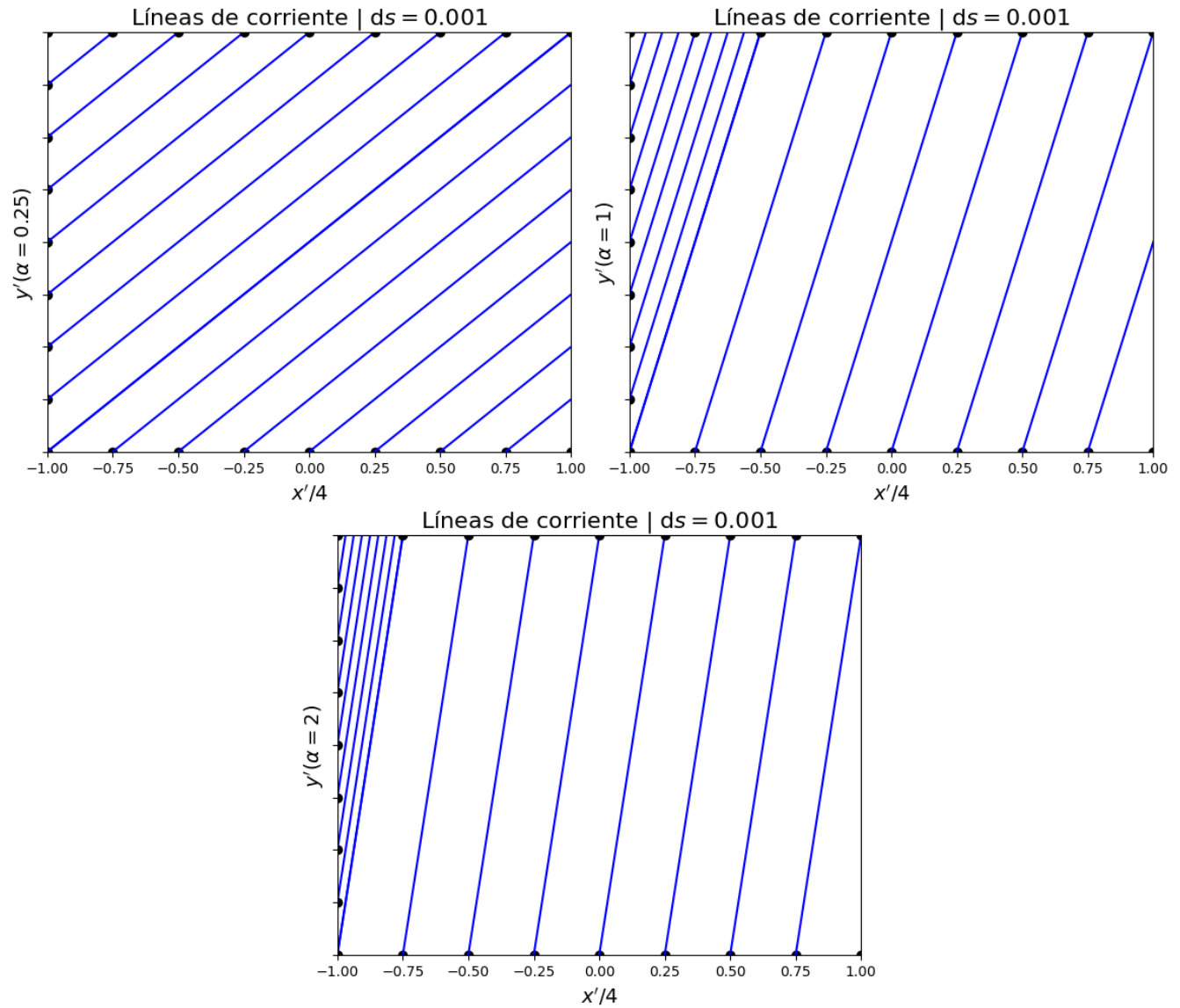


Figura 2: representación de las líneas de corriente obtenidas del campo de velocidades adimensionalizado dado por la Ec. (21) para unos valores de $\alpha = 0.25, 1, 2$.

Podemos ver que las líneas de corriente no comparten la forma funcional de las trayectorias. Éstas, son rectas con pendiente positiva, y observamos que al aumentar el valor de α aumenta el valor de sus respectivas pendientes.

C. (ii) Resolución Analítica

En este ítem, se cuenta con un campo de velocidades \mathbf{v} bidimensional de la forma:

$$\boxed{\mathbf{v}(x, y, t) = \frac{\alpha x}{1 + \beta t} \hat{\mathbf{x}} + c \hat{\mathbf{y}}}, \quad (22)$$

donde en un principio $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$.

1. Trayectorias

Para hallar las trayectorias de una partícula ubicada en una posición (x_0, y_0) a $t = 0$ procedemos análogamente al ítem (i), de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(x, y, t) &= \mathbf{v}(t) \\ \frac{\alpha x}{1 + \beta t} \hat{\mathbf{x}} + c \hat{\mathbf{y}} &= \dot{x}(t) \hat{\mathbf{x}} + \dot{y}(t) \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Igualamos componente a componente:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\alpha x}{1 + \beta t} \\ \frac{dy(t)}{dt} = c \end{cases},$$

y obtenemos expresiones integrables. La expresión para y es trivial y la expresión para x representa un logaritmo en las variables x y t (mediante la sustitución u), de la forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x} &= \alpha \int \frac{dt}{1 + \beta t} \\ \ln(x) - \ln(x_0) &= \alpha \int \frac{dt}{1 + \beta t} \\ \ln(x) &= \ln(x_0) + \frac{\alpha}{\beta} \int \frac{du}{u} \\ \ln(x) &= \ln(x_0) + \frac{\alpha}{\beta} \ln(1 + \beta t) \\ e^{\ln(x)} &= e^{\ln(x_0)} e^{\ln[(1 + \beta t)^{\alpha/\beta}]} \\ x(t) &= x_0 \sqrt[b]{(1 + \beta t)^a}. \end{aligned}$$

Así, las ecuaciones de las trayectorias para x e y , son:

$$\boxed{x(t) = x_0 \sqrt[b]{(1 + \beta t)^a}} \quad (23)$$

$$\boxed{y(t) = y_0 + ct} \quad (24)$$

2. Líneas De Corriente

Para hallar las líneas de corriente, partimos de la Ec. (10), análogamente al ítem (i):

$$\begin{aligned} d\ell(s) &= \mathbf{v} ds \\ dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} &= \frac{\alpha x}{1 + \beta t} ds \hat{\mathbf{x}} + c ds \hat{\mathbf{y}} \end{aligned}$$

Igualamos componente a componente y dividimos las ecuaciones, obteniendo:

$$\begin{cases} dx = \frac{\alpha x}{1 + \beta t} ds \\ dy = c ds \end{cases} \implies \frac{dy(x)}{dx} = \frac{c(1 + \beta t)}{\alpha x}$$

Por lo que integrando (una constante para y y la derivada del logaritmo natural de x) se obtiene una ecuación para las líneas de corriente, de la forma:

$$\boxed{y(x) = y_0 + \frac{c(1 + \beta t)}{\alpha} [\ln(x) - \ln(x_0)]} \quad (25)$$

3. Líneas De Traza

Para obtener las líneas de traza procedemos análogamente al ítem anterior, de la forma:

$$\begin{cases} x(t') = x_0 \sqrt[b]{(1 + \beta t')^a} = x_r \\ y(t') = y_0 + ct' = y_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{x_r}{\sqrt[b]{(1 + \beta t')^a}} \\ y_0 = y_r - ct' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \sqrt[b]{\left(\frac{\beta t + 1}{\beta t' + 1}\right)^a} x_r \\ y(t) = y_r + c(t - t') \end{cases}.$$

De la expresión de $x(t)$ podemos despejar t' para obtener:

$$t' = \sqrt[a]{\left(\frac{x_r}{x}\right)^\beta} \left(t + \frac{1}{\beta}\right) - \frac{1}{\beta}, \quad (26)$$

y reemplazando esta expresión en la ecuación de trayectoria para $y(t)$ se obtiene finalmente una ecuación de trayectoria para $y(x)$, de la forma:

$$\boxed{y(x) = y_r + c \left(t + \frac{1}{\beta}\right) - c \sqrt[a]{\left(\frac{x_r}{x}\right)^\beta} \left(t + \frac{1}{\beta}\right)} \quad (27)$$

D. (ii) Resolución Numérica

Para resolver numéricamente el campo de velocidades dado por la Ec. (22), seguimos el siguiente procedimiento:

1. Adimensionalización

Reducimos la dimensión del problema definiendo la variable $t' = \beta t$, y dividimos a la ecuación por c , para obtener el campo de velocidades adimensional:

$$\frac{d\mathbf{X}'}{dt'} = \frac{x'}{1+t'}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}, \quad (28)$$

donde definimos al parámetro $x' := \frac{\alpha x}{c} \in \mathbb{R}_{>0}$.

2. Trayectoria

Procediendo análogamente al ítem (i), escribimos la función adimensionalizada dada por la Ec. (28) y graficamos para $N = 10000$ puntos, en un intervalo de tiempo $dt = 0.001$, como puede observarse en la Fig. 3.

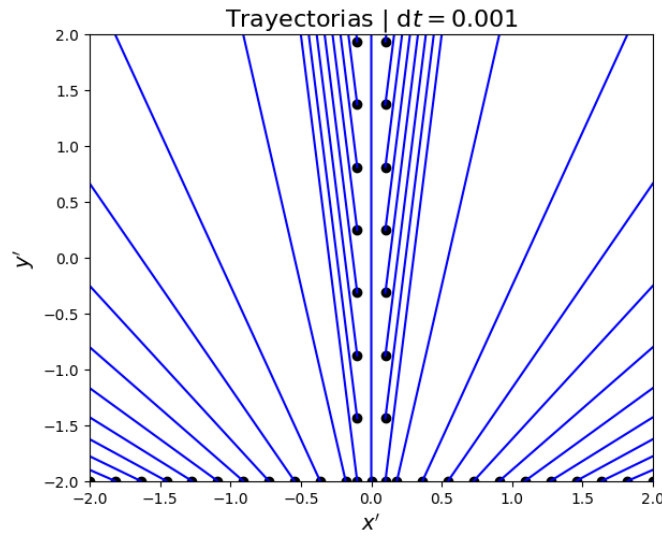


Figura 3: representación de las trayectorias obtenidas del campo de velocidades adimensionalizado dado por la Ec. (28).

3. Líneas De Corriente

Con respecto a las líneas de corriente, obtuvimos para una cantidad de $N = 15000$ puntos, en un intervalo de tiempo $ds = 0.001$, un gráfico como el de la Fig. 4.

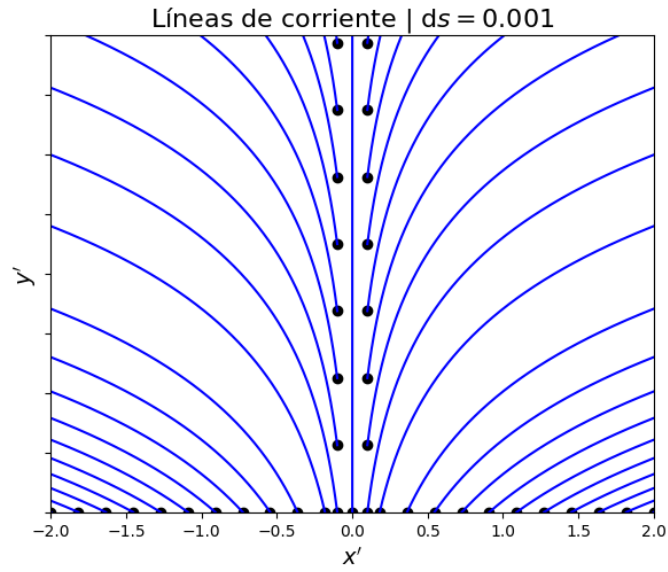


Figura 4: representación de las líneas de corriente obtenidas del campo de velocidades adimensionalizado dado por la Ec. (28).

Podemos ver que nuevamente las líneas de corriente no comparten la forma funcional de las trayectorias. En esta ocasión parecen representar, a diferencia de las trayectorias rectas, funciones logaritmo.

E. (iii) Resolución Analítica

En este ítem, se cuenta con un campo de velocidades \mathbf{v} bidimensional que consiste en la superposición de una fuente lineal de caudal Q constante y una corriente de fluido cuya velocidad V aumenta linealmente con el tiempo, por lo que en un principio contamos con un campo de la forma:

$$\mathbf{v} = \frac{Vt}{\tau} \hat{\mathbf{x}} + \frac{Q}{2\pi\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}}.$$

Podemos notar que el campo de velocidades tiene componentes en $\hat{\mathbf{x}}$ y $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ que pertenecen a distintos sistemas de referencia. Para obtener una expresión en el sistema de coordenadas polares de base (ρ, φ) , reescribiendo $\hat{\mathbf{x}}$ en término de éstas coordenadas mediante la Ec. (7), se obtiene finalmente:

$$\mathbf{v}(\rho, \varphi, t) = \left[\frac{Vt}{\tau} \cos(\varphi) + \frac{Q}{2\pi\rho} \right] \hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin(\varphi) \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (29)$$

donde $V, Q, \tau \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. Trayectorias

Para hallar las trayectorias de una partícula ubicada en una posición (ρ_0, φ_0) a $t = 0$ nos vemos tentados a proceder análogamente a los ítem (i) y (ii):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\rho, \varphi, t) &= \mathbf{v}(t) \\ \left[\frac{Vt}{\tau} \cos(\varphi) + \frac{Q}{2\pi\rho} \right] \hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin(\varphi) \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= \dot{\rho}(t) \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho(t) \dot{\varphi}(t) \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \end{aligned}$$

pero vemos que al igualar componente a componente el sistema de ecuaciones diferenciales obtenido es de la forma:

$$\begin{cases} \frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{Vt}{\tau} \cos(\varphi) + \frac{Q}{2\pi\rho(t)} \\ \rho(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} = -\sin(\varphi) \end{cases},$$

por lo que a priori no se nos ocurre qué cambio de variables u operaciones entre las ecuaciones permitiría obtener las trayectorias. Este sistema de ecuaciones diferenciales está acoplado y luce bastante complicado. Por esta razón, recurrimos a la resolución numérica para hallar sus soluciones.

2. Líneas De Corriente

Para hallar las líneas de corriente, partimos de la Ec. (10), análogamente a ítems anteriores:

$$\begin{aligned} d\ell(s) &= \mathbf{v} ds \\ d\rho \hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= \left[\frac{Vt}{\tau} \cos(\varphi) + \frac{Q}{2\pi\rho} \right] ds \hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin(\varphi) ds \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned}$$

Igualando componente a componente, obtenemos:

$$\begin{cases} d\rho = \left[\frac{Vt}{\tau} \cos(\varphi) + \frac{Q}{2\pi\rho} \right] ds \\ d\varphi = -\frac{\sin(\varphi)}{\rho} ds \end{cases}.$$

Podemos ver en esta ocasión que para hallar las líneas de corriente uno se vería tentado a despejar φ en función de s en la segunda ecuación y reemplazarla en la primera, pero ρ depende tanto de φ como de s por lo que resolver este problema analíticamente es muy complicado, ya que las ecuaciones son implícitas y se relacionan entre sí mediante 3 variables. Por esta razón, nuevamente nos conformaremos con la solución numérica.

3. Líneas De Trazas

Debido a que en este ítem no pudimos obtener las ecuaciones de trayectoria analíticamente, consecuentemente no podemos hallar las líneas de traza.

F. (iii) Resolución Numérica

Para resolver numéricamente el campo de velocidades dado por la Ec. (29), vamos a volver al problema original y considerar que la corriente uniforme se produce (para mayor generalidad) tanto en $\hat{\mathbf{x}}$ como en $\hat{\mathbf{y}}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro adimensional:

$$\mathbf{v} = \frac{Vt}{\tau}(\hat{\mathbf{x}} + \alpha\hat{\mathbf{y}}) + \frac{Q}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}},$$

para reescribir en esta ocasión al campo de velocidades en coordenadas cartesianas, recordando que $\rho := \sqrt{x^2 + y^2}$ y utilizando la escritura del versor $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ en coordenadas cartesianas de acuerdo a la Ec. (8), de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{Vt}{\tau}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\alpha Vt}{\tau}\hat{\mathbf{y}} + \frac{Q}{2\pi\rho(x,y)}\hat{\boldsymbol{\rho}}(x,y) \\ \mathbf{v}(x,y,t) &= \frac{Vt}{\tau}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\alpha Vt}{\tau}\hat{\mathbf{y}} + \frac{Q}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x\hat{\mathbf{x}}+y\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \left[\frac{Qx}{2\pi(x^2+y^2)} + \frac{Vt}{\tau}\right]\hat{\mathbf{x}} + \left[\frac{Qy}{2\pi(x^2+y^2)} + \frac{\alpha Vt}{\tau}\right]\hat{\mathbf{y}},\end{aligned}$$

por lo que el campo de velocidades bidimensional resulta:

$$\mathbf{v}(x,y,t) = \left[\frac{Qx}{2\pi(x^2+y^2)} + \frac{Vt}{\tau}\right]\hat{\mathbf{x}} + \left[\frac{Qy}{2\pi(x^2+y^2)} + \frac{\alpha Vt}{\tau}\right]\hat{\mathbf{y}}. \quad (30)$$

1. Adimensionalización

Para reducir la dimensión del problema multiplicamos a la ecuación (30) por 2π y dividimos por V , operamos y obtenemos el campo de velocidades adimensional:

$$\frac{d\mathbf{X}'}{dt'} = \left\{ \frac{1}{x' \left(1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right)} + t' \right\} \hat{\mathbf{x}} + \left\{ \frac{1}{y' \left[\left(\frac{x'}{y'}\right)^2 + 1\right]} + \alpha t' \right\} \hat{\mathbf{y}}, \quad (31)$$

donde redefinimos al campo $\frac{d\mathbf{X}'}{dt'} := \frac{2\pi\mathbf{v}}{V}$, y definimos los parámetros $x' := \frac{Vx}{Q}$, $y' = \frac{Vy}{Q}$ y $t' = \frac{2\pi t}{\tau}$.

2. Trayectoria

Procediendo análogamente a los ítems anteriores, escribimos la función adimensionalizada dada por la Ec. (31) y graficamos con el mismo N y dt utilizados anteriormente obteniendo, para unos valores de $\alpha = 0, 1$, el resultado de la Fig. 5.

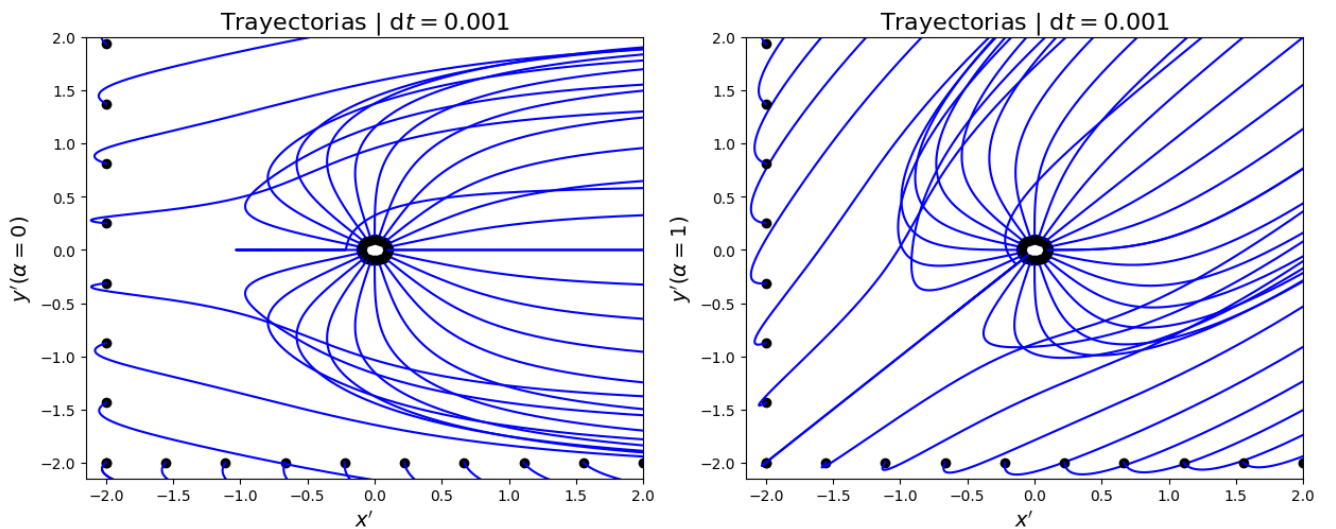


Figura 5: representación de las trayectorias obtenidas del campo de velocidades adimensionalizado dado por la Ec. (31) para unos valores de parámetro $\alpha = 0, 1$.

En esta ocasión podemos ver claramente la fuente de caudal con su centro en el origen de coordenadas (x', y') , y cómo este caudal producido se dirige hacia valores de x' positivos debido a la contribución de la corriente uniforme. Podemos notar que el parámetro α en nuestro caso, determina la dirección en la que esta corriente uniforme es producida.

3. Líneas De Corriente

Con respecto a las líneas de corriente, utilizamos el mismo N y ds que para incisos anteriores, obteniendo un gráfico como el de la Fig. 6.

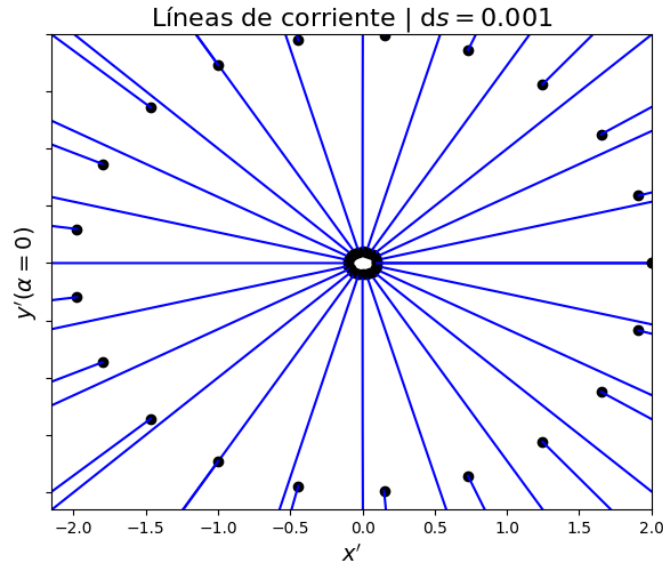


Figura 6: representación de las líneas de corriente obtenidas del campo de velocidades adimensionalizado dado por la Ec. (31) para $\alpha = 0$.

En esta ocasión, mostramos el gráfico correspondiente a $\alpha = 0$, ya que las líneas de corriente para $\alpha = 1$ eran idénticas. Vemos que las líneas son rectas que parten del origen de coordenadas de acuerdo al caudal del campo, y no notamos una contribución de la corriente de fluido uniforme.

Adicionalmente, graficamos las trayectorias y líneas de corriente nuevamente incluyendo un nuevo parámetro. Añadimos un escaleo β al tiempo t' de la componente en \hat{x} de la ecuación (31), y escogiendo unos parámetros de $\alpha = 1$, $\beta = -1$, obtuvimos un resultado como el de la Fig. 7

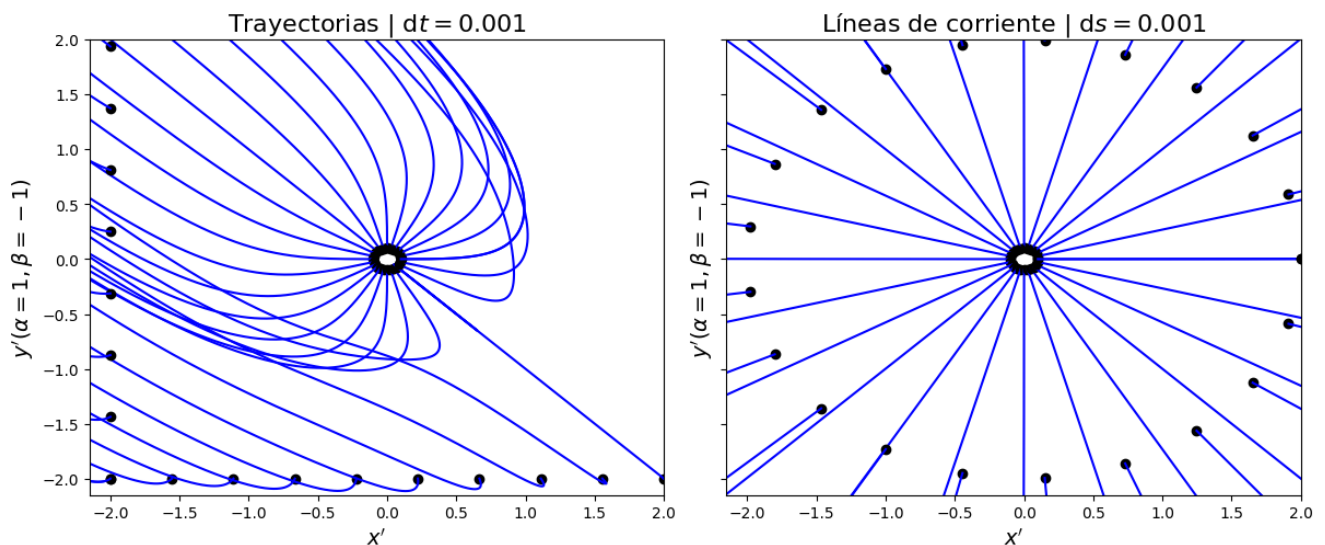


Figura 7: representación de las trayectorias y líneas de corriente obtenidas del campo de velocidades adimensionalizado dado por la Ec. (31) adicionando el parámetro β a t' en su componente en \hat{x} . Se utilizó unos parámetros de $\alpha = 1$ y $\beta = -1$.

Podemos ver que las componentes de α y β representan en conjunto (en par ordenado) la dirección en la que se

producirá la corriente uniforme a la fuente de caudal que se encuentra en el origen. Al igual que antes, las líneas de corriente no presentan cambios.

G. (iv) Resolución Analítica

En este ítem, se cuenta con un campo de velocidades \mathbf{v} bidimensional que consiste en la superposición de un sumidero lineal de caudal $-Q$ y un torbellino con circulación constante Γ que decrece exponencialmente con tiempo característico τ , por lo que podemos representarlo en coordenadas polares de la forma:

$$\mathbf{v}(\rho, \varphi, t) = -\frac{Q}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\Gamma}{2\pi\rho}e^{-\frac{t}{\tau}}\hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (32)$$

donde $Q, \tau \in \mathbb{R}_{>0}$ y $\Gamma \in \mathbb{R}$.

1. Trayectorias

Para hallar las trayectorias de una partícula ubicada en una posición (ρ_0, φ_0) a $t = 0$ procedemos análogamente a los ítems anteriores, de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\rho, \varphi, t) &= \mathbf{v}(t) \\ -\frac{Q}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\Gamma}{2\pi\rho}e^{-\frac{t}{\tau}}\hat{\boldsymbol{\varphi}} &= \dot{\rho}(t)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho(t)\dot{\varphi}(t)\hat{\boldsymbol{\varphi}}. \end{aligned}$$

Igualamos componente a componente:

$$\begin{cases} \frac{d\rho(t)}{dt} = -\frac{Q}{2\pi\rho} \\ \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\Gamma}{2\pi\rho^2}e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases},$$

y obtenemos expresiones integrables. Para la coordenada ρ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho(t)}{dt} &= -\frac{Q}{2\pi\rho} \\ 2\rho \frac{d\rho(t)}{dt} &= -\frac{Q}{\pi} \\ \frac{d}{dt}[\rho^2(t)] &= -\frac{Q}{\pi} \\ \rho^2(t) - \rho_0^2 &= -\frac{Qt}{\pi} \\ \rho(t) &= \sqrt{\rho_0^2 - \frac{Qt}{\pi}} \end{aligned}$$

pues nos quedamos con la rama positiva de la raíz ya que el radio ρ es definido positivo. Por otra parte, para la coordenada φ se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t)}{dt} &= \frac{\Gamma}{2\pi\rho^2}e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \int d\varphi(t) &= \frac{\Gamma}{2\pi} \int \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\left(\rho_0^2 - \frac{Qt}{\pi}\right)^2} dt \\ \varphi(t) &= \varphi_0 - \frac{\pi\Gamma}{2Q(Qt - \pi\rho_0^2)} E_2\left(\frac{Qt - \pi\rho_0^2}{Q\tau}\right) e^{-\frac{\pi\rho_0^2}{Q\tau}} \end{aligned}$$

donde se utilizó la definición de la exponencial integral de grado $n = 2$: $E_2(x) := \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^2} dt$. De esta forma, las ecuaciones de las trayectorias para ρ y φ , son:

$$\rho(t) = \sqrt{\rho_0^2 - \frac{Qt}{\pi}} \quad (33)$$

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \frac{\pi\Gamma}{2Q(Qt - \pi\rho_0^2)} E_2\left(\frac{Qt - \pi\rho_0^2}{Q\tau}\right) e^{-\frac{\pi\rho_0^2}{Q\tau}} \quad (34)$$

2. Líneas De Corriente

Para hallar las líneas de corriente, partimos de la Ec. (10), análogamente a ítems anteriores:

$$\begin{aligned} d\ell(s) &= \mathbf{v}ds \\ d\rho\hat{\rho} + \rho d\varphi\hat{\varphi} &= -\frac{Q}{2\pi\rho}ds\hat{\rho} + \frac{\Gamma}{2\pi\rho}e^{-\frac{t}{\tau}}ds\hat{\varphi} \end{aligned}$$

Igualando componente a componente, obtenemos:

$$\begin{cases} d\rho = -\frac{Q}{2\pi\rho}ds \\ d\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi\rho^2}e^{-\frac{t}{\tau}}ds \end{cases}.$$

En esta ocasión, procedemos despejando ρ en función del parametrizador s . Integrando análogamente como hicimos para la trayectoria, se obtiene:

$$\rho(s) = \sqrt{\rho_0^2 - \frac{Qs}{\pi}},$$

pues ρ es definido positivo. Reemplazando en la expresión para φ , podemos integrar respecto de s , de la forma:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\Gamma}{2\pi\rho^2}e^{-\frac{t}{\tau}}ds \\ \varphi(s) - \varphi_0 &= \frac{\Gamma}{2\pi}e^{-\frac{t}{\tau}} \int \frac{ds}{\rho_0^2 - \frac{Qs}{\pi}} \\ \varphi(s) &= \varphi_0 + \frac{\Gamma}{2\pi}e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\frac{\pi}{Q}\right) \int \frac{du}{u} \\ \varphi(s) &= \varphi_0 - \frac{\Gamma}{2Q} \ln(Qs - \pi\rho_0^2)e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

pero como de la ecuación de $\rho(s)$ puede obtenerse $s(\rho)$ de la forma:

$$s(\rho) = \frac{\pi(\rho_0^2 - \rho^2)}{Q},$$

reemplazando esta expresión en la ecuación para $\varphi(s)$ se obtiene finalmente una expresión para las líneas de corriente $\varphi(\rho)$, de la forma:

$$\boxed{\varphi(\rho) = \varphi_0 - \frac{\Gamma}{2Q} \ln(-\pi\rho^2)e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad (35)$$

3. Líneas De Taza

Para obtener las líneas de taza procedemos de acuerdo a la Sec. 1.4 teniendo en cuenta que en esta ocasión nos encontramos en un sistema de coordenadas polares. De esta forma:

$$\mathbf{X}(\mathbf{r}_0, t') = \rho(t')\hat{\rho} = \sqrt{\rho_0^2 - \frac{Qt'}{\pi}}\hat{\rho} = \sqrt{1 - \frac{Qt'}{\pi\rho_0^2}}\mathbf{r}_0 = \mathbf{x}_r.$$

De la última igualdad, depejamos \mathbf{r}_0 para obtener:

$$\mathbf{r}_0(\mathbf{x}_r, t') = \sqrt{\frac{\pi\rho_0^2}{\pi\rho_0^2 - Qt'}}\mathbf{x}_r. \quad (36)$$

Ahora solo resta reemplazar esta expresión nuevamente en la ecuación de trayectoria. Así, operando obtenemos finalmente:

$$\boxed{\mathbf{X}(\mathbf{r}_0(\mathbf{x}_r, t'), t) = \sqrt{\frac{\pi\rho_0^2 - Qt}{\pi\rho_0^2 - Qt'}}\mathbf{x}_r} \quad (37)$$

H. (iv) Resolución Numérica

Para resolver numéricamente el campo de velocidades dado por la Ec. (32), vamos a volver al problema original y considerar que la corriente uniforme se produce (para mayor generalidad) tanto en $\hat{\mathbf{x}}$ como en $\hat{\mathbf{y}}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un parámetro adimensional:

$$\mathbf{v} = -\frac{Q}{2\pi\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{\Gamma}{2\pi\rho}e^{-\frac{t}{\tau}}\hat{\boldsymbol{\phi}},$$

para reescribir en esta ocasión al campo de velocidades en coordenadas cartesianas, recordando que $\rho := \sqrt{x^2 + y^2}$ y utilizando la escritura del versor $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ en coordenadas cartesianas de acuerdo a la Ec. (8) y (9), de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= -\frac{Q}{2\pi\rho(x,y)}\hat{\boldsymbol{\rho}}(x,y) + \frac{\Gamma}{2\pi\rho(x,y)}e^{-\frac{t}{\tau}}\hat{\boldsymbol{\phi}}(x,y) \\ \mathbf{v}(x,y,t) &= -\frac{Q}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x\hat{\mathbf{x}}+y\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\Gamma}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}e^{-\frac{t}{\tau}}\frac{-y\hat{\mathbf{x}}+x\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= -\frac{Qx+\Gamma e^{-\frac{t}{\tau}}y}{2\pi(x^2+y^2)}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\Gamma e^{-\frac{t}{\tau}}x-Qy}{2\pi(x^2+y^2)}\hat{\mathbf{y}},\end{aligned}$$

por lo que el campo de velocidades bidimensional resulta:

$$\boxed{\mathbf{v}(x,y,t) = -\frac{Qx+\Gamma e^{-\frac{t}{\tau}}y}{2\pi(x^2+y^2)}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\Gamma e^{-\frac{t}{\tau}}x-Qy}{2\pi(x^2+y^2)}\hat{\mathbf{y}}.} \quad (38)$$

1. Adimensionalización

Para reducir la dimensión del problema multiplicamos a la ecuación (38) por d y dividimos por Q , operamos y obtenemos el campo de velocidades adimensional:

$$\boxed{\frac{d\mathbf{X}'}{dt'} = -\left\{\frac{1}{x'\left(1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right)} + \frac{\alpha e^{-t'}}{y'\left(\left(\frac{x'}{y'}\right)^2+1\right)}\right\}\hat{\mathbf{x}} + \left\{\frac{\alpha e^{-t'}}{x'\left(1+\left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right)} - \frac{1}{y'\left(\left(\frac{x'}{y'}\right)^2+1\right)}\right\}\hat{\mathbf{y}}}, \quad (39)$$

donde redefinimos al campo $\frac{d\mathbf{X}'}{dt'} := \frac{d\mathbf{v}}{Q}$, y definimos los parámetros $x' := \frac{2\pi x}{d}$, $y' = \frac{2\pi y}{d}$, $t' := \frac{t}{\tau}$ y a la constante $\alpha := \frac{\Gamma}{Q} \in \mathbb{R}$.

2. Trayectoria

Procediendo análogamente a los ítems anteriores, escribimos la función dada por la Ec. (39) y graficamos para N y dt , como puede observarse en la Fig. 8 para unos valores de $\alpha = 0.5, 1$ y 5 .

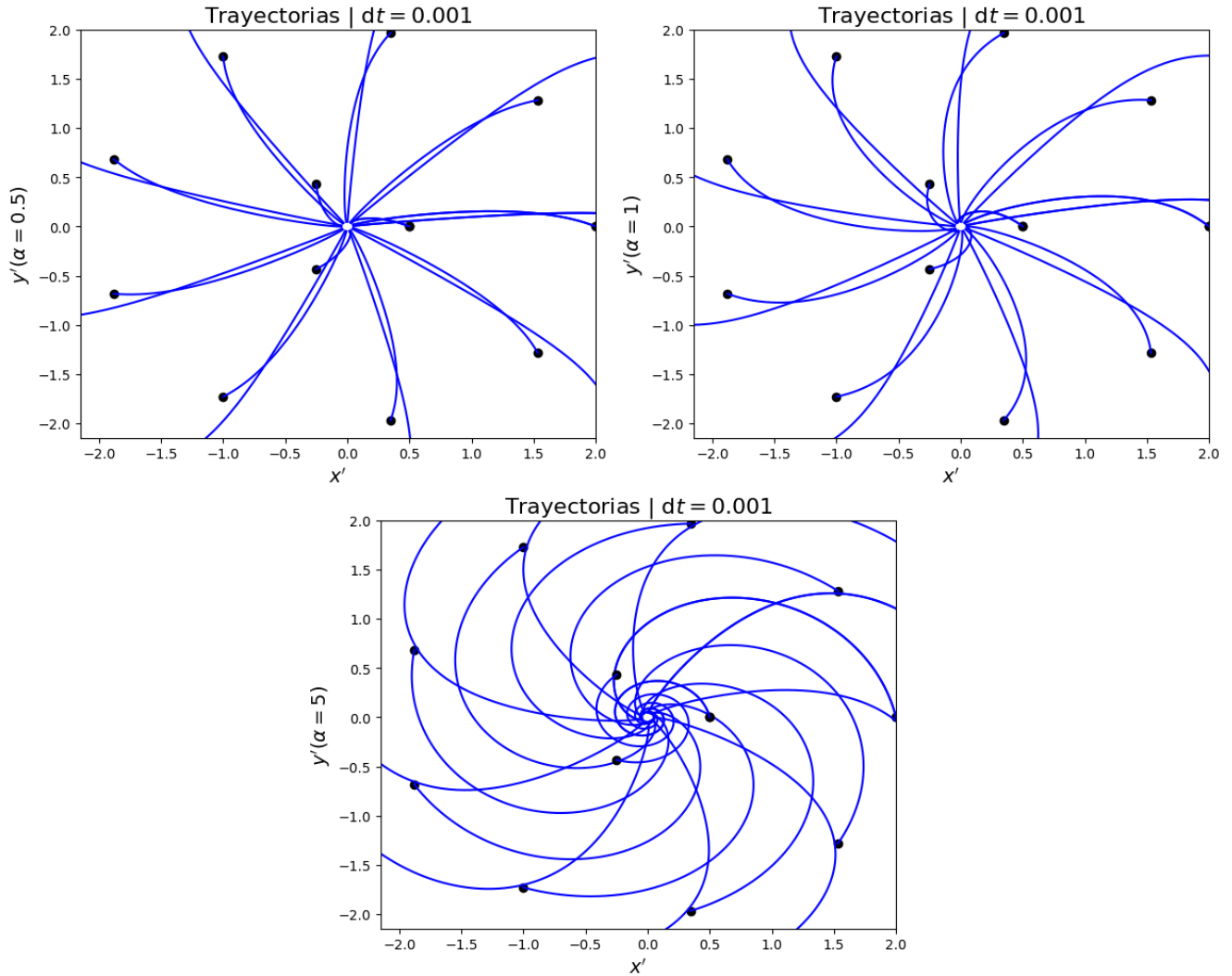


Figura 8: representación de las trayectorias obtenidas del campo de velocidades adimensionalizado dado por la Ec. (39) para unos valores de $\alpha = 0.5, 1, 5$.

Podemos notar que el incremento del parámetro α produce en esta ocasión una separación mayor entre las líneas dándoles una forma de *espiral*, y el campo es radial de acuerdo a la Ec. (32) y con forma de torbellino.

3. Líneas De Corriente

Con respecto a las líneas de corriente, obtuvimos para los mismos valores de α un gráfico como el de la Fig. 9.

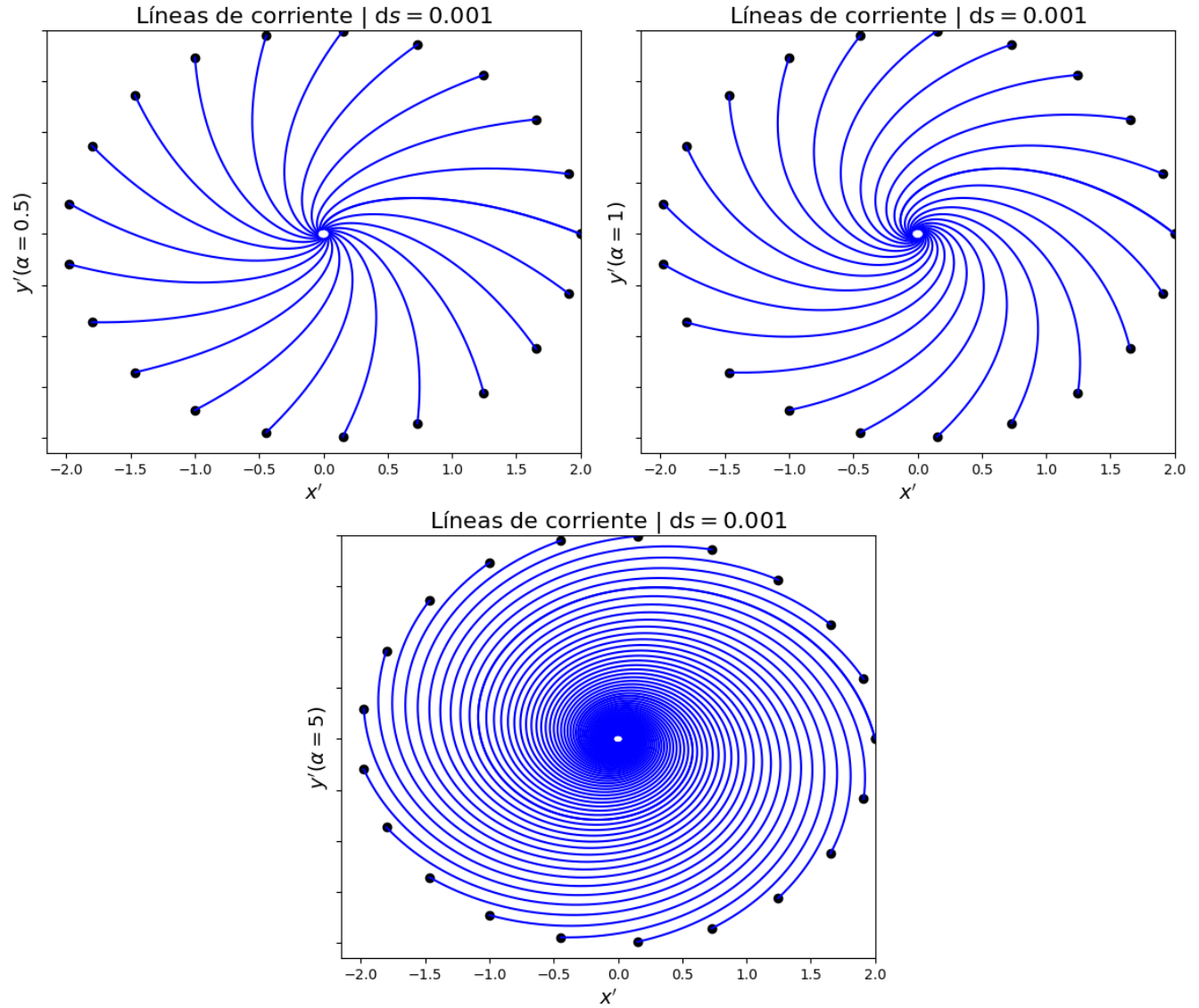


Figura 9: representación de las líneas de corriente obtenidas del campo de velocidades adimensionalizado dado por la Ec. (39) para unos valores de $\alpha = 0.5, 1, 5$.

Vemos que si bien las trayectorias y líneas de corriente no son idénticas, su forma es similar representando espirales cuya curvatura aumenta para valores mayores de α . En contraste con las trayectorias pareciera que la *frecuencia* o *cantidad* de líneas de corriente es mayor.

III. Ejercicio 12: Estrella Autogravitante

Enunciado Este problema tiene como objetivo modelar la estructura básica de una estrella. Para ello, pensemos que la estrella se compone de una masa de fluido auto-gravitante cuyos elementos se encuentran en equilibrio hidrostático, la presión evitando que la atracción gravitatoria los lleve al colapso. Asumiremos que la configuración posee simetría esférica.

- (i) Muestre que, para el fluido que compone la estrella, la ecuación de Euler puede escribirse como:

$$\frac{1}{\rho} \nabla P = - \frac{GM(r)}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

siendo $M(r) = \int_0^r 4\pi\rho(r)r^2 dr$ y $\hat{\mathbf{r}}$ el versor radial en coordenadas esféricas. Utilice para esto la Ley de Gauss del campo gravitatorio $\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$ y que la fuerza gravitatoria por unidad de volumen es $\mathbf{f}_V = \rho\mathbf{g}$.

- (ii) Asuma una ecuación de estado politrópica para el gas que compone la estrella, de forma tal que $P(\rho) = K\rho^{(n+1)/n}$, siendo n el índice politrópico y K una constante. Obtenga una ecuación diferencial para el campo de densidad de la estrella. *Ayuda: Opere sobre la ecuación de (i) hasta deshacerse de la integral.*
- (iii) A fin de simplificar la resolución, proponga la siguiente adimensionalización de las variables:

$$r = a\xi, \quad \rho = \rho_c \theta^n(\xi),$$

introduciendo la coordenada radial adimensional ξ y la función adimensional $\theta(\xi)$ que representa la densidad de masa normalizada por su valor en el centro de la estrella ρ_c . En términos de estas nuevas variables, derive una ecuación diferencial para $\theta(\xi)$ y simplifíquela eligiendo $a^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G\rho_c^{1-1/n}}$ para obtener:

$$\frac{d^2\theta(\xi)}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} + \theta^n(\xi) = 0.$$

- (iv) Determine cuáles son las dos condiciones iniciales sobre $\theta(\xi)$. *Ayuda: Use el resultado del ítem (i).*
- (v) Resuelva numéricamente la ecuación anterior para $n = 1, 2, 3, \dots, 10$. Para qué valores es la estrella finita? *Ayuda: Puede evitar la singularidad en $\xi = 0$ comenzando la integración en un valor pequeño (i.e. $\xi = 10^{-16}$) con las mismas condiciones iniciales.*
- (vi) Para los casos finitos, grafique la masa total (adimensionalizada) M_T/M_0 de la estrella en función de n , donde $M_0 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_c$. *Ayuda: Muestre antes que $M(\xi) = -4\pi a^3 \rho_c \xi^2 \theta'(\xi)$.*

A. (i) Resolución

Para demostrar que la ecuación de Euler resulta en la expresión propuesta en el ítem (i) procedemos de la siguiente manera:

- En primer lugar, si asumimos como indica el enunciado que la configuración posee *simetría esférica*, tenemos que:

$$\begin{cases} P(r, \theta, \varphi) = P(r) \\ \rho(r, \theta, \varphi) = \rho(r) \end{cases}$$

- Además, vamos a suponer que el campo gravitatorio es atractivo y radial, es decir:

$$\mathbf{g} = -g(r, \theta, \varphi)\hat{\mathbf{r}}$$

- Luego, por la ley de Gauss para el campo gravitatorio tenemos que:

$$-4\pi G\rho(r) = \nabla \cdot \mathbf{g}$$

Integrando en todo el espacio:

$$-4\pi G \iiint_{\mathbb{V}} \rho(r) dV = \iiint_{\mathbb{V}} \nabla \cdot \mathbf{g} dV$$

Por el teorema de Gauss, tenemos:

$$-4\pi G \iiint_{\mathbb{V}} \rho(r) dV = \oint_{\mathbf{s}=\partial\mathbb{V}} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S}$$

$$-4\pi G \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^r \rho(r') r'^2 \sin(\theta) dr' d\theta d\varphi = \oint_{\mathbf{s}=\partial\mathbb{V}} (-g\hat{\mathbf{r}} + 0\hat{\boldsymbol{\theta}} + 0\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \cdot [r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \hat{\mathbf{r}} + r \sin(\theta) dr d\varphi \hat{\boldsymbol{\theta}} + r dr d\theta \hat{\boldsymbol{\varphi}}]$$

$$-4\pi G \int_0^r 4\pi \rho(r') r'^2 dr = -gr^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta d\varphi (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) + 0 + 0$$

$$4\pi GM(r) = 4\pi gr^2$$

$$g = \frac{GM(r)}{r^2}$$

- Pero $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{r}}$, es decir, acabamos de probar que:

$$\boxed{\mathbf{g} = -\frac{GM(r)}{r^2}\hat{\mathbf{r}}}, \quad (40)$$

donde $M(r) = \int_0^r 4\pi \rho(r') r'^2 dr$.

- Por otra parte, por la ecuación de Euler sabemos que para un fluido que se mueve con velocidad \mathbf{v} , que se encuentra sometido a fuerzas por unidad de masa \mathbf{f} y que tiene una presión P y densidad ρ , se cumple que:

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{\nabla P}{\rho}, \quad (41)$$

pero como nuestro fluido se encuentra en equilibrio hidrostático se tiene que $\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = 0$, por lo que la ecuación de Euler es de la forma:

$$\mathbf{f} = \frac{\nabla P}{\rho}. \quad (42)$$

- Debido a que la única fuerza actuante en este problema es la fuerza gravitatoria, y sabemos que su expresión por unidad de volumen es $\mathbf{f}_V = \rho\mathbf{g} = \frac{m\mathbf{g}}{V}$, la fuerza por unidad de masa \mathbf{f} (y no por unidad de volumen) es:

$$\mathbf{f} = \mathbf{g} = -\frac{GM(r)}{r^2}\hat{\mathbf{r}},$$

por lo que finalmente, relacionando esta fuerza con la Ec. (42), tenemos que:

$$\boxed{\frac{1}{\rho(r)}\nabla P = -\frac{GM(r)}{r^2}\hat{\mathbf{r}}} \quad \blacksquare \quad (43)$$

B. (ii) Resolución

En este ítem, para el fluido que compone la estrella se propone una ecuación de estado de la forma:

$$P(\rho) = K \rho^{\frac{n+1}{n}}, \quad (44)$$

donde n, K son constantes, y se recomienda operar sobre el resultado obtenido en el ítem (i) en la Ec. (43).

- En primer lugar, debido a que la única fuerza actuante en el sistema es la fuerza gravitatoria, que es radial, reescribimos la Ec. (43) recordando la expresión del operador gradiente en coordenadas esféricas de la Ec. (14) y la definición de $M(r)$, de la forma:

$$\frac{1}{\rho(r)} \frac{\partial P(r)}{\partial r} = -\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \quad (45)$$

- Para deshacernos de la integral, derivamos con respecto a r , utilizamos el teorema fundamental del cálculo y reordenamos para llegar a una expresión reducida:

$$0 = 4\pi G \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' + \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr}$$

Derivamos toda la ecuación con respecto a r :

$$= 4\pi G \frac{d}{dr} \left[\int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \right] + \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} \right]$$

Por el teorema fundamental del cálculo y regla del producto triple:

$$= 4\pi G [\rho(r)r^2 - \rho(0)0^2] + \frac{2r}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} + r^2 \left[-\frac{1}{\rho(r)^2} \frac{d\rho(r)}{dr} \frac{dP(r)}{dr} \right] + \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{d^2 P(r)}{dr^2}$$

Dividiendo por r^2 , tenemos:

$$= 4\pi G \rho(r) - 0 + \frac{2}{r\rho(r)} P'(r) - \frac{1}{\rho(r)^2} \rho'(r) P'(r) + \frac{1}{\rho(r)} P''(r)$$

Reemplazamos la ecuación de estado politrópica:

$$\begin{aligned} &= 4\pi G \rho(r) + \frac{2}{r\rho(r)} \frac{d}{dr} \left[K \rho^{\frac{n+1}{n}}(r) \right] - \frac{\rho'(r)}{\rho(r)^2} \frac{d}{dr} \left[K \rho^{\frac{n+1}{n}}(r) \right] + \frac{1}{\rho(r)} \frac{d^2}{dr^2} \left[K \rho^{\frac{n+1}{n}}(r) \right] \\ &= 4\pi G \rho(r) + \frac{2K}{r\rho(r)} \frac{n+1}{n} \rho^{\frac{n+1}{n}-1}(r) \rho'(r) - \frac{K \rho'(r)}{\rho(r)^2} \frac{n+1}{n} \rho^{\frac{n+1}{n}-1}(r) \rho'(r) + \frac{K}{\rho(r)} \frac{n+1}{n} \frac{d}{dr} \left[\rho^{\frac{n+1}{n}-1}(r) \rho'(r) \right] \end{aligned}$$

Como $\frac{n+1}{n} - 1 = \frac{n+1-n}{n} = \frac{1}{n}$, y por la regla del producto, tenemos:

$$\begin{aligned} &= 4\pi G \rho(r) + \frac{2K}{r\rho(r)} \frac{n+1}{n} \rho^{\frac{1}{n}}(r) \rho'(r) - \frac{K \rho'(r)^2}{\rho(r)^2} \frac{n+1}{n} \rho^{\frac{1}{n}}(r) + \frac{K}{\rho(r)} \frac{n+1}{n} \left[\frac{1}{n} \rho^{\frac{1}{n}-1}(r) \rho'(r) \rho'(r) + \rho^{\frac{1}{n}}(r) \rho''(r) \right] \\ &= 4\pi G \rho(r) + \frac{2K}{r\rho^{1-\frac{1}{n}}(r)} \frac{n+1}{n} \rho'(r) - \frac{K \rho'(r)^2}{\rho(r)^{2-\frac{1}{n}}} \frac{n+1}{n} + \frac{K \rho'(r)^2}{\rho(r)^{2-\frac{1}{n}}} \frac{n+1}{n^2} + \frac{K}{\rho^{1-\frac{1}{n}}(r)} \frac{n+1}{n} \rho''(r) \end{aligned}$$

Despejando y reordenando, finalmente:

$$= 4\pi G \rho(r) + \frac{K(n+1)}{n\rho^{1-\frac{1}{n}}(r)} \left[\rho''(r) + \frac{2}{r} \rho'(r) + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \frac{\rho'(r)^2}{\rho(r)} \right]$$

- Por lo tanto, obtuvimos una ecuación diferencial ordinaria no lineal y de segundo orden para el campo de densidad de la estrella, que es de la forma:

$$4\pi G \rho(r) + \frac{K(n+1)}{n\rho^{1-\frac{1}{n}}(r)} \left[\rho''(r) + \frac{2}{r} \rho'(r) + \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \frac{\rho'(r)^2}{\rho(r)} \right] = 0 \quad (46)$$

C. (iii) Resolución

En este ítem, se propone adimensionalizar la ecuación diferencial obtenida en el ítem anterior dada por la Ec. (46) y obtener una expresión reducida, proponiendo el cambio de variables:

$$\begin{cases} r = a\xi \\ \rho(\xi) = \rho_c \theta^n(\xi) \end{cases}, \quad (47)$$

donde ξ es la nueva variable de la ecuación diferencial, ρ_c es la densidad de masa de la estrella normalizada por su valor en su centro y a es un parámetro que se elige como $a^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G \rho_c^{1-1/n}}$.

- Para llegar a la expresión propuesta por el ítem (iii), partimos de la ecuación diferencial dada por la Ec. (46):

$$0 = 4\pi G \rho(r) + \frac{K(n+1)}{n \rho^{1-\frac{1}{n}}(r)} \left[\rho''(r) + \frac{2}{r} \rho'(r) + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \frac{\rho'(r)^2}{\rho(r)} \right]$$

Como $(\theta^n)^{1-\frac{1}{n}} = \theta^{n(1-\frac{1}{n})}$, tenemos:

$$= \rho(\xi) + \frac{K(n+1)}{4\pi G \rho_c^{1-\frac{1}{n}} n \theta^{n(1-\frac{1}{n})}(\xi)} \left\{ \frac{d^2}{d(a\xi)^2} \rho(\xi) + \frac{2}{a\xi} \frac{d}{d(a\xi)} \rho(\xi) + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \frac{1}{\rho(\xi)} \left[\frac{d}{d(a\xi)} \rho(\xi) \right]^2 \right\}$$

Cuidadosamente, despejamos las constantes a que aparezcan al derivar:

$$= \rho(\xi) + \frac{a^2}{n \theta^{n-1}(\xi)} \left\{ \frac{1}{a^2} \frac{d^2 \rho(\xi)}{d\xi^2} + \frac{2}{a^2 \xi} \frac{d\rho(\xi)}{d\xi} + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \frac{1}{a^2 \rho(\xi)} \left[\frac{d\rho(\xi)}{d\xi} \right]^2 \right\}$$

Cancelando las constantes a^2 , reemplazando el cambio de variables $\rho(\xi)$ y derivando, tenemos:

$$= \rho_c \theta^n(\xi) + \frac{1}{n \theta^{n-1}(\xi)} \left\{ \frac{d}{d\xi} [\rho_c n \theta^{n-1}(\xi) \theta'(\xi)] + \frac{2}{\xi} \rho_c n \theta^{n-1}(\xi) \theta'(\xi) + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \frac{[\rho_c n \theta^{n-1}(\xi) \theta'(\xi)]^2}{\rho_c \theta^n(\xi)} \right\}$$

Derivando nuevamente y simplificando:

$$= \rho_c \theta^n(\xi) + \frac{2\rho_c}{\xi} \theta'(\xi) + \frac{1}{n \theta^{n-1}(\xi)} \left\{ \rho_c n(n-1) \theta^{n-2}(\xi) [\theta'(\xi)]^2 + \rho_c n \theta^{n-1}(\xi) \theta''(\xi) + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \frac{\rho_c^2 n^2 \theta^{2n-2}(\xi) [\theta'(\xi)]^2}{\rho_c \theta^n(\xi)} \right\}$$

Reordenando y simplificando, tenemos:

$$= \rho_c \theta^n(\xi) + \frac{2\rho_c}{\xi} \theta'(\xi) + \rho_c(n-1) \frac{[\theta'(\xi)]^2}{\theta(\xi)} + \rho_c \theta''(\xi) + \left(\frac{1}{n} - 1\right) \rho_c n \frac{[\theta'(\xi)]^2}{\theta(\xi)}$$

Dividiendo por ρ_c , tenemos:

$$\begin{aligned} &= \theta^n(\xi) + \frac{2}{\xi} \theta'(\xi) + (n-1) \frac{[\theta'(\xi)]^2}{\theta(\xi)} + \theta''(\xi) - (n-1) \frac{[\theta'(\xi)]^2}{\theta(\xi)} \\ &= \theta''(\xi) + \frac{2}{\xi} \theta'(\xi) + \theta^n(\xi) \end{aligned}$$

- Por lo tanto, obtuvimos la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no lineal para la densidad de masa adimensionalizada propuesta por el ítem (iii), cuya expresión es de la forma:

$$\boxed{\frac{d^2 \theta(\xi)}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} + \theta^n(\xi) = 0} \quad \blacksquare \quad (48)$$

D. (iv) Resolución

Para obtener las condiciones iniciales de la ecuación diferencial ordinaria dada por la Ec. (48), procedemos de la siguiente manera:

- Debido a que la Ec. (48) es una E.D.O. de segundo orden, buscamos las condiciones iniciales para la *posición* y la *velocidad* cuando $\xi = 0$, es decir:

$$\begin{cases} \theta(\xi = 0) = \theta(0) \\ \theta'(\xi = 0) = \theta'(0) \end{cases}.$$

- En primer lugar, obtengamos la condición inicial $\theta(0)$. Sabemos que la condición inicial para la densidad de la estrella es $\rho(r = 0)$, pero por enunciado del ítem (iii) el valor de la densidad de masa en el centro de la estrella es ρ_c , es decir: $\rho(r = 0) = \rho_c$. Así, por el cambio de variables de la Ec. (47), tenemos:

$$\rho(r = 0) = \rho(a.(\xi = 0))$$

$$\rho(0) = \rho_c \theta^n(\xi = 0)$$

Como $\rho(0) = \rho_c$, tenemos:

$$\theta^n(0) = \frac{\rho_c}{\rho_c}$$

$$\theta^n(0) = 1$$

$$\theta(0) = 1$$

- Por lo que la condición inicial para la función $\theta(\xi)$ es de la forma:

$$\boxed{\theta(0) = 1}$$

- Con respecto a la condición inicial $\theta'(0)$, recurrimos a la Ec. (45) y derivamos:

$$\frac{1}{\rho(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left[K \rho^{\frac{n+1}{n}}(r) \right] = -\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

$$\frac{K(n+1)}{n} \frac{1}{\rho(r)} \rho^{\frac{n+1}{n}-1}(r) \frac{d\rho(r)}{dr} = -4\pi G \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$$

Tomando límite de r tendiendo a 0, tenemos:

$$\frac{K(n+1)}{n} \lim_{r \rightarrow 0} \left[\rho^{\frac{1}{n}-1}(r) \frac{d\rho(r)}{dr} \right] = -4\pi G \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{1}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \right]$$

Como el límite del lado derecho es del tipo $\frac{0}{0}$, aplicamos la regla de l'Hôpital:

$$\frac{K(n+1)}{n} \rho^{\frac{1}{n}-1}(0) \rho'(0) = -4\pi G \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{d}{dr} \left[\int_0^r \rho(r') r'^2 dr' \right]}{\frac{d}{dr} (r^2)} \right\}$$

Por el teorema fundamental del cálculo, y como $\rho(0) = \rho_c$, tenemos:

$$\frac{K(n+1)}{n} \rho_c^{\frac{1}{n}-1} \rho'(0) = -4\pi G \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\rho(r) r^2}{2r} \right]$$

$$\frac{K(n+1)}{n} \rho_c^{\frac{1}{n}-1} \rho'(0) = -4\pi G \frac{\rho(0) \cdot 0}{2}$$

$$\frac{K(n+1)}{n} \rho_c^{\frac{1}{n}-1} \rho'(0) = 0$$

$$\rho'(0) = 0$$

Derivando la expresión $\rho(\xi)$ dada por la Ec. (47), tenemos:

$$\rho_c n \theta^{n-1}(0) \theta'(0) = 0$$

Como $\theta(0) = 1$, tenemos:

$$1^{n-1} \theta'(0) = 0$$

$$\theta'(0) = 0$$

- Por lo que la condición inicial para la función $\theta'(\xi)$ es de la forma:

$$\boxed{\theta'(0) = 0}$$

- Es decir, finalmente obtuvimos que las condiciones iniciales de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden dada por la Ec. (48) son de la forma:

$$\boxed{\begin{cases} \theta(0) = 1 \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}} \quad (49)$$

E. (v) Resolución

Para resolver numéricamente la ecuación diferencial de segundo orden dada por la Ec. (48), procedemos de la siguiente manera:

- Sabemos que una ecuación diferencial ordinaria de orden n puede reducirse a un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. De esta forma, dada:

$$\frac{d^2\theta(\xi)}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} + \theta^n(\xi) = 0$$

- Definiendo las nuevas variables:

$$\begin{cases} x(\xi) := \theta(\xi) \\ y(\xi) := \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \\ \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{d^2\theta(\xi)}{d\xi^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx(\xi)}{d\xi} = y(\xi) \\ \frac{dy(\xi)}{d\xi} = -x^n(\xi) - \frac{2}{\xi}y(\xi) \end{cases}.$$

- Es decir, obtuvimos un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, de las cuales la primera de ellas es lineal, y la segunda es no lineal, de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx(\xi)}{d\xi} = y(\xi) \\ \frac{dy(\xi)}{d\xi} = -x^n(\xi) - \frac{2}{\xi}y(\xi) \end{cases} \quad (50)$$

De esta forma, escribimos el sistema de ecuaciones diferenciales (adimensional) obtenido dado por la Ec. (50) en Python mediante el mismo programa utilizado en el ejercicio 4 y lo resolvimos numéricamente para los valores de $n = 1, 2, \dots, 10$, como se observa en la Fig. 10.

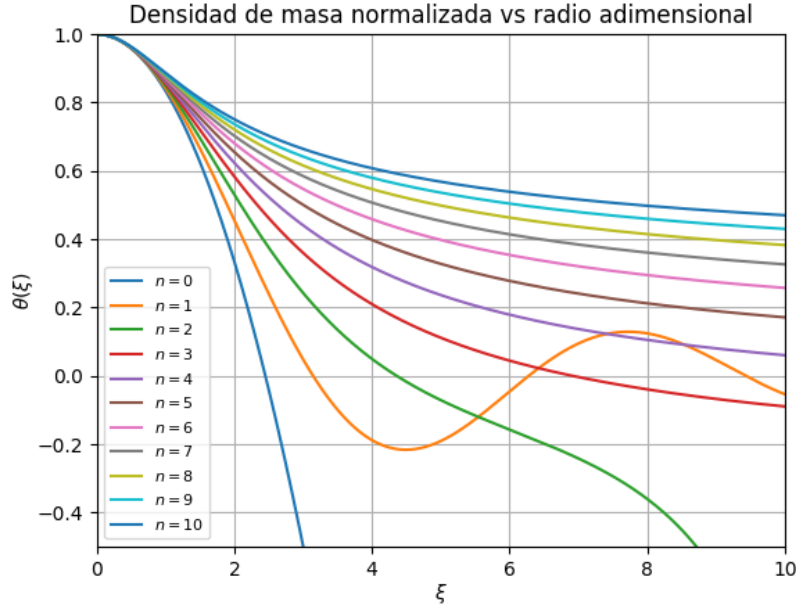


Figura 10: densidades de masa estelar normalizadas por ρ_c con respecto al radio adimensional ξ para unos valores de parámetro $n = 1, 2, \dots, 10$. Se representa la solución numérica del sistema dado por la Ec. (50) utilizando el método de Runge-Kutta 4 dado por la Ec. (13).

En la figura se puede observar cómo es la forma funcional de la densidad de masa (normalizada por ρ_c) con respecto al radio adimensional ξ . Podemos notar que para todos los casos la densidad de la estrella disminuye cuanto mayor es su radio, y para el caso de $n = 1$ y $n = 2$ en menor medida, se observan fluctuaciones de este decrecimiento para radios mayores. El hecho de que la densidad disminuya para radios mayores parece acorde a la intuición, y notamos también que el incremento del parámetro n , produce un decrecimiento menos abrupto para radios mayores en cada caso. Por último, cabe destacar que la estrella *es finita*, es decir, existe siempre y cuando la densidad $\theta(\xi) > 0$, pues una estrella con densidad negativa no tiene sentido.

F. (vi) Resolución

Para resolver este ítem, procedemos de la siguiente manera:

- En primer lugar, probemos que:

$$M(\xi) = -4\pi a^3 \rho_c \xi^2 \theta'(\xi)$$

- Para ello, utilizaremos una vez más la expresión de la Ec. (43) en su reescritura de acuerdo con la Ec. (45):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho(r)} \frac{\partial P(r)}{\partial r} &= -\frac{GM(r)}{r^2} \\ M(r) &= -\frac{r^2}{G\rho(r)} \frac{\partial P(r)}{\partial r} \end{aligned}$$

Reemplazamos la ecuación de estado:

$$= -\frac{r^2}{G\rho(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left[K \rho^{\frac{n+1}{n}}(r) \right]$$

Derivamos:

$$\begin{aligned} &= -\frac{r^2}{G\rho(r)} \frac{K(n+1)}{n} \rho^{\frac{n+1}{n}-1}(r) \rho'(r) \\ M(r) &= -\frac{r^2}{G\rho(r)} \frac{4\pi}{4\pi} \frac{K(n+1)}{n} \rho^{\frac{1}{n}}(r) \frac{d\rho(r)}{dr} \end{aligned}$$

Reemplazamos el cambio de variables de la Ec. (47):

$$\begin{aligned} M(\xi) &= -\frac{4\pi(a\xi)^2}{n\rho_c\theta^n(\xi)} \frac{K(n+1)}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1}{n}} [\theta^n(\xi)]^{\frac{1}{n}} \frac{d}{d(a\xi)} [\rho(\xi)] \\ &= -\frac{4\pi a^2 \xi^2}{n\theta^n(\xi)} \frac{K(n+1)}{4\pi G \rho_c^{1-\frac{1}{n}}} \theta(\xi) \frac{1}{a} \frac{d\rho(\xi)}{d\xi} \end{aligned}$$

Como $a^2 = \frac{K(n+1)}{4\pi G \rho_c^{1-\frac{1}{n}}}$, tenemos:

$$= -\frac{4\pi a \xi^2}{n} a^2 \theta^{1-n}(\xi) \rho_c n \theta^{n-1}(\xi) \theta'(\xi)$$

Despejando, finalmente:

$$\begin{aligned} &= -4\pi a^3 \rho_c \xi^2 \theta^{1-n+n-1}(\xi) \theta'(\xi) \\ &= -4\pi a^3 \rho_c \xi^2 \theta'(\xi) \end{aligned}$$

- Por lo que obtuvimos la expresión de la ayuda del ítem (vi):

$$\boxed{M(\xi) = -4\pi a^3 \rho_c \xi^2 \theta'(\xi)} \quad \blacksquare \quad (51)$$

Finalmente, habiendo probado el resultado propuesto, graficamos la masa total M_T de la estrella adimensionalizada por la masa $M_0 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_c$ con respecto a los valores de $n = 1, 2, \dots, 10$ utilizados anteriormente, como puede observarse en la Fig. 11.

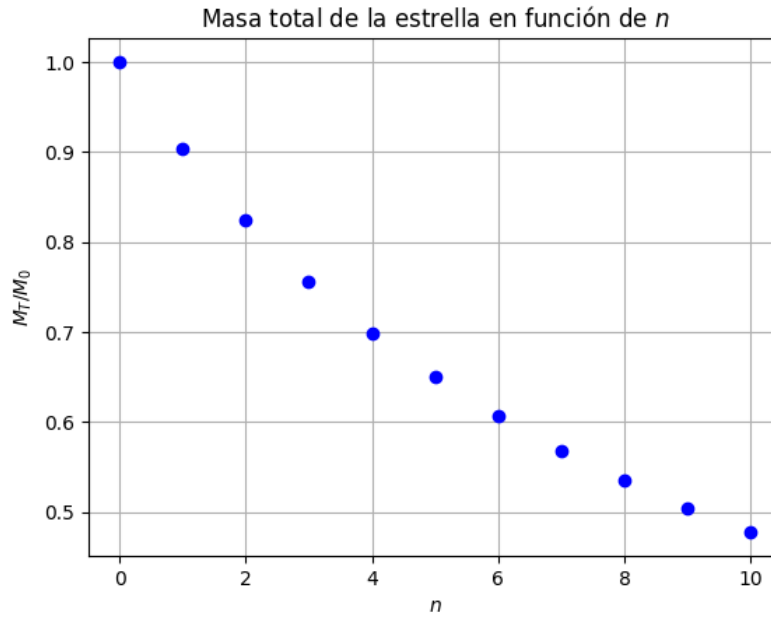


Figura 11: masas totales M_T de la estrella adimensionalizadas por la masa $M_0 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_c$ con respecto a los valores del parámetro $n = 1, 2, \dots, 10$.

Como podemos observar, la forma funcional del *scatter* se mantiene uniformemente, y notamos un decrecimiento de la masa total adimensionalizada de la estrella con respecto a valores grandes de n , es decir, la masa de la estrella decrece casi linealmente con respecto al parámetro n .