

# LICENCIATURA EN CIENCIAS FÍSICAS

Facundo Otero Zappa | Viernes 10 de Julio del 2020

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas & Naturales, U.B.A.*

Contacto: [facuotero20.88@outlook.com](mailto:facuotero20.88@outlook.com)

# Índice

I	Lenguaje	2
Capítulo 1: Lenguaje Matemático		3
1.1	Texto . . . . .	3
1.2	Operadores Matemáticos . . . . .	3
1.3	Desigualdades . . . . .	4
1.4	Operaciones Matemáticas . . . . .	4
1.5	Conjuntos Numéricos . . . . .	4
1.6	Símbolos Lógicos . . . . .	4
1.7	Flechas . . . . .	5
1.8	Geometría . . . . .	5
1.9	Tipos de letra . . . . .	5
1.10	Agrupación . . . . .	5
1.11	Alfabeto Griego . . . . .	5
1.12	Acentos . . . . .	6
1.13	Variables De Función . . . . .	6
1.14	Constantes . . . . .	7
Capítulo 2: Comandos Matemáticos		8
2.1	Comandos De Geometría . . . . .	8
2.2	Comandos De Polinomios . . . . .	8
2.3	Comandos De Análisis Real . . . . .	8
2.4	Comandos De Análisis Complejo . . . . .	8
2.5	Comandos De Análisis Numérico . . . . .	8
2.6	Comandos De Álgebra Lineal . . . . .	8
Capítulo 3: Análisis Matemático		9
3.1	Funciones Matemáticas . . . . .	9
3.2	Distribuciones Matemáticas . . . . .	10
3.3	Operadores Grandes . . . . .	11
3.4	Límites . . . . .	11
3.5	Derivadas . . . . .	12
3.6	Integrales . . . . .	12
3.7	Transformadas . . . . .	13
3.8	Matrices . . . . .	14
3.9	Tensores . . . . .	14
I	Electromagnetismo	15
II Electrostática		16
Capítulo 4: Fuerza Electrostática: Ley De Coulomb		17
4.1	Definición . . . . .	17
4.2	Fuerza Electrostática En Un Sistema De $N$ -Partículas . . . . .	17
4.3	Fuerza Electrostática En Una Distribución Continua De Carga . . . . .	17
4.4	Fuerza Electrostática En Función Del Campo Electrostático . . . . .	18
Capítulo 5: Campo Electrostático		19
5.1	Definición . . . . .	19
5.2	Campo Electrostático En Una Distribución Continua De Carga . . . . .	19
5.3	Teorema: El Campo Electrostático Es Conservativo . . . . .	20
5.4	Expansión Multipolar Del Campo Electrostático . . . . .	20
5.5	Ley De Gauss . . . . .	21
5.6	Condiciones De Contorno . . . . .	21
Capítulo 6: Potencial Electrostático		23
6.1	Deducción . . . . .	23
6.2	Definición . . . . .	23
6.3	Potencial Electrostático En Una Distribución Continua De Carga . . . . .	23
6.4	Expansión Multipolar Del Potencial Electrostático . . . . .	24
6.5	Momento Dipolar Electrostático . . . . .	28
6.6	Ecuaciones Diferenciales Para El Potencial Electrostático . . . . .	29
6.7	Condiciones De Contorno . . . . .	29
Capítulo 7: Trabajo Y Energía Electrostática		31
7.1	Definiciones . . . . .	31
7.2	Ejemplos . . . . .	32
Capítulo 8: Función De Green		33
8.1	Definición . . . . .	33
8.2	Función De Green En Electrostática . . . . .	33
8.3	Propiedades . . . . .	34
8.4	Funciones De Green En Sistemas De Coordenadas . . . . .	34
Capítulo 9: Método De Imágenes		39
9.1	Definición . . . . .	39
9.2	Plano Infinito Conductor Frente A Una Carga Puntual . . . . .	39
9.3	Esfera Conductora Frente A Una Carga Puntual . . . . .	40
Capítulo 10: Medios Materiales Electrostáticos		43
10.1	Conductor Eléctrico . . . . .	43
10.2	Material Dieléctrico . . . . .	44

<b>III</b>	<b>Magnetostática</b>	<b>49</b>
Capítulo 11:	Fuerza Magnetostática	50
Capítulo 12:	Torque Magnetostático	51
Capítulo 13:	Campo Magnetostático: Ley De Biot-Savart	52
Capítulo 14:	Potencial Magnetostático	54
Capítulo 15:	Momento Dipolar Magnetostático	59
Capítulo 16:	Trabajo Magnetostático	60
Capítulo 17:	Energía Magnetostática	61
Capítulo 18:	Ley De Ampère	62
Capítulo 19:	Medios Materiales Magnetostáticos	64
19.1	Material Magnético . . . . .	64
<b>IV</b>	<b>Electrodinámica Clásica</b>	<b>68</b>
Capítulo 20:	Fuerzas En Electrodinámica	69
20.1	Fuerza Electromagnética: Ley De Lorentz . . . . .	69
20.2	Fuerza Electromotriz . . . . .	70
Capítulo 21:	Leyes Fundamentales En Electrodinámica	71
21.1	Ley De Faraday: Ley De Inducción Magnética . . . . .	71
21.2	Ley De Ampère-Maxwell . . . . .	72
Capítulo 22:	Ecuaciones De Maxwell	73
22.1	Definición . . . . .	73
22.2	Tipos De Ecuaciones De Maxwell . . . . .	74
22.3	Formulación Potencial De Las Ecuaciones De Maxwell . . . . .	75
22.4	Solución Exacta De Las Ecuaciones De Maxwell (Gauge De Lorenz) . . . . .	77
22.5	Potencial Electromagnético: Potencial Retardado (Gauge De Lorenz) . . . . .	79
22.6	Campo Electromagnético: Ecuaciones De Jefimenko (Gauge De Lorenz) . . . . .	79
22.7	Aproximación Cuasiestacionaria . . . . .	80
Capítulo 23:	Trabajo Y Energía Electromagnética	81
23.1	Trabajo Eléctrico . . . . .	81
23.2	Trabajo Magnético . . . . .	81
23.3	Trabajo Electromagnético . . . . .	82
23.4	Energía Eléctrica . . . . .	82
23.5	Energía Magnética . . . . .	82
23.6	Energía Electromagnética . . . . .	83
Capítulo 24:	Leyes De Conservación	84
24.1	Conservación Del Momento Lineal . . . . .	84
24.2	Conservación Del Momento Angular . . . . .	85
24.3	Conservación De La Energía Mecánica . . . . .	85
Capítulo 25:	Ondas Electromagnéticas	88
25.1	Espectro Electromagnético . . . . .	88
25.2	Definición . . . . .	88
25.3	Ondas Electromagnéticas Planas . . . . .	90
Capítulo 26:	Radiación Electromagnética	99
26.1	Radiación Electromagnética De Una Carga Puntual . . . . .	99
26.2	Radiación Electromagnética De Fuentes Localizadas . . . . .	102
Capítulo 27:	Formulación Covariante	103
27.1	Transformación De Lorentz En Electromagnetismo . . . . .	103
27.2	Cuadriescalares . . . . .	103
27.3	Cuadrivectores . . . . .	103
27.4	Cuadritensores . . . . .	108
27.5	Operadores . . . . .	110
27.6	Formulación Covariante Del Electromagnetismo Clásico . . . . .	110
27.7	Formulación Lagrangiana Del Electromagnetismo Clásico . . . . .	111
<b>Appendices</b>		<b>112</b>
<b>Apéndice A:</b>	<b>Ciencias Matemáticas</b>	<b>113</b>
A.1	Identidades De Números . . . . .	113
A.2	Identidades De Trigonometría . . . . .	113
A.3	Identidades Del Análisis Real & Análisis Vectorial . . . . .	118
A.4	Identidades Del Análisis Complejo . . . . .	125
A.5	Identidades Del Análisis Numérico . . . . .	127

**Parte I**

**Lenguaje**

# CAPÍTULO 1: LENGUAJE MATEMÁTICO

## 1.1 Texto

Operador	Símbolo	Código
Texto	Texto De Prueba	Texto De Prueba
Texto (En Ecuaciones)	Texto De Prueba	<code>\tx {Texto De Prueba}</code>
Inclinado	<i>Texto De Prueba</i>	<code>\txinc {Texto De Prueba}</code>
Cursiva	<i>Texto De Prueba</i>	<code>\cur {Texto De Prueba}</code>
Negrita	<b>Texto De Prueba</b>	<code>\txff {Texto De Prueba}</code>
Mayúsculas	TEXTO DE PRUEBA	<code>\txmayus {Texto De Prueba}</code>
Normal (Quita Tipos De Texto)	Texto De Prueba	<code>\txff {\txnor {Texto De Prueba}}</code>
Subrayado	<u>Texto De Prueba</u>	<code>\txsub {Texto De Prueba}</code>
Color	Texto De Prueba	<code>\txcol {green!50}{Texto De Prueba}</code>
Comillas	“Esto es una definición o cita”	<code>\comilla {Esto es una definiciÃşn o cita}</code>
Verificación	$x = y$ ✓	<code>x=y \ok</code>
Bibliografía	Autor. <i>Libro</i> . Editorial. Edición. Página.	<code>\bib {Autor}{Libro}{Editorial}{Edicion}{Pagina}</code>

## 1.2 Operadores Matemáticos

Operador	Símbolo	Código
Suma	+	+
Resta	−	−
Producto	⋅	<code>\por</code>
Producto Vectorial	×	<code>\Por</code>
Producto Tensorial	⊗	<code>\Tor</code>
Más Menos	±	<code>\pm</code>
Menos Más	∓	<code>\mp</code>
Divide A	$d \mid a$	<code>d \dvd a</code>
No Divide A	$d \nmid a$	<code>d \ndvd a</code>
Divisores (Opcional)	$\text{Div}_+ \{a\}$	<code>\Div [+]{a}</code>
Divisores Comunes (Opcional)	$\text{DivCom}_+ \{a, b\}$	<code>\Divcom [+]{a}{b}</code>
Congruente	$a \equiv b \pmod d$	<code>\congr {a}{b}{d}</code>
No Congruente	$a \not\equiv b \pmod d$	<code>\ncongr {a}{b}{d}</code>
Resto	$r_{d(a)}$	<code>\resto [d]{a}</code>
Máximo Común Divisor	$(a : b)$	<code>\mcd {a}{b}</code>
Mínimo Común Múltiplo	$[a : b]$	<code>\mcm {a}{b}</code>
Coprime	$a \perp b$	<code>a \cop b</code>
Fracción	$\frac{a}{b}, \frac{a}{b}, \frac{a}{b}$	<code>\fr {a}{b} \frr {a}{b} \frrr {a}{b}</code>
Exponente	$a^b$	<code>a^b</code>
Raíz Cuadrada	$\sqrt{5}$	<code>\rz {5}</code>
Raíz $n$ -ésima (Opcional)	$\sqrt[3]{5}$	<code>\rz [3]{5}</code>
Norma	$\ \vec{v_{(t)}}\ $	<code>\norm {\Vec {v_{(t)}}}</code>
Norma $n$ -ésima (Opcionales)	$\ \vec{v}\ _\alpha^2$	<code>\norm [\alpha ]{\vec {v}}[2]</code>
Módulo: Norma 2 (Opcional)	$ \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 ^3$	<code>\mod [3]{\vc {r}_2 - \vc {r}_1}</code>
Logaritmo	$\log [f_{(x)}]$	<code>\log {\cor {f_{\x }}}</code>
Logaritmo $n$ -ésimo (Opcional)	$\log_a [f_{(x)}]$	<code>\log [a]{\cor {f_{\x }}}</code>
Factorial	$k!$	<code>k!</code>
Gradiente (Opcional)	$\nabla_{\mathbf{r}} \psi_{(r)}$	<code>\gr [\vc {r}]{\psi _{(\vc {r})}}</code>
Divergencia (Opcional)	$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}$	<code>\div [\vc {r}]{F}</code>
Rotacional (Opcional)	$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}$	<code>\rot [\vc {r}]{E}</code>
Laplaciano Escalar (Opcional)	$\nabla_{\mathbf{r}}^2 f$	<code>\lap [\vc {r}]{f}</code>
Laplaciano Vectorial (Opcional)	$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{F}$	<code>\lapv [\vc {r}]{F}</code>
Bilaplaciano	$\nabla^4 f$	<code>\blap {f}</code>
D'Alembertiano	$\square \psi_{(r,t)}$	<code>\dal {\psi _{(\vc {r},t)}}</code>
D'Alembertiano Vectorial	$\square \mathbf{A}_{(r,t)}$	<code>\dalv {A}_{(\vc {r},t)}</code>
Derivada Convectiva	$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \phi$	<code>\cnv {v}{\phi_{ij}}</code>

### 1.3 Desigualdades

Desigualdad	Símbolo	Código
Igual	$=$	<code>=</code>
Distinto	$\neq$	<code>\dis</code>
Aproximadamente	$\approx$	<code>\apx</code>
Aproximadamente Igual	$\simeq$	<code>\apxig</code>
Equivalente	$\equiv, \rightsquigarrow$	<code>\eqv , \eqvl</code>
No Equivalente	$\not\equiv$	<code>\neqv</code>
Mayor	$>$	<code>&gt;</code>
Menor	$<$	<code>&lt;</code>
Mayor O Igual	$\geq$	<code>\mig</code>
Menor O Igual	$\leq$	<code>\nig</code>
Mayor O Aproximadamente Igual	$\gtrsim$	<code>\apxmig</code>
Menor O Aproximadamente Igual	$\lesssim$	<code>\apxnig</code>
Mucho Mayor	$\gg$	<code>\mm</code>
Mucho Menor	$\ll$	<code>\nn</code>
Mayor O Menor	$\gtrless$	<code>\mn</code>
Menor O Mayor	$\lessgtr$	<code>\nm</code>
Mayor, Igual O Menor	$\gtrlessgtr$	<code>\mign</code>
Símbolo con texto	$\stackrel{\text{def}}{=}$	<code>\txsim [def]{=}</code>

### 1.4 Operaciones Matemáticas

Tipo De Operación	Ejemplo	Código
Producto Interno	$v \cdot w$	<code>\PI {v}{w}</code>
Producto Interno (Espacio De Funciones)	$\langle f, g \rangle$	<code>\SPI {f}{g}</code>
Prducto Vectorial	$u \times v$	<code>\PV {u}{v}</code>
Prducto Tensorial	$u \otimes v$	<code>\PT {u}{v}</code>
Producto Vectorial En Componentes	$\langle u_1, u_2, u_3 \rangle \times \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$	<code>\PVc {u_1}{u_2}{u_3}{v_1}{v_2}{v_3}</code>
Producto Vectorial Resuelto	$\langle u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1 \rangle$	<code>\PVr {u_1}{u_2}{u_3}{v_1}{v_2}{v_3}</code>
Rotacional Resuelto	$\left\langle \frac{\partial R_{(x,y,z)}}{\partial y} - \frac{\partial Q_{(x,y,z)}}{\partial z}, \frac{\partial P_{(x,y,z)}}{\partial z} - \frac{\partial R_{(x,y,z)}}{\partial x}, \frac{\partial Q_{(x,y,z)}}{\partial x} - \frac{\partial P_{(x,y,z)}}{\partial y} \right\rangle$	<code>\Rotr {P}{Q}{R}</code>
Composición	$f \circ g$	<code>\comp {f}{g}</code>
Convolución	$f * g$	<code>\conv {f}{g}</code>
Conmutador	$\left[ \hat{\alpha}, \hat{\beta} \right]$	<code>\conm {\op {\alfa }}{\op {\vita }}</code>
Anticonmutador	$\left\{ \hat{\alpha}, \hat{\beta} \right\}$	<code>\aconm {\op {\alfa }}{\op {\vita }}</code>

### 1.5 Conjuntos Numéricos

Nombre	Símbolo	Código
Pertenece	$\in$	<code>\in</code>
No Pertenece	$\notin$	<code>\nin</code>
Incluido	$\subseteq$	<code>\inc</code>
No Incluido	$\not\subseteq$	<code>\ninc</code>
Conjunto Vacío	$\emptyset$	<code>\vacio</code>
Complemento	$A^c$	<code>\compl {A}</code>
Unión	$\cup$	<code>\union</code>
Intersección	$\cap$	<code>\intsc</code>
Diferencia Simétrica	$\Delta$	<code>\difs</code>
Producto Cartesiano	$\times$	<code>\PC</code>
Cardinal	$\#A$	<code>\card {A}</code>
Infinito	$\infty$	<code>\inf</code>

### 1.6 Símbolos Lógicos

Nombre	Símbolo	Código
No	$\neg$	<code>\no</code>
Y	$\wedge$	<code>\Y</code>
O	$\vee$	<code>\O</code>
O Excluyente	$\veebar$	<code>\Oex</code>
Relacionado Con (Opcional)	$x \mathcal{R}_1 y$	<code>x\rel [1] y</code>
No Relacionado Con (Opcional)	$x \overline{\mathcal{R}}_1 y$	<code>x\nrel [1] y</code>
Existe	$\exists$	<code>\ex</code>
Existe Un Único Elemento	$\exists!$	<code>\exu</code>
No Existe	$\nexists$	<code>\nex</code>
Para Todo	$\forall$	<code>\ptd</code>
Tal Que	$:$	<code>:</code>
Por Lo Tanto	$\therefore$	<code>\plt</code>
Porque	$\because$	<code>\porq</code>
Proporcional	$\propto$	<code>\prop</code>
Fin De La Demostración	$\blacksquare$	<code>\QED</code>
Incremento	$\Delta$	<code>\Del</code>
Puntos Suspensivos	$\dots$	<code>\pors</code>
Elipsis Vertical	$\vdots$	<code>\porv</code>
Elipsis Horizontal	$\cdots$	<code>\porh</code>
Elipsis Diagonal	$\ddots$	<code>\pord</code>
Grados	$273^\circ K$	<code>273 \grs K</code>

## 1.7 Flechas

Nombre	Símbolo	Código
Envía	$\rightarrow$	<code>\to</code>
Tiende	$\longrightarrow$	<code>\To</code>
Entonces	$\Rightarrow$	<code>\ent</code>
Entonces Largo	$\Longrightarrow$	<code>\Ent</code>
Si Y Solo Si	$\Leftrightarrow$	<code>\sii</code>
Si Y Solo Si Largo	$\Longleftrightarrow$	<code>\Sii</code>
Tiende, Cuando	$\xrightarrow{n\rightarrow\infty}$	<code>\Tiende {n \to \inf }</code>
Tiende, Cuando (Opcional)	$\xrightarrow[k\neq 0]{k\rightarrow\infty}$	<code>\Tiende [k \dis 0]{k \to \inf }</code>
Movimiento Horario	$\circlearrowright$	<code>\Sneg</code>
Movimiento Antihorario	$\circlearrowleft$	<code>\Spos</code>

## 1.8 Geometría

Nombre	Símbolo	Código
Paralelo	$\parallel$	<code>\paral</code>
Perpendicular	$\perp$	<code>\perp</code>

## 1.9 Tipos de letra

Tipo De Letra	Ejemplo	Código
Texto	R	<code>\tx {R}</code>
Conjunto Numérico	$\mathbb{R}$	<code>\bb {R}</code>
Negrita	<b>R</b>	<code>\ff {R}</code>
Negrita (Letras Griegas)	$\rho$	<code>\bs {\ro }</code>
Cursiva	$\mathcal{R}$	<code>\cal {R}</code>
Gótica	$\mathfrak{R}$	<code>\gotic {R}</code>

## 1.10 Agrupación

Símbolo	Ejemplo	Código
Paréntesis (Opcional)	$(x)^2$	<code>\pr [2]{x}</code>
Corchetes (Opcional)	$[x]^2$	<code>\cor [2]{x}</code>
Llaves (Opcional)	$\{x\}^2$	<code>\lla [2]{x}</code>
Módulo (Opcional)	$ x ^2$	<code>\mod [2]{x}</code>
Norma (Opcionales)	$\ x\ _\infty^2$	<code>\norm [\inf ]{x}[2]</code>
Paréntesis Angulares (Opcional)	$\langle f_{(x)}, g_{(x)}, h_{(x)} \rangle^2$	<code>\pra [2]{f_{\x },g_{\x },h_{\x }}</code>
Llaves Arriba (Opcional)	$\overbrace{1+1+1+\cdots+1}^{n\text{-veces}}$	<code>\llar [n\tx {-veces}]{1+1+1+\porh +1}</code>
Llaves Abajo (Opcional)	$\underbrace{1+1+1+ \cdots +1}_{n\text{-veces}}$	<code>\llab [n\tx {-veces}]{1+1+1+\porh +1}</code>
Techo	$\lceil x \rceil$	<code>\lc x \rc</code>
Piso	$\lfloor x \rfloor$	<code>\lfl x \rfl</code>
Punto	$\dot{x}$	<code>\ldot x \rdot</code>

## 1.11 Alfabeto Griego

Letra	Minús.	Código	Mayús.	Código
1	$\alpha$	<code>\alfa</code>	A	<code>\Alfa</code>
2	$\beta$	<code>\vita</code>	B	<code>\Vita</code>
3	$\gamma$	<code>\gama</code>	Γ	<code>\Gama</code>
4	$\delta$	<code>\del</code>	Δ	<code>\Del</code>
5	$\varepsilon, \epsilon$	<code>\eps ,\epsj</code>	E	<code>\Eps</code>
6	$\zeta$	<code>\zita</code>	Z	<code>\Zita</code>
7	$\eta$	<code>\ita</code>	H	<code>\Ita</code>
8	$\theta, \vartheta$	<code>\tita ,\titaj</code>	Θ	<code>\Tita</code>
9	$\iota$	<code>\iota</code>	I	<code>\Iota</code>
10	$\kappa$	<code>\kapa</code>	K	<code>\Kapa</code>
11	$\lambda$	<code>\lamda</code>	Λ	<code>\Lamda</code>
12	$\mu, \mu$	<code>\mi ,\micro</code>	M	<code>\Mi</code>
13	$\nu$	<code>\ni</code>	N	<code>\Ni</code>
14	$\xi$	<code>\xi</code>	Ξ	<code>\Xi</code>
15	$\omicron$	<code>\omicron</code>	O	<code>\Omicron</code>
16	$\pi$	<code>\pi</code>	Π	<code>\Pi</code>
17	$\rho, \varrho$	<code>\ro ,\roj</code>	P	<code>\Ro</code>
18	$\sigma, \varsigma$	<code>\sigma ,\sigmaj</code>	Σ	<code>\Sigma</code>
19	$\tau$	<code>\taf</code>	T	<code>\Taf</code>
20	$\upsilon$	<code>\yps</code>	Υ	<code>\Yps</code>
21	$\varphi, \phi$	<code>\phii ,\phiij</code>	Φ	<code>\Phi</code>
22	$\chi$	<code>\ji</code>	X	<code>\Ji</code>
23	$\psi$	<code>\psi</code>	Ψ	<code>\Psi</code>
24	$\omega$	<code>\omega</code>	Ω	<code>\Omega</code>

### 1.11.1 Otras Letras

	Letra.	Código
1	$\aleph$	<code>\aleph</code>
2	$\imath$	<code>\imath</code>
3	$\jmath$	<code>\jmath</code>
4	$\ell$	<code>\ell</code>
5	C	<code>\cte</code>

### 1.12 Acentos

Acento	Ejemplo	Código
Vector	$\vec{v}$	<code>\vec {v}</code>
Vector De Coordenadas	$\mathbf{r}$	<code>\vc {r}</code>
Vector De Coordenadas Desde Un Centro De Momentos	$\mathbf{r}^{(o)}$	<code>\vco {r}</code>
Vector De Coordenadas Desde El Centro De Masas	$\mathbf{r}^{(cm)}$	<code>\vcm {r}</code>
Tensor	$\mathcal{F}_{\mu}^{\nu}$	<code>\ten [\mi ]{F}[\ni ]</code>
Función Vectorial	$\vec{v}_{(t)}$	<code>\Vec {v_{(t)}}</code>
Vector Desde Un Centro De Momentos	$\overrightarrow{L_{(t)}^{(o)}}$	<code>\Veco {L_{(t)}}</code>
Vector Desde El Centro De Masas	$\overrightarrow{L_{(t)}^{(cm)}}$	<code>\Vecm {L_{(t)}}</code>
Vector Fila (Bra)	$\langle \psi_{(t)}  $	<code>\bra {\psi _{(t)}}</code>
Vector Columna (Ket)	$ \psi_{(t)}\rangle$	<code>\ket {\psi _{(t)}}</code>
Norma (Braket)	$\langle \psi_{(t)}   \psi_{(t)} \rangle$	<code>\bret {\psi _{(t)}}{\psi _{(t)}}</code>
Producto Exterior (Ketbra)	$ \psi_{(t)}\rangle \langle \psi_{(t)} $	<code>\kbra {\psi _{(t)}}{\psi _{(t)}}</code>
Matriz (Braket)	$\langle \psi   \hat{A}   \psi \rangle$	<code>\braket {\psi }{\op {A}}{\psi }</code>
Versor	$\hat{\mathbf{x}}$	<code>\ver {x}</code>
Conjugado	$\psi^*$	<code>\conj {\psi }</code>
Valor Medio	$\langle x \rangle$	<code>\vm {x}</code>
Traspuesto	$A^t$	<code>\tras {A}</code>
Inversa	$A^{-1}$	<code>\inv {A}</code>
Traspuesto Conjugado	$A^\dagger$	<code>\tc {A}</code>
Pseudo Inversa	$A^+$	<code>\psinv {A}</code>
Operador	$\hat{p}$	<code>\op {p}</code>
Moño	$\tilde{A}$	<code>\monio {A}</code>

### 1.13 Variables De Función

	Variables	Código
•	$(x)$	<code>\x</code>
•	$(y)$	<code>\y</code>
•	$(z)$	<code>\z</code>
•	$(x,y)$	<code>\xy</code>
•	$(x,z)$	<code>\xz</code>
•	$(y,z)$	<code>\yz</code>
•	$(x,y,z)$	<code>\xyz</code>
•	$(\rho,\varphi)$	<code>\rf</code>
•	$(\rho,\varphi,z)$	<code>\rfz</code>
•	$(r,\theta,\varphi)$	<code>\rtf</code>
•	$(x,t)$	<code>\xt</code>
•	$(x,y,t)$	<code>\xyt</code>
•	$(x,y,z,t)$	<code>\xyzt</code>
•	$(\rho,\varphi,t)$	<code>\rft</code>
•	$(\rho,\varphi,z,t)$	<code>\rfzt</code>
•	$(r,\theta,\varphi,t)$	<code>\rtft</code>
•	$(x_1,\dots,x_n)$	<code>\prs {x}</code>
•	$(b_0,\dots,b_m)$	<code>\prs [0]{b}[m]</code>



### 1.14    Constantes

Nombre	Variables	Código
Unidad Física	$A = (100 \pm 1) \text{ m}^2$	A = (100 \pm 1) \n [2]{m}
Unidad Física (Fracción)	$v = (180 \pm 1) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	v = (180 \pm 1) \nfr [2]{m}[2]{s}
Unidad Física (Fracción En Texto)	$v = (180 \pm 1) \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$	v = (180 \pm 1) \nfrr [2]{m}[2]{s}
Unidad Física (Fracción Grande)	$R = (330 \pm 10) \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^3}$	R = (330 \pm 10) \nfrac {\n {kg} \npor \n [2]{m}}{\n [2]{A} \npor \n [3]{s}}
Unidad Física (Fracción Grande En Texto)	$R = (330 \pm 10) \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A}^2 \cdot \text{s}^3}$	R = (330 \pm 10) \nfrrac {\n {kg} \npor \n [2]{m}}{\n [2]{A} \npor \n [3]{s}}
Constante Del Resorte	$k$	\kr
Constante De Gravitación Universal	$G$	\kgu
Constante De Coulomb	$k_e$	\kc
Constante De Permitividad Eléctrica Del Vacío	$\varepsilon_0$	\kpev
Constante De Permitividad Eléctrica Relativa	$\varepsilon_r$	\kper
Constante De Permeabilidad Magnética Del Vacío	$\mu_0$	\kpmv
Constante De Permeabilidad Magnética Relativa	$\mu_r$	\kpmr
Constante De Susceptibilidad Eléctrica	$\chi_e$	\kse
Constante De Susceptibilidad Magnética	$\chi_m$	\ksm
Constante De Boltzmann	$k_B$	\kb
Constante De Avogadro	$N_A$	\ka
Constante De Los Gases Ideales	$R$	\kgi
Constante De Planck	$h$	\kp
Constante De Planck Reducida	$\hbar$	\kpr
Constante De Stefan-Boltzmann	$\sigma$	\ksb
Armstrong	$\text{\AA}$	\arm

# CAPÍTULO 2: COMANDOS MATEMÁTICOS

## 2.1 Comandos De Geometría

Comando	Ejemplo	Código
Distancia Euclídea	$\text{dist}\{\vec{u}, \vec{v}\}$	<code>\dist {\vec {u}}{\vec {v}}</code>
Componente Vectorial	$\text{comp}_{\vec{u}}(\vec{v})$	<code>\compnt {\vec {u}}{\vec {v}}</code>
Proyección Ortogonal Vectorial	$\text{proy}_{\vec{u}}(\vec{v})$	<code>\proy {\vec {u}}{\vec {v}}</code>

## 2.2 Comandos De Polinomios

Comando	Ejemplo	Código
Grado	$\text{grad}[P_{(x)}]$	<code>\grad \cor {P_{\x }}</code>
Coefficiente Principal	$\text{cp}(f)$	<code>\coefp (f)</code>
Multiplicidad De Raíz	$\text{mult}\{x, f\}$	<code>\mult {f}{x}</code>
Polinomios De Hermite	$H_{n(x)}$	<code>\Polh {n}{x}</code>
Polinomios De Hermite	$H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{h}}x\right)$	<code>\PolH {n}{\rz {\fr {m\omega }{\kpr }}x}</code>
Polinomios De Legendre	$P_{\ell(x)}$	<code>\Polle {\ell }{x}</code>
Polinomios Asociados De Legendre (Opcional)	$P_{\ell(x)}^m$	<code>\Polle [m]{\ell }{x}</code>
Polinomios De Legendre Trigonométricos (Opcional)	$P_{\ell(\cos \theta)}^m$	<code>\Pollet [m]{\ell }</code>
Polinomios De Laguerre	$L_{n(x)}$	<code>\Polla {n}{x}</code>
Polinomios Asociados De Laguerre (Opcional)	$L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$	<code>\PolLa [2\ell +1]{n-\ell -1}{\fr {2r}{na_0}}</code>
Polinomios De Chebyshev: Primera Especie	$T_{n(x)}$	<code>\Polch {n}{x}</code>
Polinomios De Chebyshev: Segunda Especie	$U_{n(x)}$	<code>\Polchs {n}{x}</code>
Polinomios De Chebyshev Trigonométricos: Primera Especie	$T_{n(\cos \theta)}$	<code>\Polcht {n}</code>
Polinomios De Chebyshev Trigonométricos: Segunda Especie	$U_{n(\cos \theta)}$	<code>\Polchst {n}</code>
Polinomios De Jacobi	$P_{n(z)}^{(\alpha, \beta)}$	<code>\Polja {n}{\alfa }{\vita }{z}</code>

## 2.3 Comandos De Análisis Real

Comando	Ejemplo	Código
Dominio	$\mathbb{D}_{(f)}$	<code>\dom {f}</code>
Codominio	$\mathbb{C}_{(f)}$	<code>\cod {f}</code>
Imágen	$\mathbb{I}_{(f)}$	<code>\img {f}</code>
Recta Tangente	$R_T[f_{(x_0)}]$	<code>\rectan {f}{x_0}</code>
Plano Tangente	$\Pi_T[f_{(x_0, y_0, z_0)}]$	<code>\platan {f}{x_0,y_0,z_0}</code>

## 2.4 Comandos De Análisis Complejo

Comando	Ejemplo	Código
Parte Real	$\text{Re}\{z\}$	<code>\re {z}</code>
Parte Real (Opcional)	$\text{Re}^2\{z\}$	<code>\re [2]{z}</code>
Parte Imaginaria	$\text{Im}\{z\}$	<code>\im {z}</code>
Parte Imaginaria (Opcional)	$\text{Im}^2\{z\}$	<code>\im [2]{z}</code>
Argumento Principal	$\text{Arg}(z)$	<code>\Arg (z)</code>
Rama Principal Del Logaritmo	$\text{Log}(z)$	<code>\Log (z)</code>
Residuo	$\text{Res}\{f_{(z)}, \infty\}$	<code>\res {f_{\z }}{\inf }</code>
Residuo (Opcional)	$\text{Res}^2\{f_{(z)}, \infty\}$	<code>\res [2]{f_{\z }}{\inf }</code>

## 2.5 Comandos De Análisis Numérico

Comando	Ejemplo	Código
Punto Flotante	$\text{fl}(x+y)$	<code>\fl {x+y}</code>
Número De Condición	$\text{Cond}_{\alpha}(A)$	<code>\cond [\alpha ](A)</code>

## 2.6 Comandos De Álgebra Lineal

Comando	Ejemplo	Código
Núcleo	$\text{Nu}(A)$	<code>\Nu (A)</code>
Dimensión	$\text{dim}_{(C)}(A)$	<code>\dim {C}{(A)}</code>
Rango	$\text{rang}(A)$	<code>\rang (A)</code>
Traza	$\text{tr}(A)$	<code>\tr (A)</code>
Matriz Diagonal	$\text{diag}(A)$	<code>\diag (A)</code>
Matriz Adjunta	$\text{adj}(A)$	<code>\adj (A)</code>

# CAPÍTULO 3: ANÁLISIS MATEMÁTICO

## 3.1 Funciones Matemáticas

### 3.1.1 Funciones

Definición	Ejemplo	Código
Definición De Una Función	$\begin{array}{ccc} f: & X & \longrightarrow Y \\ & x & \rightarrow \boxed{y = f(x)} \end{array}$	<code>\Def {f}{X}{Y}{x}{y = f_{\x }}</code>
Definición De Una Función (Con Condición)	$\begin{array}{ccc} f(z): & \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ & z & \rightarrow \boxed{y = a_n z^n}, \text{ con } \boxed{a_n \neq 0} \end{array}$	<code>\Defc {f_{\z }}{\bb C}{\bb C}{z}{y = a_n z^n}{a_n \neq 0}</code>
Función Escalar	$f: \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$	<code>\Fs {f}{3}</code>
Función Vectorial	$\mathbf{F}: \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^m$	<code>\Fv {\ff {F}}{3}{m}</code>
Campo Vectorial	$\mathbf{E}: \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$	<code>\Cv {E}{3}</code>
Función A Trozos (Dos Partes) (Opcional)	$\begin{cases} -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}} & \text{con } z \leq 0 \\ \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}} & \text{con } 0 \leq z \end{cases}$	<code>\Ftt [con]{-\fr {\sigma }{2 \kpev } \ver {z}}{z \nig 0}{\fr {\sigma }{2 \kpev } \ver {z}}{0 \nig z}</code>
Función A Trozos (Tres Partes) (Opcional)	$\begin{cases} z & \text{si } z \leq a \\ z^2 & \text{si } a \leq z \leq b \\ -z & \text{si } b \leq z \end{cases}$	<code>\Fttt [si]{z}{z \nig a}{z^2}{a \nig z \nig b}{-z}{b \nig z}</code>
Función A Trozos (Cuatro Partes) (Opcional)	$\begin{cases} 1 & \text{si } n = 4m \\ i & \text{si } n = 4m + 1 \\ -1 & \text{si } n = 4m + 2 \\ -i & \text{si } n = 4m + 3 \end{cases}$	<code>\Ftttt [si]{1}{n=4m}{i}{n=4m+1}{-1}{n=4m+2}{-i}{n=4m+3}</code>
Función A Trozos ( <i>n</i> -Partes) (Opcional)	$\begin{cases} 1 & \text{si } n = 4m \\ i & \text{si } n = 4m + 1 \\ -1 & \text{si } n = 4m + 2 \\ \vdots & \\ -i & \text{si } n = 4m + 3 \end{cases}$	<code>\Ftn [si]{1}{n=4m}{i}{n=4m+1}{-1}{n=4m+2}{-i}{n=4m+3}</code>
Función Paramétrica (Un Parámetro)	$\{1 \leq i \leq n\}$	<code>\Fp {1 \nig i \nig n}</code>
Función Paramétrica (Dos Parámetros)	$\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{cases}$	<code>\Fpp {1 \nig i \nig n}{1 \nig j \nig m}</code>
Función Paramétrica (Tres Parámetros)	$\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq l \end{cases}$	<code>\Fppp {1 \nig i \nig n}{1 \nig j \nig m}{1 \nig k \nig l}</code>
Función Paramétrica (Cuatro Parámetros)	$\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq l \\ i \neq j \neq k \end{cases}$	<code>\Fpppp {1 \nig i \nig n}{1 \nig j \nig m}{1 \nig k \nig l}{i \dis j \dis k}</code>
Función Paramétrica (Cinco Parámetros)	$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = 4 \\ e = 5 \end{cases}$	<code>\Fppppp {a=1}{b=2}{c=3}{d=4}{e=5}</code>
Función Paramétrica (Seis Parámetros)	$\begin{cases} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{cases}$	<code>\Fpppppp {a}{b}{c}{d}{e}{f}</code>
Función Paramétrica ( <i>n</i> -Parámetros, Opcional)	$\begin{cases} y = mx_1 + b_1 \\ y = mx_2 + b_2 \\ y = mx_3 + b_3 \\ \vdots \\ y = mx_n + b_n \end{cases}$	<code>\Fpn [\esp {8}]{y=mx_1+b_1}{y=mx_2+b_2}{y=mx_3+b_3}{y=mx_n+b_n}</code>
Función Paramétrica ( <i>(n + 1)</i> -Parámetros)	$\begin{cases} i = 1 \\ j = 2 \\ k = 3 \\ y = mx_1 + b_1 \\ \vdots \\ y = mx_n + b_n \end{cases}$	<code>\Fppn {i=1}{j=2}{k=3}{y=mx_1+b_1}{y=mx_n+b_n}</code>

### 3.1.2 Funciones Trigonométricas

Nombre	Función	Código
Seno	$\operatorname{sen}(x)$	<code>\sen \x</code>
Coseno	$\operatorname{cos}(x)$	<code>\cos \x</code>
Tangente	$\operatorname{tan}(x)$	<code>\tan \x</code>
Cosecante	$\operatorname{csc}(x)$	<code>\csc \x</code>
Secante	$\operatorname{sec}(x)$	<code>\sec \x</code>
Cotangente	$\operatorname{cot}(x)$	<code>\cot \x</code>
Arcoseno	$\operatorname{arcsen}(x)$	<code>\asen \x</code>
Arcocoseno	$\operatorname{arccos}(x)$	<code>\acos \x</code>
Arcotangente	$\operatorname{arctan}(x)$	<code>\atan \x</code>
Arcocosecante	$\operatorname{arccsc}(x)$	<code>\acsc \x</code>
Arcosecante	$\operatorname{arcsec}(x)$	<code>\asec \x</code>
Arcocotangente	$\operatorname{arccot}(x)$	<code>\acot \x</code>
Seno Hiperbólico	$\operatorname{senh}(x)$	<code>\senh \x</code>
Coseno Hiperbólico	$\operatorname{cosh}(x)$	<code>\cosh \x</code>
Tangente Hiperbólica	$\operatorname{tanh}(x)$	<code>\tanh \x</code>
Cosecante Hiperbólica	$\operatorname{csch}(x)$	<code>\csch \x</code>
Secante Hiperbólica	$\operatorname{sech}(x)$	<code>\sech \x</code>
Cotangente Hiperbólica	$\operatorname{coth}(x)$	<code>\coth \x</code>
Arcoseno Hiperbólico	$\operatorname{arcsenh}(x)$	<code>\asenh \x</code>
Arcocoseno Hiperbólico	$\operatorname{arccosh}(x)$	<code>\acosh \x</code>
Arcotangente Hiperbólica	$\operatorname{arctanh}(x)$	<code>\atanh \x</code>
Arcocosecante Hiperbólica	$\operatorname{arccsch}(x)$	<code>\acsch \x</code>
Arcosecante Hiperbólica	$\operatorname{arcsech}(x)$	<code>\asech \x</code>
Arcocotangente Hiperbólica	$\operatorname{arccoth}(x)$	<code>\acoth \x</code>
Seno Cardinal	$\operatorname{senc}(x)$	<code>\senc \x</code>

### 3.1.3 Funciones Partidas

Nombre	Funciones Partidas	Código
Función Característica	$\chi_{[0,1)}(x)$	<code>\crc {[0,1)}{x}</code>
Función Signo	$\operatorname{sg}(x-\alpha)$	<code>\sg (x-\alfa )</code>
Función Escalón De Heaviside	$\vartheta_{(x-\alpha)}$	<code>\heav {x-\alfa }</code>
Función Rectangular	$\operatorname{rect}(x-\alpha)$	<code>\rect (x-\alfa )</code>
Función Valor Absoluto	$\operatorname{abs}(x)$	<code>\abs \x</code>
Función Rampa	$\operatorname{ramp}(x)$	<code>\ramp \x</code>
Función Techo	$\operatorname{techo}(x)$	<code>\techo \x</code>
Función Piso	$\operatorname{piso}(x)$	<code>\piso \x</code>

### 3.1.4 Funciones Antiderivadas De Funciones Elementales

Nombre	Funciones Partidas	Código
Exponencial Integral	$\operatorname{Ei}(x)$	<code>\Ei \x</code>
Logaritmo Integral	$\operatorname{li}(x)$	<code>\li \x</code>
Logaritmo Integral Desplazada	$\operatorname{Li}(x)$	<code>\Li \x</code>
Seno Integral	$\operatorname{si}(x)$	<code>\si \x</code>
Seno Integral	$\operatorname{Si}(x)$	<code>\Si \x</code>
Coseno Integral	$\operatorname{Ci}(x)$	<code>\Ci \x</code>
Seno Hiperbólico Integral	$\operatorname{Shi}(x)$	<code>\Shi \x</code>
Coseno Hiperbólico Integral	$\operatorname{Chi}(x)$	<code>\Chi \x</code>
Función Error	$\operatorname{erf}(x)$	<code>\erf \x</code>

### 3.1.5 Funciones Especiales

Comando	Ejemplo	Código
Armónicos Esféricos Complejos (Opcional)	$Y_{2(\theta'),\varphi'}^{-1}$	<code>\ArmS [']{2}{-1}</code>
Armónicos Esféricos Complejos Conjugados (Opcional)	$Y_{\ell'(\theta'),\varphi'}^{m'*}$	<code>\ArmSc [']{\ell1 '}{m'}</code>
Armónicos Esféricos Reales	$Y_{3,-1}$	<code>\ArmSr {3}{-1}</code>
Función Gamma	$\Gamma_{(z)}$	<code>\G {z}</code>
Función Poligamma (Opcional)	$\psi_{(z+1)}^{(m)}$	<code>\PG [(m)]{z+1}</code>
Funciones De Bessel De Primera Especie	$J_{n(x)}$	<code>\BesJ {n}{x}</code>
Funciones De Bessel De Segunda Especie	$N_{n(x)}$	<code>\BesN {n}{x}</code>
Funciones De Bessel Modificadas De Primera Especie	$I_{n(z)}$	<code>\BesI {n}{z}</code>
Funciones De Bessel Modificadas De Segunda Especie	$K_{n(z)}$	<code>\BesK {n}{z}</code>

## 3.2 Distribuciones Matemáticas

Nombre	Distribución	Código
Delta De Dirac (Opcional)	$\delta_{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}^3$	<code>\dirac [3]{(\vc {r}-\vc {r}')}</code>
Delta De Kronecker	$\delta_{ij} = \delta_j^i$	<code>\kro {ij} = \kro [i]{j}</code>

### 3.3 Operadores Grandes

Tipo De Operador	Ejemplo	Código
Sumatoria	$\sum_{i \neq j}^m x_i$	<code>\S {i \neq j}{m}{x_i}</code>
Sumatoria Doble	$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij}$	<code>\SS {i=1}{n}{j=1}{m}{x_{ij}}</code>
Sumatoria Triple	$\sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ijk}$	<code>\SSS {i=1}{n}{j=1}{m}{k=1}{l}{x_{ijk}}</code>
Productoria	$\prod_{i \neq j}^m x_i$	<code>\P {i \neq j}{m}{x_i}</code>
Productoria Doble	$\prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n x_{ij}$	<code>\PP {i=1}{n}{j=1}{m}{x_{ij}}</code>
Productoria Triple	$\prod_{k=1}^l \prod_{j=1}^m \prod_{i=1}^n x_{ijk}$	<code>\PPP {i=1}{n}{j=1}{m}{k=1}{l}{x_{ijk}}</code>
Unión	$\bigcup_{i \neq j}^m x_i$	<code>\U {i \neq j}{m}{x_i}</code>
Unión Doble	$\bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=1}^n x_{ij}$	<code>\UU {i=1}{n}{j=1}{m}{x_{ij}}</code>
Unión Triple	$\bigcup_{k=1}^l \bigcup_{j=1}^m \bigcup_{i=1}^n x_{ijk}$	<code>\UUU {i=1}{n}{j=1}{m}{k=1}{l}{x_{ijk}}</code>
Intersección	$\bigcap_{i \neq j}^m x_i$	<code>\I {i \neq j}{m}{x_i}</code>
Intersección Doble	$\bigcap_{j=1}^m \bigcap_{i=1}^n x_{ij}$	<code>\II {i=1}{n}{j=1}{m}{x_{ij}}</code>
Intersección Triple	$\bigcap_{k=1}^l \bigcap_{j=1}^m \bigcap_{i=1}^n x_{ijk}$	<code>\III {i=1}{n}{j=1}{m}{k=1}{l}{x_{ijk}}</code>
Suma Directa	$\bigoplus_{i=1}^n x_i$	<code>\SD {i=1}{n}{x_i}</code>

### 3.4 Límites

Tipo De Derivada	Ejemplo	Código
Límite	$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	<code>\lim {x}{a}{f_{\x }}</code>
Límite Iterado Doble	$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$	<code>\liim {x}{y}{a}{b}{f_{\xy }}</code>
Límite Iterado Triple	$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} f(x,y,z)$	<code>\liiim {x}{y}{z}{a}{b}{c}{f_{\xyz }}</code>
Límite Doble	$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \lim_{r \rightarrow 2} f(\rho, \varphi)$	<code>\llim {r}{2}{\tita }{\frr {\pi }{2}}{f_{\rf }}</code>
Límite Triple	$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{4}} \lim_{\theta \rightarrow \pi} \lim_{\rho \rightarrow R} f(r, \theta, \varphi)$	<code>\lllim {\rho }{R}{\tita }{\pi }{\phi }{\frr {\pi }{4}}{f_{\rtf }}</code>
Límite $n$ -ésimo	$\lim_{(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, \dots, a_n)} f(x_1, \dots, x_n)$	<code>\limite [n]{x}{a}{f_{\prs {x}}}</code>
Límite Superior	$\limsup_{x \rightarrow a} f(x)$	<code>\lims {x}{a}{f_{\x }}</code>
Límite Inferior	$\liminf_{x \rightarrow a} f(x)$	<code>\limi {x}{a}{f_{\x }}</code>
Máximo (Opcional)	$\max_{1 \leq i \leq n} \{f(x,y,z)\}$	<code>\max [1 \leq i \leq n]{f_{\xyz }}</code>
Mínimo (Opcional)	$\min_{1 \leq j \leq m} \{f(x)\}$	<code>\min [1 \leq j \leq m]{f_{\x }}</code>
Supremo (Opcional)	$\sup_{x \in a} \{f(x)\}$	<code>\sup [x \in a]{f_{\x }}</code>
Infimo (Opcional)	$\inf_{x \in v} \{f(x)\}$	<code>\infm [x \in v]{f_{\x }}</code>

### 3.5 Derivadas

Tipo De Derivada	Ejemplo	Código
Diferencial/Derivada (Opcional)	$\mathrm{d}_x \psi_{(x,t)}$	<code>\d [x] \psi _{\xt }</code>
Diferencial Inexacto	$\mathrm{d}W$	<code>\dj W</code>
Derivada Parcial (Opcionales)	$\partial_\nu^\mu$	<code>\p [\ni ] [\mi ]</code>
Derivada Material (Opcional)	$D_t$	<code>\D</code>
Derivada De Orden $n$ (Opcional)	$\frac{\mathrm{d}^n f_{(x)}}{\mathrm{d}x^n}$	<code>\dv [n]{f_{\x }}{x}</code>
Derivada Direccional	$D_{\vec{u}} f_{(x,y,z)}$	<code>\ddir {\vec {u}}{f_{\xyz }}</code>
Derivada Parcial De Orden $n$ (Opcional)	$\frac{\partial^n f_{(x)}}{\partial x^n}$	<code>\pd [n]{f_{\x }}{x}</code>
Derivada Parcial De Orden $n + m$	$\frac{\partial^{n+1} f_{(x,y)}}{\partial y \partial x^n}$	<code>\ppd {f_{\xy }}{x}{n}{y}{1}</code>
Derivada Parcial De Orden $n + m + l$	$\frac{\partial^{n+l+3} f_{(x,y,z)}}{\partial z^l \partial y^3 \partial x^n}$	<code>\pppd {f_{\xyz }}{x}{n}{y}{3}{z}{1}</code>
Derivada Parcial De Orden $n + m + l + o$	$\frac{\partial^{n+l+5} f_{(w,x,y,z)}}{\partial z^l \partial y^3 \partial x^n \partial w^2}$	<code>\ppppd {f_{(w,x,y,z)}}{w}{2}{x}{n}{y}{3}{z}{1}</code>
Derivada Relativa De Orden $n$ (Opcional)	$\left. \frac{\mathrm{d}^n f_{(x)}}{\mathrm{d}x^n} \right _S$	<code>\dvr [n]{f_{\x }}{x}{S}</code>
Derivada Parcial Relativa	$\left. \frac{\partial f_{(x)}}{\partial x} \right _S$	<code>\pdr {f_{\x }}{x}{S}</code>
Derivada Material	$\frac{D\phi_{(x,y,z)}}{Dt}$	<code>\dm {\phi ij _{\xyz }}</code>

#### 3.5.1 Derivadas Pequeñas (Small)

Tipo De Derivada	Ejemplo	Código
Derivada De Orden $n$ (Opcional)	$\frac{\mathrm{d}^n f_{(x)}}{\mathrm{d}x^n}$	<code>\dvs [n]{f_{\x }}{x}</code>
Derivada Parcial De Orden $n$ (Opcional)	$\frac{\partial^n f_{(x)}}{\partial x^n}$	<code>\pds [n]{f_{\x }}{x}</code>
Derivada Parcial De Orden $n + m$	$\frac{\partial^{n+1} f_{(x,y)}}{\partial y \partial x^n}$	<code>\ppds {f_{\xy }}{x}{n}{y}{1}</code>
Derivada Parcial De Orden $n + m + l$	$\frac{\partial^{n+l+3} f_{(x,y,z)}}{\partial z^l \partial y^3 \partial x^n}$	<code>\pppds {f_{\xyz }}{x}{n}{y}{3}{z}{1}</code>
Derivada Parcial De Orden $n + m + l + o$	$\frac{\partial^{n+l+5} f_{(w,x,y,z)}}{\partial z^l \partial y^3 \partial x^n \partial w^2}$	<code>\ppppds {f_{(w,x,y,z)}}{w}{2}{x}{n}{y}{3}{z}{1}</code>
Derivada Relativa De Orden $n$ (Opcional)	$\left. \frac{\mathrm{d}^n f_{(x)}}{\mathrm{d}x^n} \right _S$	<code>\dvrs [n]{f_{\x }}{x}{S}</code>
Derivada Parcial Relativa	$\left. \frac{\partial f_{(x)}}{\partial x} \right _S$	<code>\pdrs {f_{\x }}{x}{S}</code>
Derivada Material	$\frac{D\phi_{(x,y,z)}}{Dt}$	<code>\dms {\phi ij _{\xyz }}</code>

### 3.6 Integrales

Tipo De Integral	Ejemplo	Código
Integral Simple	$\int_a^b f_{(x)} \cos(x) \, \mathrm{d}x$	<code>\Int {a}{b}{f_{\x } \cos (x)}{x}</code>
Integral Simple (Diferencial Inexacto)	$\int_A^B \mathrm{d}W$	<code>\Intj {A}{B}{\esp {-6}}{W}</code>
Integral Simple Cerrada (Ángulo Sólido)	$\oint_0^{4\pi} f_{(r,\theta,\varphi)} \, \mathrm{d}\Omega$	<code>\0int {0}{4\pi }{f_{\rtf }}{\Omega }</code>
Integral Doble	$\int_0^{2\pi} \int_0^R r \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$	<code>\ii {0}{R}{0}{2 \pi }{r \cos ^2(\tita ) \sen ^2(\tita )}{r}{\tita }</code>
Integral Triple	$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R r \cos^2(\theta) \sin^2(\varphi) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi$	<code>\iii {0}{R}{0}{2 \pi }{0}{\pi }{r \cos ^2(\tita ) \sen ^2(\phi )}{r}{\tita }{\phi }</code>

#### 3.6.1 Integral De Linea

Integral De Linea Para Campos Escalares

Tipo De Integral	Ejemplo	Código
Integral Simple (Opcional)	$\int_c^{c_f} f_{(x)} \, \mathrm{d}s$	<code>\ils [\cal {C}_f]{\cal {C}}{f_{\x }}{s}</code>
Integral Cerrada (Opcional)	$\oint_c^{c_f} f_{(x)} \, \mathrm{d}s$	<code>\ilos [\cal {C}_f]{\cal {C}}{f_{\x }}{s}</code>
Integral Cerrada Orientada Negativamente (Opcional)	$\oint_{c^-}^{c_f} f_{(x)} \, \mathrm{d}s$	<code>\iloscl [\cal {C}_f]{\cal {C}}^-{f_{\x }}{s}</code>
Integral Cerrada Orientada Positivamente (Opcional)	$\oint_{c^+}^{c_f} f_{(x)} \, \mathrm{d}s$	<code>\iloscr [\cal {C}_f]{\cal {C}}^+{f_{\x }}{s}</code>

Integral De Línea Para Campos Vectoriales

Tipo De Integral	Ejemplo 1	Código
Integral Simple (Opcional)	$\int_C \mathbf{F}_{(x,y,z)} \cdot d\mathbf{r}$	<code>\ilv [\cal {C}]_f{\cal {C}}{\ff {F}_{\xyz }}{r}</code>
Integral Cerrada (Opcional)	$\oint_C \mathbf{F}_{(x,y,z)} \cdot d\ell$	<code>\ilov [\cal {C}]_f{\cal {C}}{\ff {F}_{\xyz }}{\ell }</code>
Integral Cerrada Orientada Negativamente (Opcional)	$\oint_{C^-} \mathbf{F}_{(x,y,z)} \cdot d\mathbf{r}$	<code>\ilovcl [\cal {C}]_f{\cal {C}}^-\{\ff {F}_{\xyz }}{r}</code>
Integral Cerrada Orientada Positivamente (Opcional)	$\oint_{C^+} \mathbf{F}_{(x,y,z)} \cdot d\ell$	<code>\ilovcr [\cal {C}]_f{\cal {C}}^+\{\ff {F}_{\xyz }}{\ell }</code>

3.6.2 Integral De Superficie

Integral De Superficie Para Campos Escalares

Tipo De Integral	Ejemplo	Código
Integral Simple (Opcional)	$\iint_S f_{(x,y,z)} dS$	<code>\iss [\ff {S}_f]{\ff {S}}{f_{\xyz }}{S}</code>
Integral Cerrada (Opcional)	$\oiint_S f_{(x,y,z)} dS$	<code>\isos [\ff {S}_f]{\ff {S}}{f_{\xyz }}{S}</code>

Integral De Superficie Para Campos Vectoriales

Tipo De Integral	Ejemplo	Código
Integral Simple (Opcional)	$\iint_S \mathbf{F}_{(x,y,z)} \cdot d\mathbf{S}$	<code>\isv [\ff {S}_f]{\ff {S}}{\ff {F}_{\xyz }}{S}</code>
Integral Cerrada (Opcional)	$\oiint_S \mathbf{F}_{(x,y,z)} \cdot d\mathbf{S}'$	<code>\isov [\ff {S}_f]{\ff {S}}{\ff {F}_{\xyz }}{S}'</code>

3.6.3 Integral De Volumen Para Campos Escalares

Tipo De Integral	Ejemplo	Código
Integral De Volumen (Opcional)	$\iiint_Q f_{(r,\theta,\varphi)} dV$	<code>\ivs [\bb {Q}]_f{\bb {Q}}{f_{\rtf }}{V}</code>
Integral De Volumen (Opcional)	$\iiint_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} f_{(\mathbf{r})} d^3\mathbf{r}$	<code>\ivsr [\vc {r}]_f{\vc {r}_i}{f_{\rtf }}{r}</code>

3.6.4 Integral De Volumen Para Campos Vectoriales

Tipo De Integral	Ejemplo	Código
Integral De Volumen (Opcional)	$\iiint_Q \mathbf{F}_{(x,y,z)} \cdot d\mathbf{V}$	<code>\ivv [\bb {Q}]_f{\bb {Q}}{\ff {F}_{\xyz }}{V}</code>

3.7 Transformadas

Tipo De Transformada	Ejemplo	Código
Transformada De Fourier (Opcional)	$\mathcal{F}_{x[f(x)]}(\xi) = \pi e^{- \xi }$	<code>\TF [x]{f_{\x }}{\xi } = \pi e^{- \xi  }</code>
Transformada De Laplace (Opcional)	$\mathcal{L}_{x[f(x)]}(s) = \frac{1}{s-z}$	<code>\TL [x]{f_{\x }}{s} = \fr {1}{s-z}</code>

### 3.8 Matrices

Tipo De Matriz	Ejemplo	Código
Número Combinatorio	$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \cdot y^k$	<code>\S {k=0}{n}{\comb {n}{k} \por x^{n-k} \por y^k}</code>
Matriz Con Paréntesis	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$	<code>\lpm a_{11} &amp; a_{12} &amp; a_{13} \\ a_{21} &amp; a_{22} &amp; a_{23} \\ a_{31} &amp; a_{32} &amp; a_{33} \rpm</code>
Matriz Con Corchetes	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	<code>\lbm a_{11} &amp; a_{12} &amp; a_{13} \\ a_{21} &amp; a_{22} &amp; a_{23} \\ a_{31} &amp; a_{32} &amp; a_{33} \rbm</code>
Matriz Con Llaves	$\left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\}$	<code>\llam a_{11} &amp; a_{12} &amp; a_{13} \\ a_{21} &amp; a_{22} &amp; a_{23} \\ a_{31} &amp; a_{32} &amp; a_{33} \rlam</code>
Matriz Con Módulo	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	<code>\lvm a_{11} &amp; a_{12} &amp; a_{13} \\ a_{21} &amp; a_{22} &amp; a_{23} \\ a_{31} &amp; a_{32} &amp; a_{33} \rvm</code>
Matriz Con Norma	$\left\  \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\ $	<code>\lvvm a_{11} &amp; a_{12} &amp; a_{13} \\ a_{21} &amp; a_{22} &amp; a_{23} \\ a_{31} &amp; a_{32} &amp; a_{33} \rvvm</code>
Dimensión $2 \times 2$	$A \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$	<code>A \in \bb {K}^{\dxd }</code>
Dimensión $3 \times 3$	$A \in \mathbb{K}^{3 \times 3}$	<code>A \in \bb {K}^{\txt }</code>
Dimensión $n \times n$	$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$	<code>A \in \bb {K}^{\nxd }</code>
Dimensión $n \times m$	$A \in \mathbb{K}^{n \times m}$	<code>A \in \bb {K}^{\nxd }</code>

### 3.9 Tensores

Tipo De Tensor	Ejemplo	Código
Símbolo De Levi-Civita (Opcional)	$\epsilon_{ijk}^{nml}$	<code>\levi [nml]{ijk}</code>



**Tomo I**

**Electromagnetismo**

Parte II

**Electrostática**

# CAPÍTULO 4: FUERZA ELECTROSTÁTICA: LEY DE COULOMB

## 4.1 Definición

Sean  $q_1$  y  $q_2$  dos partículas estáticas cargadas eléctricamente en el vacío en las posiciones  $\mathbf{r}_1 := \langle x_1, y_1, z_1 \rangle$  y  $\mathbf{r}_2 := \langle x_2, y_2, z_2 \rangle$ , respectivamente, entonces:

La Fuerza Eléctrica que la partícula  $q_1$  le hace a la partícula  $q_2$  está dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_{12} := \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \quad (4.1)$$

La Fuerza Eléctrica que la partícula  $q_2$  le hace a la partícula  $q_1$  está dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_{21} := \frac{q_1 q_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} \quad (4.2)$$

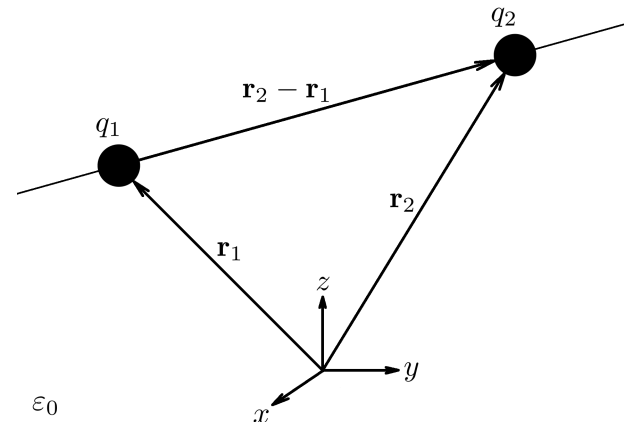


Figura 4.1: Fuerza Electrostática que una partícula estática cargada eléctricamente con carga  $q_1$  en la posición  $\mathbf{r}_1$  ejerce sobre una partícula estática cargada eléctricamente con carga  $q_2$  en la posición  $\mathbf{r}_2$  en el vacío, con permitividad eléctrica  $\epsilon_0$ .

## 4.2 Fuerza Electrostática En Un Sistema De $N$ -Partículas

Sean  $q_i$ ,  $N$ -partículas estáticas cargadas eléctricamente en el vacío en las posiciones  $\mathbf{r}_i = \langle x_i, y_i, z_i \rangle$ , y sea  $Q$  una partícula estática cargada eléctricamente en la posición  $\mathbf{r} = \langle x, y, z \rangle$ , con  $1 \leq i \leq N$ , entonces:

La Fuerza Eléctrica que la partícula  $q_i$  le hace a la partícula  $Q$  está dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_{q_i Q} := \frac{Q q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (4.3)$$

### Principio De Superposición

Como se sabe experimentalmente que la Fuerza Eléctrica ejercida por las  $N$ -partículas  $q_i$  a la partícula  $Q$  es igual a la suma vectorial de cada fuerza ejercida individualmente, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{q_1 \dots q_N Q} &:= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{q_i Q} \\ &= \mathbf{F}_{q_1 Q} + \mathbf{F}_{q_2 Q} + \mathbf{F}_{q_3 Q} + \dots + \mathbf{F}_{q_N Q} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \end{aligned}$$

La Fuerza Eléctrica que las partículas  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$  le hacen a la partícula  $Q$  está dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_{q_1 \dots q_N Q} := \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (4.4)$$

## 4.3 Fuerza Electrostática En Una Distribución Continua De Carga

Cuando la cantidad de partículas cargadas  $q_i$  tiende a infinito, obtenemos una Suma de Riemann por cada Diferencial de Carga:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbf{F}_{q_1 \dots q_N Q}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right] \\ \mathbf{F}_{e(\mathbf{r})} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{q_i (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right] \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq' \end{aligned}$$

La Fuerza Eléctrica que cualquier *punto fuente*  $\mathbf{r}'$  le hace al *punto campo*  $\mathbf{r}$  (con  $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$ ), está dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_{e(\mathbf{r})} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq' \quad (4.5)$$

### Distribución Lineal

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad lineal de carga  $\lambda := \lambda_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$\mathbf{F}_{e(\mathbf{r})} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathbb{C}} \frac{\lambda_{(\mathbf{r}')} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\ell' \quad (4.6)$$

### Distribución Superficial

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad superficial de carga  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$\mathbf{F}_{e(\mathbf{r})} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\mathbb{S}} \frac{\sigma_{(\mathbf{r}')} (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{S}' \quad (4.7)$$

**Distribución Volumétrica**

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad volumétrica de carga  $\rho := \rho_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$\mathbf{F}_{\text{e}(\mathbf{r})} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right)}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right|^3} \cdot \text{d}\mathbf{V}'$$

(4.8)

#### 4.4 Fuerza Electrostática En Función Del Campo Electrostático

---

Sea  $q$  una partícula estática cargada eléctricamente inmersa en un Campo Electrostático  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces:

$$\mathbf{F}_{\text{e}(\mathbf{r})} := q\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}$$

(4.9)

# CAPÍTULO 5: CAMPO ELECTROSTÁTICO

Sean  $q_i$ ,  $N$ -partículas estáticas cargadas eléctricamente en las posiciones  $\mathbf{r}_i$ , con  $1 \leq i \leq N$ , y sea  $Q$  una partícula estática cargada eléctricamente en la posición  $\mathbf{r}$ , entonces:

La Fuerza Electrostática que las partículas  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$  le hacen a la partícula  $Q$  será:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{q_1 \dots q_N Q} &:= k_e Q \sum_{i=1}^N \left( \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^2} \hat{\mathbf{r}}_i \right), \text{ con: } \boxed{\hat{\mathbf{r}}_i := \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \left( q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right) \\ &= Q \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \left( q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right) \right] \\ &= Q \mathbf{E}_{q_1 \dots q_N} \end{aligned}$$

## 5.1 Definición

Se denomina Campo Electrostático al Campo de Fuerzas Vectorial  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{q_1 \dots q_N} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  en el espacio, producido por la Fuerza Electrostática que ejercen las  $N$ -partículas cargadas eléctricamente  $q_i$  en las posiciones  $\mathbf{r}_i$  sobre una unidad de carga de prueba en la posición  $\mathbf{r}$ , con  $1 \leq i \leq N$  y  $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$ :

$$\boxed{\mathbf{E}_{q_1 \dots q_N} := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \left( q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right)} \quad (5.1)$$

## 5.2 Campo Electrostático En Una Distribución Continua De Carga

Cuando la cantidad de partículas cargadas  $q_i$  tiende a infinito, obtenemos una Suma de Riemann por cada Diferencial de Carga:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbf{E}_{q_1 \dots q_N Q}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \left( q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right) \right] \\ \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^N \left( q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq' \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{E}_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq'} \quad (5.2)$$

**Punto Fuente:**  $\mathbf{r}'$

Se denomina *punto fuente* a cualquier punto en la posición  $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$  que ejerce Fuerza Eléctrica sobre la carga eléctrica  $Q$ .

**Punto Campo:**  $\mathbf{r}$

Se denomina *punto campo* a la posición  $\mathbf{r}$  donde se encuentra la carga eléctrica  $Q$ .

### 5.2.1 Distribuciones De Carga

**Distribución Lineal**

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad lineal de carga  $\lambda := \lambda_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$\boxed{\mathbf{E}_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{C}} \lambda_{(\mathbf{r}')} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\ell'} \quad (5.3)$$

**Distribución Superficial**

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad superficial de carga  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$\boxed{\mathbf{E}_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\mathcal{S}} \sigma_{(\mathbf{r}')} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{S}'} \quad (5.4)$$

**Distribución Volumétrica**

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad volumétrica de carga  $\rho := \rho_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$\boxed{\mathbf{E}_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot d\mathbf{V}'} \quad (5.5)$$

## 5.3 Teorema: El Campo Electrostático Es Conservativo

Sea  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un Campo Eléctrico producido por una distribución volumétrica  $\rho := \rho_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de  $N$  cargas puntuales estáticas  $q_i$  cuya carga total es  $Q_{\text{enc}}$ , que se encuentran a una distancia  $\mathbf{r}_i$  con respecto a un punto cualquiera  $P$  fuera de la distribución, con  $1 \leq i \leq N$  y  $N \rightarrow \infty$ , y sea  $\mathcal{C}^+ : \mathbf{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva paramétrica cerrada cualquiera que pasa por el punto  $P$ , entonces:

La circulación total del campo  $\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}$  a través de la curva  $\mathcal{C}$  será, por el Principio de Superposición, de la forma:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}^+} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} &:= \oint_{\mathcal{C}^+} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_{q_i} \right) \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^N \left( \oint_{\mathcal{C}^+} \mathbf{E}_{q_i} \cdot d\boldsymbol{\ell} \right) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_i} \left( \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot (dr\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin(\theta) d\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^N \left( q_i \int_{r_i}^{r_i} \frac{1}{r^2} dr (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) + 0 + 0 \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ q_i \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_i}^{r_i} \cdot 1 \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ q_i \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_i} \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N q_i \cdot 0 \right) \\ &= \frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

**La Circulación Es Nula**

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}^+} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} = 0} \quad (5.6)$$

**La Integral De Línea Es Independiente Del Camino**

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}_1^+} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \int_{\mathcal{C}_2^+} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell}} \quad (5.7)$$

**Existe Un Potencial Escalar**

$$\boxed{\phi_{(\mathbf{r})} := - \int_{\mathcal{C}^+} \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')} \cdot d\boldsymbol{\ell}' = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')} \cdot d\boldsymbol{\ell}'} \quad (5.8)$$

**El Campo Es Irrotacional**

$$\boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} = 0} \quad (5.9)$$

## 5.4 Expansión Multipolar Del Campo Electrostático

### 5.4.1 Expansión Multipolar En Coordenadas Esféricas

Mediante la expansión multipolar del potencial electrostático, es posible obtener una expansión multipolar del campo electrostático debido a la relación conocida entre el campo y el potencial, de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} &:= -\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{(\mathbf{r})} \\ \mathbf{E}_{(r,\theta,\varphi)} &= -\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{(r,\theta,\varphi)} \end{aligned}$$

Por la expansión multipolar del potencial electrostático en coordenadas esféricas, tenemos que:

$$\begin{aligned} &= -\nabla_{\mathbf{r}} \left[ \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Q_{\ell m}}{(2\ell+1)r^{\ell+1}} + C \right] \\ &= - \left[ \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] \left[ \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Q_{\ell m}}{(2\ell+1)r^{\ell+1}} + C \right] \\ &= -\frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Q_{\ell m}}{2\ell+1} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m}{r^{\ell+1}} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m}{r^{\ell+1}} \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m}{r^{\ell+1}} \right] \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right\} + 0 \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Q_{\ell m}}{2\ell+1} \left[ (\ell+1) \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m}{r^{\ell+2}} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r^{\ell+2}} \frac{\partial Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{im Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m}{r^{\ell+2} \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{E}_{(r,\theta,\varphi)} := -\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{(r,\theta,\varphi)} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Q_{\ell m}}{2\ell+1} \left[ (\ell+1) \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m}{r^{\ell+2}} \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r^{\ell+2}} \frac{\partial Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{im Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m}{r^{\ell+2} \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right]} \quad (5.10)$$

## 5.5 Ley De Gauss

Sea  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un Campo Eléctrico producido por una distribución volumétrica  $\rho := \rho_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de  $N$  cargas puntuales estáticas  $q_i$  encerradas por una superficie esférica  $\mathbf{S}$  en un volumen  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3$  ( $\mathbf{S}^+ := \partial\mathbb{Q}$ ) y cuya carga total es  $Q_{\text{enc}}$ , con  $1 \leq i \leq N$  y  $N \rightarrow \infty$ , entonces:

El flujo total del campo  $\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}$  a través de la superficie  $\mathbf{S}$  será, por el Principio de Superposición, de la forma:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{S}^+ := \partial\mathbb{Q}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\mathbf{S}^+ := \partial\mathbb{Q}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_{q_i} \right) \cdot d\mathbf{S} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^N \left( \iint_{\mathbf{S}^+ := \partial\mathbb{Q}} \mathbf{E}_{q_i} \cdot d\mathbf{S} \right) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \iint_{\mathbf{S}} \left( \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot (dS_r \hat{\mathbf{r}} + dS_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + dS_\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}}) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N q_i \right) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{r^2} r^2 \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}) + 0 + 0 \\ &= \frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin(\theta) \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 1 \\ &= \frac{4\pi Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0} \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r})} \, dV \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\iint_{\mathbf{S}^+ := \partial\mathbb{Q}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r})} \, dV} \quad (5.11)$$

### Teorema De Gauss

Por el Teorema De Gauss, tenemos que:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{S}^+ := \partial\mathbb{Q}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \, dV \\ \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \, dV &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r})} \, dV \\ \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} &= \frac{\rho_{(\mathbf{r})}}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} = \frac{\rho_{(\mathbf{r})}}{\epsilon_0}} \quad (5.12)$$

### Ley De Gauss: Forma Integral

$$\boxed{\iint_{\mathbf{S}^+ := \partial\mathbb{Q}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r})} \, dV} \quad (5.13)$$

### Ley De Gauss: Forma Diferencial

$$\boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} = \frac{\rho_{(\mathbf{r})}}{\epsilon_0}} \quad (5.14)$$

## 5.6 Condiciones De Contorno

Debido a que el Campo Electrostático es divergente, cuando una superficie  $\mathbf{S} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se encuentra cargada con una densidad superficial de carga eléctrica  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  el Campo Eléctrico sufre una discontinuidad al pasar de la Superficie Superior  $\mathbf{S}_{\text{Sup.}}$  a la Superficie Interior  $\mathbf{S}_{\text{Int.}}$ . De esta forma, dado  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un Campo Electrostático continuo generado por una superficie cargada con una densidad superficial de carga  $\sigma$  y con normal exterior  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}}$ , podemos escribir sus condiciones de contorno en función de la densidad superficial de carga  $\sigma$ .

### Componente Paralela: Circulación Nula

Sea  $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{\text{Sup.}} + \mathcal{C}_{\text{Inf.}} + \mathcal{C}_{\text{Izq.}} + \mathcal{C}_{\text{Der.}} : \mathbf{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva cerrada que encierra a la superficie cargada con densidad superficial  $\sigma$ , cuyos caminos superior ( $\mathcal{C}_{\text{Sup.}}$ ) e inferior ( $\mathcal{C}_{\text{Inf.}}$ ) tienen longitud  $L$ , y sus caminos laterales izquierdo ( $\mathcal{C}_{\text{Izq.}}$ ) y derecho ( $\mathcal{C}_{\text{Der.}}$ ) tienen longitud  $h$  muy pequeña ( $h \rightarrow 0$ ), entonces:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= 0 \\ \int_{\mathcal{C}_{\text{Sup.}}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Inf.}}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Izq.}}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Der.}}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= 0 \\ E_{\parallel(\mathbf{r})}^+ L_{(\mathcal{C}_{\text{Sup.}})} - E_{\parallel(\mathbf{r})}^- L_{(\mathcal{C}_{\text{Inf.}})} + 0 + 0 &= 0 \\ E_{\parallel(\mathbf{r})}^+ L - E_{\parallel(\mathbf{r})}^- L &= 0 \\ E_{\parallel(\mathbf{r})}^+ - E_{\parallel(\mathbf{r})}^- &= 0 \\ \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}} \times [\mathbf{E}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{E}_{1(\mathbf{r})}] &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}} \times [\mathbf{E}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{E}_{1(\mathbf{r})}] = 0} \quad (5.15)$$

### Componente Perpendicular: Ley De Gauss

Sea  $\mathbf{S} := \mathbf{S}_{\text{Sup.}} + \mathbf{S}_{\text{Inf.}} + \mathbf{S}_{\text{Lat.}} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie cilíndrica cerrada que encierra a la superficie cargada con densidad superficial  $\sigma$ , cuyas caras superior ( $\mathbf{S}_{\text{Sup.}}$ ) e inferior  $\mathbf{S}_{\text{Inf.}}$  tienen normales  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_e$  y  $-\hat{\boldsymbol{\eta}}_e$ , y área  $A$ , respectivamente, y se encuentran separada por una altura  $h$  muy pequeña ( $h \rightarrow 0$ ), entonces:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \\ \iint_{\mathbf{S}_{\text{Sup.}}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathbf{S}_{\text{Inf.}}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathbf{S}_{\text{Lat.}}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})} A_{(\mathbf{S})}}{\varepsilon_0} \\ E_{\perp(\mathbf{r})}^+ A_{(\mathbf{S}_{\text{Sup.}})} - E_{\perp(\mathbf{r})}^- A_{(\mathbf{S}_{\text{Inf.}})} + 0 &= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})} A_{(\mathbf{S})}}{\varepsilon_0} \\ E_{\perp(\mathbf{r})}^+ A - E_{\perp(\mathbf{r})}^- A &= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})} A}{\varepsilon_0} \\ E_{\perp(\mathbf{r})}^+ - E_{\perp(\mathbf{r})}^- &= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0} \\ [\mathbf{E}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{E}_{1(\mathbf{r})}] \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}_e &= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{[\mathbf{E}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{E}_{1(\mathbf{r})}] \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}_e = \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0}} \quad (5.16)$$



# CAPÍTULO 6: POTENCIAL ELECTROSTÁTICO

## 6.1 Deducción

Sea  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un Campo Electrostático Continuo, sea  $\mathcal{C}^+ : [\mathbf{r}_0, \mathbf{r}] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva orientada positivamente, que va desde el Punto  $\mathbf{r}_0$  hasta el Punto  $\mathbf{r}$ , y sea  $\phi := \phi_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una Función de Tres Variables Diferenciable a Primer Orden ( $C^1$ ), entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{q_1 \dots q_N} &:= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \left( q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \left\{ q_i \frac{(x - x_i)\hat{\mathbf{x}} + (y - y_i)\hat{\mathbf{y}} + (z - z_i)\hat{\mathbf{z}}}{\left[ \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \right]^3} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \left\{ \frac{x - x_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y - y_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{z - z_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \right] \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \right] \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \right] \hat{\mathbf{z}} \right\} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \right] \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \right] \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \right] \hat{\mathbf{z}} \right\} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \nabla_{\mathbf{r}} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + C \right) \\ &= -\nabla_{\mathbf{r}} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + C \right) \\ &= -\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{q_1 \dots q_N} \end{aligned}$$

## 6.2 Definición

Se denomina Potencial Electrostático al Campo de Fuerzas Escalar  $\phi := \phi_{q_1 \dots q_N} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  en el espacio, producido por el Potencial Electrostático que ejercen  $N$ -partículas cargadas eléctricamente  $q_i$  en las posiciones  $\mathbf{r}_i$  sobre una unidad de carga de prueba en la posición  $\mathbf{r}$ , con  $1 \leq i \leq N$  y  $\mathbf{r}, \mathbf{r}_i \in \mathbb{R}^3$ :

$$\phi_{q_1 \dots q_N} := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + C, \text{ donde: } \mathbf{E}_{q_1 \dots q_N} = -\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{q_1 \dots q_N} \quad (6.1)$$

### Observación

Sean  $\phi_1$  y  $\phi_2$  dos Potenciales de un Campo Electrostático Continuo  $\mathbf{E} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces:

$$\phi_1 = \phi_2 + C \quad (6.2)$$

## 6.3 Potencial Electrostático En Una Distribución Continua De Carga

Cuando la cantidad de partículas cargadas  $q_i$  tiende a infinito, obtenemos una Suma de Riemann por cada Diferencial de Carga:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\phi_{q_1 \dots q_N}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + C \right) \\ \phi_{(\mathbf{r})} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + C \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dq' + C \end{aligned}$$

$$\therefore \phi_{(\mathbf{r})} := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dq' + C \quad (6.3)$$

### Distribución Lineal

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad lineal de carga  $\lambda := \lambda_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$\phi_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{C}} \frac{\lambda_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} ds' + C \quad (6.4)$$

### Distribución Superficial

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad superficial de carga  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$\phi_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\sigma_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + C \quad (6.5)$$

### Distribución Volumétrica

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad volumétrica de carga  $\rho := \rho_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$\phi_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + C \quad (6.6)$$

## 6.4 Expansión Multipolar Del Potencial Electrostático

### 6.4.1 Deducción

Sea  $\rho := \rho_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una densidad volumétrica de  $(N \rightarrow \infty)$ -partículas estáticas  $q'$  cargadas eléctricamente en las posiciones  $\mathbf{r}' = r'\hat{\mathbf{r}}$  que producen un Campo Escalar  $\phi := \phi_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sobre una carga de prueba muy lejana en la posición  $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$  con un ángulo  $\theta$  respecto a las posiciones  $\mathbf{r}'$ , entonces:

- Podemos reescribir el Potencial Electrostático de la forma:

$$\begin{aligned}\phi_{(\mathbf{r})} &:= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' + C \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}} \, dV' + C \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{\sqrt{(r\hat{\mathbf{r}} - r'\hat{\mathbf{r}}) \cdot (r\hat{\mathbf{r}} - r'\hat{\mathbf{r}})}} \, dV' + C \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta)}} \, dV' + C \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{r'}{r} \cos(\theta)}} \, dV' + C \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{\sqrt{1 + \frac{r'}{r} \left[ \frac{r'}{r} - 2 \cos(\theta) \right]}} \, dV' + C\end{aligned}$$

- Ahora, dada  $f_{(x)} := \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \left[ 1 + \frac{r'}{r} \left( \frac{r'}{r} - 2 \cos \theta \right) \right]^{-\frac{1}{2}} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una Función de Una Variable Diferenciable, realizando un desarrollo en Serie de Maclaurin con respecto a  $x$ , tenemos:

$$\begin{aligned}f_{(x)} &= f_{(0)} + \frac{df_{(0)}}{dx}(x-0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f_{(0)}}{dx^2}(x-0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 f_{(0)}}{dx^3}(x-0)^3 + \cdots + \frac{1}{\ell!} \frac{d^\ell f_{(0)}}{dx^\ell}(x-0)^\ell \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{r'}{r} \left[ \frac{r'}{r} - 2 \cos(\theta) \right] + \frac{3}{8} \frac{r'^2}{r^2} \left[ \frac{r'}{r} - 2 \cos(\theta) \right]^2 - \frac{5}{16} \frac{|\mathbf{r}'|^3}{|\mathbf{r}|^3} \left[ \frac{r'}{r} - 2 \cos(\theta) \right]^3 + \cdots \\ &= 1 + \frac{r'}{r} \cos(\theta) + \frac{r'^2}{r^2} \frac{3 \cos^2(\theta) - 1}{2} + \frac{r'^3}{r^3} \frac{5 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta)}{2} + \cdots + \frac{r'^\ell}{r^\ell} P_{\ell(\cos \theta)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^\ell}{r^\ell} P_{\ell(\cos \theta)}\end{aligned}$$

- Obtuvimos una Suma Infinita de Polinomios de Legendre Trigonométricos  $P_\ell := P_{\ell(\cos \theta)} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de Grado  $\ell$ . Reemplazando en el Potencial Electrostático, tenemos:

$$\begin{aligned}\phi_{(\mathbf{r})} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{\sqrt{1 + \frac{r'}{r} \left[ \frac{r'}{r} - 2 \cos(\theta) \right]}} \, dV' + C \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \iiint_{\mathbb{Q}} \left[ \rho_{(\mathbf{r}')} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^\ell}{r^\ell} P_{\ell(\cos \theta)} \right] \, dV' + C \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{r^{\ell+1}} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} r'^\ell P_{\ell(\cos \theta)} \, dV' \right] + C\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\phi_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{r^{\ell+1}} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} r'^\ell P_{\ell(\cos \theta)} \, dV' \right] + C} \quad (6.7)$$

$$\boxed{\phi_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} \, dV' + \frac{1}{r^2} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} r' \cos(\theta) \, dV' + \frac{1}{2r^3} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} r'^2 [3 \cos^2(\theta) - 1] \, dV' + \cdots + \frac{1}{r^{\ell+1}} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} r'^\ell P_{\ell(\cos \theta)} \, dV' \right\} + C} \quad (6.8)$$

#### Observación

Relacionando el desarrollo en serie de Maclaurin efectuado con la expresión del potencial electrostático, puede obtenerse una expansión del término  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  en término de los polinomios de Legendre, de la forma:

Por el desarrollo en serie de Maclaurin respecto a  $x$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}f_{(x)} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^\ell}{r^\ell} P_{\ell(\cos \theta)} \\ \frac{1}{r \sqrt{1+x}} &= \frac{1}{r} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^\ell}{r^\ell} P_{\ell(\cos \theta)} \\ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^\ell}{r^{\ell+1}} P_{\ell(\cos \theta)}\end{aligned}$$

Si extendemos la notación para una carga en una esfera de radio  $r < r'$ , tenemos:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \begin{cases} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r^\ell}{r'^{\ell+1}} P_{\ell(\cos \theta)} & r < r' \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^\ell}{r^{\ell+1}} P_{\ell(\cos \theta)} & r' < r \end{cases}$$

Utilizando la notación de  $r_>$  y  $r_<$ , tenemos que:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} \right)_{r'} P_{\ell(\cos \theta)}$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left( \frac{r_<^\ell}{r_>^{\ell+1}} \right)_{r'} P_{\ell(\cos \theta)}} \quad (6.9)$$

### 6.4.1.1 Contribución Monopolar

$$\begin{aligned}\phi_{\text{mon}(\mathbf{r})} &:= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \, dV' \\ &= \frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 r}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\phi_{\text{mon}(\mathbf{r})} = \frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 r}} \quad (6.10)$$

### 6.4.1.2 Contribución Dipolar

$$\begin{aligned}\phi_{\text{dip}(\mathbf{r})} &:= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') r' \cos(\theta) \, dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') |\mathbf{r}'| |\hat{\mathbf{r}}| \cos(\theta) \, dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') (\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) \, dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \left[ \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \, dV' \right] \\ &= \frac{(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{4\pi\epsilon_0 r^2}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\phi_{\text{dip}(\mathbf{r})} = \frac{(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{|\mathbf{p}| \cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2}} \quad (6.11)$$

### 6.4.1.3 Contribución Cuadrupolar

$$\boxed{\phi_{\text{cuad}(\mathbf{r})} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0 r^3} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') r'^2 [3 \cos^2(\theta) - 1] \, dV'} \quad (6.12)$$

## 6.4.2 Deducción En Notación De Einstein

Utilizando notación de Einstein, si consideramos a la distribución volumétrica de carga eléctrica  $\rho(\mathbf{r}')$  confinada en una región  $d$ , con  $|\mathbf{r}| \gg d$ , podemos obtener el potencial electrostático en expansión multipolar de la siguiente forma:

$$\phi(\mathbf{r}) := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' + C$$

Realizando un desarrollo de Taylor alrededor de  $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ , tenemos que:

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \left[ \partial_{i'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right]_{\mathbf{r}'=\mathbf{0}} \cdot r'_i + \frac{1}{2!} \partial_{i'} \partial_{j'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{0}} r'_i r'_j + \dots \right\} dV' + C$$

Por el teorema de Clairaut-Schwartz, tenemos que:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \left[ \left( \frac{r_i - r'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \right]_{\mathbf{r}'=\mathbf{0}} \cdot r'_i + \frac{1}{2!} \partial_{j'} \partial_{i'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{0}} r'_i r'_j + \dots \right\} dV' + C \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \left[ \left( \frac{r_i - 0}{|\mathbf{r} - \mathbf{0}|^3} \right) \right] \cdot r'_i + \frac{1}{2!} \partial_{j'} \left( \frac{r_i - r'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{0}} r'_i r'_j + \dots \right\} dV' + C \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \left( \frac{r_i}{|\mathbf{r}|^3} \right) \cdot r'_i + \frac{1}{2!} \left[ -\frac{\delta_{i'j'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{3(r_i - r'_i)(r_j - r'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \right] \Big|_{\mathbf{r}'=\mathbf{0}} r'_i r'_j + \dots \right\} dV' + C\end{aligned}$$

Como  $\delta_{ij} = \delta_{i'j'}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \left( \frac{r_i}{|\mathbf{r}|^3} \right) \cdot r'_i + \frac{1}{2!} \left[ -\frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r} - \mathbf{0}|^3} + \frac{3(r_i - 0)(r_j - 0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{0}|^5} \right] r'_i r'_j + \dots \right\} dV' + C \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \left( \frac{r_i}{|\mathbf{r}|^3} \right) \cdot r'_i + \frac{1}{2!} \left( -\frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{3r_i r_j}{|\mathbf{r}|^5} \right) r'_i r'_j + \dots \right] dV' + C \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \left( \frac{r_i}{|\mathbf{r}|^3} \right) \cdot r'_i + \frac{1}{2!} \left( \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} |\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5} \right) r'_i r'_j + \dots \right] dV' + C \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}|} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \, dV' + \left( \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) \cdot \left[ \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \, dV' \right] + \frac{1}{2!} \left( \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} |\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5} \right) \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') r'_i r'_j \, dV' + \dots \right\} + C\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}|} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \, dV' + \left( \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) \cdot \left[ \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \, dV' \right] + \frac{1}{2!} \left( \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} |\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5} \right) \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') r'_i r'_j \, dV' + \dots \right\} + C} \quad (6.13)$$

### 6.4.2.1 Contribución Monopolar

$$\phi_{\text{mon}(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \, dV'$$

Por la definición de distribución volumétrica de carga, tenemos:

$$= \frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|}$$

$$\therefore \boxed{\phi_{\text{mon}(\mathbf{r})} = \frac{Q_{\text{enc}}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|}} \quad (6.14)$$

### 6.4.2.2 Contribución Dipolar

$$\phi_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \cdot \left[ \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \mathbf{r}' \, dV' \right]$$

Por la definición de momento dipolar electrostático, tenemos:

$$= \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3}$$

$$\therefore \boxed{\phi_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^3}} \quad (6.15)$$

### 6.4.2.3 Contribución Cuadrupolar

$$\begin{aligned} \phi_{\text{cuad}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} |\mathbf{r}|^2}{2! |\mathbf{r}|^5} \right) \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') r'_i r'_j \, dV' \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^5} \left[ 3r_i r_j \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') r'_i r'_j \, dV' - \delta_{ij} |\mathbf{r}|^2 \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') r'_i r'_j \, dV' \right] \end{aligned}$$

La delta  $\delta_{ij}$  dentro de la integral, resulta:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^5} \left[ 3r_i r_j \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') r'_i r'_j \, dV' - |\mathbf{r}|^2 \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \delta_{ij} r'_i r'_j \, dV' \right] \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^5} \left[ 3r_i r_j \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') r'_i r'_j \, dV' - \delta_{ij} r_i r_j \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') r'^2 \, dV' \right] \\ &= \frac{r_i r_j}{8\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^5} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') (3r'_i r'_j - \delta_{ij} r'^2) \, dV' \end{aligned}$$

Definiendo el tensor  $Q_{ij} = \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') (3r'_i r'_j - \delta_{ij} r'^2) \, dV'$ , tenemos:

$$= \frac{r_i r_j}{8\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^5} Q_{ij}$$

$$\therefore \boxed{\phi_{\text{cuad}}(\mathbf{r}) = \frac{r_i r_j}{8\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}|^5} Q_{ij}} \quad (6.16)$$

### 6.4.2.4 Momento Cuadrupolar Electrostático

Se denomina *momento cuadrupolar electrostático*  $Q_{ij}$  al tensor de rango 2 de la forma:

$$\boxed{Q_{ij} := \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') (3r'_i r'_j - \delta_{ij} r'^2) \, dV'} \quad (6.17)$$

### Notación Matricial

$$\begin{aligned} Q_{ij} &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') (3r'_i r'_j - \delta_{ij} r'^2) \, dV' \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \begin{pmatrix} 3r'_x r'_x - \delta_{xx} r'^2 & 3r'_x r'_y - \delta_{xy} r'^2 & 3r'_x r'_z - \delta_{xz} r'^2 \\ 3r'_y r'_x - \delta_{yx} r'^2 & 3r'_y r'_y - \delta_{yy} r'^2 & 3r'_y r'_z - \delta_{yz} r'^2 \\ 3r'_z r'_x - \delta_{zx} r'^2 & 3r'_z r'_y - \delta_{zy} r'^2 & 3r'_z r'_z - \delta_{zz} r'^2 \end{pmatrix} dV' \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \begin{pmatrix} 3r'^2_x - r'^2 & 3r'_x r'_y - 0 & 3r'_x r'_z - 0 \\ 3r'_y r'_x - 0 & 3r'^2_y - r'^2 & 3r'_y r'_z - 0 \\ 3r'_z r'_x - 0 & 3r'_z r'_y - 0 & 3r'^2_z - r'^2 \end{pmatrix} dV' \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \begin{pmatrix} 3r'^2_x - r'^2 & 3r'_x r'_y & 3r'_x r'_z \\ 3r'_y r'_x & 3r'^2_y - r'^2 & 3r'_y r'_z \\ 3r'_z r'_x & 3r'_z r'_y & 3r'^2_z - r'^2 \end{pmatrix} dV' \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{Q_{ij} = \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \begin{pmatrix} 3r'^2_x - r'^2 & 3r'_x r'_y & 3r'_x r'_z \\ 3r'_y r'_x & 3r'^2_y - r'^2 & 3r'_y r'_z \\ 3r'_z r'_x & 3r'_z r'_y & 3r'^2_z - r'^2 \end{pmatrix} dV'} \quad (6.18)$$

### Observación: Trazo

La traza del momento cuadrupolar electrostático es nula:

$$\begin{aligned} \text{tr}(Q_{ij}) &:= Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') (3r'^2_x - r'^2) \, dV' + \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') (3r'^2_y - r'^2) \, dV' + \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') (3r'^2_z - r'^2) \, dV' \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') (3r'^2_x + 3r'^2_y + 3r'^2_z - r'^2 - r'^2 - r'^2) \, dV' \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') [3(r'^2_x + r'^2_y + r'^2_z) - 3r'^2] \, dV' \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') (3r'^2 - 3r'^2) \, dV' \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} 0 \, dV' \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\text{tr}(Q_{ij}) = 0} \quad (6.19)$$

### Observación: Simetría

El momento cuadrupolar electrostático es simétrico, es decir:

$$Q_{ij} = Q_{ji} \quad (6.20)$$

## 6.4.3 Expansión Multipolar En Coordenadas Esféricas

### 6.4.3.1 Deducción

Por la expansión multipolar del potencial electrostático, tenemos que:

$$\phi(\mathbf{r}) := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{r^{\ell+1}} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') r'^{\ell} P_{\ell(\cos\theta)} dV' \right] + C$$

Por el teorema de adición de los armónicos esféricos, tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi_{(r,\theta,\varphi)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{r^{\ell+1}} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r',\theta',\varphi')} r'^{\ell} \left[ \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*} \right] dV' \right\} + C \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[ \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m}{(2\ell+1)r^{\ell+1}} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r',\theta',\varphi')} r'^{\ell} Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*} dV' \right] + C \end{aligned}$$

Definiendo el tensor  $Q_{\ell m} = \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r',\theta',\varphi')} r'^{\ell} Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*} dV'$ , tenemos:

$$= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Q_{\ell m}}{(2\ell+1)r^{\ell+1}} + C$$

$$\therefore \phi_{(r,\theta,\varphi)} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Q_{\ell m}}{(2\ell+1)r^{\ell+1}} + C \quad (6.21)$$

### Caso General

Si extendemos la notación para cargas en esferas de radio  $r < r'$ , tenemos que:

Por la definición del potencial electrostático, tenemos que:

$$\phi(\mathbf{r}) := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + C$$

Por la función de Green en coordenadas esféricas, tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi_{(r,\theta,\varphi)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r',\theta',\varphi')} \left[ 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*}}{2\ell+1} \left( \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \right)_{r'} \right] dV' + C \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2\ell+1)} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[ Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r',\theta',\varphi')} \left( \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \right)_{r'} Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*} dV' \right] \right\} + C \end{aligned}$$

$$\therefore \phi_{(r,\theta,\varphi)} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2\ell+1)} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left[ Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r',\theta',\varphi')} \left( \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \right)_{r'} Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*} dV' \right] \right\} + C \quad (6.22)$$

### 6.4.3.2 Contribución Monopolar

La contribución monopolar es la única contribución del potencial electrostático que no depende del sistema de coordenadas (pues es un escalar), y es de la forma:

$$\phi_{\ell=0(r,\theta,\varphi)} \sim \frac{1}{r} \quad (6.23)$$

### 6.4.3.3 Contribución Dipolar

$$\phi_{\ell=1(r,\theta,\varphi)} \sim \frac{1}{r^2} \quad (6.24)$$

### Observación

Si el término monopolar es nulo, la contribución dipolar no depende del sistema de coordenadas.

### 6.4.3.4 Contribución Cuadrupolar

$$\phi_{\ell=2(r,\theta,\varphi)} \sim \frac{1}{r^3} \quad (6.25)$$

### Observación

Si el término monopolar y el dipolar son nulos, entonces la contribución cuadrupolar no depende del sistema de coordenadas, y así sucesivamente.

### 6.4.3.5 Momento Multipolar Electrostático

Se denomina *momento multipolar electrostático*  $Q_{\ell m}$  al tensor de rango  $\ell$  de la forma:

$$Q_{\ell m} := \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r',\theta',\varphi')} r'^{\ell} Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*} dV' = \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r',\theta',\varphi')} r'^{\ell} P_{\ell(\cos\theta')} e^{im\varphi'} dV' \quad (6.26)$$

**Caso 0** ( $\ell = 0$ ): **Momento**  $Q_{00}$

$$\begin{aligned} Q_{\ell m} &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r', \theta', \varphi')} r'^{\ell} Y_{\ell(\theta', \varphi')}^m{}^* \, dV' \\ Q_{00} &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r', \theta', \varphi')} r'^0 Y_{0(\theta', \varphi')}^0{}^* \, dV' \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r', \theta', \varphi')} \cdot 1 \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \, dV' \end{aligned}$$

Por la definición de distribución volumétrica de carga, tenemos:

$$= \frac{Q_{\text{T}}}{2\sqrt{\pi}}$$

$$\therefore \boxed{Q_{00} := \frac{Q_{\text{T}}}{2\sqrt{\pi}}} \quad (6.27)$$

**Caso 1** ( $\ell = 1$ ): **Momentos**  $Q_{1-1}$ ,  $Q_{10}$  y  $Q_{11}$

$$Q_{\ell m} = \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r', \theta', \varphi')} r'^{\ell} Y_{\ell(\theta', \varphi')}^m{}^* \, dV'$$

$$Q_{1\pm 1} = \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r', \theta', \varphi')} r'^1 Y_{1(\theta', \varphi')}^{\pm 1}{}^* \, dV'$$

$$= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r', \theta', \varphi')} r' \left[ \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{\pm i\varphi'} \sin(\theta') \right] dV'$$

Por la fórmula de Euler, tenemos:

$$= \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r', \theta', \varphi')} r' [\cos(\varphi') \pm i \sin(\varphi')] \sin(\theta') \, dV'$$

$$= \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \left[ \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r', \theta', \varphi')} r' \cos(\varphi') \sin(\theta') \, dV' \pm i \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(r', \theta', \varphi')} r' \sin(\varphi') \sin(\theta') \, dV' \right]$$

Por la definición de momento dipolar eléctrico, tenemos:

$$= \mp \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (p_x \pm i p_y)$$

$$\therefore \boxed{\begin{cases} Q_{1-1} := \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (p_x - i p_y) \\ Q_{10} := \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} p_z \\ Q_{11} := -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} (p_x + i p_y) \end{cases}} \quad (6.28)$$

## 6.5 Momento Dipolar Electrostático

### 6.5.1 Definición

Sean  $q_i$ ,  $N$ -partículas estáticas cargadas eléctricamente en las posiciones  $\mathbf{r}_i$ , y sea  $\mathbf{r}$  la posición de una unidad de carga de prueba, entonces:

$$\boxed{\mathbf{p}_{q_1 \dots q_N} := \sum_{i=1}^N q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r})} \quad (6.29)$$

#### Dipolo Electrostático Físico

Sean  $-q$  y  $q$  dos partículas estáticas cargadas eléctricamente en las posiciones  $\mathbf{r}'_-$  y  $\mathbf{r}'_+$ , respectivamente, separadas por una distancia  $\mathbf{d}$ , entonces:

$$\boxed{\mathbf{p} := q(\mathbf{r}'_+ - \mathbf{r}'_-) = q\mathbf{d}} \quad (6.30)$$

#### 6.5.1.1 Momento Dipolar Electrostático En Una Distribución Continua De Carga

Cuando la cantidad de partículas  $q_i$  tiende a infinito, obtenemos una Suma de Riemann por cada Diferencial de Carga:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbf{p}_{q_1 \dots q_N}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^N q_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \right] \\ \mathbf{p}(\mathbf{r}) &= \int (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \, dq' \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{p}(\mathbf{r}) := \int (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \, dq'} \quad (6.31)$$

#### Distribución Lineal

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad lineal de carga  $\lambda := \lambda_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$\boxed{\mathbf{p}(\mathbf{r}) := \int_{\mathcal{C}} \lambda_{(\mathbf{r}')} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot d\ell'} \quad (6.32)$$

#### Distribución Superficial

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad superficial de carga  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$\boxed{\mathbf{p}(\mathbf{r}) := \iint_{\mathbf{S}} \sigma_{(\mathbf{r}')} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}'} \quad (6.33)$$

### Distribución Volumétrica

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad volumétrica de carga  $\rho := \rho_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$\mathbf{p}_{(\mathbf{r})} := \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{V}' \quad (6.34)$$

## 6.6 Ecuaciones Diferenciales Para El Potencial Electrostático

### 6.6.1 Ecuación De Poisson

Sea  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un Campo Electrostático continuo producido por una distribución volumétrica de carga  $\rho := \rho_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  cuyo Potencial Electrostático es  $\phi := \phi_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} &= \frac{\rho_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \cdot [-\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{(\mathbf{r})}] &= \frac{\rho_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0} \\ -\nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{(\mathbf{r})}] &= \frac{\rho_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0} \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi_{(\mathbf{r})} &= -\frac{\rho_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi_{(\mathbf{r})} = -\frac{\rho_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0}} \quad (6.35)$$

#### 6.6.1.1 Unicidad De La Solución

Sean  $\phi_1$  y  $\phi_2$  dos soluciones de la ecuación de Poisson, y sea  $u = \phi_{1(\mathbf{r}')} - \phi_{2(\mathbf{r}')}$ , entonces:

Por la primera identidad de Green, tenemos que:

$$\iiint_{\mathbb{Q}} [f \nabla^2 g + (\nabla f \cdot \nabla g)] dV' = \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} (f \nabla g) \cdot d\mathbf{S}'$$

Si  $f = g = u$ , tenemos que:

$$\iiint_{\mathbb{Q}} \{u_{(\mathbf{r}')} \nabla^2 u_{(\mathbf{r}')} + [\nabla u_{(\mathbf{r}')} \cdot \nabla u_{(\mathbf{r}')}]\} dV' = \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} [u_{(\mathbf{r}')} \nabla u_{(\mathbf{r}')}] \cdot d\mathbf{S}'$$

$$\iiint_{\mathbb{Q}} \left\{ u_{(\mathbf{r}')} [\nabla^2 \phi_{1(\mathbf{r}')} - \nabla^2 \phi_{2(\mathbf{r}')}] + |\nabla u_{(\mathbf{r}')}|^2 \right\} dV' = \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \left[ u_{(\mathbf{r}')} \frac{\partial u_{(\mathbf{r}')}}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}'} \right] dS'$$

Por la ecuación de Poisson, tenemos que:

$$\iiint_{\mathbb{Q}} \left\{ u_{(\mathbf{r}')} \left[ -\frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{\varepsilon_0} \right] + |\nabla u_{(\mathbf{r}')}|^2 \right\} dV' = \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \left[ u_{(\mathbf{r}')} \frac{\partial u_{(\mathbf{r}')}}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}'} \right] dS'$$

Si utilizamos condiciones de Dirichlet, tenemos:

$$\iiint_{\mathbb{Q}} [u_{(\mathbf{r}')} \cdot 0 + |\nabla u_{(\mathbf{r}')}|^2] dV' = \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} 0 dS'$$

$$\iiint_{\mathbb{Q}} [0 + |\nabla u_{(\mathbf{r}')}|^2] dV' = 0$$

$$\iiint_{\mathbb{Q}} |\nabla u_{(\mathbf{r}')}|^2 dV' = 0$$

$$|\nabla u_{(\mathbf{r}')}|^2 = 0$$

Como  $|\nabla u_{(\mathbf{r}')}|^2$  es definida positiva, tenemos:

$$\nabla u_{(\mathbf{r}')} = 0$$

$$u_{(\mathbf{r}')} \Leftrightarrow C$$

$$\therefore \boxed{\phi_{1(\mathbf{r}')} = \phi_{2(\mathbf{r}')}} \quad (6.36)$$

### 6.6.2 Ecuación De Laplace

Se denomina *ecuación de Laplace* a la EDP para el potencial electrostático correspondiente a la ecuación de Poisson cuando la densidad volumétrica de carga es nula:

$$\boxed{\nabla^2 \phi_{(\mathbf{r})} = 0} \quad (6.37)$$

## 6.7 Condiciones De Contorno

Dado  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un Campo Electrostático continuo generado por una superficie  $\mathbf{S} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cargada con una densidad superficial de carga eléctrica  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  y con normal exterior  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ , debido a que el Potencial Electrostático es la integral del Campo Electrostático, podemos estudiar su continuidad directamente.

#### Continuidad

Sea  $\mathcal{C} : [\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0 + \varepsilon] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva que representa un segmento que parte de la posición  $\mathbf{r}_0$  hasta la posición  $\mathbf{r}_0 + \varepsilon$  atravesando a la superficie cargada con densidad superficial  $\sigma$ , con  $\varepsilon \rightarrow 0$ , entonces:

$$\phi_{(\mathbf{r})}^+ - \phi_{(\mathbf{r})}^- := - \int_{\mathcal{C}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')} \cdot d\boldsymbol{\ell}'$$

$$\phi_{(\mathbf{r})}^+ - \phi_{(\mathbf{r})}^- = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_0 + \varepsilon} \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')} \cdot d\boldsymbol{\ell}'$$

Cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tenemos que:

$$\phi_{(\mathbf{r})}^+ - \phi_{(\mathbf{r})}^- = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')} \cdot d\boldsymbol{\ell}'$$

$$\begin{aligned}\phi_{(\mathbf{r})}^+ - \phi_{(\mathbf{r})}^- &= 0 \\ \phi_{(\mathbf{r})}^+ &= \phi_{(\mathbf{r})}^-\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\phi_{(\mathbf{r})}^+ = \phi_{(\mathbf{r})}^-} \tag{6.38}$$

### Discontinuidad Del Campo Electrostático En Función Del Potencial

Dada la discontinuidad en forma vectorial del Campo Electrostático, podemos escribirla en forma escalar, de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}^+ - \mathbf{E}_{(\mathbf{r})}^- &= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0} \hat{\boldsymbol{\eta}} \\ -\nabla_{\mathbf{r}}\phi_{(\mathbf{r})}^+ - \left[-\nabla_{\mathbf{r}}\phi_{(\mathbf{r})}^-\right] &= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0} \hat{\boldsymbol{\eta}} \\ -\frac{\partial\phi_{(\mathbf{r})}^+}{\partial\eta} + \frac{\partial\phi_{(\mathbf{r})}^-}{\partial\eta} &= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0} \\ \frac{\partial\phi_{(\mathbf{r})}^-}{\partial\eta} - \frac{\partial\phi_{(\mathbf{r})}^+}{\partial\eta} &= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial\phi_{(\mathbf{r})}^-}{\partial\eta} - \frac{\partial\phi_{(\mathbf{r})}^+}{\partial\eta} = \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0}} \tag{6.39}$$



# CAPÍTULO 7: TRABAJO Y ENERGÍA ELECTROSTÁTICA

## 7.1 Definiciones

Sea  $q$  una partícula estática cargada eléctricamente en la posición  $\mathbf{r}'$  inmersa en un Campo Electrostático Continuo  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces el Trabajo Electrostático necesario para llevar a la partícula  $q$  desde una posición  $\mathbf{r}_0$  hasta la posición  $\mathbf{r}$ , será de la forma:

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{e}(\mathbf{r})} &:= \int_{\mathcal{C}^+} \mathbf{F}_{\mathbf{e}(\mathbf{r}')} \cdot d\boldsymbol{\ell}' \\ &= \int_{\mathcal{C}^+} q \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')} \cdot d\boldsymbol{\ell}' \\ &= q \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')} \cdot d\boldsymbol{\ell}' \\ &= q[\phi_{(\mathbf{r}_0)} - \phi_{(\mathbf{r})}] \end{aligned}$$

### 7.1.1 Trabajo Electrostático De Una Partícula

Se denomina *trabajo electrostático* a la diferencia de potencial necesaria para mover una carga de prueba  $q$  de un punto  $\mathbf{r}_0$  hasta un punto  $\mathbf{r}$ , multiplicada por dicha carga  $q$ :

$$W_{\mathbf{e}(\mathbf{r})} = q[\phi_{(\mathbf{r}_0)} - \phi_{(\mathbf{r})}] \quad (7.1)$$

#### Observación

Si tomamos  $\mathbf{r}_0 = \infty$ , como  $\phi_{(\mathbf{r})} \xrightarrow{\mathbf{r} \rightarrow \infty} 0$ , tenemos que:

$$W_{\mathbf{e}(\mathbf{r})} = q\phi_{(\mathbf{r})} \quad (7.2)$$

### 7.1.2 Energía Electrostática Entre Dos Partículas

Se denomina *energía electrostática* al potencial de interacción que se produce entre dos cargas  $q_1$  y  $q_2$  ubicadas en las posiciones  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_2$ , respectivamente, cuya expresión es de la forma:

$$E_{12} := \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (7.3)$$

### 7.1.3 Energía Electrostático En Un Sistema De $N$ -Partículas

Sean  $q_i$ ,  $N$ -partículas estáticas cargadas eléctricamente en las posiciones  $\mathbf{r}_i$ , cuyos potenciales corresponden a los de una carga puntual, con  $1 \leq i \leq N$ , entonces:

$$\begin{aligned} E_{q_1 \dots q_N} &= W_{q_1} + W_{q_2} + W_{q_3} + \dots + W_{q_N} \\ &= 0 + q_2 \phi_{1(\mathbf{r})} + q_3 [\phi_{1(\mathbf{r})} + \phi_{2(\mathbf{r})}] + q_4 [\phi_{1(\mathbf{r})} + \phi_{2(\mathbf{r})} + \phi_{3(\mathbf{r})}] + \dots + q_N [\phi_{1(\mathbf{r})} + \dots + \phi_{N-1(\mathbf{r})}] \\ &= \frac{q_2 q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + q_3 \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} \right) + q_4 \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2|} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3|} \right) + \dots + q_N \left( \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1|} + \dots + \frac{q_{N-1}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_{N-1}|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_1 q_3}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1|} + \dots + \frac{q_1 q_N}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_1|} + \frac{q_2 q_3}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} + \frac{q_2 q_4}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_2|} + \frac{q_3 q_4}{|\mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3|} + \dots + \frac{q_2 q_N}{|\mathbf{r}_N - \mathbf{r}_2|} + \dots + \frac{q_{N-1} q_N}{|\mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j}^N \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i \neq j}^N \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi_{(\mathbf{r}_i)} \end{aligned}$$

$$\therefore E_{q_1 \dots q_N} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi_{(\mathbf{r}_i)}, \text{ donde } \phi_{(\mathbf{r}_i)} \text{ es el potencial electrostático generado por todas las cargas, excepto la carga } q_i. \quad (7.4)$$

### 7.1.4 Energía Electrostática En Una Distribución Continua De Carga

Cuando la cantidad de partículas cargadas  $q_i$  tiende a infinito, obtenemos una Suma de Riemann por cada Diferencial de Carga:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (E_{q_1 \dots q_N}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi_{(\mathbf{r}_i)} \right] \\ E_{\mathbf{e}} &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^N q_i \phi_{(\mathbf{r}_i)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int \phi_{(\mathbf{r}')} dq' \end{aligned}$$

$$\therefore E_{\mathbf{e}} := \frac{1}{2} \int \phi_{(\mathbf{r}')} dq' \quad (7.5)$$

### Distribución Lineal

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad lineal de carga  $\lambda := \lambda_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$E_e = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}} \lambda_{(\mathbf{r}')} \phi_{(\mathbf{r}')} \, ds' \quad (7.6)$$

### Distribución Superficial

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad superficial de carga  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$E_e = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{S}} \sigma_{(\mathbf{r}')} \phi_{(\mathbf{r}')} \, dS' \quad (7.7)$$

### Distribución Volumétrica

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad volumétrica de carga  $\rho := \rho_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$E_e = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} \phi_{(\mathbf{r}')} \, dV' \quad (7.8)$$

#### 7.1.4.1 Energía Electroestática En Función Del Campo Electroestático

Debido a que conocemos el Trabajo Electrostático  $W_{e(\mathbf{r})}$  para una distribución continua de carga eléctrica, suele denominarse Energía Electroestática a dicho trabajo realizado cuando la región de integración  $\mathbb{Q}$  es todo el espacio ( $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^3$ ), y puede representarse en función del Campo Electrostático  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de la forma:

$$\begin{aligned} E_e &:= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} \phi_{(\mathbf{r}')} \, dV' \\ \text{Por la Ley de Gauss, tenemos:} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \phi_{(\mathbf{r}')} [\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')}] \, dV' \\ \text{Por la Regla del Producto de la Divergencia, tenemos:} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot [\phi_{(\mathbf{r}')} \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')}] - [\nabla_{\mathbf{r}'} \phi_{(\mathbf{r}')} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')}] \} \, dV' \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot [\phi_{(\mathbf{r}')} \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')}] \, dV' + \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} [-\nabla_{\mathbf{r}'} \phi_{(\mathbf{r}')}] \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')} \, dV' \\ \text{Por el Teorema de Gauss, tenemos:} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \phi_{(\mathbf{r}')} \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')} \cdot d\mathbf{S}' + \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')} \, dV' \\ \text{Si } \mathbb{Q} = \mathbb{R}^3, \text{ la integral de superficie tiende a cero, entonces:} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot 0 + \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}_{(\mathbf{r}')}|^2 \, dV' \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}_{(\mathbf{r}')}|^2 \, dV' \end{aligned}$$

$$\therefore E_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}_{(\mathbf{r}')}|^2 \, dV' \quad (7.9)$$

## 7.2 Ejemplos

### 7.2.1 Energía Electroestática De Una Distribución Sometida A Un Campo Externo

Sea una distribución volumétrica de carga eléctrica  $\rho := \rho_{(\mathbf{r})}$  confinada en una región de longitud característica  $d$  sometida a un campo electrostático externo  $\mathbf{E}^{\text{ext}}$  de potencial electrostático  $\varphi_{(\mathbf{r})}^{\text{ext}}$  tal que  $d$  es mucho menor a la longitud característica de variación de  $\phi$ , entonces la energía electrostática de interacción entre la distribución de cargas y el campo electrostático externo será de la forma:

$$\begin{aligned} E_e &:= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} \phi_{(\mathbf{r}')}^{\text{ext}} \, dV' \\ \text{Realizando un desarrollo en serie de Taylor alrededor de } \mathbf{r}_0, \text{ tenemos que:} \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} \left[ \phi_{(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}} + \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}}}{\partial r'_i} (r'_i - r_{0i}) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \phi_{(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}}}{\partial r'_j \partial r'_i} (r'_i - r_{0i})(r'_j - r_{0j}) + \dots \right] dV' \\ &= \phi_{(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} \, dV' + \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}}}{\partial r'_i} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} (r'_i - r_{0i}) \, dV' + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}}}{\partial r'_j \partial r'_i} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} (r'_i - r_{0i})(r'_j - r_{0j}) \, dV' \\ \text{Por la definición de carga total encerrada y momento dipolar electrostático, tenemos:} \\ &= Q_{\text{enc}} \phi_{(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}} + \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}}}{\partial r'_i} p_{i(\mathbf{r}_0)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_{(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}}}{\partial r'_i \partial r'_j} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} (r'_i - r_{0i})(r'_j - r_{0j}) \, dV' \\ \text{Como } \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} &:= -\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{(\mathbf{r})} = -\partial_i \phi_{(\mathbf{r})}, \text{ tenemos que:} \\ &= Q_{\text{enc}} \phi_{(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}} - E_{i(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}} p_{i(\mathbf{r}_0)} + \frac{1}{2} \frac{\partial E_{j(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}}}{\partial r'_i} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} (r'_i - r_{0i})(r'_j - r_{0j}) \, dV' \\ \text{Definiendo el tensor } c_{ij} &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} (r'_i - r_{0i})(r'_j - r_{0j}) \, dV', \text{ tenemos que:} \\ &= Q_{\text{enc}} \phi_{(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}} - \mathbf{p}_{(\mathbf{r}_0)} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \frac{\partial E_{j(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}}}{\partial r'_i} c_{ij} \end{aligned}$$

$$\therefore E_e = Q_{\text{enc}} \phi_{(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}} - \mathbf{p}_{(\mathbf{r}_0)} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \frac{\partial E_{j(\mathbf{r}_0)}^{\text{ext}}}{\partial r'_i} c_{ij} \quad (7.10)$$

# CAPÍTULO 8: FUNCIÓN DE GREEN

## 8.1 Definición

Se denomina *función de Green* a toda función que representa la respuesta al impulso de un operador diferencial lineal e inhomogéneo definido en un dominio con condiciones iniciales o condiciones de contorno específicas. En electrostática, la función de Green representa el potencial electrostático en todo el espacio donde la distribución de cargas presente corresponde a una carga de valor  $q' = 1$  colocada en la posición  $\mathbf{r}'$ , una posición asociada a un punto totalmente arbitrario del espacio.

## 8.2 Función De Green En Electrostática

La función de Green en electrostática corresponde a la solución de la ecuación de Poisson y Laplace en tres dimensiones, válida tanto para coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas cuando la región de interés es acotada. Cuando la región en la que se desea calcular el potencial electrostático en todo el espacio es todo el espacio ( $\mathbb{R}^3$ ), se recupera la expresión del potencial electrostático de la electrostática.

### 8.2.1 Definición

La función de Green en electrostática corresponde al potencial electrostático producido por una carga puntual  $q$  de valor unidad ( $q = 1$ ), y es de la forma:

Por la definición del potencial electrostático de una carga puntual, tenemos:

$$\begin{aligned}\phi_q &:= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \text{Si } q &= 1, \text{ tenemos que:} \\ \phi_{q=1} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} := \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}} \quad (8.1)$$

#### 8.2.1.1 Ecuación De Poisson

De la función de Green en electrostática, se sigue inmediatamente cómo resulta su ecuación de Poisson, de la forma:

$$\begin{aligned}\phi_{(\mathbf{r})} &:= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi_{(\mathbf{r})} &= \nabla_{\mathbf{r}}^2 \left[ \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dV' \right] \\ -\frac{\rho_{(\mathbf{r})}}{\epsilon_0} &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho(\mathbf{r}') \nabla_{\mathbf{r}}^2 G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dV' \\ \Leftrightarrow \nabla_{\mathbf{r}}^2 G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} &= -\frac{\delta_{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_{\mathbf{r}}^2 G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} = -\frac{\delta_{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{\epsilon_0}} \quad (8.2)$$

### 8.2.2 Expresión General Para El Potencial Electrostático

Sea una densidad volumétrica de carga  $\rho_{(\mathbf{r}')}$  contenida en una región del espacio  $\mathbb{Q}$  ( $\rho \subseteq \mathbb{Q}$ ), y sean  $f = \phi_{(\mathbf{r}')}$  y  $g = G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} := \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  dos funciones que representan al potencial electrostático en la región de cargas y a la función de green en todo el espacio, entonces:

Por la segunda identidad de Green, tenemos que:

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbb{Q}} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) dV' &= \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot d\mathbf{S}' \\ \iiint_{\mathbb{Q}} [\phi_{(\mathbf{r}')} \nabla^2 G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} - G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \nabla^2 \phi_{(\mathbf{r}')}] dV' &= \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} [\phi_{(\mathbf{r}')} \nabla G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} - G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \nabla \phi_{(\mathbf{r}')}] \cdot d\mathbf{S}'\end{aligned}$$

Por la ecuación de Poisson, tenemos que:

$$\iiint_{\mathbb{Q}} \left[ \phi_{(\mathbf{r}')} \nabla^2 G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} + G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{\epsilon_0} \right] dV' = \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \left[ \phi_{(\mathbf{r}')} \frac{\partial G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r}')}}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \right] dS'$$

Como  $\nabla^2 G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} = -\frac{\delta_{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{\epsilon_0}$ , tenemos que:

$$\iiint_{\mathbb{Q}} \phi_{(\mathbf{r}')} \left[ -\frac{\delta_{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}}{\epsilon_0} \right] dV' = -\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} dV' + \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \left[ \phi_{(\mathbf{r}')} \frac{\partial G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r}')}}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \right] dS'$$

Como  $G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}-\frac{\phi_{(\mathbf{r})}}{\epsilon_0} &= -\frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \left[ \phi_{(\mathbf{r}')} \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r}')}}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \right] dS' \\ \phi_{(\mathbf{r})} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r}')}}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - \phi_{(\mathbf{r}')} \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dS'\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\phi_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r}')}}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} - \phi_{(\mathbf{r}')} \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{n}}'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dS'} \quad (8.3)$$

### Observación

Basta con conocer la densidad volumétrica de carga eléctrica  $\rho_{(\mathbf{r}')}$ , el valor del potencial electrostático en la superficie  $\phi_{(\mathbf{r}')}$  y la información de su densidad de carga en superficie  $\frac{\partial \phi_{(\mathbf{r}')}}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}'}$  para hallar el potencial electrostático en toda la región del espacio  $\mathbb{Q}$ .

#### 8.2.2.1 Condiciones De Contorno De Dirichlet: Especificación Del Potencial

Se denominan *condiciones de Dirichlet* a la condición de contorno particular de la expresión general del potencial electrostático en una región del espacio en la que se fija el valor de la componente normal del potencial a cero. De esta forma, el potencial electrostático resulta:

$$\phi_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} \phi_{(\mathbf{r}')} \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dS' \quad (8.4)$$

### Observación: Función De Green En Superficie

Debido a que la condición de contorno es la condición de Dirichlet, se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi_{(\mathbf{r})} &:= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' \\ \phi_{(\mathbf{r})}|_{\mathbf{s}} &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} [G_{(\mathbf{r},\mathbf{r}')}]|_{\mathbf{s}} \, dV' \\ 0 &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}')} [G_{\text{D}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}]|_{\mathbf{s}} \, dV' \\ \Leftrightarrow [G_{\text{D}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}]|_{\mathbf{s}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{[G_{\text{D}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}]|_{\mathbf{s}} = 0} \quad (8.5)$$

#### 8.2.2.2 Condiciones De Contorno De Neumann: Especificación Del Campo Eléctrico

Se denominan *condiciones de Neumann* a la condición de contorno particular de la expresión general del potencial electrostático en una región del espacio en la que se fija el valor del potencial a cero. De esta forma, el potencial electrostático resulta:

$$\phi_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' + \frac{1}{4\pi} \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r}')}}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}'} \, dS' \quad (8.6)$$

#### 8.2.2.3 Condiciones De Contorno De Robin

Se denominan *condiciones de Robin* a la condición de contorno particular de la expresión general del potencial electrostático en una región del espacio en la que se fija el valor del potencial y su componente normal como una combinación lineal de ambos.

## 8.3 Propiedades

### 8.3.1 Simetría

Sea una densidad volumétrica de carga  $\rho_{(\mathbf{r}')}$  contenida en una región del espacio  $\mathbb{Q}$  ( $\rho \subseteq \mathbb{Q}$ ), y sean  $f = \phi_{(\mathbf{r}')}$  y  $g = G_{(\mathbf{r},\mathbf{r}')} := \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$  dos funciones que representan al potencial electrostático en la región de cargas y a la función de green en todo el espacio, entonces:

Por la segunda identidad de Green, tenemos que:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{Q}} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV' &:= \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot d\mathbf{S}' \\ \iiint_{\mathbb{Q}} [G_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})} \nabla^2 G_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}')} - G_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}')} \nabla^2 G_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})}] \, dV' &= \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} [G_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})} \nabla G_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}')} - G_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}')} \nabla G_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})}] \cdot d\mathbf{S}' \end{aligned}$$

Como  $\nabla^2 G_{(\mathbf{r},\mathbf{r}')} = -\frac{\delta_{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{\varepsilon_0}$ , tenemos que:

$$\iiint_{\mathbb{Q}} \left\{ G_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})} \left[ -\frac{\delta_{(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}')}}{\varepsilon_0} \right] - G_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}')} \left[ -\frac{\delta_{(\mathbf{r}_0-\mathbf{r})}}{\varepsilon_0} \right] \right\} dV' = \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} \left[ G_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})} \frac{\partial G_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}')}}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}'} - G_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}')} \frac{\partial G_{(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})}}{\partial \hat{\boldsymbol{\eta}}'} \right] dS'$$

Si utilizamos condiciones de contorno de Dirichlet, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} G_{\text{D}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}')} \delta_{(\mathbf{r}_0-\mathbf{r})} \, dV' - \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} G_{\text{D}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})} \delta_{(\mathbf{r}_0-\mathbf{r}')} \, dV' &= \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} [G_{\text{D}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})} \cdot 0 - G_{\text{D}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}')} \cdot 0] \, dS' \\ \frac{1}{\varepsilon_0} G_{\text{D}(\mathbf{r},\mathbf{r}')} - \frac{1}{\varepsilon_0} G_{\text{D}(\mathbf{r}',\mathbf{r})} &= \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} 0 \, dS' \\ \frac{1}{\varepsilon_0} G_{\text{D}(\mathbf{r},\mathbf{r}')} - \frac{1}{\varepsilon_0} G_{\text{D}(\mathbf{r}',\mathbf{r})} &= 0 \\ G_{\text{D}(\mathbf{r},\mathbf{r}')} &= G_{\text{D}(\mathbf{r}',\mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{G_{\text{D}(\mathbf{r},\mathbf{r}')} = G_{\text{D}(\mathbf{r}',\mathbf{r})}} \quad (8.7)$$

## 8.4 Funciones De Green En Sistemas De Coordenadas

### 8.4.1 Función De Green En Coordenadas Cartesianas

#### 8.4.1.1 Función De Green Del Espacio No Acotado

### 8.4.2 Función De Green En Coordenadas Cilíndricas

### 8.4.3 Función De Green En Coordenadas Esféricas

#### 8.4.3.1 Función De Green Del Espacio Acotado

### Deducción

Sea una carga eléctrica puntual  $q$  en la posición arbitraria  $\mathbf{r}' := r' \hat{\mathbf{r}}$  tal que ésta puede considerarse en la cáscara de una esfera centrada en el origen de radio  $r'$ , entonces:

- En primer lugar, dividimos el espacio en las dos regiones:

$$\mathbb{R}^3 := \begin{cases} \text{Región I} & r < r' \\ \text{Región II} & r' < r \end{cases}$$

- De esta forma, se cumplirá la ecuación de Laplace en todo el espacio, salvo en la cáscara de radio  $r'$  donde se encuentra la carga puntual  $q$ . De esta forma, el potencial electrostático general en todo el espacio será de la forma:

$$\phi_{(\mathbf{r})} := \begin{cases} \phi_{I(r,\theta,\varphi)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( A_{\ell,m} r^{\ell} + \frac{B_{\ell,m}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m & r < r' \\ \phi_{II(r,\theta,\varphi)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( C_{\ell,m} r^{\ell} + \frac{D_{\ell,m}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m & r' < r \end{cases}$$

- Debido a que  $\phi_I$  diverge cuando  $r = 0$  y  $\phi_{II}$  diverge cuando  $r \rightarrow \infty$ , pidiendo que  $B_{\ell,m} = C_{\ell,m} = 0$ , tenemos que:

$$\phi_{(\mathbf{r})} := \begin{cases} \phi_{I(r,\theta,\varphi)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m} r^{\ell} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m & r < r' \\ \phi_{II(r,\theta,\varphi)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{D_{\ell,m}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m & r' < r \end{cases}$$

- Para hallar las constantes  $A_{\ell,m}$  y  $D_{\ell,m}$ , como la dirección normal de las regiones es  $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \hat{\mathbf{r}}$ , pidiendo condiciones de contorno de Dirichlet, que corresponden a la condición de continuidad del potencial, y discontinuidad en función del potencial (o condición de continuidad del salto de la derivada del potencial), tenemos que:

$$\text{CC}_D := \begin{cases} \phi_{I(r=r',\theta,\varphi)} = \phi_{II(r=r',\theta,\varphi)} \\ \frac{\partial \phi_{I(r=r',\theta,\varphi)}}{\partial r} - \frac{\partial \phi_{II(r=r',\theta,\varphi)}}{\partial r} = \frac{\sigma(\theta,\varphi)}{\varepsilon_0} \end{cases} \quad (8.8)$$

- Para calcular la densidad de carga eléctrica superficial  $\sigma := \sigma_{(\theta,\varphi)}$  debido a la carga puntual, tenemos que:

$$Q_T := \iiint_{\mathbf{S}} \sigma_{(\mathbf{r})} \, dS$$

En coordenadas esféricas, tenemos que:

$$q = \iiint_{\mathbf{S}} \sigma_{(\mathbf{r}')} \, dS'$$

Como la carga  $q$  se encuentra en  $r'$ , tenemos:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sigma_{(\theta',\varphi')} r'^2 \sin(\theta') \, d\theta' \, d\varphi' \\ \Leftrightarrow \sigma_{(\theta',\varphi')} &= \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{r'^2 \sin(\theta)} \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_{(\theta,\varphi)} := \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{r'^2 \sin(\theta)} \quad (8.9)$$

- De esta forma, por la condición de continuidad en  $r = r'$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi_{I(r=r',\theta,\varphi)} &= \phi_{II(r=r',\theta,\varphi)} \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m} r'^{\ell} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{D_{\ell,m}}{r'^{\ell+1}} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m \\ \Leftrightarrow A_{\ell,m} r'^{\ell} &= \frac{D_{\ell,m}}{r'^{\ell+1}} \\ D_{\ell,m} &= A_{\ell,m} r'^{2\ell+1} \end{aligned}$$

$$\therefore D_{\ell,m} = A_{\ell,m} r'^{2\ell+1} \quad (8.10)$$

- Por la condición de continuidad de la derivada, tenemos que:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \phi_{I(r=r',\theta,\varphi)}}{\partial r} - \frac{\partial \phi_{II(r=r',\theta,\varphi)}}{\partial r} = \frac{\sigma(\theta,\varphi)}{\varepsilon_0} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m} r^{\ell} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m \right] \Big|_{r'} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{D_{\ell,m}}{r^{\ell+1}} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m \right] \Big|_{r'} &= \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{\varepsilon_0 r'^2 \sin(\theta)} \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \ell A_{\ell,m} r'^{\ell-1} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\ell+1) D_{\ell,m} r'^{-\ell-2} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m &= \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{\varepsilon_0 r'^2 \sin(\theta)} \\ \text{Por la condición de continuidad en } r = r', \text{ tenemos que:} \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \ell A_{\ell,m} r'^{\ell-1} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (\ell+1) A_{\ell,m} r'^{\ell-1} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m &= \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{\varepsilon_0 r'^2 \sin(\theta)} \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (2\ell+1) A_{\ell,m} r'^{\ell-1} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m &= \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{\varepsilon_0 r'^2 \sin(\theta)} \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (2\ell+1) A_{\ell,m} r'^{\ell-1} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell'(\theta,\varphi)}^{m'*} \sin(\theta) \right] d\theta \, d\varphi &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{\varepsilon_0 r'^2 \sin(\theta)} Y_{\ell'(\theta,\varphi)}^{m'*} \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left\{ (2\ell+1) A_{\ell,m} r'^{\ell-1} \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell'(\theta,\varphi)}^{m'*} \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi \right] \right\} &= \frac{q}{\varepsilon_0 r'^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')} Y_{\ell'(\theta,\varphi)}^{m'*} \, d\theta \, d\varphi \end{aligned}$$

Por la relación de ortogonalidad:  $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell'(\theta,\varphi)}^{m'*} \sin(\theta) \, d\theta \, d\varphi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$ , tenemos que:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (2\ell+1) A_{\ell,m} r'^{\ell-1} \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} = \frac{q}{\varepsilon_0 r'^2} Y_{\ell'(\theta',\varphi')}^{m'*}$$

$$(2\ell' + 1)A_{\ell', m'} r'^{\ell' - 1} = \frac{q}{\varepsilon_0 r'^2} Y_{\ell'(\theta', \varphi')}^{m'*}$$

Renombrando  $\ell' = \ell$  y  $m' = m$ , tenemos que:

$$A_{\ell, m} = \frac{q}{(2\ell + 1)\varepsilon_0 r'^{\ell+1}} Y_{\ell(\theta', \varphi')}^{m*}$$

$$\therefore \boxed{A_{\ell, m} = \frac{q}{(2\ell + 1)\varepsilon_0 r'^{\ell+1}} Y_{\ell(\theta', \varphi')}^{m*}} \quad (8.11)$$

- Reemplazando  $A_{\ell, m}$  en  $D_{\ell, m}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} D_{\ell, m} &= A_{\ell, m} r'^{2\ell+1} \\ &= \frac{q}{(2\ell + 1)\varepsilon_0 r'^{\ell+1}} Y_{\ell(\theta', \varphi')}^{m*} r'^{2\ell+1} \\ &= \frac{q r'^{\ell}}{(2\ell + 1)\varepsilon_0} Y_{\ell(\theta', \varphi')}^{m*} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{D_{\ell, m} = \frac{q r'^{\ell}}{(2\ell + 1)\varepsilon_0} Y_{\ell(\theta', \varphi')}^{m*}} \quad (8.12)$$

- Reemplazando todas las constantes, el potencial electrostático resulta:

$$\phi_{(r, \theta, \varphi)} := \begin{cases} \phi_{I(r, \theta, \varphi)} = \frac{q}{\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta, \varphi)}^m Y_{\ell(\theta', \varphi')}^{m*}}{2\ell + 1} \frac{r^{\ell}}{r'^{\ell+1}} & r < r' \\ \phi_{II(r, \theta, \varphi)} = \frac{q}{\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta, \varphi)}^m Y_{\ell(\theta', \varphi')}^{m*}}{2\ell + 1} \frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}} & r' < r \end{cases} \quad (8.13)$$

- Introduciendo la notación  $r_{<} := \min\{r, r'\}$  y  $r_{>} := \max\{r, r'\}$ , y tomando el valor de la carga puntual  $q = 1$ , finalmente tenemos que la función de Green en todo el espacio con condiciones de contorno de Dirichlet, será de la forma:

$$G_{D(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi')} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta, \varphi)}^m Y_{\ell(\theta', \varphi')}^{m*}}{2\ell + 1} \left( \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \right)_{r'} \quad (8.14)$$

### Función De Green

La función de Green en todo el espacio en coordenadas esféricas con condiciones de contorno de Dirichlet, es de la forma:

$$G_{D(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi')} := \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta, \varphi)}^m Y_{\ell(\theta', \varphi')}^{m*}}{2\ell + 1} \left( \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \right)_{r'} \quad (8.15)$$

### Observación

Debido a que el potencial electrostático de una carga puntual es conocido, mediante la función de Green del espacio en coordenadas esféricas con condiciones de Dirichlet es posible obtener una expansión del término  $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$ . Por la expresión del potencial electrostático de una carga puntual en la posición  $\mathbf{r}'$ , tenemos que:

$$\phi_q := \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

Si  $q = 1$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= G_{D(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi')} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta, \varphi)}^m Y_{\ell(\theta', \varphi')}^{m*}}{2\ell + 1} \left( \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \right)_{r'} \\ \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta, \varphi)}^m Y_{\ell(\theta', \varphi')}^{m*}}{2\ell + 1} \left( \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \right)_{r'} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta, \varphi)}^m Y_{\ell(\theta', \varphi')}^{m*}}{2\ell + 1} \left( \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} \right)_{r'}} \quad (8.16)$$

#### 8.4.3.2 Función De Green Entre Dos Cáscaras Esféricas

### Deducción

Sea una carga eléctrica puntual  $q$  en la posición arbitraria  $\mathbf{r}' := r' \hat{\mathbf{r}}$  tal que ésta puede considerarse en la cáscara de una esfera centrada en el origen de radio  $r'$ , y que contiene una cáscara esférica de radio  $a < r'$  en su interior y una de radio  $b > r'$  en su exterior, ambas a potencial cero, entonces:

- En primer lugar, dividimos el espacio en dos regiones:

$$\mathbb{R}^3 := \begin{cases} \text{Región I} & a < r < r' \\ \text{Región II} & r' < r < b \end{cases}$$

- De esta forma, se cumplirá la ecuación de Laplace en todo el espacio, salvo en la cáscara de radio  $r'$  donde se encuentra la carga puntual  $q$ , y el potencial para  $r < a$  y  $r > b$  será nulo. Así, el potencial electrostático general en todo el espacio será de la forma:

$$\phi(\mathbf{r}) := \begin{cases} \phi_{I(r, \theta, \varphi)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( A_{\ell, m} r^{\ell} + \frac{B_{\ell, m}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta, \varphi)}^m & a < r < r' \\ \phi_{II(r, \theta, \varphi)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( C_{\ell, m} r^{\ell} + \frac{D_{\ell, m}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta, \varphi)}^m & r' < r < b \end{cases}$$

- Para hallar las constantes  $A_{\ell, m}$ ,  $B_{\ell, m}$ ,  $C_{\ell, m}$  y  $D_{\ell, m}$ , como la dirección normal de las regiones es  $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \hat{\mathbf{r}}$ , pidiendo condiciones de contorno de Dirichlet, que corresponden a la condición de continuidad del potencial, y salto, tenemos que:

$$\text{CC}_D := \begin{cases} \phi_{I(r=a, \theta, \varphi)} = 0 \\ \phi_{I(r=r', \theta, \varphi)} = \phi_{II(r=r', \theta, \varphi)} \\ \frac{\partial \phi_{I(r=r', \theta, \varphi)}}{\partial r} - \frac{\partial \phi_{II(r=r', \theta, \varphi)}}{\partial r} = \frac{\sigma(\theta, \varphi)}{\varepsilon_0} \\ \phi_{II(r=b, \theta, \varphi)} = 0 \end{cases} \quad (8.17)$$

- De esta forma, por la primera y última condiciones de contorno, tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi_{I(r=a,\theta,\varphi)} &= 0 & \phi_{II(r=b,\theta,\varphi)} &= 0 \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( A_{\ell,m} a^{\ell} + \frac{B_{\ell,m}}{a^{\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m &= 0 & \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left( C_{\ell,m} b^{\ell} + \frac{D_{\ell,m}}{b^{\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m &= 0 \\ \Leftrightarrow A_{\ell,m} a^{\ell} + \frac{B_{\ell,m}}{a^{\ell+1}} &= 0 & \Leftrightarrow C_{\ell,m} b^{\ell} + \frac{D_{\ell,m}}{b^{\ell+1}} &= 0 \\ A_{\ell,m} &= -\frac{B_{\ell,m}}{a^{2\ell+1}} & C_{\ell,m} &= -\frac{D_{\ell,m}}{b^{2\ell+1}} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} A_{\ell,m} = -\frac{B_{\ell,m}}{a^{2\ell+1}} \\ C_{\ell,m} = -\frac{D_{\ell,m}}{b^{2\ell+1}} \end{cases} \quad (8.18)$$

- Reemplazando estas condiciones en el potencial, se tiene que:

$$\phi(\mathbf{r}) := \begin{cases} \phi_{I(r,\theta,\varphi)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell,m} \left( \frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^{\ell}}{a^{2\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m & a < r < r' \\ \phi_{II(r,\theta,\varphi)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} D_{\ell,m} \left( \frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m & r' < r < b \end{cases}$$

- La densidad de carga eléctrica superficial  $\sigma := \sigma_{(\theta,\varphi)}$  debida a la carga puntual corresponde a la densidad de carga de la función de green del espacio no acotado en coordenadas esféricas, por lo que su expresión es de la forma:

$$\sigma_{(\theta,\varphi)} := \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{r'^2 \sin(\theta)} \quad (8.19)$$

- Por la condición de continuidad en  $r = r'$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi_{I(r=r',\theta,\varphi)} &= \phi_{II(r=r',\theta,\varphi)} \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell,m} \left( \frac{1}{r'^{\ell+1}} - \frac{r'^{\ell}}{a^{2\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} D_{\ell,m} \left( \frac{1}{r'^{\ell+1}} - \frac{r'^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m \\ \Leftrightarrow B_{\ell,m} \left( \frac{1}{r'^{\ell+1}} - \frac{r'^{\ell}}{a^{2\ell+1}} \right) &= D_{\ell,m} \left( \frac{1}{r'^{\ell+1}} - \frac{r'^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right) \\ B_{\ell,m} \frac{a^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{r'^{\ell+1} a^{2\ell+1}} &= D_{\ell,m} \frac{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{r'^{\ell+1} b^{2\ell+1}} \\ D_{\ell,m} &= B_{\ell,m} \frac{a^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} \left( \frac{b}{a} \right)^{2\ell+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{D_{\ell,m} = B_{\ell,m} \frac{a^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} \left( \frac{b}{a} \right)^{2\ell+1}} \quad (8.20)$$

- Por la condición de salto, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{I(r=r',\theta,\varphi)}}{\partial r} - \frac{\partial \phi_{II(r=r',\theta,\varphi)}}{\partial r} &= \frac{\sigma_{(\theta,\varphi)}}{\varepsilon_0} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell,m} \left( \frac{1}{r'^{\ell+1}} - \frac{r'^{\ell}}{a^{2\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m \right] \Big|_{r'} - \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} D_{\ell,m} \left( \frac{1}{r'^{\ell+1}} - \frac{r'^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m \right] \Big|_{r'} &= \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{\varepsilon_0 r'^2 \sin(\theta)} \\ - \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell,m} \left[ (\ell+1) r'^{-\ell-2} + \frac{\ell r'^{\ell-1}}{a^{2\ell+1}} \right] Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} D_{\ell,m} \left[ (\ell+1) r'^{-\ell-2} + \frac{\ell r'^{\ell-1}}{b^{2\ell+1}} \right] Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m &= \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{\varepsilon_0 r'^2 \sin(\theta)} \end{aligned}$$

Por la condición de continuidad en  $r = r'$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} - \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell,m} \left[ (\ell+1) r'^{-\ell-2} + \frac{\ell r'^{\ell-1}}{a^{2\ell+1}} \right] Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m + \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell,m} \frac{a^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} \left( \frac{b}{a} \right)^{2\ell+1} \left[ (\ell+1) r'^{-\ell-2} + \frac{\ell r'^{\ell-1}}{b^{2\ell+1}} \right] Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m &= \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{\varepsilon_0 r'^2 \sin(\theta)} \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell,m} \left\{ \frac{a^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} \left( \frac{b}{a} \right)^{2\ell+1} \left[ (\ell+1) r'^{-\ell-2} + \frac{\ell r'^{\ell-1}}{b^{2\ell+1}} \right] - \left[ (\ell+1) r'^{-\ell-2} + \frac{\ell r'^{\ell-1}}{a^{2\ell+1}} \right] \right\} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m &= \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{\varepsilon_0 r'^2 \sin(\theta)} \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell,m} \left\{ (\ell+1) r'^{-\ell-2} \left[ \frac{(ab)^{2\ell+1} - (br')^{2\ell+1}}{(ab)^{2\ell+1} - (ar')^{2\ell+1}} - 1 \right] + \frac{\ell r'^{\ell-1}}{a^{2\ell+1}} \left( \frac{a^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} - 1 \right) \right\} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m &= \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{\varepsilon_0 r'^2 \sin(\theta)} \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell,m} \left\{ (\ell+1) r'^{-\ell-2} \left[ \frac{(ar')^{2\ell+1} - (br')^{2\ell+1}}{(ab)^{2\ell+1} - (ar')^{2\ell+1}} \right] + \frac{\ell r'^{\ell-1}}{a^{2\ell+1}} \left( \frac{a^{2\ell+1} - b^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} \right) \right\} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m &= \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{\varepsilon_0 r'^2 \sin(\theta)} \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell,m} \left\{ (\ell+1) r'^{-\ell-2} r'^{2\ell+1} \frac{a^{2\ell+1}}{a^{2\ell+1}} \left[ \frac{1 - (b/a)^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} \right] + \ell r'^{\ell-1} \frac{a^{2\ell+1}}{a^{2\ell+1}} \left[ \frac{1 - (b/a)^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} \right] \right\} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m &= \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{\varepsilon_0 r'^2 \sin(\theta)} \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell,m} \left\{ (\ell+1) r'^{\ell-1} \left[ \frac{1 - (b/a)^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} \right] + \ell r'^{\ell-1} \left[ \frac{1 - (b/a)^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} \right] \right\} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m &= \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{\varepsilon_0 r'^2 \sin(\theta)} \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (2\ell+1) B_{\ell,m} r'^{\ell-1} \left[ \frac{1 - (b/a)^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} \right] Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m &= \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{\varepsilon_0 r'^2 \sin(\theta)} \\ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (2\ell+1) B_{\ell,m} r'^{\ell-1} \left[ \frac{1 - (b/a)^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} \right] Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell'(\theta,\varphi)}^{m'*} \sin(\theta) \right\} d\theta d\varphi &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{q \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')}}{\varepsilon_0 r'^2 \sin(\theta)} Y_{\ell'(\theta,\varphi)}^{m'*} \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \left\{ (2\ell+1) B_{\ell,m} r'^{\ell-1} \left[ \frac{1 - (b/a)^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} \right] \left[ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell'(\theta,\varphi)}^{m'*} \sin(\theta) d\theta d\varphi \right] \right\} &= \frac{q}{\varepsilon_0 r'^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \delta_{(\theta-\theta')} \delta_{(\varphi-\varphi')} Y_{\ell'(\theta,\varphi)}^{m'*} d\theta d\varphi \end{aligned}$$

Por la relación de ortogonalidad:  $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell'(\theta,\varphi)}^{m'*} \sin(\theta) d\theta d\varphi = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$ , tenemos que:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} (2\ell+1) B_{\ell,m} r'^{\ell-1} \left[ \frac{1 - (b/a)^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} \right] \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} = \frac{q}{\varepsilon_0 r'^2} Y_{\ell'(\theta',\varphi')}^{m'*}$$

$$(2\ell' + 1)B_{\ell',m'}r'^{\ell'-1} \left[ \frac{1 - (b/a)^{2\ell'+1}}{b^{2\ell'+1} - r'^{2\ell'+1}} \right] = \frac{q}{\varepsilon_0 r'^2} Y_{\ell'(\theta',\varphi')}^{m'*}$$

Renombrando  $\ell' = \ell$  y  $m' = m$ , tenemos que:

$$B_{\ell,m} = \frac{q}{(2\ell + 1)\varepsilon_0 r^{\ell+1}} \left[ \frac{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{1 - (b/a)^{2\ell+1}} \right] Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*}$$

$$\therefore B_{\ell,m} = \frac{q}{(2\ell + 1)\varepsilon_0 r^{\ell+1}} \left[ \frac{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{1 - (b/a)^{2\ell+1}} \right] Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*} \quad (8.21)$$

- Reemplazando  $B_{\ell,m}$  en  $D_{\ell,m}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} D_{\ell,m} &= B_{\ell,m} \frac{a^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} \left( \frac{b}{a} \right)^{2\ell+1} \\ &= \frac{q}{(2\ell + 1)\varepsilon_0 r^{\ell+1}} \left[ \frac{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{1 - (b/a)^{2\ell+1}} \right] Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*} \frac{a^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}} \left( \frac{b}{a} \right)^{2\ell+1} \\ &= \frac{q}{(2\ell + 1)\varepsilon_0 r^{\ell+1}} \left[ \frac{a^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{1 - (b/a)^{2\ell+1}} \right] Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*} \left( \frac{b}{a} \right)^{2\ell+1} \\ &= \frac{q}{(2\ell + 1)\varepsilon_0 r^{\ell+1}} \left[ \frac{a^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{(a/b)^{2\ell+1} - 1} \right] Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*} \end{aligned}$$

$$\therefore D_{\ell,m} = \frac{q}{(2\ell + 1)\varepsilon_0 r^{\ell+1}} \left[ \frac{a^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{(a/b)^{2\ell+1} - 1} \right] Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*} \quad (8.22)$$

- Reemplazando las constantes en el potencial electrostático, resulta:

$$\begin{aligned} \phi_{I(r,\theta,\varphi)} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} B_{\ell,m} \left( \frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^{\ell}}{a^{2\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{q}{(2\ell + 1)\varepsilon_0 r^{\ell+1}} \left[ \frac{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{1 - (b/a)^{2\ell+1}} \right] Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*} \left( \frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^{\ell}}{a^{2\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m \\ &= \frac{q}{\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{r'^{-\ell-1}}{2\ell + 1} \left( \frac{a}{b} \right)^{2\ell+1} \left[ \frac{b^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{(a/b)^{2\ell+1} - 1} \right] \left( \frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^{\ell}}{a^{2\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*} \\ &= \frac{q}{\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*}}{(2\ell + 1)[1 - (a/b)^{2\ell+1}]} \left( r^{\ell} - \frac{a^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) \left( \frac{1}{r'^{\ell+1}} - \frac{r'^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{II(r,\theta,\varphi)} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} D_{\ell,m} \left( \frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{q}{(2\ell + 1)\varepsilon_0 r^{\ell+1}} \left[ \frac{a^{2\ell+1} - r'^{2\ell+1}}{(a/b)^{2\ell+1} - 1} \right] Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*} \left( \frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m \\ &= \frac{q}{\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{r'^{-\ell-1}}{2\ell + 1} \left[ \frac{r'^{2\ell+1} - a^{2\ell+1}}{1 - (a/b)^{2\ell+1}} \right] \left( \frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right) Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*} \\ &= \frac{q}{\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*}}{(2\ell + 1)[1 - (a/b)^{2\ell+1}]} \left( r'^{\ell} - \frac{a^{2\ell+1}}{r'^{\ell+1}} \right) \left( \frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \phi_{(r,\theta,\varphi)} := \begin{cases} \phi_{I(r,\theta,\varphi)} = \frac{q}{\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*}}{(2\ell + 1)[1 - (a/b)^{2\ell+1}]} \left( r^{\ell} - \frac{a^{2\ell+1}}{r^{\ell+1}} \right) \left( \frac{1}{r'^{\ell+1}} - \frac{r'^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right) & a < r < r' \\ \phi_{II(r,\theta,\varphi)} = \frac{q}{\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*}}{(2\ell + 1)[1 - (a/b)^{2\ell+1}]} \left( r'^{\ell} - \frac{a^{2\ell+1}}{r'^{\ell+1}} \right) \left( \frac{1}{r^{\ell+1}} - \frac{r^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right) & r' < r < b \end{cases} \quad (8.23)$$

- Introduciendo la notación  $r_{<} := \min\{r, r'\}$  y  $r_{>} := \max\{r, r'\}$ , y tomando el valor de la carga puntual  $q = 1$ , finalmente tenemos que la función de Green en todo el espacio con condiciones de contorno de Dirichlet, será de la forma:

$$G_{D(r,\theta,\varphi,r',\theta',\varphi')} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*}}{(2\ell + 1)[1 - (a/b)^{2\ell+1}]} \left( r_{<}^{\ell} - \frac{a^{2\ell+1}}{r_{<}^{\ell+1}} \right)_{r'} \left( \frac{1}{r_{>}^{\ell+1}} - \frac{r_{>}^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right)_{r'} \quad (8.24)$$

### Función De Green

La función de Green en todo el espacio en coordenadas esféricas con condiciones de contorno de Dirichlet, es de la forma:

$$G_{D(r,\theta,\varphi,r',\theta',\varphi')} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*}}{(2\ell + 1)[1 - (a/b)^{2\ell+1}]} \left( r_{<}^{\ell} - \frac{a^{2\ell+1}}{r_{<}^{\ell+1}} \right)_{r'} \left( \frac{1}{r_{>}^{\ell+1}} - \frac{r_{>}^{\ell}}{b^{2\ell+1}} \right)_{r'} \quad (8.25)$$

- Caso 1: Si  $b \rightarrow \infty$ , se obtiene que el último término dentro del corchete de la función de Green representa la imagen de una carga puntual en el interior de la esfera de radio  $a$ , de la forma:

$$G_{D(r,\theta,\varphi,r',\theta',\varphi')} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*}}{2\ell + 1} \left[ \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} - \frac{1}{a} \left( \frac{a^2}{rr'} \right)^{\ell+1} \right]_{r'} \quad (8.26)$$

- Caso 2: Si  $a \rightarrow 0$ , se obtiene que el último término dentro del corchete de la función de Green representa la imagen de una carga puntual por fuera de la esfera de radio  $b$ , de la forma:

$$G_{D(r,\theta,\varphi,r',\theta',\varphi')} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{Y_{\ell(\theta,\varphi)}^m Y_{\ell(\theta',\varphi')}^{m*}}{2\ell + 1} \left[ \frac{r_{<}^{\ell}}{r_{>}^{\ell+1}} - \frac{1}{b} \left( \frac{rr'}{b^2} \right)^{\ell} \right]_{r'} \quad (8.27)$$



# CAPÍTULO 9: MÉTODO DE IMÁGENES

## 9.1 Definición

Se denomina *método de imágenes* a un método matemático para resolver ecuaciones diferenciales con condiciones de contorno dadas, en el cual se extiende la solución del problema agregando singularidades virtuales en posiciones simétricas como “imágenes espejadas” que no se encuentran restringidas al dominio de la solución original, de tal forma que la solución total mantenga las condiciones de contorno del problema original.

Debido al teorema de existencia y unicidad de la solución de las ecuaciones de Poisson y Laplace, si se encuentra mediante el método de imágenes la solución de un problema electrostático con las mismas condiciones de contorno que las de un problema electrostático donde no existen dichas imágenes o singularidades ficticias, la solución de la ecuación diferencial original es igual a la solución del problema hallada mediante el método de imágenes y es única.

## 9.2 Plano Infinito Conductor Frente A Una Carga Puntual

Sea un plano infinito conductor en el plano  $xy$  en la posición  $z = 0$  conectado a tierra ( $\phi_{(r)} = 0$ ) junto a una carga puntual  $q$  que se encuentra en la posición  $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}}$  en el semiespacio  $z > 0$ . Para hallar el potencial electrostático en el semiespacio  $z > 0$  puede utilizarse el método de imágenes, de la siguiente forma:

### 9.2.1 Condiciones De Contorno

Debido a que la carga  $q$  induce cargas superficiales en el plano infinito, en principio no se sabe cómo se dará esta distribución de cargas ya que para puntos en el plano cercanos a la carga  $q$  la inducción será distinta que para puntos muy lejanos. Las condiciones de contorno del problema son las siguientes:

$$\text{CC} := \begin{cases} \phi_{(x,y,z=0)} = 0 \\ \phi_{(r)} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0 \end{cases} \quad (9.1)$$

### 9.2.2 Potencial Electrostático

Para hallar el potencial electrostático en el semiespacio  $z > 0$ , consideramos el problema en todo el espacio, donde colocamos una carga puntual imagen de valor  $q_{\text{im}}$  en la posición  $\mathbf{r}'_{\text{im}}$  en el espacio que no se encuentra restringido por el contorno (es decir, en alguna posición en  $z < 0$ ), de esta forma:

- Debido a que la expresión del potencial electrostático de una carga puntual es conocido, por el principio de superposición el potencial electrostático en todo el espacio será la suma de los potenciales producidos por la carga  $q$  y  $q_{\text{im}}$ , de la forma:

$$\phi'_{(r)} := \phi_{(r)} + \phi_{\text{im}(r)}$$

Por la definición del potencial electrostático de una carga puntual, tenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{q_{\text{im}}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\text{im}}|} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}) - (x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}})|} + \frac{q_{\text{im}}}{4\pi\epsilon_0 |(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}) - (x'_{\text{im}}\hat{\mathbf{x}} + y'_{\text{im}}\hat{\mathbf{y}} + z'_{\text{im}}\hat{\mathbf{z}})|} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{q_{\text{im}}}{\sqrt{(x-x'_{\text{im}})^2 + (y-y'_{\text{im}})^2 + (z-z'_{\text{im}})^2}} \right] \end{aligned}$$

Por la primera condición de contorno, tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi'_{(x,y,z=0)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (0-z')^2}} + \frac{q_{\text{im}}}{\sqrt{(x-x'_{\text{im}})^2 + (y-y'_{\text{im}})^2 + (0-z'_{\text{im}})^2}} \right] \\ 0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (0-z')^2}} + \frac{q_{\text{im}}}{\sqrt{(x-x'_{\text{im}})^2 + (y-y'_{\text{im}})^2 + (0-z'_{\text{im}})^2}} \right] \\ \frac{q}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (-z')^2}} &= -\frac{q_{\text{im}}}{\sqrt{(x-x'_{\text{im}})^2 + (y-y'_{\text{im}})^2 + (-z'_{\text{im}})^2}} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} q_{\text{im}} = -q \\ x'_{\text{im}} = x' \\ y'_{\text{im}} = y' \\ z'_{\text{im}} = -z' \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore \phi'_{(r)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right] \quad (9.2)$$

- Por la segunda condición de contorno, tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi'_{(x,y,z \rightarrow \infty)} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (\infty-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (\infty+z')^2}} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{CC}' := \begin{cases} \phi'_{(x,y,z=0)} = 0 \\ \phi'_{(r)} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0 \end{cases} \quad (9.3)$$

- Como el potencial electrostático  $\phi'_{(r)}$  tiene las mismas condiciones de contorno que el problema original, entonces por el teorema de existencia y unicidad el potencial electrostático  $\phi_{(r)}$  del plano infinito conductor frente a la carga puntual es de la forma:

$$\phi_{(r)} := \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right] & 0 < z \\ 0 & z < 0 \end{cases} \quad (9.4)$$

### Observación

El potencial electrostático se obtuvo al colocar una carga de valor  $-q$  de forma espejada al plano infinito conductor, en la posición  $\mathbf{r}'_{\text{im}} = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} - z'\hat{\mathbf{z}}$ .

### 9.2.3 Función De Green

Debido a que el potencial electrostático del plano infinito conductor en  $z = 0$  frente a la carga puntual  $q$  fue obtenido para un valor de la posición de la carga totalmente arbitrario ( $\mathbf{r}' = x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} + z'\hat{\mathbf{z}}$ ), la función de Green del semiespacio  $z > 0$  corresponderá al valor del potencial electrostático cuando  $q = 1$ , de la forma:

$$G_{\text{D}(x,y,z,x',y',z')} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right] & 0 < z \\ 0 & z < 0 \end{cases} \quad (9.5)$$

### 9.2.4 Densidad De Carga Inducida

Por la expresión de las condiciones de contorno del potencial electrostático, podemos obtener el valor de la densidad de carga inducida en el plano infinito conductor, de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r})}^-}{\partial \eta} - \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r})}^+}{\partial \eta} &: = \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{\epsilon_0} \\ \text{Como } \phi_{(\mathbf{r})} &= 0 \quad \forall \quad z < 0, \text{ tenemos que:} \\ 0 - \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r})}^+}{\partial \eta} &= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{\epsilon_0} \\ \sigma_{(\mathbf{r})} &= -\epsilon_0 \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r})}}{\partial \eta} \\ &= -\epsilon_0 \frac{\partial \phi_{(z=0)}}{\partial z} \\ &= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} \right] \right\} \Big|_{z=0} \\ &= -\frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{z'-z}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} + \frac{z'+z}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2]^{3/2}} \right\} \Big|_{z=0} \\ &= -\frac{q}{4\pi} \left[ \frac{z'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2]^{3/2}} + \frac{z'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2]^{3/2}} \right] \\ &= -\frac{qz'}{2\pi[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2]^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_{\text{ind}(\mathbf{r})} := \sigma_{(x,y)} = -\frac{qz'}{2\pi[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2]^{3/2}} \quad (9.6)$$

### 9.2.5 Carga Total Inducida

La carga total inducida sobre el conductor será de la forma:

$$\begin{aligned} Q_{\text{T}} &:= \iint_{\text{S}} \sigma_{(\mathbf{r})} \, \text{dS} \\ &= -\frac{qz'}{2\pi} \iint_{\text{S}} \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + z'^2]^{3/2}} \, \text{dS} \\ \text{Tomando } x' &= y' = 0, \text{ tenemos:} \\ &= -\frac{qz'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{|\rho|}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \, \text{d}\rho \, \text{d}\varphi \\ &= -\frac{qz'}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{d}\varphi \int_0^\infty \frac{\rho}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \, \text{d}\rho \\ &= -\frac{qz'}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{z'} \\ &= -q \end{aligned}$$

$$\therefore Q_{\text{T}} := q_{\text{im}} = -q \quad (9.7)$$

## 9.3 Esfera Conductora Frente A Una Carga Puntual

Sea un esfera conductora de radio  $R$  centrada en el origen de coordenadas conectada a tierra ( $\phi_{(\mathbf{r})} = 0$ ) junto a una carga puntual  $q$  que se encuentra en la posición  $\mathbf{r}' = r'\hat{\mathbf{r}}$  fuera de la esfera. Para hallar el potencial electrostático fuera de la esfera puede utilizarse el método de imágenes, de la siguiente forma:

### 9.3.1 Condiciones De Contorno

Debido a que la carga  $q$  induce cargas superficiales en la esfera, en principio no se sabe cómo se dará esta distribución de cargas. Las condiciones de contorno del problema son las siguientes:

$$\text{CC} := \begin{cases} \phi_{(r=R,\theta,\varphi)} = 0 \\ \phi_{(\mathbf{r})} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \end{cases} \quad (9.8)$$

### 9.3.2 Potencial Electrostático

Para hallar el potencial electrostático en el espacio fuera de la esfera, consideramos el problema en todo el espacio, donde colocamos una carga puntual imagen de valor  $q_{\text{im}}$  en la posición  $\mathbf{r}'_{\text{im}} = r'_{\text{im}}\hat{\mathbf{r}}$  en el interior de la esfera, de esta forma:

- Debido a que la expresión del potencial electrostático de una carga puntual es conocido, por el principio de superposición el potencial electrostático en todo el espacio será la suma de los potenciales producidos por la carga  $q$  y  $q_{\text{im}}$ , de la forma:

$$\phi'_{(\mathbf{r})} := \phi_{(\mathbf{r})} + \phi_{\text{im}(\mathbf{r})}$$

Por la definición del potencial electrostático de una carga puntual, tenemos:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{q_{\text{im}}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\text{im}}|} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}} + \frac{q_{\text{im}}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\text{im}}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\text{im}})}} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(r\hat{\mathbf{r}} - r'\hat{\mathbf{r}}) \cdot (r\hat{\mathbf{r}} - r'\hat{\mathbf{r}})}} + \frac{q_{\text{im}}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(r\hat{\mathbf{r}} - r'_{\text{im}}\hat{\mathbf{r}}) \cdot (r\hat{\mathbf{r}} - r'_{\text{im}}\hat{\mathbf{r}})}} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta)}} + \frac{q_{\text{im}}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + r'_{\text{im}}^2 - 2rr'_{\text{im}} \cos(\theta)}}
 \end{aligned}$$

Por la primera condición de contorno, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \phi'_{(r=R, \theta, \varphi)} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos(\theta)}} + \frac{q_{\text{im}}}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{R^2 + r'_{\text{im}}^2 - 2Rr'_{\text{im}} \cos(\theta)}} \\
 0 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos(\theta)}} + \frac{q_{\text{im}}}{\sqrt{R^2 + r'_{\text{im}}^2 - 2Rr'_{\text{im}} \cos(\theta)}} \right] \\
 \frac{q}{\sqrt{R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos(\theta)}} &= - \frac{q_{\text{im}}}{\sqrt{R^2 + r'_{\text{im}}^2 - 2Rr'_{\text{im}} \cos(\theta)}} \\
 q^2 [R^2 + r'_{\text{im}}^2 - 2Rr'_{\text{im}} \cos(\theta)] &= q_{\text{im}}^2 [R^2 + r'^2 - 2Rr' \cos(\theta)] \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{sg}(q_{\text{im}}) = -\text{sg}(q) \\ q^2(R^2 + r'_{\text{im}}^2) = q_{\text{im}}^2(R^2 + r'^2) \\ 2q^2 Rr'_{\text{im}} \cos(\theta) = 2q_{\text{im}}^2 Rr' \cos(\theta) \end{cases}
 \end{aligned}$$

- Obtuvimos un sistema de ecuaciones para  $q_{\text{im}}$  y  $r'_{\text{im}}$ . Por la última ecuación, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 2q^2 Rr'_{\text{im}} \cos(\theta) &= 2q_{\text{im}}^2 Rr' \cos(\theta) \\
 \frac{q^2}{q_{\text{im}}^2} &= \frac{r'}{r'_{\text{im}}}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\frac{q^2}{q_{\text{im}}^2} = \frac{r'}{r'_{\text{im}}}} \quad (9.9)$$

- Por la segunda ecuación, tenemos que:

$$\frac{q^2}{q_{\text{im}}^2} (R^2 + r'_{\text{im}}^2) = R^2 + r'^2$$

Reemplazando la primera ecuación, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{r'}{r'_{\text{im}}} (R^2 + r'_{\text{im}}^2) &= R^2 + r'^2 \\
 r' R^2 + r' r'_{\text{im}}^2 &= r'_{\text{im}} R^2 + r'_{\text{im}} r'^2 \\
 0 &= (r') r'_{\text{im}}^2 + (-R^2 - r'^2) r'_{\text{im}} + (r' R^2) \\
 r'_{\text{im}1,2} &:= \frac{-(-R^2 - r'^2) \mp \sqrt{(-R^2 - r'^2)^2 - 4r'^2 R^2}}{2r'} \\
 &= \frac{R^2 + r'^2 \mp \sqrt{R^4 + r'^4 - 2r'^2 R^2}}{2r'} \\
 &= \frac{R^2 + r'^2 \mp \sqrt{(r'^2 - R^2)^2}}{2r'} \\
 &= \frac{R^2 + r'^2 \mp |r'^2 - R^2|}{2r'} \\
 \text{Como } r' > R, \text{ tenemos que:} \\
 &= \frac{R^2 + r'^2 \mp (r'^2 - R^2)}{2r'} \\
 &= \begin{cases} r'_{\text{im}1} = \frac{2R^2}{2r'} = \frac{R^2}{r'} \\ r'_{\text{im}2} = \frac{2r'^2}{2r'} = r' \text{ abs. pues } r'_{\text{im}} < R < r' \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{r'_{\text{im}} = \frac{R^2}{r'}} \quad (9.10)$$

- Reemplazando en la última ecuación nuevamente, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{q^2}{q_{\text{im}}^2} &= \frac{r'}{r'_{\text{im}}} \\
 q_{\text{im}}^2 &= q^2 \frac{r'_{\text{im}}}{r'} \\
 q_{\text{im}}^2 &= q^2 \frac{R^2}{r'^2}
 \end{aligned}$$

Como  $\text{sg}(q_{\text{im}}) = -\text{sg}(q)$ , tenemos que:

$$q_{\text{im}} = -\frac{qR}{r'}$$

$$\therefore \boxed{\begin{cases} r'_{\text{im}} = \frac{R^2}{r'} \\ q_{\text{im}} = -\frac{qR}{r'} \end{cases}} \quad (9.11)$$

- Reemplazando las condiciones en el potencial electrostático, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 \phi'_{(\mathbf{r})} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{q_{\text{im}}}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_{\text{im}}|} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r} - r'\hat{\mathbf{r}}|} - \frac{qR}{4\pi\epsilon_0 r' \left| \mathbf{r} - \frac{R^2}{r'} \hat{\mathbf{r}} \right|} \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta)}} - \frac{R}{r' \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - 2\frac{rR^2}{r'} \cos(\theta)}} \right]
 \end{aligned}$$

$$\therefore \phi'_{(\mathbf{r})} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - r'\hat{\mathbf{f}}|} - \frac{R}{r' \left| \mathbf{r} - \frac{R^2}{r'}\hat{\mathbf{f}} \right|} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta)}} - \frac{R}{r' \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - 2\frac{rR^2}{r'}\cos(\theta)}} \right] \quad (9.12)$$

- Por la segunda condición de contorno, tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi'_{(r \rightarrow \infty, \theta, \varphi)} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{\infty^2 + r'^2 - 2\infty r' \cos(\theta)}} - \frac{R}{r' \sqrt{\infty^2 + \frac{R^4}{r'^2} - 2\frac{\infty R^2}{r'} \cos(\theta)}} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty} \right) \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{CC}' := \begin{cases} \phi'_{(r=R, \theta, \varphi)} = 0 \\ \phi'_{(\mathbf{r})} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0 \end{cases} \quad (9.13)$$

- Como el potencial electrostático  $\phi'_{(\mathbf{r})}$  tiene las mismas condiciones de contorno que el problema original, entonces por el teorema de existencia y unicidad el potencial electrostático  $\phi_{(\mathbf{r})}$  de la esfera conductora frente a la carga puntual es de la forma:

$$\phi_{(\mathbf{r})} := \begin{cases} 0 & 0 < r < R \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta)}} - \frac{R}{r' \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - 2\frac{rR^2}{r'}\cos(\theta)}} \right] & R < r \end{cases} \quad (9.14)$$

### Observación

El potencial electrostático se obtuvo al colocar una carga de valor  $-q$  de forma espejada a la esfera conductora, en la posición  $\mathbf{r}'_{\text{im}} = \frac{R^2}{r'}\hat{\mathbf{f}}$ .

### 9.3.3 Función De Green

Debido a que el potencial electrostático de la esfera conductora en  $r = R$  frente a la carga puntual  $q$  fue obtenido para un valor de la posición de la carga totalmente arbitrario ( $\mathbf{r}' = r'\hat{\mathbf{f}}$ ), la función de Green del espacio fuera de la esfera corresponderá al valor del potencial electrostático cuando  $q = 1$ , de la forma:

$$G_{\text{D}(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi')} := \begin{cases} 0 & 0 < r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta)}} - \frac{R}{r' \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - 2\frac{rR^2}{r'}\cos(\theta)}} \right] & R < r \end{cases} \quad (9.15)$$

### 9.3.4 Densidad De Carga Inducida

Por la expresión de las condiciones de contorno del potencial electrostático, podemos obtener el valor de la densidad de carga inducida en la esfera conductora, de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r})}^-}{\partial \eta} - \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r})}^+}{\partial \eta} &:= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{\epsilon_0} \\ \text{Como } \phi_{(\mathbf{r})} &= 0 \quad \forall \quad r < R, \text{ tenemos que:} \\ 0 - \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r})}^+}{\partial \eta} &= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{\epsilon_0} \\ \sigma_{(\mathbf{r})} &= -\epsilon_0 \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r})}}{\partial \eta} \\ &= -\epsilon_0 \frac{\partial \phi_{(r=R)}}{\partial r} \\ &= -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta)}} - \frac{R}{r' \sqrt{r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - 2\frac{rR^2}{r'}\cos(\theta)}} \right] \right\} \Big|_{r=R} \\ &= -\frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{r' \cos(\theta) - r}{[r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\theta)]^{3/2}} + \frac{R[r - \frac{R^2}{r'}\cos(\theta)]}{r' \left[ r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - 2\frac{rR^2}{r'}\cos(\theta) \right]^{3/2}} \right\} \Big|_{r=R} \\ &= -\frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{r' \cos(\theta) - R}{[R^2 + r'^2 - 2Rr'\cos(\theta)]^{3/2}} + \frac{R^2[1 - \frac{R}{r'}\cos(\theta)]}{r'R^3 \left[ 1 + \frac{R^2}{r'^2} - 2\frac{R}{r'}\cos(\theta) \right]^{3/2}} \right\} \\ &= -\frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{r' \cos(\theta) - R}{[R^2 + r'^2 - 2Rr'\cos(\theta)]^{3/2}} + \frac{1 - \frac{R}{r'}\cos(\theta)}{r'R \left[ 1 + \frac{R^2}{r'^2} - 2\frac{R}{r'}\cos(\theta) \right]^{3/2}} \right\} \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_{\text{ind}(\mathbf{r})} := \sigma_{(\theta)} = -\frac{q}{4\pi} \left\{ \frac{r' \cos(\theta) - R}{[R^2 + r'^2 - 2Rr'\cos(\theta)]^{3/2}} + \frac{1 - \frac{R}{r'}\cos(\theta)}{r'R \left[ 1 + \frac{R^2}{r'^2} - 2\frac{R}{r'}\cos(\theta) \right]^{3/2}} \right\} \quad (9.16)$$

### 9.3.5 Carga Puntual En El Interior De Una Esfera Conductora

Este problema es igual al problema que corresponde a la esfera conductora a potencial cero que se encuentra frente a una carga puntual en su exterior, por lo que su potencial electrostático, función de Green, etc. son idénticos.

# CAPÍTULO 10: MEDIOS MATERIALES ELECTROSTÁTICOS

## 10.1 Conductor Eléctrico

### 10.1.1 Definición

Un conductor eléctrico es un medio material que permite el flujo de carga eléctrica en una o varias direcciones. En un conductor eléctrico metálico, uno o más electrones por átomo son libres de moverse mientras que en un conductor eléctrico líquido los iones son libres de moverse por el medio.

En contraste, un aislante eléctrico es un medio material cuyo flujo de carga eléctrica es mínimo o nulo, es decir, la corriente eléctrica no fluye libremente. A diferencia de los conductores eléctricos, los aislantes eléctricos presentan una alta resistividad.

### 10.1.2 Conductor Eléctrico Perfecto

Un conductor eléctrico perfecto o ideal es un medio material que contiene una cantidad infinita de cargas libres. En la naturaleza estos materiales no existen pero son un buen modelo para los metales conductores.

### 10.1.3 Inducción De Carga Eléctrica En La Superficie

Cuando un conductor eléctrico perfecto cuya carga eléctrica total es nula ( $Q_T = 0$ ) se ve sometido a un Campo Electrostático  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(r)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  generado por una densidad volumétrica de carga  $\rho := \rho_{(r)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , las cargas en su superficie se redistribuyen para contrarrestar el Campo  $\mathbf{E}$  producido, y como la fuerza eléctrica ejercida sobre las cargas cercanas del conductor, es mayor a la ejercida sobre las cargas lejanas, se produce *Inducción Eléctrica* sobre el conductor.

#### Jaula De Faraday

Debido a que cuando un conductor eléctrico se ve sometido a un Campo Electrostático  $\mathbf{E}$ , el conductor redistribuye sus cargas superficiales para contrarrestar al campo de tal forma que el campo en su interior sea nulo, si se construye un conductor con un grosor finito y con una cavidad o hueco en su interior, cualquier campo electromagnético externo no podrá penetrar en el interior de la cavidad que encierra el conductor. Este efecto se conoce como la *Jaula de Faraday*.

### 10.1.4 Propiedades

#### Carga Neta

La carga neta de un conductor eléctrico perfecto reside en su superficie.

#### Campo Electrostático Interior

Cuando un conductor eléctrico perfecto se encuentra inmerso en un Campo Electrostático  $\mathbf{E}_0 := \mathbf{E}_{0(r)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , se inducen prácticamente de forma instantánea, cargas sobre su superficie para contrarrestar y cancelar dicho Campo  $\mathbf{E}_0$ , produciendo en dirección opuesta un Campo Electrostático propio  $\mathbf{E}_1 := \mathbf{E}_{1(r)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Tras cancelar al Campo  $\mathbf{E}_0$ , el Campo Electrostático Total en el interior del conductor es nulo:

$$\mathbf{E}_{T(r)}^- = \mathbf{0}$$

#### Campo Electrostático Exterior

Las cargas eléctricas sobre la superficie de un conductor eléctrico perfecto se distribuyen de tal forma que contrarrestan y cancelan las componentes tangenciales del Campo Electrostático  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(r)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  en el que se encuentra, por lo que el Campo  $\mathbf{E}$  en el exterior del conductor es perpendicular a su superficie. Por la Condición de Contorno del Campo  $\mathbf{E}$ , tenemos:

$$\mathbf{E}_{(r)}^+ - \mathbf{E}_{(r)}^- = \frac{\sigma_{(r)}}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

Como el Campo en el interior es nulo, tenemos:

$$\mathbf{E}_{(r)}^+ - 0 = \frac{\sigma_{(r)}}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{E}_{(r)}^+ = \frac{\sigma_{(r)}}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{n}}$$

$$\therefore \mathbf{E}_{(r)}^+ = \frac{\sigma_{(r)}}{\varepsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \quad (10.1)$$

#### Densidad De Carga Eléctrica Neta Interior

Debido a que el Campo Electrostático Total en un conductor eléctrico perfecto es nulo, la distribución de cargas eléctricas positivas y negativas en su interior se compensan de tal forma que la densidad de carga eléctrica neta es nula:

Por la Ley de Gauss, tenemos:

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(r)} = \frac{\rho_{(r)}}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{0} = \frac{\rho_{(r)}}{\varepsilon_0}$$

$$0 = \frac{\rho_{(r)}}{\varepsilon_0}$$

$$\rho_{(r)} = 0$$

$$\therefore \rho_{(r)} = 0 \quad (10.2)$$

### Equipotencialidad

Debido a que el Campo Electrostático Total en el interior de un conductor eléctrico perfecto es nulo, el conductor es Equipotencial en su interior y superficie.

$$\begin{aligned}\phi_{(\mathbf{r})} &:= - \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{E}_{(\mathbf{r}')} \cdot d\boldsymbol{\ell}' \\ \phi_{(\mathbf{r})} &= - \int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{0} \cdot d\boldsymbol{\ell}' \\ \phi_{(\mathbf{r}_i)} - \phi_{(\mathbf{r}_f)} &= 0 \\ \phi_{(\mathbf{r}_i)} &= \phi_{(\mathbf{r}_f)}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\phi_{(\mathbf{r}_i)} = \phi_{(\mathbf{r}_f)}} \quad (10.3)$$

#### 10.1.5 Densidad De Carga Inducida

Dado un conductor eléctrico perfecto sometido a un Campo Electrostático  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de Potencial  $\phi := \phi_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , podemos obtener la densidad de carga eléctrica superficial  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , mediante la condición de contorno sobre el Campo Externo  $\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}^+$  de la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}^+ &= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0} \hat{\boldsymbol{\eta}} \\ -\frac{\partial \phi_{(\mathbf{r})}^+}{\partial \eta} &= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0} \\ \sigma_{(\mathbf{r})} &= -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r})}^+}{\partial \eta}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\sigma_{(\mathbf{r})} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r})}^+}{\partial \eta}} \quad (10.4)$$

#### 10.1.6 Presión Electrostática

Dado un conductor eléctrico perfecto con densidad de carga superficial  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , y Campo Electrostático  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces:

$$\begin{aligned}P_{(\mathbf{r})} &:= \frac{\mathbf{F}_{(\mathbf{r})}}{A} \\ &= \sigma_{(\mathbf{r})} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \\ &= \sigma_{(\mathbf{r})} \frac{\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}^+ + \mathbf{E}_{(\mathbf{r})}^-}{2} \\ &= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{2} \left[ \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0} \hat{\boldsymbol{\eta}} + 0 \right] \\ &= \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}^2}{2\varepsilon_0} \hat{\boldsymbol{\eta}} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left| \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \right|^2\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{P_{(\mathbf{r})} = \frac{\sigma_{(\mathbf{r})}^2}{2\varepsilon_0} \hat{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\varepsilon_0}{2} \left| \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \right|^2} \quad (10.5)$$

## 10.2 Material Dieléctrico

### 10.2.1 Definición

Un material dieléctrico es un aislante eléctrico que se *polariza* o sufre un torque cuando se ve sometido a un Campo Electrostático externo.

### 10.2.2 Inducción De Dipolos Eléctricos En El Interior

La polarización en el dieléctrico ocurre debido a que los átomos del material, si bien se encuentran en equilibrio, están compuestos de cargas positivas (los núcleos) y negativas (los electrones), por lo que al aplicar el campo externo se redistribuyen y se ven afectadas en forma distinta: los núcleos se alinean en dirección del campo y los electrones en sentido contrario. De esta forma se genera un momento dipolar electrostático inducido en los átomos del material produciendo la *polarización dieléctrica*.

Cuando un material está compuesto por moléculas que ya se encuentran polarizadas, al aplicar un campo externo se produce de forma resultante un torque sobre sus moléculas.

### 10.2.3 Momento Dipolar Electrostático Inducido (Átomo Neutral)

Dado un material dieléctrico compuesto por átomos en equilibrio (neutrales) sometido a un Campo Electrostático  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces el Momento Dipolar Electrostático Inducido  $\mathbf{p} := \mathbf{p}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sobre un átomo del material será de la forma:

$$\boxed{\mathbf{p}_{(\mathbf{r})} := \alpha_{ij} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})}} \quad (10.6)$$

#### Polarizabilidad Eléctrica

Se denomina Polarizabilidad Eléctrica al tensor de segundo orden  $\alpha_{ij}$ .

##### 10.2.3.1 Medio Lineal Isótropo Y Homogéneo (L.I.H.)

En un Medio Material Lineal, Isótropo y Homogéneo (L.I.H.) el tensor  $\alpha_{ij}$  puede escribirse de la forma:

$$\boxed{\mathbf{p}_{(\mathbf{r})} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_{(\mathbf{r})}} \quad (10.7)$$

#### Constante De Susceptibilidad Eléctrica

$$\boxed{\chi_e := \varepsilon_r - 1, \text{ con } \varepsilon_r := \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \quad (10.8)$$

### 10.2.4 Torque Inducido (Molécula Polar)

Dado un material dieléctrico compuesto por moléculas ya polarizadas sometido a un Campo Electrostático Uniforme  $\mathbf{E} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces el Torque Inducido  $\boldsymbol{\tau} := \boldsymbol{\tau}_e : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sobre un dipolo eléctrico  $\mathbf{p} := q\mathbf{d}$  del material será de la forma:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_e &:= \mathbf{r}_+ \times \mathbf{F}_+ + \mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_- \\ &= \frac{\mathbf{d}}{2} \times (q\mathbf{E}) + \left(-\frac{\mathbf{d}}{2}\right) \times (-q\mathbf{E}) \\ &= \frac{q}{2}\mathbf{d} \times \mathbf{E} + \frac{q}{2}\mathbf{d} \times \mathbf{E} \\ &= q\mathbf{d} \times \mathbf{E} \\ &= \mathbf{p} \times \mathbf{E}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\boldsymbol{\tau}_e = \mathbf{p} \times \mathbf{E}} \tag{10.9}$$

### Fuerza Inducida (Campo No Uniforme)

Cuando sobre el material dieléctrico con moléculas ya polarizadas actúa un Campo Electrostático  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la Fuerza Inducida  $\mathbf{F} := \mathbf{F}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sobre un dipolo del material resulta:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{(\mathbf{r})} &= \mathbf{F}_{(\mathbf{r})}^+ + \mathbf{F}_{(\mathbf{r})}^- \\ &= q\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}^+ - q\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}^- \\ &= q\Delta\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}\end{aligned}$$

Si  $\mathbf{d} \rightarrow 0$ , entonces:

$$\begin{aligned}&= q\mathbf{d}\mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \\ &= q(\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \\ &= (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{F}_{(\mathbf{r})} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}} \tag{10.10}$$

### 10.2.5 Campo Polarización

Debido a que todos los dipolos eléctricos inducidos en los átomos de un material dieléctrico apuntan en dirección del Campo Electrostático externo  $\mathbf{E}$ , el material en su conjunto se encuentra polarizado.

#### 10.2.5.1 Definición

Se denomina Campo Polarización al Campo Vectorial  $\mathbf{P} := \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que representa la densidad de polarización del dieléctrico, de la forma:

$$\boxed{\mathbf{P}_{(\mathbf{r})} := \frac{d\mathbf{p}_{(\mathbf{r})}}{dV}} \tag{10.11}$$

#### 10.2.5.2 Relación Constitutiva Del Medio

Se denomina *relación constitutiva del medio* a la relación entre el campo polarización y el campo eléctrico, cuya expresión puede obtenerse mediante un desarrollo en serie de Taylor, que en notación de índices es de la forma:

$$\boxed{\mathbf{P}_{(\mathbf{E}_{(\mathbf{r})})} = \mathbf{P}_{(\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}=0)} + \frac{\partial \mathbf{P}_{(\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}=0)}}{\partial E_{i(\mathbf{r})}} E_{i(\mathbf{r})} + \frac{\partial^2 \mathbf{P}_{(\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}=0)}}{\partial E_{j(\mathbf{r})} \partial E_{i(\mathbf{r})}} E_{i(\mathbf{r})} E_{j(\mathbf{r})} + \cdots} \tag{10.12}$$

### Electrete

Se denomina *electrete* a un material dieléctrico que presenta una polarización eléctrica cuasi-permanente, es decir, cuyo campo de polarización satisface:

$$\boxed{\mathbf{P}_{(\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}=0)} \neq 0} \tag{10.13}$$

### Respuesta Lineal

Cuando el material dieléctrico no tiene polarización permanente ( $\mathbf{P}_{(0)} = 0$ ) y el campo eléctrico  $\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}$  es débil, la relación entre el campo la polarización y el campo eléctrico es de la forma:

$$\boxed{P_{i(\mathbf{E}_{(\mathbf{r})})} = \varepsilon_0 \chi_{ij} E_{j(\mathbf{r})}} \tag{10.14}$$

- Si el medio es Lineal, Isótropo y Homogéneo (LIH) el campo densidad de polarización es de la forma:

$$\boxed{\mathbf{P}_{(\mathbf{r})} = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_{(\mathbf{r})}} \tag{10.15}$$

### Tensor Susceptibilidad Eléctrica

En forma general, la susceptibilidad eléctrica es un tensor de rango 2 de la forma:

$$\boxed{\chi_{ij} := \frac{\partial P_{i(\mathbf{E}_{(\mathbf{r})}=0)}}{\partial E_{j(\mathbf{r})}} = \begin{pmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & \chi_{xz} \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & \chi_{yz} \\ \chi_{zx} & \chi_{zy} & \chi_{zz} \end{pmatrix}} \tag{10.16}$$

#### 10.2.5.3 Potencial Electrostático De Un Dieléctrico Polarizado

Debido a que el Potencial Electrostático  $\phi := \phi_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de un Dipolo Electrostático es conocido, podemos obtener mediante la definición del Campo Densidad de Polarización el potencial total de un material dieléctrico polarizado:

$$\phi_{\text{dip}(\mathbf{r})} := \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p}_{(\mathbf{r})} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

El Potencial Total de una Densidad de Polarización, será de la forma:

$$\begin{aligned}\phi_{(\mathbf{r})} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{P}_{(\mathbf{r}')} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{P}_{(\mathbf{r}')} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{P}_{(\mathbf{r}')} \cdot \left\{ \frac{(x-x')\hat{\mathbf{x}} + (y-y')\hat{\mathbf{y}} + (z-z')\hat{\mathbf{z}}}{\left[\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}\right]^3} \right\} dV' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{P}_{(\mathbf{r}')} \cdot \left\{ \frac{x-x'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y-y'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{z-z'}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \right\} dV' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{P}_{(\mathbf{r}')} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right] \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right] \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right] \hat{\mathbf{z}} \right\} dV' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{P}_{(\mathbf{r}')} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV'
\end{aligned}$$

Por la Regla del Producto de la Divergencia, tenemos:

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \left[ \frac{\mathbf{P}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{P}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Por el Teorema de Gauss:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{P}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot d\mathbf{S}' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{P}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{P}_{(\mathbf{r}') \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{P}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} \frac{\sigma_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\phi_{(\mathbf{r})} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} \frac{\sigma_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\rho_p(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'} \quad (10.17)$$

### Densidad De Carga Superficial De Polarización

Se denomina Densidad Superficial de Cargas de Polarización al Campo Escalar  $\sigma_p := \sigma_{p(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma:

$$\boxed{\sigma_{p(\mathbf{r})} := \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}} \quad (10.18)$$

### Densidad De Carga Volumétrica De Polarización

Se denomina Densidad Volumétrica de Cargas de Polarización al Campo Escalar  $\rho_p := \rho_{p(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de la forma:

$$\boxed{\rho_{p(\mathbf{r})} := -\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{P}_{(\mathbf{r})}} \quad (10.19)$$

## 10.2.6 Campo Desplazamiento Eléctrico

Dado un dieléctrico polarizado que cuenta con una densidad de carga volumétrica de polarización  $\rho_p := \rho_{p(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definimos como densidad de carga volumétrica total  $\rho := \rho_{(\mathbf{r})} = \rho_{p(\mathbf{r})} + \rho_{l(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  a la suma de la densidad de polarización  $\rho_{p(\mathbf{r})}$  y todo el resto de cargas presentes en el medio material que no corresponden a cargas de polarización, que denominamos cargas libres  $\rho_l := \rho_{l(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

Por la Ley de Gauss, tenemos:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} &= \frac{\rho_{(\mathbf{r})}}{\varepsilon_0} \\
\varepsilon_0 \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} &= \rho_{l(\mathbf{r})} + \rho_{p(\mathbf{r})} \\
\nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\varepsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r})}] &= \rho_{l(\mathbf{r})} - \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \\
\nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\varepsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r})}] + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} &= \rho_{l(\mathbf{r})} \\
\nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\varepsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} + \mathbf{P}_{(\mathbf{r})}] &= \rho_{l(\mathbf{r})} \\
\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} &= \rho_{l(\mathbf{r})}
\end{aligned}$$

#### 10.2.6.1 Definición

Se denomina Campo Desplazamiento Eléctrico  $\mathbf{D} := \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  al campo vectorial total de un medio material dieléctrico, que tiene en cuenta las contribuciones del Campo Electrostático  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y el Campo Densidad de Polarización  $\mathbf{P} := \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , y es de la forma:

$$\boxed{\mathbf{D}_{(\mathbf{r})} := \varepsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} + \mathbf{P}_{(\mathbf{r})}} \quad (10.20)$$

#### 10.2.6.2 Respuesta Lineal

Cuando el material dieléctrico responde linealmente al campo eléctrico, el campo desplazamiento eléctrico resulta:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{(\mathbf{r})} &:= \varepsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} + \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \\
&= \varepsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} + \chi_{ij} E_{j(\mathbf{r})} \\
&= \varepsilon_0 (1 + \chi_{ij}) E_{j(\mathbf{r})} \\
&= \varepsilon_{ij} E_{j(\mathbf{r})}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{D_{i(\mathbf{r})} = \varepsilon_{ij} E_{j(\mathbf{r})}} \quad (10.21)$$

### Medio LIH

Si el medio es lineal, isótropo y homogéneo, el campo desplazamiento eléctrico es de la forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{(\mathbf{r})} &:= \varepsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} + \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \\
&= \varepsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \\
&= \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \\
&= \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \\
&= \varepsilon \mathbf{E}_{(\mathbf{r})}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{D}_{(\mathbf{r})} = \varepsilon \mathbf{E}_{(\mathbf{r})}} \quad (10.22)$$



### 10.2.6.3 Permitividad Eléctrica

Se denomina *permitividad eléctrica*  $\varepsilon$  a la constante de la forma:

$$\boxed{\varepsilon := \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathbf{r}}} \quad (10.23)$$

### Permitividad Relativa

La constante  $\varepsilon_{\mathbf{r}}$  es la *permitividad eléctrica relativa* del medio material.

### Tensor Permitividad Eléctrica

En forma general, la permitividad eléctrica es un tensor de rango 2 de la forma:

$$\boxed{\varepsilon_{ij} := \varepsilon_0(1 + \chi_{ij}) = \varepsilon_0 \left[ 1 + \frac{\partial P_{i(\mathbf{E}(\mathbf{r})=0)}}{\partial E_{j(\mathbf{r})}} \right] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}} \quad (10.24)$$

### 10.2.6.4 Ley De Gauss Para Dieléctricos

Por el Teorema De Gauss, tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} &= \rho_{l(\mathbf{r})} \\ \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} \, dV &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{l(\mathbf{r})} \, dV \\ \oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{l(\mathbf{r})} \, dV \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{l(\mathbf{r})} \, dV} \quad (10.25)$$

### Ley De Gauss Para Dieléctricos: Forma Integral

$$\boxed{\oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{l(\mathbf{r})} \, dV} \quad (10.26)$$

### Ley De Gauss Para Dieléctricos: Forma Diferencial

$$\boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} = \rho_{l(\mathbf{r})}} \quad (10.27)$$

### 10.2.6.5 Rotor Del Campo Desplazamiento Eléctrico

#### Rotor En Volumen

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} &= \nabla_{\mathbf{r}} \times [\varepsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} + \mathbf{P}_{(\mathbf{r})}] \\ &= \varepsilon_0 \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} + \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \\ &= \varepsilon_0 \cdot 0 + \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \\ &= \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} = \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{P}_{(\mathbf{r})}} \quad (10.28)$$

#### Rotor En Superficie

$$\begin{aligned} \oiint_{\mathbf{S}} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= \oiint_{\mathbf{S}} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \times \hat{\boldsymbol{\eta}} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} = \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \times \hat{\boldsymbol{\eta}}} \quad (10.29)$$

### 10.2.6.6 Condiciones De Contorno

Debido a que el Campo Desplazamiento Eléctrico representa la suma del Campo Densidad de Polarización y el Campo Electrostático, cuando una superficie  $\mathbf{S} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se encuentra cargada con una densidad superficial de cargas libres  $\sigma_l := \sigma_{l(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  el Campo Desplazamiento sufre una discontinuidad al pasar de la Superficie Superior  $\mathbf{S}_{\text{Sup.}}$  a la Superficie Interior  $\mathbf{S}_{\text{Int.}}$ . De esta forma, dado  $\mathbf{D} := \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un Campo Desplazamiento Eléctrico continuo generado por una superficie cargada con una densidad superficial de cargas libres  $\sigma_l$  y con normal exterior  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_e$ , podemos escribir sus condiciones de contorno en función de la densidad superficial de carga  $\sigma_l$ .

#### Componente Paralela: Rotor Del Desplazamiento Eléctrico

Sea  $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{\text{Sup.}} + \mathcal{C}_{\text{Inf.}} + \mathcal{C}_{\text{Izq.}} + \mathcal{C}_{\text{Der.}} : \mathbf{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva cerrada que encierra a la superficie cargada con densidad superficial libre  $\sigma_l$ , cuyos caminos superior ( $\mathcal{C}_{\text{Sup.}}$ ) e inferior  $\mathcal{C}_{\text{Inf.}}$  tienen longitud  $L$ , y sus caminos laterales izquierdo ( $\mathcal{C}_{\text{Izq.}}$ ) y derecho ( $\mathcal{C}_{\text{Der.}}$ ) tienen longitud  $h$  muy pequeña ( $h \rightarrow 0$ ), entonces:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} &= \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \\ \iint_{\mathbf{S}} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\mathbf{S}} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

Por el Teorema de Stokes, tenemos:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ \int_{\mathcal{C}_{\text{Sup.}}} \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Inf.}}} \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Izq.}}} \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Der.}}} \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \int_{\mathcal{C}_{\text{Sup.}}} \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Inf.}}} \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Izq.}}} \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Der.}}} \mathbf{P}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\parallel(\mathbf{r})}^+ L_{(\mathcal{C}_{\text{Sup.}})} - D_{\parallel(\mathbf{r})}^- L_{(\mathcal{C}_{\text{Inf.}})} + 0 + 0 &= P_{\parallel(\mathbf{r})}^+ L_{(\mathcal{C}_{\text{Sup.}})} - P_{\parallel(\mathbf{r})}^- L_{(\mathcal{C}_{\text{Inf.}})} + 0 + 0 \\
D_{\parallel(\mathbf{r})}^+ L - D_{\parallel(\mathbf{r})}^- L &= P_{\parallel(\mathbf{r})}^+ L - P_{\parallel(\mathbf{r})}^- L \\
D_{\parallel(\mathbf{r})}^+ - D_{\parallel(\mathbf{r})}^- &= P_{\parallel(\mathbf{r})}^+ - P_{\parallel(\mathbf{r})}^- \\
\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}} \times [\mathbf{D}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{D}_{1(\mathbf{r})}] &= \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}} \times [\mathbf{P}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{P}_{1(\mathbf{r})}]
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}} \times [\mathbf{D}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{D}_{1(\mathbf{r})}] = \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}} \times [\mathbf{P}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{P}_{1(\mathbf{r})}]} \quad (10.30)$$

### Componente Perpendicular: Ley De Gauss Para Dieléctricos

Sea  $\mathbf{S} := \mathbf{S}_{\text{Sup.}} + \mathbf{S}_{\text{Inf.}} + \mathbf{S}_{\text{Lat.}} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie cilíndrica cerrada que encierra a la superficie cargada con densidad superficial libre  $\sigma_l$ , cuyas caras superior ( $\mathbf{S}_{\text{Sup.}}$ ) e inferior  $\mathbf{S}_{\text{Inf.}}$  tienen normales  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}}$  y  $-\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}}$ , y área  $A$ , respectivamente, y se encuentran separada por una altura  $h$  muy pequeña ( $h \rightarrow 0$ ), entonces:

$$\begin{aligned}
\oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= Q_{l\text{enc}} \\
\iint_{\mathbf{S}_{\text{Sup.}}} \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathbf{S}_{\text{Inf.}}} \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathbf{S}_{\text{Lat.}}} \mathbf{D}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= \sigma_{l(\mathbf{r})} A(\mathbf{S}) \\
D_{\perp(\mathbf{r})}^+ A(\mathbf{S}_{\text{Sup.}}) - D_{\perp(\mathbf{r})}^- A(\mathbf{S}_{\text{Inf.}}) + 0 &= \sigma_{l(\mathbf{r})} A(\mathbf{S}) \\
D_{\perp(\mathbf{r})}^+ A - D_{\perp(\mathbf{r})}^- A &= \sigma_{l(\mathbf{r})} A \\
D_{\perp(\mathbf{r})}^+ - D_{\perp(\mathbf{r})}^- &= \sigma_{l(\mathbf{r})} \\
[\mathbf{D}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{D}_{1(\mathbf{r})}] \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}} &= \sigma_{l(\mathbf{r})}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{[\mathbf{D}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{D}_{1(\mathbf{r})}] \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}} = \sigma_{l(\mathbf{r})}} \quad (10.31)$$

### 10.2.7 Energía Eléctrica En Dieléctricos

Debido a que conocemos la expresión del Trabajo Electrostático, podemos hallar la Energía Electrostática (que coincide con la Energía Eléctrica) por unidad de volumen de un material dieléctrico cuando la región de integración  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3$  es todo el espacio  $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^3$  sobre las cargas libres, ya que la energía de las cargas fijas que se polarizan no es de interés, por lo tanto:

$$W_{\text{e}(\mathbf{r},t)} := \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{l(\mathbf{r}',t)} \phi_{(\mathbf{r}',t)} dV'$$

Por la Ley de Gauss para Dieléctricos, tenemos:

$$= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \phi_{(\mathbf{r}',t)} [\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{D}_{(\mathbf{r}',t)}] dV'$$

Por la Regla del Producto de la Divergencia, tenemos:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot [\phi_{(\mathbf{r}',t)} \mathbf{D}_{(\mathbf{r}',t)}] - [\nabla_{\mathbf{r}'} \phi_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{D}_{(\mathbf{r}',t)}] \} dV' \\
&= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot [\phi_{(\mathbf{r}',t)} \mathbf{D}_{(\mathbf{r}',t)}] dV' + \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} [-\nabla_{\mathbf{r}'} \phi_{(\mathbf{r}',t)}] \cdot \mathbf{D}_{(\mathbf{r}',t)} dV'
\end{aligned}$$

Por el Teorema de Gauss, tenemos:

$$= \frac{1}{2} \oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \phi_{(\mathbf{r}',t)} \mathbf{D}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot d\mathbf{S}' + \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{D}_{(\mathbf{r}',t)} dV'$$

Si  $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^3$ , la integral de superficie tiende a cero, entonces:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{D}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r}',t)} dV' \\
&= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{D}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r}',t)} dV'
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{E_{\text{e}(t)} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{D}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r}',t)} dV'} \quad (10.32)$$

Parte III

**Magnetostática**

# CAPÍTULO 11: FUERZA MAGNETOSTÁTICA

Sea  $q$  una partícula cargada eléctricamente en el vacío en la posición  $\mathbf{r}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$ , inmersa en un Campo Magnetostático  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces:

La Fuerza Magnetostática que la partícula en movimiento sufre debido al Campo  $\mathbf{B}$  está dada por:

$$\boxed{\mathbf{F}_q := q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}} \quad (11.1)$$

## 11.0.1 Fuerza Magnetostática En Un Sistema De $N$ -Partículas

Sean  $q_i$ ,  $N$ -partículas estáticas cargadas eléctricamente en el vacío en las posiciones  $\mathbf{r}_i$  que se mueven con velocidades  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)}$ , con  $1 \leq i \leq N$ , entonces:

La Fuerza Magnetostática que las partículas  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$  en movimiento sufren debido al Campo  $\mathbf{B}$  será, por el Principio de Superposición, de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{q_1 \dots q_N} &:= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{q_i} \\ &= \mathbf{F}_{q_1} + \mathbf{F}_{q_2} + \mathbf{F}_{q_3} + \dots + \mathbf{F}_{q_N} \\ &= \left[ \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \right] \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{F}_{q_1 \dots q_N} := \left[ \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \right] \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}} \quad (11.2)$$

## 11.0.2 Fuerza Magnetostática En Una Distribución Continua De Corriente

Cuando la cantidad de partículas cargadas  $q_i$  tiende a infinito, obtenemos una Suma de Riemann por cada Diferencial de Carga:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbf{F}_{q_1 \dots q_N}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \right] \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \right\} \\ \mathbf{F}_{\mathbf{m}(\mathbf{r})} &= \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \right] \right\} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \\ &= \int \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \, dq' \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{F}_{\mathbf{m}(\mathbf{r})} = \int \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \, dq'} \quad (11.3)$$

### Distribución Lineal

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad lineal de carga  $\lambda := \lambda_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad lineal vectorial de corriente  $\mathbf{I}_{(\mathbf{r}')} := \lambda_{(\mathbf{r}')} \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , entonces:

$$\boxed{\mathbf{F}_{\mathbf{m}(\mathbf{r})} = \int_C \mathbf{I}_{(\mathbf{r}')} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \, ds'} \quad (11.4)$$

### Distribución Superficial

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad superficial de carga  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad superficial vectorial de corriente  $\mathbf{K}_{(\mathbf{r}')} := \sigma_{(\mathbf{r}')} \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , entonces:

$$\boxed{\mathbf{F}_{\mathbf{m}(\mathbf{r})} = \iint_S \mathbf{K}_{(\mathbf{r}')} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \, dS'} \quad (11.5)$$

### Distribución Volumétrica

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad volumétrica de carga  $\rho := \rho_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad volumétrica vectorial de corriente  $\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} := \rho_{(\mathbf{r}')} \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , entonces:

$$\boxed{\mathbf{F}_{\mathbf{m}(\mathbf{r})} = \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \, dV'} \quad (11.6)$$

# CAPÍTULO 12: TORQUE MAGNETOSTÁTICO

Sea  $q$  una partícula cargada eléctricamente en el vacío en la posición  $\mathbf{r}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$ , inmersa en un Campo Magnetostático  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces:

La Fuerza Magnetostática que la partícula en movimiento sufre debido al Campo  $\mathbf{B}$  está dada por:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_q := \mathbf{r} \times \mathbf{F}_q} \quad (12.1)$$

## 12.0.1 Torque Magnetostático En Un Sistema De $N$ -Partículas

Sean  $q_i$ ,  $N$ -partículas estáticas cargadas eléctricamente en el vacío en las posiciones  $\mathbf{r}_i$  que se mueven con velocidades  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)}$ , con  $1 \leq i \leq N$ , entonces:

La Fuerza Magnetostática que las partículas  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$  en movimiento sufren debido al Campo  $\mathbf{B}$  será, por el Principio de Superposición, de la forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{q_1 \dots q_N} &:= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{q_i} \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{q_1} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{q_2} + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_{q_3} + \dots + \mathbf{r}_N \times \mathbf{F}_{q_N} \\ &= \left[ \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \right] \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\boldsymbol{\tau}_{q_1 \dots q_N} := \left[ \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \right] \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}} \quad (12.2)$$

## 12.0.2 Torque Magnetostático En Una Distribución Continua De Corriente

Cuando la cantidad de partículas cargadas  $q_i$  tiende a infinito, obtenemos una Suma de Riemann por cada Diferencial de Carga:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\boldsymbol{\tau}_{q_1 \dots q_N}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \right] \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \right\} \\ \boldsymbol{\tau}_{\text{m}(\mathbf{r})} &= \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \right] \right\} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \\ &= \int \mathbf{r}' \times [\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}] dq' \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\boldsymbol{\tau}_{\text{m}(\mathbf{r})} = \int \mathbf{r}' \times [\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}] dq'} \quad (12.3)$$

### Distribución Lineal

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad lineal de carga  $\lambda := \lambda_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad lineal vectorial de corriente  $\mathbf{I}_{(\mathbf{r}')} := \lambda_{(\mathbf{r}')} \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , entonces:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_{\text{m}(\mathbf{r})} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{r}' \times [\mathbf{I}_{(\mathbf{r}')} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}] ds'} \quad (12.4)$$

### Distribución Superficial

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad superficial de carga  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad superficial vectorial de corriente  $\mathbf{K}_{(\mathbf{r}')} := \sigma_{(\mathbf{r}')} \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , entonces:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_{\text{m}(\mathbf{r})} = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{r}' \times [\mathbf{K}_{(\mathbf{r}')} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}] dS'} \quad (12.5)$$

### Distribución Volumétrica

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad volumétrica de carga  $\rho := \rho_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad volumétrica vectorial de corriente  $\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} := \rho_{(\mathbf{r}')} \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , entonces:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_{\text{m}(\mathbf{r})} = \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{r}' \times [\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}] dV'} \quad (12.6)$$

# CAPÍTULO 13: CAMPO MAGNETOSTÁTICO: LEY DE BIOT-SAVART

## 13.0.1 Definición

Se denomina Campo Magnetostático al Campo de Fuerzas Vectorial  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{q_1 \dots q_N} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  en el espacio, producido por la Fuerza Magnetostática que ejercen  $N$ -partículas cargadas eléctricamente  $q_i$  en las posiciones  $\mathbf{r}_i$  que se mueven con una velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)}$  sobre una unidad de carga de prueba en la posición  $\mathbf{r}$ , con  $1 \leq i \leq N$  y  $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{B}_{q_1 \dots q_N} := \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (13.1)$$

## 13.0.2 Campo Magnetostático En Una Distribución Continua De Corriente

Cuando la cantidad de partículas cargadas  $q_i$  tiende a infinito, obtenemos una Suma de Riemann por cada Diferencial de Carga:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbf{B}_{q_1 \dots q_N}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right] \\ \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq' \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} := \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dq' \quad (13.2)$$

### Distribución Lineal

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad lineal de carga  $\lambda := \lambda_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad lineal vectorial de corriente  $\mathbf{I}_{(\mathbf{r}')} := \lambda_{(\mathbf{r}')} \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , entonces:

$$\mathbf{B}_{(\mathbf{r})} := \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{\mathbf{I}_{(\mathbf{r}')} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} ds' \quad (13.3)$$

### Distribución Superficial

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad superficial de carga  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad superficial vectorial de corriente  $\mathbf{K}_{(\mathbf{r}')} := \sigma_{(\mathbf{r}')} \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , entonces:

$$\mathbf{B}_{(\mathbf{r})} := \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\mathcal{S}} \frac{\mathbf{K}_{(\mathbf{r}')} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dS' \quad (13.4)$$

### Distribución Volumétrica

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad volumétrica de carga  $\rho := \rho_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad volumétrica vectorial de corriente  $\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} := \rho_{(\mathbf{r}')} \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , entonces:

$$\mathbf{B}_{(\mathbf{r})} := \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (13.5)$$

## 13.0.3 Teorema: El Campo Magnetostático Es Solenoidal

Sea  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un Campo Magnetostático Diferenciable a Primer Orden ( $C^1$ ) producido por una densidad de corriente volumétrica  $\mathbf{J} := \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} &= \nabla \cdot \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left[ \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left[ \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV' \end{aligned}$$

Por las Identidades de la Divergencia:

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \left\{ [\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{J}_{(\mathbf{r}'])] \cdot \left[ \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] - \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \cdot \left[ \nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] \right\} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} 0 \cdot \left[ \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \cdot \left\{ \nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{(x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}}{[\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}]^3} \right\} dV' \\ &= 0 - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \cdot \left\{ \nabla_{\mathbf{r}} \times \frac{(x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \right\} dV' \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \cdot \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{z - z'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{y - y'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \right\} \right) \hat{\mathbf{x}} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{x - x'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{z - z'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \right\} \right) \hat{\mathbf{y}} \\
 & + \left( \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{y - y'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{x - x'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \right\} \right) \hat{\mathbf{z}} \Big] \, dV' \\
 & = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \cdot \left( \left\{ -\frac{3(y - y')(z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} + \frac{3(y - y')(z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} \right\} \hat{\mathbf{x}} \right. \\
 & + \left\{ -\frac{3(x - x')(z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} + \frac{3(x - x')(z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} \right\} \hat{\mathbf{y}} \\
 & + \left. \left\{ -\frac{3(x - x')(y - y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} + \frac{3(x - x')(y - y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}} \right\} \hat{\mathbf{z}} \right) \, dV' \\
 & = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \cdot (0.\hat{\mathbf{x}} + 0.\hat{\mathbf{y}} + 0.\hat{\mathbf{z}}) \, dV' \\
 & = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} 0 \, dV' \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

### El Flujo Es Nulo

$$\oint_{\mathbf{S}^+} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (13.6)$$

### Existe Un Potencial Vectorial

$$\bullet \quad \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} := \left[ \int_0^z B_{y(x,y,z')} \, dz' - \int_0^y B_{z(x,y',0)} \, dy' \right] \hat{\mathbf{x}} - \int_0^z B_{x(x,y,z')} \, dz' \hat{\mathbf{y}} + 0 \hat{\mathbf{z}} \quad (13.7)$$

$$\bullet \quad \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} := \quad (13.8)$$

$$\bullet \quad \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} := 0 \hat{\mathbf{x}} + \int_0^x B_{z(x',y,z)} \, dx' \hat{\mathbf{y}} + \left[ - \int_0^x B_{y(x',y,z)} \, dx' + \int_0^y B_{x(0,y',z)} \, dy' \right] \hat{\mathbf{z}} \quad (13.9)$$

### El Campo Es Incompresible: Ley De Gauss Para El Magnetismo

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} = 0 \quad (13.10)$$

## 13.0.4 Condiciones De Contorno

Debido a que el Campo Magnetostático es rotacional, cuando una superficie  $\mathbf{S} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se encuentra cargada con una densidad superficial de corriente eléctrica  $\mathbf{K} := \mathbf{K}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el Campo Magnetostático sufre una discontinuidad al pasar de la Superficie Superior  $\mathbf{S}_{\text{Sup.}}$  a la Superficie Interior  $\mathbf{S}_{\text{Int.}}$ . De esta forma, dado  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un Campo Magnetostático continuo generado por una superficie cargada con una densidad superficial de corriente  $\mathbf{K}$  y con normal exterior  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}}$ , podemos escribir sus condiciones de contorno en función de la densidad superficial de corriente  $\mathbf{K}$ .

### Componente Paralela: Ley De Ampère

Sea  $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{\text{Sup.}} + \mathcal{C}_{\text{Inf.}} + \mathcal{C}_{\text{Izq.}} + \mathcal{C}_{\text{Der.}} : \mathbf{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva cerrada que encierra a la superficie cargada con densidad superficial de corriente  $\mathbf{K}$ , cuyos caminos superior ( $\mathcal{C}_{\text{Sup.}}$ ) e inferior  $\mathcal{C}_{\text{Inf.}}$  tienen longitud  $L$ , y sus caminos laterales izquierdo ( $\mathcal{C}_{\text{Izq.}}$ ) y derecho ( $\mathcal{C}_{\text{Der.}}$ ) tienen longitud  $h$  muy pequeña ( $h \rightarrow 0$ ), entonces:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \mu_0 I_{\text{enc}} \\
 \int_{\mathcal{C}_{\text{Sup.}}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Inf.}}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Izq.}}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Der.}}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \mu_0 \mathbf{K}_{(\mathbf{r})} L_{(\mathcal{C})} \\
 B_{\parallel(\mathbf{r})}^+ L_{(\mathcal{C}_{\text{Sup.}})} - B_{\parallel(\mathbf{r})}^- L_{(\mathcal{C}_{\text{Inf.}})} + 0 + 0 &= \mu_0 \mathbf{K}_{(\mathbf{r})} L_{(\mathcal{C})} \\
 B_{\parallel(\mathbf{r})}^+ L - B_{\parallel(\mathbf{r})}^- L &= \mu_0 \mathbf{K}_{(\mathbf{r})} L \\
 B_{\parallel(\mathbf{r})}^+ - B_{\parallel(\mathbf{r})}^- &= \mu_0 \mathbf{K}_{(\mathbf{r})} \\
 \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}} \times [\mathbf{B}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{B}_{1(\mathbf{r})}] &= \mu_0 \mathbf{K}_{(\mathbf{r})}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}} \times [\mathbf{B}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{B}_{1(\mathbf{r})}] = \mu_0 \mathbf{K}_{(\mathbf{r})} \quad (13.11)$$

### Componente Perpendicular: Flujo Nulo

Sea  $\mathbf{S} := \mathbf{S}_{\text{Sup.}} + \mathbf{S}_{\text{Inf.}} + \mathbf{S}_{\text{Lat.}} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie cilíndrica cerrada que encierra a la superficie cargada con densidad superficial de corriente  $\mathbf{K}$ , cuyas caras superior ( $\mathbf{S}_{\text{Sup.}}$ ) e inferior  $\mathbf{S}_{\text{Inf.}}$  tienen normales  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}}$  y  $-\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}}$ , y área  $A$ , respectivamente, y se encuentran separada por una altura  $h$  muy pequeña ( $h \rightarrow 0$ ), entonces:

$$\begin{aligned}
 \oint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\
 \iint_{\mathbf{S}_{\text{Sup.}}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathbf{S}_{\text{Inf.}}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathbf{S}_{\text{Lat.}}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= 0 \\
 B_{\perp(\mathbf{r})}^+ A_{(\mathbf{S}_{\text{Sup.}})} - B_{\perp(\mathbf{r})}^- A_{(\mathbf{S}_{\text{Inf.}})} + 0 &= 0 \\
 B_{\perp(\mathbf{r})}^+ A - B_{\perp(\mathbf{r})}^- A &= 0 \\
 B_{\perp(\mathbf{r})}^+ - B_{\perp(\mathbf{r})}^- &= 0 \\
 [\mathbf{B}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{B}_{1(\mathbf{r})}] \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad [\mathbf{B}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{B}_{1(\mathbf{r})}] \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\text{e}} = 0 \quad (13.12)$$

# CAPÍTULO 14: POTENCIAL MAGNETOSTÁTICO

Sea  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un Campo Electrostático Continuo, sea  $\mathcal{C}^+ : [\mathbf{r}_0, \mathbf{r}] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva orientada positivamente, que va desde el Punto  $\mathbf{r}_0$  hasta el Punto  $\mathbf{r}$ , y sea  $\phi := \phi_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una Función de Tres Variables Diferenciable a Primer Orden ( $C^1$ ), entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{q_1 \dots q_N} &:= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left\{ q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \times \frac{(x - x_i)\hat{\mathbf{x}} + (y - y_i)\hat{\mathbf{y}} + (z - z_i)\hat{\mathbf{z}}}{\left[\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}\right]^3} \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \times \left\{ \frac{x - x_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y - y_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{z - z_i}{[(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2]^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \times \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \right] \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \right] \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \right] \hat{\mathbf{z}} \right\} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \times \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \right] \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \right] \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2}} \right] \hat{\mathbf{z}} \right\} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left[ q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \times \nabla_{\mathbf{r}} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + C \right) \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left\{ \left[ \nabla_{\mathbf{r}} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + C \right) \right] \times q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \right\} \end{aligned}$$

Por la Regla del Producto del Rotacional, tenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left\{ \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ \frac{q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \right] - \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \times [q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)}]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left\{ \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ \frac{q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \right] - \frac{0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \left\{ \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ \frac{q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \right] - 0 \right\} \\ &= \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \right] \\ &= \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}_{q_1 \dots q_N} \end{aligned}$$

## 14.0.1 Definición

Se denomina Potencial Magnetostático al Campo de Fuerzas Vectorial  $\mathbf{A} := \mathbf{A}_{q_1 \dots q_N} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  en el espacio, producido por el Potencial Magnetostático que ejercen  $N$ -partículas cargadas eléctricamente  $q_i$  en las posiciones  $\mathbf{r}_i$  y con velocidades  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)}$  sobre una unidad de carga de prueba en la posición  $\mathbf{r}$ , con  $1 \leq i \leq N$  y  $\mathbf{r}, \mathbf{r}_i, \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \in \mathbb{R}^3$ :

$$\mathbf{A}_{q_1 \dots q_N} := \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})}, \text{ donde: } \mathbf{B}_{q_1 \dots q_N} = \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}_{q_1 \dots q_N} \quad (14.1)$$

### Observación

Sean  $\mathbf{A}_1$  y  $\mathbf{A}_2$  dos Potenciales de un Campo Magnetostático Continuo  $\mathbf{B} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \quad (14.2)$$

## 14.0.2 Potencial Magnetostático En Una Distribución Continua De Corriente

Cuando la cantidad de partículas cargadas  $q_i$  tiende a infinito, obtenemos una Suma de Riemann por cada Diferencial de Carga:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbf{A}_{q_1 \dots q_N}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \right] \\ \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dq' + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} := \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dq' + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \quad (14.3)$$

### Distribución Lineal

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad lineal de carga  $\lambda := \lambda_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad lineal vectorial de corriente  $\mathbf{I}_{(\mathbf{r}')} := \lambda_{(\mathbf{r}')} \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , entonces:

$$\mathbf{A}_{(\mathbf{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{\mathbf{I}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, ds' + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \quad (14.4)$$



### Distribución Superficial

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad superficial de carga  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad superficial vectorial de corriente  $\mathbf{K}_{(\mathbf{r}')} := \sigma_{(\mathbf{r}')} \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , entonces:

$$\mathbf{A}_{(\mathbf{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\mathbb{S}} \frac{\mathbf{K}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dS' + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \quad (14.5)$$

### Distribución Volumétrica

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad volumétrica de carga  $\rho := \rho_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad volumétrica vectorial de corriente  $\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} := \rho_{(\mathbf{r}')} \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , entonces:

$$\mathbf{A}_{(\mathbf{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \quad (14.6)$$

#### 14.0.3 Expansión Multipolar Del Potencial Magnetostático

Sea  $\rho := \rho_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  una densidad volumétrica de  $(N \rightarrow \infty)$ -partículas estáticas  $q'$  cargadas eléctricamente en las posiciones  $\mathbf{r}' = r' \hat{\mathbf{r}}$  que producen un Campo Escalar  $\phi := \phi_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sobre una carga de prueba muy lejana en la posición  $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}$  con un ángulo  $\theta$  respecto a las posiciones  $\mathbf{r}'$ , entonces:

- Podemos reescribir el Potencial Electrostático de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} &:= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')}}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}} \, dV' + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')}}{\sqrt{(r \hat{\mathbf{r}} - r' \hat{\mathbf{r}}) \cdot (r \hat{\mathbf{r}} - r' \hat{\mathbf{r}})}} \, dV' + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')}}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta)}} \, dV' + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')}}{r \sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2 \frac{r'}{r} \cos(\theta)}} \, dV' + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')}}{\sqrt{1 + \frac{r'}{r} \left[ \frac{r'}{r} - 2 \cos(\theta) \right]}} \, dV' + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

- Ahora, dada  $f_{(x)} := \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \left[ 1 + \frac{r'}{r} \left( \frac{r'}{r} - 2 \cos \theta \right) \right]^{-\frac{1}{2}} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una Función de Una Variable Diferenciable, realizando un desarrollo en Serie de Maclaurin con respecto a  $x$ , tenemos:

$$\begin{aligned} f_{(x)} &= f_{(0)} + \frac{df_{(0)}}{dx}(x-0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f_{(0)}}{dx^2}(x-0)^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 f_{(0)}}{dx^3}(x-0)^3 + \cdots + \frac{1}{\ell!} \frac{d^\ell f_{(0)}}{dx^\ell}(x-0)^\ell \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{r'}{r} \left[ \frac{r'}{r} - 2 \cos(\theta) \right] + \frac{3}{8} \frac{r'^2}{r^2} \left[ \frac{r'}{r} - 2 \cos(\theta) \right]^2 - \frac{5}{16} \frac{|\mathbf{r}'|^3}{|\mathbf{r}|^3} \left[ \frac{r'}{r} - 2 \cos(\theta) \right]^3 + \cdots \\ &= 1 + \frac{r'}{r} \cos(\theta) + \frac{r'^2}{r^2} \frac{3 \cos^2(\theta) - 1}{2} + \frac{r'^3}{r^3} \frac{5 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta)}{2} + \cdots + \frac{r'^\ell}{r^\ell} P_{\ell(\cos \theta)} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^\ell}{r^\ell} P_{\ell(\cos \theta)} \end{aligned}$$

- Obtuvimos una Suma Infinita de Polinomios de Legendre Trigonométricos  $P_\ell := P_{\ell(\cos \theta)} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de Grado  $\ell$ . Reemplazando en el Potencial Electrostático, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')}}{\sqrt{1 + \frac{r'}{r} \left[ \frac{r'}{r} - 2 \cos(\theta) \right]}} \, dV' + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_{\mathbb{Q}} \left[ \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{r'^\ell}{r^\ell} P_{\ell(\cos \theta)} \right] \, dV' + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{r^{\ell+1}} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} r'^\ell P_{\ell(\cos \theta)} \, dV' \right] + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ \frac{1}{r^{\ell+1}} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} r'^\ell P_{\ell(\cos \theta)} \, dV' \right] + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \quad (14.7)$$

$$\mathbf{A}_{(\mathbf{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \, dV' + \frac{1}{r^2} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} r' \cos(\theta) \, dV' + \frac{1}{2r^3} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} r'^2 [3 \cos^2(\theta) - 1] \, dV' + \cdots + \frac{1}{r^{\ell+1}} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} r'^\ell P_{\ell(\cos \theta)} \, dV' \right\} + \nabla_{\mathbf{r}} \chi_{(\mathbf{r})} \quad (14.8)$$

### Contribución Monopolar

Sean  $\varphi := \varphi_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $\psi := \psi_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dos Funciones de Tres Variables Diferenciables a Primer Orden ( $C^1$ ), y sea  $\mathbf{J} := \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un Campo Vectorial Incompresible en el Espacio, entonces:

$$\iiint_{\mathbb{Q}} \varphi_{(\mathbf{r}')} [\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \psi_{(\mathbf{r}')}] \, dV' = [\varphi_{(\mathbf{r}')} \psi_{(\mathbf{r}')} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')}]|_{\partial \mathbb{Q}} - \iiint_{\mathbb{Q}} \psi_{(\mathbf{r}')} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot [\varphi_{(\mathbf{r}')} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')}] \, dV'$$

Por la Regla del Producto de la Divergencia, tenemos:

$$= 0 - \iiint_{\mathbb{Q}} \{ \psi_{(\mathbf{r}')} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \nabla_{\mathbf{r}'} \varphi_{(\mathbf{r}')} + \psi_{(\mathbf{r}')} \varphi_{(\mathbf{r}')} [\nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')}] \} \, dV'$$

$$\begin{aligned}
&= - \iiint_{\mathbb{Q}} [\psi_{(\mathbf{r}')} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \nabla_{\mathbf{r}'} \varphi_{(\mathbf{r}')} + \psi_{(\mathbf{r}')} \varphi_{(\mathbf{r}')} \cdot 0] \, dV' \\
\iiint_{\mathbb{Q}} \varphi_{(\mathbf{r}')} [\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \psi_{(\mathbf{r}')}] \, dV' &= - \iiint_{\mathbb{Q}} [\psi_{(\mathbf{r}')} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \nabla_{\mathbf{r}'} \varphi_{(\mathbf{r}')} + 0] \, dV' \\
0 &= \iiint_{\mathbb{Q}} \{ \varphi_{(\mathbf{r}')} [\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \psi_{(\mathbf{r}')}] + \psi_{(\mathbf{r}')} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \nabla_{\mathbf{r}'} \varphi_{(\mathbf{r}')} \} \, dV' \\
\text{Si elegimos } \varphi_{(\mathbf{r}')} &= 1, \text{ y } \psi_{(\mathbf{r}')} = r', \text{ tenemos:} \\
&= \iiint_{\mathbb{Q}} \{ 1 [\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} (r')] + r' \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \nabla_{\mathbf{r}'} (1) \} \, dV' \\
&= \iiint_{\mathbb{Q}} [\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \cdot \mathbf{1} + r' \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \cdot 0] \, dV' \\
&= \iiint_{\mathbb{Q}} [\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} + 0] \, dV' \\
0 &= \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \, dV' \iff \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} = 0
\end{aligned}$$

Reemplazando en la Contribución Monopolar:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\text{mon}(\mathbf{r})} &:= \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \, dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r} \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{A}_{\text{mon}(\mathbf{r})} = 0} \quad (14.9)$$

### Contribución Dipolar

$$\begin{aligned}
0 &= \iiint_{\mathbb{Q}} \{ \varphi_{(\mathbf{r}')} [\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} \psi_{(\mathbf{r}')}] + \psi_{(\mathbf{r}')} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \nabla_{\mathbf{r}'} \varphi_{(\mathbf{r}')} \} \, dV' \\
\text{Si elegimos } \varphi_{(\mathbf{r}')} &= r'_i, \text{ y } \psi_{(\mathbf{r}')} = r'_j, \text{ tenemos:} \\
0 &= \iiint_{\mathbb{Q}} \{ r'_i [J_{j(\mathbf{r}')} \cdot \nabla_{\mathbf{r}'} (r'_j)] + r'_j J_{i(\mathbf{r}')} \nabla_{\mathbf{r}'} (r'_i) \} \, dV' \\
0 &= \iiint_{\mathbb{Q}} \{ r'_i [J_{j(\mathbf{r}')} \cdot \mathbf{1}] + r'_j J_{i(\mathbf{r}')} \cdot \mathbf{1} \} \, dV' \\
\iiint_{\mathbb{Q}} r'_i J_{j(\mathbf{r}')} \, dV' &= - \iiint_{\mathbb{Q}} r'_j J_{i(\mathbf{r}')} \, dV'
\end{aligned}$$

Reemplazando en la Contribución Dipolar:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\text{dip}(\mathbf{r})} &:= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \iiint_{\mathbb{Q}} J_{i(\mathbf{r}')} r' \cos(\theta) \, dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \iiint_{\mathbb{Q}} J_{i(\mathbf{r}')} |\mathbf{r}'| |\hat{\mathbf{r}}| \cos(\theta) \, dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \iiint_{\mathbb{Q}} J_{i(\mathbf{r}')} (\mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}}) \, dV' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \sum_{j=1}^3 \left[ \hat{r}_j \iiint_{\mathbb{Q}} r'_j J_{i(\mathbf{r}')} \, dV' \right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\hat{r}_j}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} [r'_j J_{i(\mathbf{r}')} + r'_j J_{i(\mathbf{r}')}] \, dV' \right\} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\hat{r}_j}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} [r'_j J_{i(\mathbf{r}')} - r'_i J_{j(\mathbf{r}')}] \, dV' \right\} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^3 \left\{ \epsilon_{ijk} \hat{r}_j \iiint_{\mathbb{Q}} [\mathbf{r}' \times \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')}]_k \, dV' \right\} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \left[ \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{r}' \times \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \, dV' \right] \times \hat{\mathbf{r}} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi r^2} (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}) \\
&= \frac{\mu_0 (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}})}{4\pi r^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{A}_{\text{dip}(\mathbf{r})} = \frac{\mu_0 (\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}})}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 |\mathbf{m}| \sin(\theta)}{4\pi r^2} \hat{\boldsymbol{\varphi}}} \quad (14.10)$$

### Contribución Cuadrupolar

$$\boxed{\mathbf{A}_{\text{cuad}(\mathbf{r})} = \frac{\mu_0}{8\pi r^3} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} r'^2 [3 \cos^2(\theta) - 1] \, dV'} \quad (14.11)$$

#### 14.0.4 Notación De Einstein

Utilizando notación de Einstein, si consideramos a la distribución volumétrica de corriente eléctrica  $\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')}$  confinada en una región  $d$ , con  $|\mathbf{r}| \gg d$ , podemos obtener el potencial magnetostático en expansión multipolar de la siguiente forma:

$$\mathbf{A}_{(\mathbf{r})} := \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dV' + \nabla \chi_{(\mathbf{r})}$$

Realizando un desarrollo de Taylor alrededor de  $\mathbf{r}' = \mathbf{0}$ , tenemos que:

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \left[ \partial_{i'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right]_{\mathbf{r}'=\mathbf{0}} \cdot r'_i + \frac{1}{2!} \partial_{i'} \partial_{j'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right]_{\mathbf{r}'=\mathbf{0}} r'_i r'_j + \dots \right\} dV' + \nabla \chi_{(\mathbf{r})}$$

Por el teorema de Clairaut-Schwartz, tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \left[ \left( \frac{r_i - r'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \right]_{\mathbf{r}'=\mathbf{0}} \cdot r'_i + \frac{1}{2!} \partial_{j'} \partial_{i'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right]_{\mathbf{r}'=\mathbf{0}} r'_i r'_j + \dots \right\} dV' + \nabla \chi_{(\mathbf{r})} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \left[ \left( \frac{r_i - 0}{|\mathbf{r} - \mathbf{0}|^3} \right) \right] \cdot r'_i + \frac{1}{2!} \partial_{j'} \left( \frac{r_i - r'_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \right]_{\mathbf{r}'=\mathbf{0}} r'_i r'_j + \dots \right\} dV' + \nabla \chi_{(\mathbf{r})} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \left( \frac{r_i}{|\mathbf{r}|^3} \right) \cdot r'_i + \frac{1}{2!} \left[ -\frac{\delta_{i'j'}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{3(r_i - r'_i)(r_j - r'_j)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \right] \right]_{\mathbf{r}'=\mathbf{0}} r'_i r'_j + \dots \right\} dV' + \nabla \chi_{(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

Como  $\delta_{ij} = \delta_{i'j'}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \left( \frac{r_i}{|\mathbf{r}|^3} \right) \cdot r'_i + \frac{1}{2!} \left[ -\frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r} - \mathbf{0}|^3} + \frac{3(r_i - 0)(r_j - 0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{0}|^5} \right] r'_i r'_j + \dots \right\} dV' + \nabla \chi_{(\mathbf{r})} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \left( \frac{r_i}{|\mathbf{r}|^3} \right) \cdot r'_i + \frac{1}{2!} \left( -\frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{3r_i r_j}{|\mathbf{r}|^5} \right) r'_i r'_j + \dots \right] dV' + \nabla \chi_{(\mathbf{r})} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \left( \frac{r_i}{|\mathbf{r}|^3} \right) \cdot r'_i + \frac{1}{2!} \left( \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} |\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5} \right) r'_i r'_j + \dots \right] dV' + \nabla \chi_{(\mathbf{r})} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}|} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} dV' + \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') dV' + \frac{1}{2!} \left( \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} |\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5} \right) \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} r'_i r'_j dV' + \dots \right] + \nabla \chi_{(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}|} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} dV' + \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') dV' + \frac{1}{2!} \left( \frac{3r_i r_j - \delta_{ij} |\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^5} \right) \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} r'_i r'_j dV' + \dots \right] + \nabla \chi_{(\mathbf{r})} \quad (14.12)$$

### Contribución Monopolar

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\text{mon}(\mathbf{r})} &= \frac{\mu_0}{4\pi |\mathbf{r}|} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi |\mathbf{r}|} \iiint_{\mathbb{Q}} \delta_{ji} J_{j(\mathbf{r}')} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi |\mathbf{r}|} \iiint_{\mathbb{Q}} (\partial_j r_i) J_{j(\mathbf{r}')} dV' \end{aligned}$$

Por la regla del producto, tenemos que:

$$= \frac{\mu_0}{4\pi |\mathbf{r}|} \iiint_{\mathbb{Q}} \{ \partial_j [r_i J_{j(\mathbf{r}')}] - r_i \partial_j J_{j(\mathbf{r}')} \} dV'$$

Como  $\partial_j J_{j(\mathbf{r}')} = \nabla \cdot \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} = 0$ , tenemos que:

$$= \frac{\mu_0}{4\pi |\mathbf{r}|} \iiint_{\mathbb{Q}} \{ \partial_j [r_i J_{j(\mathbf{r}')}] - 0 \} dV'$$

Si  $\mathbf{J}$  es localizada  $\partial_j [r_i J_{j(\mathbf{r}')}] = 0 \quad \forall \quad j$ , entonces:

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi |\mathbf{r}|} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{0} dV' \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{A}_{\text{mon}(\mathbf{r})} = \mathbf{0}} \quad (14.13)$$

### Contribución Dipolar

- En primer lugar, calculemos la integral:

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{Q}} J_{i(\mathbf{r}')} r'_j dV' &= \iiint_{\mathbb{Q}} r'_j \delta_{ki} J_{k(\mathbf{r}')} dV' \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} r'_j (\partial_{k'} r'_i) J_{k(\mathbf{r}')} dV' \end{aligned}$$

Por la regla del producto, tenemos:

$$= \iiint_{\mathbb{Q}} \{ \partial_{k'} [r'_i r'_j J_{k(\mathbf{r}')}] - (\partial_{k'} r'_j) r'_i J_{k(\mathbf{r}')} - r'_i r'_j [\partial_{k'} J_{k(\mathbf{r}')}] \} dV'$$

Por el teorema de Gauss, tenemos que:

$$= \oint_{\mathbf{S}^+ = \partial \mathbb{Q}} r'_i r'_j J_{k(\mathbf{r}')} dS_k - \iiint_{\mathbb{Q}} \{ (\partial_{k'} r'_j) r'_i J_{k(\mathbf{r}')} + r'_i r'_j [\partial_{k'} J_{k(\mathbf{r}')}] \} dV'$$

Como  $\partial_k J_{k(\mathbf{r}')} = \nabla \cdot \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} = 0$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} &= 0 - \iiint_{\mathbb{Q}} [(\partial_{k'} r'_j) r'_i J_{k(\mathbf{r}')} + r'_i r'_j \cdot 0] dV' \\ &= - \iiint_{\mathbb{Q}} \delta_{k'j} r'_i J_{k(\mathbf{r}')} + 0 dV' \\ &= - \iiint_{\mathbb{Q}} J_{j(\mathbf{r}')} r'_i dV' \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\iiint_{\mathbb{Q}} J_{i(\mathbf{r}')} r'_j dV' = - \iiint_{\mathbb{Q}} J_{j(\mathbf{r}')} r'_i dV'} \quad (14.14)$$

- Es decir, obtuvimos una matriz antisimétrica. Para calcular entonces la contribución dipolar del potencial magnetostático, finalmente:

$$\mathbf{A}_{\text{dip}(\mathbf{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi |\mathbf{r}|^3} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \, dV'$$

Por la definición de momento dipolar electrostático, tenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi |\mathbf{r}|^3} \iiint_{\mathbb{Q}} J_{i(\mathbf{r}')} r_j r'_j \, dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi |\mathbf{r}|^3} r_j \iiint_{\mathbb{Q}} J_{i(\mathbf{r}')} r'_j \, dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi |\mathbf{r}|^3} \frac{r_j}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} [J_{i(\mathbf{r}')} r'_j + J_{i(\mathbf{r}')} r'_j] \, dV' \end{aligned}$$

Como  $\iiint_{\mathbb{Q}} J_{i(\mathbf{r}')} r'_j \, dV' = - \iiint_{\mathbb{Q}} J_{j(\mathbf{r}')} r'_i \, dV'$ , tenemos que:

$$= \frac{\mu_0}{4\pi |\mathbf{r}|^3} \frac{r_j}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} [J_{i(\mathbf{r}')} r'_j - J_{j(\mathbf{r}')} r'_i] \, dV'$$

Por la definición del producto vectorial, tenemos:

$$= \frac{\mu_0}{4\pi |\mathbf{r}|^3} \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} [\mathbf{r}' \times \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')}] \times \mathbf{r} \, dV'$$

Por la definición de momento dipolar magnetostático, tenemos:

$$= \frac{\mu_0 (\mathbf{m} \times \mathbf{r})}{4\pi |\mathbf{r}|^3}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{A}_{\text{dip}(\mathbf{r})} = \frac{\mu_0 (\mathbf{m} \times \mathbf{r})}{4\pi |\mathbf{r}|^3}} \quad (14.15)$$

## Contribución Cuadrupolar

### 14.0.5 Condiciones De Contorno

Dado  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un Campo Magnetostático continuo generado por una superficie  $\mathbf{S} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  cargada con una densidad superficial de corriente eléctrica  $\mathbf{K} := \mathbf{K}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y con normal exterior  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ , debido a que el Potencial Magnetostático puede escribirse como la integral del Campo Magnetostático, podemos estudiar su continuidad directamente.

## Continuidad

Sea  $\mathcal{C} : [\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0 + \varepsilon] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva que representa un segmento que parte de la posición  $\mathbf{r}_0$  hasta la posición  $\mathbf{r}_0 + \varepsilon$  atravesando a la superficie cargada con densidad superficial de corriente  $\mathbf{K}$ , con  $\varepsilon \rightarrow 0$ , entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^+ - \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^- &:= \int_{\mathcal{C}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r}')} \times d\ell' \\ \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^+ - \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^- &= \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_0 + \varepsilon} \mathbf{B}_{(\mathbf{r}')} \times d\ell' \end{aligned}$$

Cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^+ - \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^- &= \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{B}_{(\mathbf{r}')} \times d\ell' \\ \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^+ - \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^- &= 0 \\ \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^+ &= \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^- \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^+ = \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^-} \quad (14.16)$$

## Discontinuidad Del Campo Magnetostático En Función Del Potencial

Dada la discontinuidad en forma vectorial del Campo Magnetostático, podemos escribirla en forma escalar, de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}^+ - \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}^- &= \mu_0 \mathbf{K}_{(\mathbf{r})} \times \hat{\boldsymbol{\eta}} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^+ - \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^- &= \mu_0 \mathbf{K}_{(\mathbf{r})} \times \hat{\boldsymbol{\eta}} \\ \frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^+}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^-}{\partial \eta} &= -\mu_0 \mathbf{K}_{(\mathbf{r})} \\ \frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^-}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^+}{\partial \eta} &= \mu_0 \mathbf{K}_{(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^-}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}^+}{\partial \eta} = \mu_0 \mathbf{K}_{(\mathbf{r})}} \quad (14.17)$$

# CAPÍTULO 15: MOMENTO DIPOLAR MAGNETOSTÁTICO

Sean  $q_i$ ,  $N$ -partículas estáticas cargadas eléctricamente en las posiciones  $\mathbf{r}_i$ , y sea  $\mathbf{r}$  la posición de una unidad de carga de prueba, entonces:

$$\mathbf{m}_{q_1 \dots q_N} := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \times q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \quad (15.1)$$

## 15.0.1 Dipolo Magnetostático Físico

Sea  $\mathbf{I} := I \hat{\boldsymbol{\phi}} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una corriente circular que fluye en sentido positivo que encierra una superficie  $\mathbf{S} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces:

$$\mathbf{m} := I \mathbf{S} \quad (15.2)$$

## 15.0.2 Momento Dipolar Magnetostático En Una Distribución Continua De Carga

Cuando la cantidad de partículas  $q_i$  tiende a infinito, obtenemos una Suma de Riemann por cada Diferencial de Carga:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbf{m}_{q_1 \dots q_N}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \times q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \right] \\ \mathbf{m}_{(\mathbf{r})} &= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^N (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}) \times q_i \mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')} \, dq' \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{m}_{(\mathbf{r})} := \frac{1}{2} \int (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')} \, dq' \quad (15.3)$$

### Distribución Lineal

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad lineal de carga  $\lambda := \lambda_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad lineal vectorial de corriente  $\mathbf{I}_{(\mathbf{r}')} := \lambda_{(\mathbf{r}')} \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , entonces:

$$\mathbf{m}_{(\mathbf{r})} := \frac{1}{2} \int_C (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \mathbf{I}_{(\mathbf{r}')} \, ds' \quad (15.4)$$

### Distribución Superficial

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad superficial de carga  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad superficial vectorial de corriente  $\mathbf{K}_{(\mathbf{r}')} := \sigma_{(\mathbf{r}')} \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , entonces:

$$\mathbf{m}_{(\mathbf{r})} := \frac{1}{2} \iint_S (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \mathbf{K}_{(\mathbf{r}')} \, dS' \quad (15.5)$$

### Distribución Volumétrica

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad volumétrica de carga  $\rho := \rho_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad volumétrica vectorial de corriente  $\mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} := \rho_{(\mathbf{r}')} \mathbf{v}_{(\mathbf{r}')}$ , entonces:

$$\mathbf{m}_{(\mathbf{r})} := \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times \mathbf{J}_{(\mathbf{r}')} \, dV' \quad (15.6)$$

# CAPÍTULO 16: TRABAJO MAGNETOSTÁTICO

Sea  $q$  una partícula cargada eléctricamente que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}$  a lo largo de una curva  $\mathcal{C} := \mathcal{C}^+ : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  orientada positivamente en un Campo Magnetostático continuo  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , y sea  $\mathbf{F}_{\mathbf{m}(\mathbf{r})} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la Fuerza Magnetostática necesaria para mover a la partícula  $q$  en el Campo  $\mathbf{B}$ , entonces:

$$\begin{aligned} W_{\mathbf{m}(\mathbf{r})} &:= \int_{\mathcal{C}^+} \mathbf{F}_{\mathbf{m}(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [q\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}] \cdot \mathbf{v} \, dt \\ &= q \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}] \cdot \mathbf{v} \, dt \\ &= q \int_{t_0}^{t_f} 0 \, dt \, \forall \, \mathbf{v} \\ &= q \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{W_{\mathbf{m}(\mathbf{r})} = 0} \tag{16.1}$$

# CAPÍTULO 17: ENERGÍA MAGNETOSTÁTICA

Debido a que el Trabajo Magnetostático es nulo, la Energía Magnetostática también lo es:

$$\boxed{E_m = 0} \tag{17.1}$$

# CAPÍTULO 18: LEY DE AMPÈRE

Sea  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un Campo Magnetostático producido por una densidad volumétrica  $\mathbf{J} := \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de  $N$  hilos infinitos de corriente  $I_i$  encerrados por una curva cerrada  $\mathcal{C} := \mathcal{C}^+ : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  orientada positivamente en una superficie  $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{R}^3$  ( $\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}$ ) y cuya corriente total es  $I_{\text{enc}}$ , con  $1 \leq i \leq N$  y  $N \rightarrow \infty$ , entonces:

La circulación total del campo  $\mathbf{B}_{(\mathbf{r})}$  a través de la curva  $\mathcal{C}$  será, por el Principio de Superposición, de la forma:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N \mathbf{B}_{I_i} \right) \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \sum_{i=1}^N \left( \oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} \mathbf{B}_{I_i} \cdot d\boldsymbol{\ell} \right) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \int_{\mathcal{C}} \left( \frac{\mu_0 I_i}{2\pi\rho} \hat{\boldsymbol{\varphi}} \right) \cdot (d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\hat{\mathbf{z}}) \right] \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N I_i \right) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\rho} \rho d\varphi (\hat{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}) + 0 + 0 \\ &= \frac{\mu_0 I_{\text{enc}}}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot 1 \\ &= \frac{2\pi\mu_0 I_{\text{enc}}}{2\pi} \\ &= \mu_0 \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S}} \quad (18.1)$$

## Teorema De Stokes

Por el Teorema De Stokes, tenemos que:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\mathbf{S}} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} \\ \iint_{\mathbf{S}} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= \mu_0 \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} = \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})}} \quad (18.2)$$

## Ley De Ampère: Forma Integral

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S}} \quad (18.3)$$

## Ley De Ampère: Forma Diferencial

$$\boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} = \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})}} \quad (18.4)$$

### 18.0.1 Ecuación De Poisson Para El Magnetismo

Sea  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un Campo Magnetostático continuo producido por una distribución volumétrica de corriente  $\mathbf{J} := \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  cuyo Potencial Magnotostático es  $\mathbf{A} := \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times [\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}] &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} \\ \nabla_{\mathbf{r}} [\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r})}] - \nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

Tomando el Gauge de Coulomb  $\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} = 0$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}}(0) - \nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} \\ 0 - \nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} &= -\mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} = -\mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} \iff \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} = 0} \quad (18.5)$$



Componentes

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} &= -\mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 \langle A_{x(x,y,z)}, A_{y(x,y,z)}, A_{z(x,y,z)} \rangle &= -\mu_0 \langle J_{x(x,y,z)}, J_{y(x,y,z)}, J_{z(x,y,z)} \rangle \\ \langle \nabla_{\mathbf{r}}^2 A_{x(x,y,z)}, \nabla_{\mathbf{r}}^2 A_{y(x,y,z)}, \nabla_{\mathbf{r}}^2 A_{z(x,y,z)} \rangle &= \langle -\mu_0 J_{x(x,y,z)}, -\mu_0 J_{y(x,y,z)}, -\mu_0 J_{z(x,y,z)} \rangle\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \nabla_{\mathbf{r}}^2 A_{x(x,y,z)} = -\mu_0 J_{x(x,y,z)} \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 A_{y(x,y,z)} = -\mu_0 J_{y(x,y,z)} \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 A_{z(x,y,z)} = -\mu_0 J_{z(x,y,z)} \end{cases} \tag{18.6}$$

# CAPÍTULO 19: MEDIOS MATERIALES MAGNETOSTÁTICOS

## 19.1 Material Magnético

### 19.1.1 Definición

Un material magnético es un medio material que se *magnetiza* o sufre un torque cuando se ve sometido a un Campo Magnetostático externo. Se denomina material *paramagnético* y *diamagnético* a aquellos cuya inducción magnética es débil y desaparece al remover el Campo Magnetostático externo, produciéndose en la misma dirección del campo en el primer caso (generando una fuerza atractiva), y en dirección opuesta en el segundo (generando una fuerza repulsiva), respectivamente. Por otra parte, se denomina material *ferromagnético* a aquellos cuya inducción magnética es fuerte y se mantiene luego de remover el Campo Magnetostático externo.

### 19.1.2 Inducción De Dipolos Magnéticos En El Interior

Los electrones de los átomos de un medio material orbitan los núcleos atómicos produciendo corrientes diminutas que generan dipolos magnéticos, por lo que cada átomo posee un momento dipolar magnetostático inducido por estas corrientes. Estos momentos se encuentran apuntando en dirección aleatoria, pero al aplicar un campo externo todos ellos sufren un torque y se alinean produciendo la *magnetización* del medio material.

### 19.1.3 Torque Inducido

Dado un material magnético sometido a un Campo Magnetostático Uniforme  $\mathbf{B} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces el Torque Inducido  $\boldsymbol{\tau} := \boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m}} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sobre un dipolo magnético  $\mathbf{m} := I\mathbf{S}$  del material será de la forma:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m}} &:= a |\mathbf{F}| \sin(\theta) \hat{\mathbf{x}} \\ \text{Como } |\mathbf{F}| &= Ib |\mathbf{B}|, \text{ tenemos:} \\ &= Iab |\mathbf{B}| \sin(\theta) \hat{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{m} \times \mathbf{B}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\boldsymbol{\tau}_{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}} \quad (19.1)$$

### Fuerza Inducida (Campo No Uniforme)

Cuando sobre el material magnético actúa un Campo Magnetostático  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , la Fuerza Inducida  $\mathbf{F} := \mathbf{F}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  sobre un dipolo del material es de la forma:

$$\boxed{\mathbf{F}_{(\mathbf{r})} = \nabla_{\mathbf{r}} [\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}]}$$
(19.2)

### 19.1.4 Campo Magnetización

Debido a que todos los dipolos magnéticos inducidos en los átomos de un material magnético apuntan en dirección del Campo Magnetostático externo  $\mathbf{B}$  (ya sea en forma atractiva o repulsiva), el material en su conjunto se encuentra magnetizado.

#### 19.1.4.1 Definición

Se denomina Campo Magnetización al Campo Vectorial  $\mathbf{M} := \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que representa la densidad de magnetización del material magnético, de la forma:

$$\boxed{\mathbf{M}_{(\mathbf{r})} := \frac{d\mathbf{m}_{(\mathbf{r})}}{dV}} \quad (19.3)$$

#### 19.1.4.2 Respuesta Lineal

La relación entre el campo magnetización y el campo  $\mathbf{H}$  es de la forma:

$$\boxed{M_{i(\mathbf{r})} = \chi_{mij} H_{j(\mathbf{r})}} \quad (19.4)$$

### Medio LIH

Si el medio es lineal, isótropo y homogéneo, el campo magnetización es de la forma:

$$\boxed{\mathbf{M}_{(\mathbf{r})} = \chi_{\mathbf{m}} \mathbf{H}_{(\mathbf{r})}} \quad (19.5)$$

### Constante De Susceptibilidad Magnética

$$\boxed{\chi_{\mathbf{m}} := \mu_{\mathbf{r}} - 1, \text{ con } \mu_{\mathbf{r}} := \frac{\mu}{\mu_0}} \quad (19.6)$$

### Tensor De Susceptibilidad Magnética

En forma general, la susceptibilidad magnética es un tensor de rango 2 de la forma:

$$\boxed{\chi_{mij} = \begin{pmatrix} \chi_{mxx} & \chi_{mxy} & \chi_{mxz} \\ \chi_{myx} & \chi_{myy} & \chi_{myz} \\ \chi_{mzx} & \chi_{mzy} & \chi_{mzz} \end{pmatrix}} \quad (19.7)$$

### 19.1.4.3 Potencial Magnetostático De Un Material Magnético Magnetizado

Debido a que el Potencial Magnetostático  $\mathbf{A} := \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  de un Dipolo Magnetostático es conocido, podemos obtener mediante la definición del Campo Densidad de Magnetización el potencial total de un material magnético magnetizado:

$$\mathbf{A}_{\text{dip}(\mathbf{r})} := \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}_{(\mathbf{r})} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

El Potencial Total de una Densidad de Polarización, será de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{M}_{(\mathbf{r}')} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{M}_{(\mathbf{r}')} \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{M}_{(\mathbf{r}')} \times \left\{ \frac{(x - x')\hat{\mathbf{x}} + (y - y')\hat{\mathbf{y}} + (z - z')\hat{\mathbf{z}}}{\left[\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}\right]^3} \right\} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{M}_{(\mathbf{r}')} \times \left\{ \frac{x - x'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \hat{\mathbf{x}} + \frac{y - y'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \hat{\mathbf{y}} + \frac{z - z'}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \right\} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{M}_{(\mathbf{r}')} \times \left\{ \frac{\partial}{\partial x'} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \right] \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \right] \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z'} \left[ \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \right] \hat{\mathbf{z}} \right\} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{M}_{(\mathbf{r}')} \times \nabla_{\mathbf{r}'} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' \end{aligned}$$

Por la Regla del Producto del Rotacional, tenemos:

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla_{\mathbf{r}'} \times \left[ \frac{\mathbf{M}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{M}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

Por la Identidad de Integración:

$$\begin{aligned} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\!\!\!\oint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{M}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times d\mathbf{S}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{M}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\!\!\!\oint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{M}_{(\mathbf{r}')} \times d\mathbf{S}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{M}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\!\!\!\oint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{M}_{(\mathbf{r}')} \times \hat{\boldsymbol{\eta}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{M}_{(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\!\!\!\oint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{K}_{m(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{J}_{m(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{A}_{(\mathbf{r})} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint\!\!\!\oint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{K}_{m(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\mathbf{J}_{m(\mathbf{r}')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'} \quad (19.8)$$

### Densidad De Corriente Superficial De Magnetización

Se denomina Densidad Superficial de Corrientes de Magnetización al Campo Vectorial  $\sigma_p := \sigma_{p(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de la forma:

$$\boxed{\mathbf{K}_{m(\mathbf{r})} := \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \times \hat{\boldsymbol{\eta}}} \quad (19.9)$$

### Densidad De Corriente Volumétrica De Magnetización

Se denomina Densidad Volumétrica de Corrientes de Magnetización al Campo Vectorial  $\rho_p := \rho_{p(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de la forma:

$$\boxed{\mathbf{J}_{m(\mathbf{r})} := \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}_{(\mathbf{r})}} \quad (19.10)$$

## 19.1.5 Campo Intensidad Magnética

Dado un material magnético magnetizado que cuenta con una densidad de corriente volumétrica de magnetización  $\mathbf{J}_m := \mathbf{J}_{m(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definimos como densidad de corriente volumétrica total  $\mathbf{J} := \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} = \mathbf{J}_{m(\mathbf{r})} + \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  a la suma de la densidad de magnetización  $\mathbf{J}_{m(\mathbf{r})}$  y todo el resto de corrientes presentes en el medio material que no corresponden a corrientes de magnetización, que denominamos corrientes libres  $\mathbf{J}_l := \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces:

Por la Ley de Ampère, tenemos:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} \\ \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}}{\mu_0} &= \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} + \mathbf{J}_{m(\mathbf{r})} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ \frac{\mathbf{B}_{(\mathbf{r})}}{\mu_0} \right] &= \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} + \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ \frac{\mathbf{B}_{(\mathbf{r})}}{\mu_0} \right] - \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} &= \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ \frac{\mathbf{B}_{(\mathbf{r})}}{\mu_0} - \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \right] &= \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} &= \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

#### 19.1.5.1 Definición

Se denomina Campo Inducción Magnética  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  al campo vectorial total de un medio material magnético, que tiene en cuenta las contribuciones del Campo Intensidad Magnética  $\mathbf{H} := \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y el Campo Densidad de Magnetización  $\mathbf{M} := \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , y es de la forma:

$$\boxed{\mathbf{B}_{(\mathbf{r})} := \mu_0 [\mathbf{H}_{(\mathbf{r})} + \mathbf{M}_{(\mathbf{r})}]} \quad (19.11)$$

#### 19.1.5.2 Respuesta Lineal

Cuando el material magnético responde linealmente al campo magnético, el campo intensidad magnética resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} &:= \mu_0 [\mathbf{H}_{(\mathbf{r})} + \mathbf{M}_{(\mathbf{r})}] \\ &= \mu_0 [\mathbf{H}_{(\mathbf{r})} + \chi_{mij} H_{j(\mathbf{r})}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_0(1 + \chi_{mij})H_{j(\mathbf{r})} \\
&= \mu_{ij}H_{j(\mathbf{r})}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{B_{i(\mathbf{r})} = \mu_{ij}H_{j(\mathbf{r})}} \quad (19.12)$$

### Medio LIH

Si el medio es lineal, isótropo y homogéneo, el campo intensidad magnética es de la forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{(\mathbf{r})} &:= \mu_0[\mathbf{H}_{(\mathbf{r})} + \mathbf{M}_{(\mathbf{r})}] \\
&= \mu_0[\mathbf{H}_{(\mathbf{r})} + \chi_m \mathbf{H}_{(\mathbf{r})}] \\
&= \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \\
&= \mu_0\mu_r \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \\
&= \mu \mathbf{H}_{(\mathbf{r})}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{B}_{(\mathbf{r})} = \mu \mathbf{H}_{(\mathbf{r})}} \quad (19.13)$$

#### 19.1.5.3 Permeabilidad Magnética

Se denomina *permeabilidad magnética*  $\mu$  a la constante de la forma:

$$\boxed{\mu := \mu_0\mu_r} \quad (19.14)$$

### Permeabilidad Relativa

La constante  $\mu_r$  es la *permeabilidad magnética relativa* del medio material.

### Tensor Permeabilidad Magnética

En forma general, la permeabilidad magnética es un tensor de rango 2 de la forma:

$$\boxed{\mu_{ij} := \mu_0(1 + \chi_{mij}) = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}} \quad (19.15)$$

#### 19.1.5.4 Ley De Ampère Para Materiales Magnéticos

Por el Teorema De Stokes, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} &= \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} \\
\iint_{\mathbf{S}} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} \\
\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S}} \quad (19.16)$$

### Ley De Ampère Para Materiales Magnéticos: Forma Integral

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S}} \quad (19.17)$$

### Ley De Ampère Para Materiales Magnéticos: Forma Diferencial

$$\boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} = \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})}} \quad (19.18)$$

#### 19.1.5.5 Divergencia Del Campo Intensidad

### Divergencia En Volumen

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} &= \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left[ \frac{\mathbf{B}_{(\mathbf{r})}}{\mu_0} - \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \right] \\
&= \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}}{\mu_0} - \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \\
&= \frac{0}{\mu_0} - \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \\
&= -\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{M}_{(\mathbf{r})}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} = -\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{M}_{(\mathbf{r})}} \quad (19.19)$$

### Rotor En Superficie

$$\begin{aligned}
\oiint_{\mathbf{S}} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= -\oiint_{\mathbf{S}} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} \\
&= -\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} \\
&= \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} = \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}} \quad (19.20)$$

### 19.1.5.6 Condiciones De Contorno

Debido a que el Campo Inducción Magnética representa la suma del Campo Densidad de Magnetización y el Campo Intensidad Magnética, cuando una superficie  $\mathbf{S} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se encuentra cargada con una densidad superficial de corrientes libres  $\mathbf{K}_l := \mathbf{K}_{l(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  el Campo Intensidad sufre una discontinuidad al pasar de la Superficie Superior  $\mathbf{S}_{\text{Sup.}}$  a la Superficie Interior  $\mathbf{S}_{\text{Int.}}$ . De esta forma, dado  $\mathbf{H} := \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un Campo Intensidad Magnética continuo generado por una superficie cargada con una densidad superficial de corrientes libres  $\mathbf{K}_l$  y con normal exterior  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_e$ , podemos escribir sus condiciones de contorno en función de la densidad superficial de corriente  $\mathbf{K}_l$ .

#### Componente Paralela: Ley De Ampère Para Materiales Magnéticos

Sea  $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{\text{Sup.}} + \mathcal{C}_{\text{Inf.}} + \mathcal{C}_{\text{Izq.}} + \mathcal{C}_{\text{Der.}} : \mathbf{I} \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva cerrada que encierra a la superficie cargada con densidad superficial de corriente libre  $\mathbf{K}_l$ , cuyos caminos superior ( $\mathcal{C}_{\text{Sup.}}$ ) e inferior  $\mathcal{C}_{\text{Inf.}}$  tienen longitud  $L$ , y sus caminos laterales izquierdo ( $\mathcal{C}_{\text{Izq.}}$ ) y derecho ( $\mathcal{C}_{\text{Der.}}$ ) tienen longitud  $h$  muy pequeña ( $h \rightarrow 0$ ), entonces:

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= I_{\text{enc}} \\ \int_{\mathcal{C}_{\text{Sup.}}} \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Inf.}}} \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Izq.}}} \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \int_{\mathcal{C}_{\text{Der.}}} \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \mathbf{K}_{l(\mathbf{r})} L_{(\mathcal{C})} \\ H_{\parallel(\mathbf{r})}^+ L_{(\mathcal{C}_{\text{Sup.}})} - H_{\parallel(\mathbf{r})}^- L_{(\mathcal{C}_{\text{Inf.}})} + 0 + 0 &= \mathbf{K}_{l(\mathbf{r})} L_{(\mathcal{C})} \\ H_{\parallel(\mathbf{r})}^+ L - H_{\parallel(\mathbf{r})}^- L &= \mathbf{K}_{l(\mathbf{r})} L \\ H_{\parallel(\mathbf{r})}^+ - H_{\parallel(\mathbf{r})}^- &= \mathbf{K}_{l(\mathbf{r})} \\ \hat{\boldsymbol{\eta}}_e \times [\mathbf{H}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{H}_{1(\mathbf{r})}] &= \mathbf{K}_{l(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\hat{\boldsymbol{\eta}}_e \times [\mathbf{H}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{H}_{1(\mathbf{r})}] = \mathbf{K}_{l(\mathbf{r})}} \quad (19.21)$$

#### Componente Perpendicular: Divergencia Del Campo Intensidad Magnética

Sea  $\mathbf{S} := \mathbf{S}_{\text{Sup.}} + \mathbf{S}_{\text{Inf.}} + \mathbf{S}_{\text{Lat.}} : \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una superficie cilíndrica cerrada que encierra a la superficie cargada con densidad superficial de corriente libre  $\mathbf{K}_l$ , cuyas caras superior ( $\mathbf{S}_{\text{Sup.}}$ ) e inferior  $\mathbf{S}_{\text{Inf.}}$  tienen normales  $\hat{\boldsymbol{\eta}}_e$  y  $-\hat{\boldsymbol{\eta}}_e$ , y área  $A$ , respectivamente, y se encuentran separada por una altura  $h$  muy pequeña ( $h \rightarrow 0$ ), entonces:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} &= -\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \\ \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \, dV &= -\iiint_{\mathbb{Q}} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \, dS \\ \text{Por el Teorema de Gauss, tenemos:} \\ \oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= -\oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} \\ \iint_{\mathbf{S}_{\text{Sup.}}} \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathbf{S}_{\text{Inf.}}} \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{\mathbf{S}_{\text{Lat.}}} \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} &= -\iint_{\mathbf{S}_{\text{Sup.}}} \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\mathbf{S}_{\text{Inf.}}} \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\mathbf{S}_{\text{Lat.}}} \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} \\ H_{\perp(\mathbf{r})}^+ A_{(\mathbf{S}_{\text{Sup.}})} - H_{\perp(\mathbf{r})}^- A_{(\mathbf{S}_{\text{Inf.}})} + 0 &= -M_{\perp(\mathbf{r})}^+ A_{(\mathbf{S}_{\text{Sup.}})} + M_{\perp(\mathbf{r})}^- A_{(\mathbf{S}_{\text{Inf.}})} + 0 \\ H_{\perp(\mathbf{r})}^+ A - H_{\perp(\mathbf{r})}^- A &= -[M_{\perp(\mathbf{r})}^+ A - M_{\perp(\mathbf{r})}^- A] \\ H_{\perp(\mathbf{r})}^+ - H_{\perp(\mathbf{r})}^- &= -[M_{\perp(\mathbf{r})}^+ - M_{\perp(\mathbf{r})}^-] \\ [\mathbf{H}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{H}_{1(\mathbf{r})}] \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}_e &= -[\mathbf{M}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{M}_{1(\mathbf{r})}] \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}_e \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{[\mathbf{H}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{H}_{1(\mathbf{r})}] \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}_e = -[\mathbf{M}_{2(\mathbf{r})} - \mathbf{M}_{1(\mathbf{r})}] \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}_e} \quad (19.22)$$

## 19.1.6 Energía Magnética En Materiales Magnéticos

Debido a que conocemos la expresión del Trabajo Magnético (ya que el Trabajo Magnetostático es nulo), podemos hallar la Energía Magnética por unidad de volumen de un material magnético cuando la región de integración  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3$  es todo el espacio  $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^3$  sobre las corrientes libres, ya que la energía de las corrientes fijas de magnetización no es de interés, por lo tanto:

$$W_{\mathbf{m}(\mathbf{r},t)} := \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{J}_{l(\mathbf{r}',t)} \, dV'$$

Por la Ley de Ampère para Materiales Magnéticos, tenemos:

$$= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot [\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{H}_{(\mathbf{r}',t)}] \, dV'$$

Por la Regla del Producto Vectorial de la Divergencia, tenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot [\mathbf{H}_{(\mathbf{r}',t)} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)}] + \mathbf{H}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot [\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)}] \} \, dV' \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot [\mathbf{H}_{(\mathbf{r}',t)} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)}] \, dV' + \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{H}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot [\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)}] \, dV' \end{aligned}$$

Por el Teorema de Gauss, tenemos:

$$= \frac{1}{2} \oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} [\mathbf{H}_{(\mathbf{r}',t)} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)}] \cdot d\mathbf{S}' + \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{H}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)} \, dV'$$

Si  $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^3$ , la integral de superficie tiende a cero, entonces:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{H}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)} \, dV' \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)} \, dV' \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{E_{\mathbf{m}(t)} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)} \, dV'} \quad (19.23)$$

Parte IV

**Electrodinámica Clásica**

# CAPÍTULO 20: FUERZAS EN ELECTRODINÁMICA

## 20.1 Fuerza Electromagnética: Ley De Lorentz

### 20.1.1 Definición

Sea  $q$  una partícula cargada eléctricamente en el vacío en la posición  $\mathbf{r}_{(t)}$  que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_{(t)} := \dot{\mathbf{r}}_{(t)}$ , inmersa en un Campo Eléctrico  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y un Campo Magnético  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces:

La Fuerza Electromagnética que la partícula en movimiento sufre debido a los Campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  está dada por:

$$\mathbf{F}_q := q[\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \dot{\mathbf{r}}_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \quad (20.1)$$

### Formulación Potencial

$$\mathbf{F}_q := q\left[-\nabla_{\mathbf{r}}\phi_{(\mathbf{r},t)} - \frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}}_{(t)} \times \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}\right] \quad (20.2)$$

### 20.1.2 Fuerza Electromagnética En Un Sistema De $N$ -Partículas

Sean  $q_i$ ,  $N$ -partículas estáticas cargadas eléctricamente en el vacío en las posiciones  $\mathbf{r}_i$  que se mueven con velocidades  $\mathbf{v}_{(\mathbf{r}_i)}$ , con  $1 \leq i \leq N$ , entonces:

La Fuerza Electromagnética que las partículas  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_N$  en movimiento sufren debido a los Campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  será, por el Principio de Superposición, de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{q_1 \dots q_N} &:= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_{q_i} \\ &= \mathbf{F}_{q_1} + \mathbf{F}_{q_2} + \mathbf{F}_{q_3} + \dots + \mathbf{F}_{q_N} \\ &= \sum_{i=1}^N q_i [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \dot{\mathbf{r}}_{i(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{F}_{q_1 \dots q_N} := \sum_{i=1}^N q_i [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \dot{\mathbf{r}}_{i(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \quad (20.3)$$

### 20.1.3 Fuerza Electromagnética En Una Distribución Continua De Carga Y Corriente

Cuando la cantidad de partículas cargadas  $q_i$  tiende a infinito, obtenemos una Suma de Riemann por cada Diferencial de Carga:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (\mathbf{F}_{q_1 \dots q_N}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^N q_i [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \dot{\mathbf{r}}_{i(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \right\} \\ \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^N q_i [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \dot{\mathbf{r}}_{i(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \right\} \\ &= \int [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \dot{\mathbf{r}}'_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] dq' \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r})} = \int [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \dot{\mathbf{r}}'_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] dq' \quad (20.4)$$

### Distribución Lineal

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad lineal de carga  $\lambda := \lambda_{(\mathbf{r}',t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\dot{\mathbf{r}}'_{(t)}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad lineal vectorial de corriente  $\mathbf{I}_{(\mathbf{r}',t)} := \lambda_{(\mathbf{r}',t)} \dot{\mathbf{r}}'_{(t)}$ , entonces:

$$\mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} = \int_C [\lambda_{(\mathbf{r}',t)} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \mathbf{I}_{(\mathbf{r}',t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] ds' \quad (20.5)$$

### Distribución Superficial

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad superficial de carga  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r}',t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\dot{\mathbf{r}}'_{(t)}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad superficial vectorial de corriente  $\mathbf{K}_{(\mathbf{r}',t)} := \sigma_{(\mathbf{r}',t)} \dot{\mathbf{r}}'_{(t)}$ , entonces:

$$\mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} = \iint_S [\sigma_{(\mathbf{r}',t)} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \mathbf{K}_{(\mathbf{r}',t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] dS' \quad (20.6)$$

### Distribución Volumétrica

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad volumétrica de carga  $\rho := \rho_{(\mathbf{r}',t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  que se mueve con velocidad  $\dot{\mathbf{r}}'_{(t)}$ , podemos expresar la corriente  $I$  como una densidad volumétrica vectorial de corriente  $\mathbf{J}_{(\mathbf{r}',t)} := \rho_{(\mathbf{r}',t)} \dot{\mathbf{r}}'_{(t)}$ , entonces:

$$\mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} = \iiint_{\mathbb{Q}} [\rho_{(\mathbf{r}',t)} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \mathbf{J}_{(\mathbf{r}',t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] dV' \quad (20.7)$$

## 20.2 Fuerza Electromotriz

Sean  $N$  cargas eléctricas  $q_i$  en las posiciones  $\mathbf{r}_{i(t)}$  y que se mueven con velocidad  $\dot{\mathbf{r}}_{i(t)}$  a través de un Circuito Eléctrico en presencia de un Campo Eléctrico  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y un Campo Magnético  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , con  $N \rightarrow \infty$ , entonces:

Se denomina Fuerza Electromotriz a la transferencia de energía por unidad de carga otorgada a las cargas eléctricas  $q_i$  producida por baterías, generadores, transductores u otros dispositivos a través de un circuito eléctrico cerrado, y su expresión es de la forma:

$$\mathcal{E} := \oint_{\mathcal{C}^+} [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \dot{\mathbf{r}}_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \cdot d\boldsymbol{\ell}$$

(20.8)



# CAPÍTULO 21: LEYES FUNDAMENTALES EN ELECTRODINÁMICA

## 21.1 Ley De Faraday: Ley De Inducción Magnética

La Ley de Faraday establece que la Fuerza Electromotriz Inducida  $\mathcal{E}_{\text{Ind}}$  en un circuito eléctrico cerrado  $\mathcal{C}$  que se desplaza con velocidad  $\dot{\mathbf{r}}_{(t)}$  expuesto a un Campo Eléctrico  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y un Campo Magnético  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , es igual y opuesta a la variación del Flujo Magnético  $\Phi_{\mathbf{B}}$  con respecto al tiempo que atraviesa a la superficie  $\mathbf{S}$  con normal exterior que describe el circuito  $\mathcal{C}$  en su movimiento ( $\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+$  en cada instante de tiempo).

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{Ind}} &:= \oint_{\mathcal{C}^+_{(t)}} [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \dot{\mathbf{r}}_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \cdot d\boldsymbol{\ell} \\ &= \oint_{\mathcal{C}^+_{(t)}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\boldsymbol{\ell} + \oint_{\mathcal{C}^+_{(t)}} [\dot{\mathbf{r}}_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \cdot d\boldsymbol{\ell}\end{aligned}$$

Por la Circulación Nula y la Regla del Triple Producto Escalar:

$$\begin{aligned}&= 0 + \oint_{\mathcal{C}^+_{(t)}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot [d\boldsymbol{\ell} \times \dot{\mathbf{r}}_{(t)}] \\ &= \oint_{\mathcal{C}^+_{(t)}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \left[ d\boldsymbol{\ell} \times \dot{\mathbf{r}}_{(t)} \frac{dt}{dt} \right] \\ &= \frac{1}{dt} \oint_{\mathcal{C}^+_{(t)}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot [d\boldsymbol{\ell} \times d\mathbf{r}_{(t)}] \\ &= \frac{1}{dt} \iint_{\mathbf{S}_{\text{Lat.}(t)}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}$$

Por la Ley de Gauss para el Magnetismo, tenemos:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{dt} \left[ - \iint_{\mathbf{S}_{\text{Sup.}(t)}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} - \iint_{\mathbf{S}_{\text{Inf.}(t)}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \cdot d\mathbf{S} \right] \\ &= -\frac{1}{dt} [\Phi_{(\mathbf{B}_{\text{Sup.}})} - \Phi_{(\mathbf{B}_{\text{Inf.}})}] \\ &= -\frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathcal{E}_{\text{Ind}} = -\frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt}} \quad (21.1)$$

### Ley De Lenz

La Ley de Lenz establece que la Corriente Inducida en el circuito eléctrico debida a un cambio en el Campo Magnético se opone al cambio en el Flujo Magnético y para ello ejerce una Fuerza Electromotriz en dirección opuesta.

#### 21.1.1 Ley De Faraday-Maxwell

Cuando el circuito  $\mathcal{C}$  no se desplaza o deforma con respecto al tiempo, dada una superficie  $\mathbf{S}$  cuya curva frontera está dada por el circuito  $\mathcal{C}$  ( $\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+$ ), entonces:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\text{Ind}} &= -\frac{d\Phi_{\mathbf{B}}}{dt} \\ \oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \dot{\mathbf{r}}_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \cdot d\boldsymbol{\ell} &= -\frac{d}{dt} \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + 0 \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \iint_{\mathbf{S}} \left[ -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + 0] \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \iint_{\mathbf{S}} \left[ -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S} \\ \oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\boldsymbol{\ell} &= \iint_{\mathbf{S}} \left[ -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S}\end{aligned}$$

Por el Teorema de Stokes, tenemos que:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbf{S}} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_{\mathbf{S}} \left[ -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}} \quad (21.2)$$

### Ley De Faraday-Maxwell: Forma Integral

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial\mathbf{S}^+} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S}} \quad (21.3)$$

Ley De Faraday-Maxwell: Forma Diferencial

$$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = - \frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$$

(21.4)

## 21.2 Ley De Ampère-Maxwell

La Ley de Ampère-Maxwell es una corrección de la Ley de Ampère hecha por Maxwell, que tiene en cuenta la corriente de polarización cuando el Campo Electromagnético varía en el tiempo.

Sea un Campo Eléctrico  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y un Campo Magnético  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , Diferenciables a Primer ( $C^1$ ) y Segundo Orden ( $C^2$ ), respectivamente, entonces:

$$0 = \nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \quad \forall \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}$$

Por la Ley de Ampère, tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)}] \\ &= \nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} + \mathbf{C}] \\ &= \mu_0 \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{C} \end{aligned}$$

Por la Ecuación de Continuidad, tenemos:

$$= -\mu_0 \frac{\partial \rho_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{C}$$

Por la Ley de Gauss, tenemos:

$$0 = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon_0 \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}] + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{C}$$
$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{C} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}]$$
$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{C} = \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left[ \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right]$$
$$\mathbf{C} \Leftrightarrow \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$$

$$\therefore \quad \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} + \mathbf{C} \iff \mathbf{C} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$$

(21.5)

Ley De Ampère-Maxwell: Forma Integral

$$\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S}$$

(21.6)

Ley De Ampère-Maxwell: Forma Diferencial

$$\nabla \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$$

(21.7)

# CAPÍTULO 22: ECUACIONES DE MAXWELL

## 22.1 Definición

Las Ecuaciones de Maxwell son cuatro Ecuaciones Diferenciales Parciales (E.D.P.'s) de Primer Orden que resumen, junto con la Ley de Lorentz, todo el contenido teórico de la Electrodinámica Clásica. La Ley de Gauss y la Ley de Faraday-Maxwell describen como los Campos Eléctricos  $\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}$  pueden ser producidos por distribuciones volumétricas de carga eléctrica  $\rho_{(\mathbf{r},t)}$  o bien por Campos Magnéticos que cambian con el tiempo  $(\partial_t \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)})$ , respectivamente, mientras que la Ley de Gauss para el Magnetismo determina que no existen distribuciones volumétricas de carga magnética  $\nexists \rho_{m(\mathbf{r},t)}$  (no existen los monopolos magnéticos), y que los Campos Magnéticos  $\mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}$  pueden ser producidos por densidades volumétricas de corriente eléctrica  $\mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)}$  o bien por Campos Eléctricos que cambian con el tiempo  $(\partial_t \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)})$ , respectivamente.

### 22.1.1 Tabla

Ley	Ecuación Integral	Ecuación Diferencial
Ley De Gauss	$\oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r},t)} dV$	$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0}$
Ley De Faraday-Maxwell	$\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$
Ley De Gauss Para El Magnetismo	$\oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = 0$
Ley De Ampère-Maxwell	$\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$

Tabla 22.1: Ecuaciones de Maxwell en el Sistema Internacional de Unidades (S.I.).

Es decir, las Ecuaciones de Maxwell determinan como las cargas y corrientes eléctricas producen Campos Electromagnéticos, mientras que la Ley de Lorentz determina cómo los Campos Electromagnéticos afectan a las cargas y corrientes.

### 22.1.2 Campos En Función De Los Potenciales

De las ecuaciones de Maxwell, se sigue que los campos eléctrico  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}$  y magnético  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}$  en términos del potencial eléctrico  $\phi := \phi_{(\mathbf{r},t)}$  y el potencial magnético  $\mathbf{A} := \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}$ , son de la forma:

#### 22.1.2.1 Campo Eléctrico

Deducción

Por la Ley de Faraday-Maxwell, tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times [-\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{(\mathbf{r},t)} + \mathbf{C}] &= -\frac{\partial}{\partial t} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} \\ -\nabla_{\mathbf{r}} \times [\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{(\mathbf{r},t)}] + \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{C} &= \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ -\frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \\ -0 + \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{C} &= \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ -\frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \quad \forall \phi_{(\mathbf{r},t)} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{C} &= \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ -\frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \\ \mathbf{C} &\Leftrightarrow -\frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \end{aligned}$$

$\therefore \quad \boxed{\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = -\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{(\mathbf{r},t)} + \mathbf{C} \Leftrightarrow \mathbf{C} = -\frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}}$ (22.1)

Definición

$\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} := -\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{(\mathbf{r},t)} - \frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$

(22.2)

#### 22.1.2.2 Campo Magnético

Definición

$\mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} := \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}$

(22.3)

### 22.1.3 Corolario: Ecuación De Continuidad (Conservación De La Carga)

Las Ecuaciones de Maxwell incluyen implícitamente el principio de la Conservación de la Carga descrito por la Ecuación de Continuidad. Por la Ley de Ampère-Maxwell, tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] &= \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left[ \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

$$0 = \mu_0 \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}]$$

Por la Ley De Gauss, tenemos:

$$\mu_0 \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} \right]$$
$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} = -\frac{\partial \rho_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} = -\frac{\partial \rho_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}}$$

(22.4)

## 22.2 Tipos De Ecuaciones De Maxwell

### 22.2.1 Ecuaciones De Maxwell En El Sistema De Unidades Gaussianas

En el Sistema de Unidades Gaussianas o C.G.S., pueden escribirse las Ecuaciones de Maxwell sin las Constantes de Permitividad Eléctrica  $\varepsilon_0$  y Permeabilidad Magnética  $\mu_0$  del vacío, y son de la forma:

Ley	Ecuación Integral	Ecuación Diferencial
Ley De Gauss	$\oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r},t)} \, dV$	$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = 4\pi \rho_{(\mathbf{r},t)}$
Ley De Faraday-Maxwell	$\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$
Ley De Gauss Para El Magnetismo	$\oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = 0$
Ley De Ampère-Maxwell	$\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{4\pi}{c} \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = \frac{4\pi \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)}}{c} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$

Tabla 22.2: Ecuaciones de Maxwell en el Sistema de Unidades Gaussianas (C.G.S.).

### 22.2.2 Ecuaciones De Maxwell En El Vacío

En ausencia de fuentes ( $\rho_{(\mathbf{r},t)} = \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} = 0$ ), las Ecuaciones de Maxwell presentan alta simetría, y son de la forma:

Ley	Ecuación Integral	Ecuación Diferencial
Ley De Gauss	$\oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = 0$
Ley De Faraday-Maxwell	$\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$
Ley De Gauss Para El Magnetismo	$\oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = 0$
Ley De Ampère-Maxwell	$\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$

Tabla 22.3: Ecuaciones de Maxwell en el Sistema Internacional de Unidades (S.I.) en ausencia de fuentes ( $\rho_{(\mathbf{r},t)} = \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} = 0$ ).

### 22.2.3 Ecuaciones De Maxwell En Medios Materiales

Las Ecuaciones de Maxwell describen las interacciones y fenómenos electromagnéticos en forma microscópica. Las Ecuaciones de Maxwell pueden obtenerse también en forma macroscópica, y corresponden a las Ecuaciones de Maxwell en Medios Materiales. Tanto la Ley de Faraday-Maxwell como la Ley de Gauss para el Magnetismo se mantienen pero la Ley de Gauss y la Ley de Ampère-Maxwell deben reformularse.

#### 22.2.3.1 Ley De Gauss Para Dieléctricos

En Medios Materiales, la Ley de Gauss puede reescribirse teniendo en cuenta que  $\rho := \rho_{(\mathbf{r},t)} = \rho_{l(\mathbf{r},t)} + \rho_{p(\mathbf{r},t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , que corresponde a la Ley de Gauss Para Dieléctricos y puede obtenerse de la forma:

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0}$$
$$\varepsilon_0 \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = \rho_{l(\mathbf{r},t)} + \rho_{p(\mathbf{r},t)}$$
$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\varepsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}] = \rho_{l(\mathbf{r},t)} - \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{P}_{(\mathbf{r},t)}$$
$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\varepsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}] + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{P}_{(\mathbf{r},t)} = \rho_{l(\mathbf{r},t)}$$
$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\varepsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \mathbf{P}_{(\mathbf{r},t)}] = \rho_{l(\mathbf{r},t)}$$
$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)} = \rho_{l(\mathbf{r},t)}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)} = \rho_{l(\mathbf{r},t)}}$$

(22.5)

#### Corriente De Polarización

Dado que la Densidad de Polarización  $\rho_p := \rho_{p(\mathbf{r},t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  varía con el tiempo, definimos a la Corriente de Polarización  $\mathbf{J}_p := \mathbf{J}_{p(\mathbf{r},t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , y debe verificar la Ecuación de Continuidad, entonces:

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_{p(\mathbf{r},t)} = -\frac{\partial \rho_{p(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$$
$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_{p(\mathbf{r},t)} = -\frac{\partial}{\partial t} [-\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{P}_{(\mathbf{r},t)}]$$
$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{J}_{p(\mathbf{r},t)} = \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left[ \frac{\partial \mathbf{P}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right]$$

$$\mathbf{J}_{p(\mathbf{r},t)} \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{P}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{J}_{p(\mathbf{r},t)} := \frac{\partial \mathbf{P}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}}$$

(22.6)

22.2.3.2 Ley De Ampère-Maxwell Para Materiales Magnéticos

En Medios Materiales, la Ley de Ampère-Maxwell puede reescribirse teniendo en cuenta que  $\mathbf{J} := \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} = \mathbf{J}_{l(\mathbf{r},t)} + \mathbf{J}_{m(\mathbf{r},t)} + \mathbf{J}_{p(\mathbf{r},t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , que corresponde a la Ley de Ampère para Materiales Magnéticos pero con la corrección de Maxwell, entonces:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ \frac{\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}}{\mu_0} &= \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} + \mathbf{J}_{m(\mathbf{r})} + \mathbf{J}_{p(\mathbf{r},t)} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ \frac{\mathbf{B}_{(\mathbf{r})}}{\mu_0} \right] &= \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} + \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} + \frac{\partial \mathbf{P}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ \frac{\mathbf{B}_{(\mathbf{r})}}{\mu_0} \right] - \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} &= \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} + \frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \mathbf{P}_{(\mathbf{r},t)}] \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ \frac{\mathbf{B}_{(\mathbf{r})}}{\mu_0} - \mathbf{M}_{(\mathbf{r})} \right] &= \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} + \frac{\partial \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} &= \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} + \frac{\partial \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_{(\mathbf{r})} = \mathbf{J}_{l(\mathbf{r})} + \frac{\partial \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}}$$

(22.7)

Corriente De Desplazamiento Eléctrico

Definimos a la Corriente de Desplazamiento Eléctrico como  $\mathbf{J}_p := \mathbf{J}_{d(\mathbf{r},t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que es de la forma:

$$\mathbf{J}_{d(\mathbf{r},t)} := \frac{\partial \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$$

(22.8)

22.2.3.3 Tabla De Las Ecuaciones De Maxwell En Medios Materiales

Ley	Ecuación Integral	Ecuación Diferencial
Ley De Gauss Para Dieléctricos	$\oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{l(\mathbf{r},t)} \, dV$	$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)} = \rho_{l(\mathbf{r},t)}$
Ley De Faraday-Maxwell	$\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$
Ley De Gauss Para El Magnetismo	$\oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = 0$
Ley De Ampère-Maxwell Para Materiales Magnéticos	$\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{H}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{J}_{l(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} + \frac{d}{dt} \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_{(\mathbf{r},t)} = \mathbf{J}_{l(\mathbf{r},t)} + \frac{\partial \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$

Tabla 22.4: Ecuaciones de Maxwell en el Sistema Internacional de Unidades (S.I.) en Medios Materiales.

Tabla De Las Ecuaciones De Maxwell En Medios Materiales En Ausencia De Fuentes

Ley	Ecuación Integral	Ecuación Diferencial
Ley De Gauss Para Dieléctricos	$\oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)} = 0$
Ley De Faraday-Maxwell	$\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\frac{d}{dt} \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$
Ley De Gauss Para El Magnetismo	$\oiint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} = 0$	$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = 0$
Ley De Ampère-Maxwell Para Materiales Magnéticos	$\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{H}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{d}{dt} \iint_{\mathbf{S}} \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S}$	$\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{H}_{(\mathbf{r},t)} = \frac{\partial \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$

Tabla 22.5: Ecuaciones de Maxwell en el Sistema Internacional de Unidades (S.I.) en Medios Materiales en ausencia de fuentes.

## 22.3 Formulación Potencial De Las Ecuaciones De Maxwell

Las Ecuaciones de Maxwell pueden resumirse en dos Ecuaciones Diferenciales Parciales (E.D.P's) de segundo orden, reemplazando las expresiones del Potencial Eléctrico  $\phi_{(\mathbf{r},t)}$  y el Potencial Magnético  $\mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}$  en los Campos Eléctrico y Magnético.

22.3.1 Ley De Gauss Para El Magnetismo Y Ley De Faraday-Maxwell

La Ley de Gauss para el Magnetismo y la Ley de Faraday-Maxwell se satisfacen en la Formulación Potencial, pero no aportan información:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &= 0 \\ \nabla_{\mathbf{r}} \cdot [\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}] &= 0 \\ 0 &= 0 \, \forall \, \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ -\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{(\mathbf{r},t)} - \frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] &= -\frac{\partial}{\partial t} [\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}] \\ -\nabla_{\mathbf{r}} \times [\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{(\mathbf{r},t)}] - \frac{\partial}{\partial t} [\nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}] &= -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$0 + \frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \quad \forall \quad \phi_{(\mathbf{r},t)}$$

$$\mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}$$

Por lo tanto:

Las leyes no aportan información.

### 22.3.2 Ley De Gauss Y Ley De Ampère-Maxwell

La Ley de Gauss y la Ley de Ampère-Maxwell combinan las cuatro Ecuaciones de Maxwell en dos ecuaciones de orden superior, de la forma:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} & \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \\ \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \left[ -\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{(\mathbf{r},t)} - \frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] &= \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} & \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[ \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r})} \right] - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{(\mathbf{r},t)} - \frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \\ -\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi_{(\mathbf{r},t)} - \frac{\partial}{\partial t} [\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}] &= \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} & \text{Por la definición del Laplaciano Vectorial, tenemos:} & \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi_{(\mathbf{r},t)} + \frac{\partial}{\partial t} [\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}] &= -\frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} & \nabla_{\mathbf{r}} [\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}] - \nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla_{\mathbf{r}} \left[ \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\nabla_{\mathbf{r}}^2 \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} + \nabla_{\mathbf{r}} [\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}] + \mu_0 \varepsilon_0 \nabla_{\mathbf{r}} \left[ \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \\ \left[ -\nabla_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \nabla_{\mathbf{r}} \left[ \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \\ \square_{\mathbf{r}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \nabla_{\mathbf{r}} \left[ \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \end{aligned}$$

### 22.3.3 Ecuaciones De Maxwell En Formulación Potencial

Las Ecuaciones de Maxwell en Formulación Potencial resultan:

	Ecuación Diferencial
•	$\nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi_{(\mathbf{r},t)} + \frac{\partial}{\partial t} [\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}] = -\frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0}$
•	$\square_{\mathbf{r}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \nabla_{\mathbf{r}} \left[ \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] = \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)}$

Tabla 22.6: Formulación Potencial de las Ecuaciones de Maxwell en el Sistema Internacional de Unidades (S.I.).

### 22.3.4 Libertad De Gauge

Se denomina *libertad de gauge* a la libre elección de la divergencia del potencial magnético  $\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}$ , valor que puede fijarse libremente dependiendo del problema de electromagnetismo.

#### 22.3.4.1 Gauge De Lorenz: Ecuaciones De Ondas

Debido a la libertad de gauge que aporta el campo magnético  $\mathbf{B}$  para elegir un potencial magnético  $\mathbf{A}$ , las ecuaciones de Maxwell pueden simplificarse. En particular, el denominado *gauge de Lorenz* es de la forma:

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$$

(22.9)

Reemplazando el gauge de Lorenz en las ecuaciones de Maxwell en formulación potencial, obtenemos dos ecuaciones de onda en el espacio  $\mathbb{R}^3$  para los potenciales eléctrico y magnético, de la forma:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi_{(\mathbf{r},t)} + \frac{\partial}{\partial t} [\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}] &= -\frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} & \square_{\mathbf{r}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \nabla_{\mathbf{r}} \left[ \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi_{(\mathbf{r},t)} + \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] &= -\frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} & \square_{\mathbf{r}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \nabla_{\mathbf{r}} \left[ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi_{(\mathbf{r},t)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} & \square_{\mathbf{r}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \nabla_{\mathbf{r}}(0) &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \\ \left[ -\nabla_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi_{(\mathbf{r},t)} &= \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} & \square_{\mathbf{r}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + 0 &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \\ \square_{\mathbf{r}} \phi_{(\mathbf{r},t)} &= \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} & \square_{\mathbf{r}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \end{aligned}$$

Ecuaciones De Maxwell (Gauge De Lorenz)

Ecuación De Ondas	Ecuación Diferencial
Potencial Eléctrico	$\square_{\mathbf{r}} \phi_{(\mathbf{r},t)} = \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0}$
Potencial Magnético	$\square_{\mathbf{r}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} = \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)}$

Tabla 22.7: Ecuaciones de Maxwell en el Sistema Internacional de Unidades (S.I.) en formulación potencial con el gauge de Lorenz.

#### Observación

Si los potenciales eléctrico  $\phi$  y magnético  $\mathbf{A}$  satisfacen el gauge de Lorenz se tiene que:

Los potenciales

$$\begin{cases} \phi'_{(\mathbf{r},t)} = \phi_{(\mathbf{r},t)} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial f_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ \mathbf{A}'_{(\mathbf{r},t)} = \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \nabla_{\mathbf{r}} f_{(\mathbf{r},t)} \end{cases}$$

satisfacen las ecuaciones de Maxwell pues

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} := -\nabla_{\mathbf{r}} \phi_{(\mathbf{r},t)} - \frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} = -\nabla_{\mathbf{r}} \phi'_{(\mathbf{r},t)} - \frac{\partial \mathbf{A}'_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} := \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} = \nabla_{\mathbf{r}} \times \mathbf{A}'_{(\mathbf{r},t)} \end{cases}.$$

### 22.3.4.2 Gauge De Coulomb

Se denomina *gauge de Coulomb*, a la elección de gauge de la forma:

$$\boxed{\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} = 0} \quad (22.10)$$

Reemplazando el gauge de Coulomb en las ecuaciones de Maxwell en formulación potencial, se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi_{(\mathbf{r},t)} + \frac{\partial}{\partial t} [\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}] &= -\frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} & \square_{\mathbf{r}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \nabla_{\mathbf{r}} \left[ \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi_{(\mathbf{r},t)} + \frac{\partial}{\partial t} (0) &= -\frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} & \square_{\mathbf{r}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \nabla_{\mathbf{r}} \left[ 0 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi_{(\mathbf{r},t)} + 0 &= -\frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} & \square_{\mathbf{r}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \nabla_{\mathbf{r}} \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \\ \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi_{(\mathbf{r},t)} &= -\frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} & \square_{\mathbf{r}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} - \nabla_{\mathbf{r}} \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\begin{cases} \nabla_{\mathbf{r}}^2 \phi_{(\mathbf{r},t)} = -\frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} \\ \square_{\mathbf{r}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} = \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} - \nabla_{\mathbf{r}} \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \end{cases}} \quad (22.11)$$

## 22.4 Solución Exacta De Las Ecuaciones De Maxwell (Gauge De Lorenz)

Mediante el método de la función de Green es posible hallar la solución de las ecuaciones de Maxwell utilizando el Gauge de Lorenz, de la forma:

### 22.4.1 Motivación

Sean  $\phi$  y  $\mathbf{A}$  el potencial eléctrico y magnético, respectivamente, sea  $\rho$  una distribución de carga eléctrica volumétrica y sea  $\mathbf{J}$  la densidad de corriente eléctrica, entonces:

- Por las ecuaciones de Maxwell en forma potencial con Gauge de Lorenz, tenemos que:

$$\begin{cases} \square \phi_{(\mathbf{r},t)} = \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} \\ \square \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} = \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \end{cases}$$

- Es decir, que el potencial eléctrico satisface una E.D.P. de segundo orden de la forma:

$$\begin{aligned} \square \phi_{(\mathbf{r},t)} &= \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} \\ -\nabla^2 \phi_{(\mathbf{r},t)} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} &= \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2 \phi_{(\mathbf{r},t)} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} - \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2 \phi_{(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} - \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\varepsilon_0}} \quad (22.12)$$

- Y el potencial vector satisface una E.D.P. de segundo orden de la forma:

$$\begin{aligned} \square \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \\ -\nabla^2 \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \\ \nabla^2 \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} - \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \\ \nabla^2 [A_{1(\mathbf{r},t)} \hat{\mathbf{e}}_1 + A_{2(\mathbf{r},t)} \hat{\mathbf{e}}_2 + A_{3(\mathbf{r},t)} \hat{\mathbf{e}}_3] &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [A_{1(\mathbf{r},t)} \hat{\mathbf{e}}_1 + A_{2(\mathbf{r},t)} \hat{\mathbf{e}}_2 + A_{3(\mathbf{r},t)} \hat{\mathbf{e}}_3] - \mu_0 [J_{1(\mathbf{r},t)} \hat{\mathbf{e}}_1 + J_{2(\mathbf{r},t)} \hat{\mathbf{e}}_2 + J_{3(\mathbf{r},t)} \hat{\mathbf{e}}_3] \\ \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_1 : \nabla^2 A_{1(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{1(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} - \mu_0 J_{1(\mathbf{r},t)} \\ \hat{\mathbf{e}}_2 : \nabla^2 A_{2(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{2(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} - \mu_0 J_{2(\mathbf{r},t)} \\ \hat{\mathbf{e}}_3 : \nabla^2 A_{3(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{3(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} - \mu_0 J_{3(\mathbf{r},t)} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2 A_{i(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_{i(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} - \mu_0 J_{i(\mathbf{r},t)}, \text{ con } i = 1, 2, 3} \quad (22.13)$$

- Es decir, que para resolver las ecuaciones de Maxwell con Gauge de Lorenz debemos resolver únicamente una E.D.P. de segundo orden de la forma:

$$\boxed{\nabla^2 \chi_{(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} - f_{(\mathbf{r},t)}} \quad (22.14)$$

### 22.4.2 Función De Green

Sea  $\chi := \chi_{(\mathbf{r},t)} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  una función de cuatro variables diferenciable a segundo orden ( $C^2$ ) en el espacio y en el tiempo, y sea  $f := f_{(\mathbf{r},t)}$  una función de cuatro variables continua, entonces:

- Si la función  $\chi$  satisface la misma ecuación diferencial que las ecuaciones de Maxwell en forma potencial utilizando el gauge de Lorenz, se tiene que:

$$\nabla^2 \chi_{(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \chi_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} - f_{(\mathbf{r},t)}$$

Antitransformando Fourier a la función  $\chi_{(\mathbf{r},t)}$  al espacio de frecuencias, tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} \, d\omega \right] &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} \, d\omega \right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} \, d\omega \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \chi_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} \, d\omega &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(\mathbf{r},\omega)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{-i\omega t}) \, d\omega - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} \, d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \chi_{(\mathbf{r}, \omega)} e^{-i\omega t} d\omega &= \frac{1}{c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(\mathbf{r}, \omega)} e^{-i\omega t} (-i\omega)^2 d\omega - \int_{-\infty}^{\infty} f_{(\mathbf{r}, \omega)} e^{-i\omega t} d\omega \\
\int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \chi_{(\mathbf{r}, \omega)} e^{-i\omega t} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{(\mathbf{r}, \omega)} - f_{(\mathbf{r}, \omega)} \right] e^{-i\omega t} d\omega \\
&\Leftrightarrow \nabla^2 \chi_{(\mathbf{r}, \omega)} = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{(\mathbf{r}, \omega)} - f_{(\mathbf{r}, \omega)}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\nabla^2 \chi_{(\mathbf{r}, \omega)} = -\frac{\omega^2}{c^2} \chi_{(\mathbf{r}, \omega)} - f_{(\mathbf{r}, \omega)}} \quad (22.15)$$

- Es decir, obtuvimos una E.D.P. en el espacio de Fourier que no contiene derivadas segundas respecto del tiempo o la frecuencia. Ahora para la parte espacial proponemos una función de Green de la forma:

$$\begin{cases} (\nabla_{\mathbf{r}}^2 + k^2) G_{k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} = -\delta_{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \\ G_{k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \xrightarrow{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} 0 \end{cases}, \text{ con } k := \frac{\omega}{c}$$

- Si realizamos la sustitución  $\mathbf{R} := \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\mathbf{r}}^2 + k^2) G_{k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} &= -\delta_{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \\
(\nabla_{\mathbf{R}}^2 + k^2) G_{k(\mathbf{R})} &= -\delta_{(\mathbf{R})}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{(\nabla_{\mathbf{R}}^2 + k^2) G_{k(\mathbf{R})} = -\delta_{(\mathbf{R})}} \quad (22.16)$$

- Las soluciones de esta ecuación diferencial son de la forma:

$$G_{k(\mathbf{R})} = \frac{1}{|\mathbf{R}|} (A_+ e^{ik|\mathbf{R}|} + A_- e^{-ik|\mathbf{R}|})$$

- Estas soluciones representan ondas esféricas entrantes y salientes, cuyas amplitudes  $A_+$  y  $A_-$  decrecen con la distancia. Introduciendo la notación reducida  $\pm$ , podemos escribir la solución de la ecuación diferencial de la forma:

$$G_{k(\mathbf{R})}^{\pm} = \frac{A_{\pm}}{|\mathbf{R}|} e^{\pm ik|\mathbf{R}|}$$

- Hasta ahora no tuvimos en cuenta la parte temporal de nuestra ecuación diferencial. Para hacerlo, proponemos una función de Green de la forma:

$$\begin{cases} \left( \nabla_{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G_{(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} = -\delta_{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \delta_{(t-t')} \\ G_{(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')} \xrightarrow{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

- Transformando Fourier al espacio temporal esta nueva ecuación diferencial, se obtiene que:

$$(\nabla_{\mathbf{r}}^2 - k^2) G_{k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} = -\delta_{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} e^{i\omega t'}$$

- Teniendo en cuenta las soluciones de la parte espacial de la función de Green propuesta anteriormente, las soluciones de esta nueva ecuación son de la forma:

$$G_{k(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}^{\pm} = \frac{1}{|\mathbf{R}|} e^{\pm ik|\mathbf{R}|} e^{i\omega t'}$$

- Antitransformando se obtiene que:

$$\begin{aligned}
G_{\pm(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|\mathbf{R}|} e^{\pm ik|\mathbf{R}|} e^{i\omega t'} e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{1}{|\mathbf{R}|} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \left( \pm \frac{|\mathbf{R}|}{c} + t' - t \right)} d\omega
\end{aligned}$$

Por la definición de la delta de Dirac, tenemos que:

$$= \frac{1}{|\mathbf{R}|} \delta \left( \pm \frac{|\mathbf{R}|}{c} + t' - t \right)$$

Deshaciendo la sustitución  $\mathbf{R}$ , tenemos que:

$$= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta \left( \pm \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} + t' - t \right)$$

- Finalmente, la función de Green para las ecuaciones de Maxwell utilizando el gauge de Lorenz, será de la forma:

$$\boxed{G_{\pm(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t')} := \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta \left( \pm \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} + t' - t \right)} \quad (22.17)$$

### Interpretación

Las funciones de Green  $G_{\pm}$  son la solución de la ecuación de ondas inhomogénea en  $(\mathbf{r}, t)$  si existe una inhomogeneidad (una fuente) en la posición y el tiempo  $(\mathbf{r}', t')$ , y son no nulas únicamente en el tiempo  $t := t' \pm \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$ . Éstas soluciones describen la propagación hacia adelante en el tiempo y con velocidad de propagación  $v_{\varphi} = c$  de lo que ocurrió en la posición y el tiempo  $(\mathbf{r}', t')$ .

### 22.4.3 Solución General

La solución general exacta de las ecuaciones de Maxwell será de la forma:

$$\boxed{\chi(\mathbf{r}, t) := \chi_{\text{hom}}(\mathbf{r}, t) + \chi_{\text{part}}(\mathbf{r}, t)} \quad (22.18)$$

#### Solución Homogénea

La solución homogénea  $\chi_{\text{hom}}(\mathbf{r}, t)$  se obtiene al especificar las condiciones de contorno del problema.



### Solución Particular

$$\chi_{\text{part}(\mathbf{r},t)} := \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} G_{\pm(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')} f_{(\mathbf{r}',t')} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \mathrm{d}t' \quad (22.19)$$

## 22.5 Potencial Electromagnético: Potencial Retardado (Gauge De Lorenz)

Se denomina *potencial retardado* al valor que toma el potencial electromagnético observado en un espacio y tiempo campos  $(\mathbf{r}, t)$ , que se produjo debido a distribuciones de carga eléctrica  $\rho_{(\mathbf{r},t)}$  o densidades de corriente eléctrica  $\mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)}$  en el espacio y tiempo fuentes  $(\mathbf{r}', t')$ . Se dice que los potenciales son *retardados* debido a que éstos, son ondas que se propagan con velocidad de fase finita  $v_{\varphi} = c$  (a la velocidad de la luz), por lo que el tiempo que tarda la información en viajar desde un punto fuente  $(\mathbf{r}', t')$  a un punto campo  $(\mathbf{r}, t)$  sufre un *retardo* debido a su velocidad de propagación  $c$ .

### 22.5.1 Tiempo Retardado

Se denomina *tiempo retardado* al tiempo que tiene en cuenta la demora que le tomó al campo electromagnético en propagarse desde su tiempo fuente  $t'$  en la posición fuente  $\mathbf{r}'$  hasta el tiempo actual  $t$  en el punto campo  $\mathbf{r}$ , y se define como:

$$t_{\text{r}} := t' = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \quad (22.20)$$

### 22.5.2 Tiempo Avanzado

Se denomina *tiempo avanzado* al tiempo que tiene en cuenta la demora que le tomará al campo electromagnético en propagarse desde su tiempo fuente  $t'$  en la posición fuente  $\mathbf{r}'$  hasta un tiempo posterior  $t$  en el punto campo  $\mathbf{r}$ , y se define como:

$$t_{\text{a}} := t' = t + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \quad (22.21)$$

### 22.5.3 Deducción

Utilizando la expresión de la función de Green para las ecuaciones de Maxwell con gauge de Lorenz, puede obtenerse el potencial electromagnético en el espacio tiempo campo  $(\mathbf{r}, t)$ , si éste se produjo en un espacio tiempo fuente  $(\mathbf{r}', t')$ , de la forma:

$$\begin{aligned} \phi_{(\mathbf{r},t)} &:= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \rho_{(\mathbf{r}',t')} G_{\pm(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \mathrm{d}t' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{(\mathbf{r}',t')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(\pm \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} + t' - t\right) \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \mathrm{d}t' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{(\mathbf{r}',t')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left[t' - \left(t \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)\right] \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \mathrm{d}t' \end{aligned}$$

Si el potencial se debe al tiempo retardado  $t_{\text{r}} \Rightarrow G = G_+$ , es decir:

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{(\mathbf{r}',t')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left[t' - \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)\right] \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \mathrm{d}t'$$

Por la definición de tiempo retardado, tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{(\mathbf{r}',t')}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta_{(t' - t_{\text{r}})} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \, \mathrm{d}t' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{(\mathbf{r}',t_{\text{r}})}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \phi_{(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{(\mathbf{r}',t_{\text{r}})}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \\ \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_{(\mathbf{r}',t_{\text{r}})}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}' \end{cases} \quad (22.22)$$

### 22.5.4 Potencial Eléctrico

El *potencial eléctrico* que representa la solución de las ecuaciones de Maxwell en forma potencial es de la forma:

$$\phi_{(\mathbf{r},t)} := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{(\mathbf{r}',t_{\text{r}})}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}', \text{ con } t_{\text{r}} := t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \quad (22.23)$$

### 22.5.5 Potencial Magnético

El *potencial magnético* que representa la solución de las ecuaciones de Maxwell en forma potencial es de la forma:

$$\mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} := \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_{(\mathbf{r}',t_{\text{r}})}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}', \text{ con } t_{\text{r}} := t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \quad (22.24)$$

## 22.6 Campo Electromagnético: Ecuaciones De Jefimenko (Gauge De Lorenz)

Se denomina *ecuaciones de Jefimenko* a las expresiones del campo electromagnético, derivadas del potencial electromagnético cuando se tiene en cuenta que éstos son potenciales retardados, y son de la forma:

### 22.6.1 Deducción

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &:= -\nabla\phi_{(\mathbf{r},t)} - \frac{\partial\mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ &= -\nabla_{\mathbf{r}}\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{(\mathbf{r}',t_{\text{r}})}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_{(\mathbf{r}',t_{\text{r}})}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\right] \\ &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &:= \nabla \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} \\ \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &:= \nabla_{\mathbf{r}} \times \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_{(\mathbf{r}',t_{\text{r}})}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}'\right] \\ &= \end{aligned}$$

### 22.6.1.1 Campo Eléctrico

El *campo eléctrico* que representa la solución de las ecuaciones de Maxwell es de la forma:

$$\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left[ \rho_{(\mathbf{r}',t_r)} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial \rho_{(\mathbf{r}',t_r)}}{\partial t} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_{(\mathbf{r}',t_r)}}{\partial t} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] d^3\mathbf{r}' \quad (22.25)$$

### 22.6.1.2 Campo Magnético

El *campo magnético* que representa la solución de las ecuaciones de Maxwell es de la forma:

$$\mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} := \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \left[ \mathbf{J}_{(\mathbf{r}',t_r)} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{J}_{(\mathbf{r}',t_r)}}{\partial t} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right] d^3\mathbf{r}' \quad (22.26)$$

## 22.7 Aproximación Cuasiestacionaria

Se denomina *aproximación cuasiestacionaria* a la aproximación de las ecuaciones de Maxwell en la que se asume que los campos eléctrico y magnético, y la distribución de carga eléctrica y la densidad de corriente eléctrica (sus fuentes) varían lentamente y lo hacen en forma ondulatoria, por lo que los términos asociados a sus derivadas temporales son despreciables.

### 22.7.1 Definición

Sean  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  los campos eléctrico y magnético, tales que éstos varían en el tiempo en forma ondulatoria, con frecuencia angular  $\omega = kc$ , número de onda  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  y longitud de onda  $\lambda$ , con  $\lambda \gg d$ , donde  $d$  es una longitud característica del problema, entonces:

- Por las ecuaciones de Maxwell tenemos que:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \end{cases}$$

- Si suponemos que los campos eléctrico y magnético, y la distribución de carga y corriente eléctrica varían en forma ondulatoria, podemos proponer que:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} e^{i\omega t} \\ \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} e^{i\omega t} \\ \rho_{(\mathbf{r},t)} := \rho_{(\mathbf{r})} e^{i\omega t} \\ \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} := \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} e^{i\omega t} \end{cases}$$

- De esta forma las ecuaciones de Maxwell, resultan:

$$\begin{array}{llll} \nabla \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = \frac{\rho_{(\mathbf{r},t)}}{\epsilon_0} & \nabla \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} & \nabla \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = 0 & \nabla \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ \nabla \cdot [\mathbf{E}_{(\mathbf{r})} e^{i\omega t}] = \frac{\rho_{(\mathbf{r})}}{\epsilon_0} e^{i\omega t} & \nabla \times [\mathbf{E}_{(\mathbf{r})} e^{i\omega t}] = -\frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{B}_{(\mathbf{r})} e^{i\omega t}] & \nabla \cdot [\mathbf{B}_{(\mathbf{r})} e^{i\omega t}] = 0 & \nabla \times [\mathbf{B}_{(\mathbf{r})} e^{i\omega t}] = \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} e^{i\omega t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{E}_{(\mathbf{r})} e^{i\omega t}] \\ \nabla \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} = \frac{\rho_{(\mathbf{r})}}{\epsilon_0} & \nabla \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} = -i\omega \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} & \nabla \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} = 0 & \nabla \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} = \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} + i\omega \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \end{array}$$

$$\therefore \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} = \frac{\rho_{(\mathbf{r})}}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} = -i\omega \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} = \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} + i\omega \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \end{cases} \quad (22.27)$$

- De esta forma, las ecuaciones de Maxwell pueden resolverse en forma perturbativa, planteando que los campos eléctrico y magnético son de la forma:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} = \sum_{j=0}^{\infty} k^j \mathbf{E}_{(\mathbf{r})}^{(j)} \\ \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} = \sum_{j=0}^{\infty} k^j \mathbf{B}_{(\mathbf{r})}^{(j)} \end{cases} \quad (22.28)$$

#### Observación: Material Conductor

En materiales conductores, la ley de Ampère-Maxwell suele escribirse reemplazando la densidad de corriente eléctrica volumétrica en función del campo eléctrico de acuerdo con la ley de Ohm, de la forma:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} &= \mu_0 \mathbf{J}_{(\mathbf{r})} + i\omega \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \\ &= \mu_0 \sigma \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} + i\omega \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \\ &= \mu_0 (\sigma + i\omega \epsilon_0) \mathbf{E}_{(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\nabla \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r})} = \mu_0 (\sigma + i\omega \epsilon_0) \mathbf{E}_{(\mathbf{r})}} \quad (22.29)$$

#### 22.7.1.1 Tiempo Característico

En materiales conductores, se denomina *tiempo característico* a la inversa de su conductividad eléctrica, de la forma:

$$\boxed{t_c := \frac{1}{\sigma}} \quad (22.30)$$

### 22.7.2 Caso 1: Distribución De Carga Eléctrica Nula

### 22.7.3 Caso 2: Distribución De Corriente Eléctrica Nula

# CAPÍTULO 23: TRABAJO Y ENERGÍA ELECTROMAGNÉTICA

## 23.1 Trabajo Eléctrico

Debido a que la Ley de Gauss es la misma en Electroestática que en Electrodinámica, la expresión del Trabajo Electrostático es idéntica a la del Trabajo Eléctrico, por lo tanto:

$$W_{\text{e}(t)} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \rho_{(\mathbf{r}',t)} \phi_{(\mathbf{r}',t)} \, dV' \quad (23.1)$$

## 23.2 Trabajo Magnético

Si bien el Trabajo Magnetostático es nulo, el Trabajo Magnético no lo es, ya que para crear un Campo Magnético debe realizarse Trabajo Magnético para vencer al Campo Eléctrico Inducido que se produce de acuerdo con la Ley de Faraday-Maxwell. De esta forma, dada  $q_{(t)}$  una partícula estática cargada eléctricamente en la posición  $\mathbf{r}'$  inmersa en un Campo Eléctrico Continuo  $\mathbf{E} := \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , el Trabajo Magnético necesario para llevar a la partícula  $q$  desde una posición  $\mathbf{r}_0$  hasta la posición  $\mathbf{r}$ , será de la forma:

$$\begin{aligned} W_{\text{m}(\mathbf{r},t)} &:= \oint_{\mathcal{C}^+} \mathbf{F}_{\text{m}(\mathbf{r}')} \cdot d\boldsymbol{\ell}' \\ &= \oint_{\mathcal{C}^+} q[\dot{\mathbf{r}}_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)}] \cdot d\boldsymbol{\ell}' \\ &= q \oint_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \dot{\mathbf{r}}_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot d\boldsymbol{\ell}' \\ &= -q\mathcal{E}_{\text{Ind}} \end{aligned}$$

### 23.2.1 Definición

Se denomina Trabajo Magnético a la Fuerza Electromotriz opuesta necesaria para mover una carga de prueba  $q$  de un punto  $\mathbf{r}_0$  hasta un punto  $\mathbf{r}$ , multiplicada por dicha carga  $q$ :

$$W_{\text{m}(\mathbf{r},t)} = -q\mathcal{E}_{\text{Ind}} \quad (23.2)$$

### 23.2.2 Trabajo Magnético En Un Sistema De $N$ -Partículas

Sean  $q_i$ ,  $N$ -partículas estáticas cargadas eléctricamente en las posiciones  $\mathbf{r}_i$ , entonces:

$$\begin{aligned} W_{q_1 \dots q_N} &= W_{q_1} + W_{q_2} + W_{q_3} + \dots + W_{q_N} \\ &= -q_1\mathcal{E}_{\text{Ind}} - q_2\mathcal{E}_{\text{Ind}} - q_3\mathcal{E}_{\text{Ind}} - \dots - q_N\mathcal{E}_{\text{Ind}} \\ &= -\mathcal{E}_{\text{Ind}}(q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_N) \\ &= -\mathcal{E}_{\text{Ind}} \sum_{i=1}^N q_i \end{aligned}$$

$$\therefore W_{q_1 \dots q_N} = -\mathcal{E}_{\text{Ind}} \sum_{i=1}^N q_i \quad (23.3)$$

### 23.2.3 Trabajo Magnético En Una Distribución Continua De Carga

Cuando la cantidad de partículas cargadas  $q_i$  tiende a infinito, obtenemos una Suma de Riemann por cada Diferencial de Carga:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (W_{q_1 \dots q_N}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left( -\mathcal{E}_{\text{Ind}} \sum_{i=1}^N q_i \right) \\ W_{\text{m}(\mathbf{r},t)} &= -\mathcal{E}_{\text{Ind}} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^N q_i \right) \\ &= -\mathcal{E}_{\text{Ind}} \int dq'_{(t)} \end{aligned}$$

Por la Ley de Faraday, tenemos:

$$= \frac{d\Phi_{\mathbf{B}(t)}}{dt} \int dq'_{(t)}$$

Por la definición de Inductancia, tenemos:

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{dt}[LI_{(t)}] \int dq'_{(t)} \\ &= L \frac{dI_{(t)}}{dt} \int dq'_{(t)} \\ &= L \int dI'_{(t)} \frac{dq'_{(t)}}{dt'} \\ &= L \int dI'_{(t)} \frac{dq'_{(t)}}{dt'} \\ &= L \int dI'_{(t)} \int dI'_{(t)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= LI\frac{I}{2} \\
&= \frac{I}{2} \oint \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\boldsymbol{\ell}' \\
&= \frac{1}{2} \oint \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{I}_{(\mathbf{r}',t)} \, ds'
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad W_{\text{m}(\mathbf{r},t)} := \frac{1}{2} \int \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{r}'_{(t)} \, dq' \quad (23.4)$$

#### Distribución Lineal

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad lineal de carga  $\lambda := \lambda_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$W_{\text{m}(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{2} \oint_c \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{I}_{(\mathbf{r}',t)} \, ds' \quad (23.5)$$

#### Distribución Superficial

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad superficial de carga  $\sigma := \sigma_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$W_{\text{m}(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{2} \iint_S \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{K}_{(\mathbf{r}',t)} \, dS' \quad (23.6)$$

#### Distribución Volumétrica

Si la distribución de cargas  $q'$  puede expresarse como una densidad volumétrica de carga  $\rho := \rho_{(\mathbf{r}')} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces:

$$W_{\text{m}(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{J}_{(\mathbf{r}',t)} \, dV' \quad (23.7)$$

## 23.3 Trabajo Electromagnético

El Trabajo Electromagnético se define como la suma del Trabajo Eléctrico y el Trabajo Magnético, por lo tanto:

$$W_{\text{em}(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} [\rho_{(\mathbf{r}',t)} \phi_{(\mathbf{r}',t)} + \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{J}_{(\mathbf{r}',t)}] \, dV' \quad (23.8)$$

#### Trabajo Electromagnético En Medios Materiales

En medios materiales, el Trabajo Electromagnético debe realizarse únicamente sobre las fuentes de carga eléctrica y corriente eléctrica libres. De esta forma, el Trabajo Electromagnético en un medio material con permitividad eléctrica  $\varepsilon$  y permeabilidad magnética  $\mu$ , es de la forma:

$$W_{\text{em}(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} [\rho_{l(\mathbf{r}',t)} \phi_{(\mathbf{r}',t)} + \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{J}_{l(\mathbf{r}',t)}] \, dV' \quad (23.9)$$

## 23.4 Energía Eléctrica

Debido a que la Ley de Gauss es la misma en Electrostática que en Electrodinámica, la expresión de Energía Electrostática es idéntica a la de Energía Eléctrica, por lo tanto:

$$E_{\text{e}(t)} = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}_{(\mathbf{r}',t)}|^2 \, dV' \quad (23.10)$$

## 23.5 Energía Magnética

Debido a que conocemos el Trabajo Magnético  $W_{\text{m}(\mathbf{r})}$  para una distribución continua de corriente eléctrica volumétrica, suele denominarse Energía Magnética a dicho trabajo realizado cuando la región de integración  $\mathbb{Q}$  es todo el espacio ( $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^3$ ), y puede representarse en función del Campo Magnético  $\mathbf{B} := \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} : \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  de la forma:

$$W_{\text{m}(\mathbf{r},t)} := \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{J}_{(\mathbf{r}',t)} \, dV'$$

Por la Ley de Ampère (despreciando el término de Maxwell), tenemos:

$$= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot [\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)}] \, dV'$$

Por la Regla del Producto Vectorial de la Divergencia, tenemos:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \{ \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot [\mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)}] + \mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot [\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)}] \} \, dV' \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla_{\mathbf{r}'} \cdot [\mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)}] \, dV' + \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot [\nabla_{\mathbf{r}'} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)}] \, dV'
\end{aligned}$$

Por el Teorema de Gauss, tenemos:

$$= \frac{1}{2\mu_0} \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial\mathbb{Q}} [\mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)} \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r}',t)}] \cdot d\mathbf{S}' + \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)} \, dV'$$

Si  $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^3$ , la integral de superficie tiende a cero, entonces:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\mu_0} \cdot 0 + \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathbb{Q}} |\mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)}|^2 \, dV' \\
&= \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)}|^2 \, dV'
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad E_{\text{m}(t)} = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)}|^2 \, dV' \quad (23.11)$$

## 23.6 Energía Electromagnética

La Energía Electromagnética se define como la suma de la Energía Eléctrica y la Energía Magnética, por lo tanto:

$$\begin{aligned} E_{\text{em}(t)} &:= E_{\text{e}(t)} + E_{\text{m}(t)} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{E}_{(\mathbf{r}',t)}|^2 \, \text{dV}' + \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\mathbb{R}^3} |\mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)}|^2 \, \text{dV}' \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \left[ \varepsilon_0 |\mathbf{E}_{(\mathbf{r}',t)}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)}|^2 \right] \text{dV}' \end{aligned}$$

$E_{\text{em}(t)} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \left[ \varepsilon_0 |\mathbf{E}_{(\mathbf{r}',t)}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)}|^2 \right] \text{dV}'$ (23.12)

### Energía Electromagnética En Medios Materiales

En medios materiales, conocemos las expresiones tanto para la Energía Eléctrica en Dieléctricos como para la Energía Magnética en Materiales Magnéticos. De esta forma, la Energía Electromagnética en un medio material con permitividad eléctrica  $\varepsilon$  y permeabilidad magnética  $\mu$ , se define como la suma de ambas energías, por lo tanto:

$$\begin{aligned} E_{\text{em}(t)} &:= E_{\text{e}(t)} + E_{\text{m}(t)} \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{D}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r}',t)} \, \text{dV}' + \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} \mathbf{H}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)} \, \text{dV}' \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} [\mathbf{D}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r}',t)} + \mathbf{H}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)}] \, \text{dV}' \end{aligned}$$

$E_{\text{em}(t)} = \frac{1}{2} \iiint_{\mathbb{R}^3} [\mathbf{D}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r}',t)} + \mathbf{H}_{(\mathbf{r}',t)} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r}',t)}] \, \text{dV}'$ (23.13)

# CAPÍTULO 24: LEYES DE CONSERVACIÓN

En electrodinámica es posible obtener leyes de conservación para los campos eléctrico y magnético, de la siguiente forma:

## 24.1 Conservación Del Momento Lineal

Sea una distribución volumétrica de carga eléctrica  $\rho$  que se mueve con velocidad  $\dot{\mathbf{r}}$  produciendo una corriente eléctrica  $\mathbf{J}$ , inmersa en un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y en un campo magnético  $\mathbf{B}$ , entonces:

Por la segunda ley de Newton para la ley de Lorentz, tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}_{(t)}}{dt} &:= \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \, dV \end{aligned}$$

Por la ley de Gauss y la ley de Ampère-Maxwell, tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \iiint_{\mathbb{Q}} \left[ \varepsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \times \mathbf{B} \right] \, dV \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} \left[ \varepsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) \right] \, dV \end{aligned}$$

Por la regla del producto, tenemos que:

$$= \iiint_{\mathbb{Q}} \left[ \varepsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \varepsilon_0 \left( \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \right] \, dV$$

Por la ley de Faraday-Maxwell, tenemos que:

$$= \iiint_{\mathbb{Q}} \left[ \varepsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \varepsilon_0 \mathbf{E} \times (-\nabla \times \mathbf{E}) \right] \, dV$$

Por la ley de Gauss para el magnetismo ( $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ), tenemos que:

$$= \iiint_{\mathbb{Q}} \left[ \varepsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \varepsilon_0 \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right] \, dV$$

Por la regla del producto interno del gradiente, tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \iiint_{\mathbb{Q}} \left\{ \varepsilon_0 (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \varepsilon_0 \left[ \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E} \right] + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \right] \right\} \, dV - \iiint_{\mathbb{Q}} \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \, dV \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} \left\{ \varepsilon_0 [(\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + (\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}] + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}] - \frac{1}{2} \nabla \left( \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right) \right\} \, dV - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} \varepsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \, dV \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ij(t)} \, dV - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{p}_{\text{em}} \, dV \end{aligned}$$

Por el teorema de Gauss para tensores, tenemos que:

$$= \iint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \boldsymbol{\sigma}_{ij(t)} \cdot d\mathbf{S} - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{p}_{\text{em}} \, dV$$

$$\therefore \boxed{\frac{d\mathbf{p}_{(t)}}{dt} = \iint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \boldsymbol{\sigma}_{ij(t)} \cdot d\mathbf{S} - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{p}_{\text{em}} \, dV} \quad (24.1)$$

### 24.1.1 Momento Lineal Electromagnético

Se denomina *momento lineal electromagnético* a la contribución de momento lineal del campo electromagnético en el vacío para partículas microscópicas, y se define como:

$$\boxed{\mathbf{p}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} := \varepsilon_0 [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}]} \quad (24.2)$$

#### Observación

El momento lineal electromagnético se relaciona con el vector de Poynting de la forma:

$$\boxed{\mathbf{p}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} = \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)}} \quad (24.3)$$

### 24.1.2 Tensor De Esfuerzos De Maxwell

Se denomina *tensor de esfuerzos de Maxwell* o *tensor de Maxwell* al tensor de segundo orden que representa el momento lineal del campo electromagnético para partículas macroscópicas, y se define como:

$$\boxed{\sigma_{ij} := \varepsilon_0 \left( E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right)} \quad (24.4)$$

#### Notación Matricial

$$\sigma_{ij} := \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \left( E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_x^2 - \frac{1}{2} B^2 \right) & \varepsilon_0 E_x E_y + \frac{1}{\mu_0} B_x B_y & \varepsilon_0 E_x E_z + \frac{1}{\mu_0} B_x B_z \\ \varepsilon_0 E_y E_x + \frac{1}{\mu_0} B_y B_x & \varepsilon_0 \left( E_y^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_y^2 - \frac{1}{2} B^2 \right) & \varepsilon_0 E_y E_z + \frac{1}{\mu_0} B_y B_z \\ \varepsilon_0 E_z E_x + \frac{1}{\mu_0} B_z B_x & \varepsilon_0 E_z E_y + \frac{1}{\mu_0} B_z B_y & \varepsilon_0 \left( E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_z^2 - \frac{1}{2} B^2 \right) \end{bmatrix} \quad (24.5)$$

**Observación: Simetría**

El tensor de Maxwell es simétrico, es decir:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (24.6)$$

## 24.2 Conservación Del Momento Angular

Sea una distribución volumétrica de carga eléctrica  $\rho$  que se mueve con velocidad  $\dot{\mathbf{r}}$  produciendo una corriente eléctrica  $\mathbf{J}$ , inmersa en un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y en un campo magnético  $\mathbf{B}$ , y sea ( $o$ ) un punto fijo desde el cual se mide el momento angular del sistema, entonces:

Por la derivada del momento angular para la ley de Lorentz, tenemos que:

$$\frac{d\mathbf{L}_{(t)}^{(o)}}{dt} := \mathbf{r}_{(t)} \times \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)}$$

Por la conservación del momento lineal electromagnético, tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \mathbf{r} \times \left[ \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ij(t)} \, dV - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{p}_{\text{em}} \, dV \right] \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{r} \times [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_{ij(t)}] \, dV - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{r} \times \mathbf{p}_{\text{em}} \, dV \end{aligned}$$

En notación de índices, tenemos que:

$$= \iiint_{\mathbb{Q}} \epsilon_{lki} r_k \partial_j \sigma_{ij} \, dV - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{L}_{\text{em}} \, dV$$

Por la regla del producto, tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \iiint_{\mathbb{Q}} \epsilon_{lki} [\partial_j (r_k \sigma_{ij}) - \sigma_{ij} \partial_j r_k] \, dV - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{L}_{\text{em}} \, dV \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} [\epsilon_{lki} \partial_j (r_k \sigma_{ij}) - \epsilon_{lki} \sigma_{ij} \delta_{jk}] \, dV - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{L}_{\text{em}} \, dV \\ &= \iiint_{\mathbb{Q}} \partial_j (\epsilon_{lki} r_k \sigma_{ij}) \, dV - \iiint_{\mathbb{Q}} \epsilon_{lji} \sigma_{ij} \, dV - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{L}_{\text{em}} \, dV \end{aligned}$$

Como  $\sigma_{ij}$  es simétrico, y  $\epsilon_{lji}$  es antisimétrico, tenemos que:

$$= \iiint_{\mathbb{Q}} \partial_j \tau_{lj(t)} \, dV - \iiint_{\mathbb{Q}} 0 \, dV - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{L}_{\text{em}} \, dV$$

Renombrando  $l = i$ , tenemos que:

$$= \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_{ij(t)} \, dV - 0 - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{L}_{\text{em}} \, dV$$

Por el teorema de Gauss para tensores, tenemos que:

$$= \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \boldsymbol{\tau}_{ij(t)} \cdot d\mathbf{S} - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{L}_{\text{em}} \, dV$$

$$\therefore \frac{d\mathbf{L}_{(t)}^{(o)}}{dt} = \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \boldsymbol{\tau}_{ij(t)} \cdot d\mathbf{S} - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{L}_{\text{em}} \, dV \quad (24.7)$$

### 24.2.1 Momento Angular Electromagnético

Se denomina *momento angular electromagnético* a la contribución de momento angular del campo electromagnético en el vacío para partículas microscópicas, y se define como:

$$\mathbf{L}_{\text{em}(\mathbf{r},t)}^{(o)} := \mathbf{r}_{(t)}^{(o)} \times \mathbf{p}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \quad (24.8)$$

### 24.2.2 Tensor Momento De Fuerza Electromagnético

Se denomina *tensor momento de fuerza electromagnético* al tensor de segundo orden que representa el momento de fuerza del campo electromagnético para partículas macroscópicas, y se define como:

$$\boldsymbol{\tau}_{ij(t)} := \mathbf{r}_{(t)} \times \boldsymbol{\sigma}_{ij(t)} \quad (24.9)$$

**Notación De Índices**

En notación de índices, el tensor momento de fuerza electromagnético es de la forma:

$$\tau_{ij} := \epsilon_{ikl} r_k \sigma_{lj}$$

Por la definición del tensor de Maxwell, tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \epsilon_{ikl} r_k \left[ \epsilon_0 \left( E_l E_j - \frac{1}{2} \delta_{lj} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( B_l B_j - \frac{1}{2} \delta_{lj} B^2 \right) \right] \\ &= \epsilon_0 \left( \epsilon_{ikl} r_k E_l E_j - \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} r_k \delta_{lj} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( \epsilon_{ikl} r_k B_l B_j - \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} r_k \delta_{lj} B^2 \right) \\ &= \epsilon_0 \left( \epsilon_{ikl} r_k E_l E_j - \frac{1}{2} \epsilon_{ikj} r_k E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( \epsilon_{ikl} r_k B_l B_j - \frac{1}{2} \epsilon_{ikj} r_k B^2 \right) \end{aligned}$$

$$\tau_{ij} := \epsilon_{ikl} r_k \sigma_{lj} = \epsilon_0 \left( \epsilon_{ikl} r_k E_l E_j - \frac{1}{2} \epsilon_{ikj} r_k E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( \epsilon_{ikl} r_k B_l B_j - \frac{1}{2} \epsilon_{ikj} r_k B^2 \right) \quad (24.10)$$

## 24.3 Conservación De La Energía Mecánica

Sea una distribución volumétrica de carga eléctrica  $\rho$  que se mueve con velocidad  $\dot{\mathbf{r}}$  produciendo una corriente eléctrica  $\mathbf{J}$ , inmersa en un campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y en un campo magnético  $\mathbf{B}$ , entonces:

Por la definición de trabajo mecánico para la ley de Lorentz, tenemos que:

$$W_{(\mathbf{r},t)} := \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)} \, dt$$

$$\begin{aligned}
\frac{dW_{(\mathbf{r},t)}}{dt} &= \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)} \\
&= \iiint_{\mathbb{Q}} [q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})] \cdot \mathbf{v} \, dV \\
&= \iiint_{\mathbb{Q}} (q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} + q.0) \, dV \quad \forall \quad \mathbf{v}
\end{aligned}$$

Por la definición de densidad de corriente volumétrica, tenemos que:

$$= \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dV$$

Por la ley de Ampère-Maxwell, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{\mathbb{Q}} \left( \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} \, dV \\
&= \iiint_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{E} - \varepsilon_0 \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right) \right] dV
\end{aligned}$$

Por la regla del producto vectorial de la divergencia, tenemos que:

$$= \iiint_{\mathbb{Q}} \left\{ \frac{1}{\mu_0} [\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})] - \varepsilon_0 \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right) \right\} dV$$

Por la ley de Faraday-Maxwell, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{\mathbb{Q}} \left\{ \frac{1}{\mu_0} \left[ \mathbf{B} \cdot \left( -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \right] - \varepsilon_0 \left( \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} \right) \right\} dV \\
&= - \iiint_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \varepsilon_0 \left( \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left( \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \right] dV
\end{aligned}$$

Como  $\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = 2 \left( \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)$ , tenemos que:

$$= -\frac{1}{\mu_0} \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \, dV - \iiint_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right] dV$$

Por el teorema de Gauss, tenemos que:

$$= -\frac{1}{\mu_0} \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{1}{2} \left( \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right) dV$$

Por la definición de energía electromagnética, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&= - \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{S} - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} u_{\text{em}} \, dV \\
&= - \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} u_{\text{em}} \, dV
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\frac{dW_{(\mathbf{r},t)}}{dt} = - \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} u_{\text{em}} \, dV} \quad (24.11)$$

### 24.3.1 Densidad De Energía Electromagnética

Se denomina *densidad de energía electromagnética* a la energía del campo electromagnético por unidad de volumen, y se define como:

$$\boxed{u_{\text{em}(\mathbf{r},t)} := \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_0 |\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}|^2 + \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}|^2 \right]} \quad (24.12)$$

#### 24.3.1.1 Densidad De Energía Electromagnética En Medios Materiales

Para partículas macroscópicas, la densidad de energía electromagnética en medios materiales es de la forma:

$$\boxed{u_{\text{em}(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)} + \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{H}_{(\mathbf{r},t)}]} \quad (24.13)$$

### 24.3.2 Vector De Poynting

Se denomina *vector de Poynting* al vector que representa el flujo de energía del campo electromagnético, y es de la forma:

$$\boxed{\mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} := \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}} \quad (24.14)$$

#### 24.3.2.1 Vector De Poynting En Medios Materiales

Para partículas macroscópicas, el vector de Poynting en medios materiales es de la forma:

$$\boxed{\mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} = \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \times \mathbf{H}_{(\mathbf{r},t)}} \quad (24.15)$$

#### Vector De Poynting Complejo

En números complejos, el vector de Poynting para medios materiales es de la forma:

$$\boxed{\mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} := \frac{1}{2} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \times \mathbf{H}_{(\mathbf{r},t)}^*} \quad (24.16)$$

### 24.3.3 Teorema De Poynting

Se denomina *teorema de Poynting* a la ley de conservación de la energía del campo electromagnético, y es de la forma:

Por la conservación de la energía mecánica electromagnética, tenemos que:

$$\iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dV = - \oint_{\mathbf{s}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{S} - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} u_{\text{em}} \, dV$$

Por el teorema de Gauss, tenemos que:



$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla \cdot \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} \, \mathrm{d}V &= - \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, \mathrm{d}V - \iiint_{\mathbb{Q}} \frac{\partial u_{\mathrm{em}}}{\partial t} \, \mathrm{d}V \\ \nabla \cdot \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} &= -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \frac{\partial u_{\mathrm{em}}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{\nabla \cdot \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} = -\mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} - \frac{\partial u_{\mathrm{em}(\mathbf{r},t)}}{\partial t}}$$

(24.17)

**Teorema De Poynting: Forma Integral**

$$\oint\!\!\!\oint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = - \iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \, \mathrm{d}V - \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\mathbb{Q}} u_{\mathrm{em}(\mathbf{r},t)} \, \mathrm{d}V$$

(24.18)

**Teorema De Poynting: Forma Diferencial**

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} = -\mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} - \frac{\partial u_{\mathrm{em}(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$$

(24.19)

# CAPÍTULO 25: ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

## 25.1 Espectro Electromagnético

### 25.1.1 Clasificación

Clasificación	Símbolo	Longitud De Onda [m]	Frecuencia [Hz]	Energía [J]
Rayos Cósmicos	No	$\lambda = 10^{-15}$	$f = 10^{23}$	$E = 6,626 \times 10^{-11}$
Rayos Cósmicos	No	$\lambda = 10^{-14}$	$f = 10^{22}$	$E = 6,626 \times 10^{-12}$
Rayos Cósmicos	No	$\lambda = 10^{-13}$	$f = 10^{21}$	$E = 6,626 \times 10^{-13}$
Gamma	$\gamma$	$\lambda = 10^{-12}$	$f = 10^{20}$	$E = 6,626 \times 10^{-14}$
Gamma	$\gamma$	$\lambda = 10^{-11}$	$f = 10^{19}$	$E = 6,626 \times 10^{-15}$
X	$HX$	$\lambda = 10^{-10}$	$f = 10^{18}$	$E = 6,626 \times 10^{-16}$
X	$SX$	$\lambda = 10^{-9}$	$f = 10^{17}$	$E = 6,626 \times 10^{-17}$
Ultravioleta	$EUV$	$\lambda = 10^{-8}$	$f = 10^{16}$	$E = 6,626 \times 10^{-18}$
Ultravioleta	$NUV$	$\lambda = 10^{-7}$	$f = 10^{15}$	$E = 6,626 \times 10^{-19}$
Luz Visible	$V$	$\lambda = 10^{-6}$	$f = 10^{14}$	$E = 6,626 \times 10^{-20}$
Infrarrojo	$NIR$	$\lambda = 10^{-5}$	$f = 10^{13}$	$E = 6,626 \times 10^{-21}$
Infrarrojo	$MIR$	$\lambda = 10^{-4}$	$f = 10^{12}$	$E = 6,626 \times 10^{-22}$
Infrarrojo	$FIR$	$\lambda = 10^{-3}$	$f = 10^{11}$	$E = 6,626 \times 10^{-23}$
Microondas	$EHF$	$\lambda = 10^{-2}$	$f = 10^{10}$	$E = 6,626 \times 10^{-24}$
Microondas	$SHF$	$\lambda = 10^{-1}$	$f = 10^9$	$E = 6,626 \times 10^{-25}$
Radio	$UHF$	$\lambda = 10^0$	$f = 10^8$	$E = 6,626 \times 10^{-26}$
Radio	$VHF$	$\lambda = 10^1$	$f = 10^7$	$E = 6,626 \times 10^{-27}$
Radio	$HF$	$\lambda = 10^2$	$f = 10^6$	$E = 6,626 \times 10^{-28}$
Radio	$MF$	$\lambda = 10^3$	$f = 10^5$	$E = 6,626 \times 10^{-29}$
Radio	$LF$	$\lambda = 10^4$	$f = 10^4$	$E = 6,626 \times 10^{-30}$
Onda Larga	$VLf$	$\lambda = 10^5$	$f = 10^3$	$E = 6,626 \times 10^{-31}$
Onda Larga	$ULF$	$\lambda = 10^6$	$f = 10^2$	$E = 6,626 \times 10^{-32}$
Onda Larga	$SLF$	$\lambda = 10^7$	$f = 10^1$	$E = 6,626 \times 10^{-33}$
Onda Larga	$ELF$	$\lambda = 10^8$	$f = 10^0$	$E = 6,626 \times 10^{-34}$

### 25.1.2 Espectro Visible

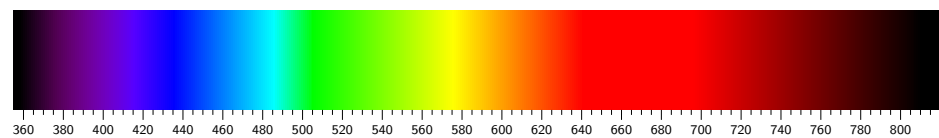


Figura 25.1: Espectro Visible.

## 25.2 Definición

A partir de las ecuaciones de Maxwell se sigue que los campos eléctrico y magnético en el vacío satisfacen *ecuaciones de onda vectoriales*, de la siguiente forma:

### 25.2.1 Ondas Electromagnéticas En Vacío

Por las ecuaciones de Maxwell en vacío,  $\rho_{(\mathbf{r},t)} = 0$  y  $\mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} = \mathbf{0}$ , entonces:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ \nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}] &= \nabla \times \left[ -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \\ \text{Por la definición del Laplaciano Vectorial, tenemos:} \\ \nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}] - \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= -\frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \\ \nabla(0) - \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \\ 0 - \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ \nabla \times [\nabla \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] &= \nabla \times \left[ \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \\ \text{Por la definición del Laplaciano Vectorial, tenemos:} \\ \nabla[\nabla \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] - \nabla^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}] \\ \nabla(0) - \nabla^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &= \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \\ 0 - \nabla^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &= -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &= \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2}\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} \end{cases} \tag{25.1}$$

#### 25.2.1.1 Velocidad De La Luz

De las ecuaciones de onda para el campo eléctrico y el campo magnético, se sigue que la velocidad de propagación (velocidad de fase) de las ondas electromagnéticas en el vacío es la *velocidad de la luz*, que se define como:

$$\boxed{v_\varphi := c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}} \quad (25.2)$$

### 25.2.2 Ondas Electromagnéticas En Medios Materiales (LIH)

Por las ecuaciones de Maxwell para medios materiales en ausencia de fuentes libres, con  $\rho_{l(\mathbf{r},t)} = 0$  y  $\mathbf{J}_{l(\mathbf{r},t)} = \mathbf{0}$ , si el medio es lineal, isotrópico y homogéneo (LIH), tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{H}_{(\mathbf{r},t)} &= \frac{\partial \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ \nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}] &= \nabla \times \left[ -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] & \frac{1}{\mu} \nabla \times [\nabla \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] &= \nabla \times \left[ \frac{\partial \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \\ \text{Por la definición del Laplaciano Vectorial, tenemos:} & & \text{Por la definición del Laplaciano Vectorial, tenemos:} & \\ \nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}] - \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= -\frac{\partial}{\partial t} \{ \nabla \times [\mu \mathbf{H}_{(\mathbf{r},t)}] \} & \nabla[\nabla \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] - \nabla^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &= \mu \frac{\partial}{\partial t} \{ \nabla \times [\varepsilon \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}] \} \\ \nabla(0) - \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \mu \frac{\partial \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] & \nabla(0) - \nabla^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &= \mu \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\varepsilon \frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \\ 0 - \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= -\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\varepsilon \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}] & 0 - \nabla^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &= -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} & \nabla^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &= \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} \\ &= \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} & &= \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} \end{cases} \quad (25.3)$$

#### 25.2.2.1 Velocidad De Fase

De las ecuaciones de onda para el campo eléctrico y el campo magnético, se sigue que la velocidad de propagación (velocidad de fase) de las ondas electromagnéticas en medios materiales es de la forma:

$$\boxed{v_\varphi := \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}} \quad (25.4)$$

#### Observación: Índice De Refracción

Debido a que la expresión para la velocidad de la luz y la velocidad de fase en un medio material LIH son conocidas, puede obtenerse el índice de refracción de la luz en el medio, de la forma:

Por la definición de índice de refracción, tenemos que:

$$\begin{aligned} n &:= \frac{c}{v_\varphi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}} \\ &= \frac{\sqrt{\mu \varepsilon}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{\mu_0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} \end{aligned}$$

Por la definición de permeabilidad magnética y permitividad eléctrica relativas, tenemos que:

$$= \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$$

$$\therefore \boxed{n := \frac{c}{v_\varphi} = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \quad (25.5)$$

### 25.2.3 Ondas Electromagnéticas En Conductores Eléctricos

Por las ecuaciones de Maxwell para medios materiales cuando la distribución volumétrica de carga eléctrica libre es nula ( $\rho_{l(\mathbf{r},t)} = 0$ ), si se cuenta con un conductor eléctrico de conductividad eléctrica  $\sigma$ , con corrientes libres  $\mathbf{J}_{l(\mathbf{r},t)} = \sigma \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}$  (de acuerdo con la ley de Ohm), si el medio es lineal, isotrópico y homogéneo (LIH), tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{H}_{(\mathbf{r},t)} &= \mathbf{J}_{l(\mathbf{r},t)} + \frac{\partial \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \\ \nabla \times [\nabla \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}] &= \nabla \times \left[ -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] & \frac{1}{\mu} \nabla \times [\nabla \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] &= \nabla \times \left[ \sigma \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \\ \text{Por la definición del Laplaciano Vectorial, tenemos:} & & \text{Por la definición del Laplaciano Vectorial, tenemos:} & \\ \nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}] - \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= -\frac{\partial}{\partial t} \{ \nabla \times [\mu \mathbf{H}_{(\mathbf{r},t)}] \} & \nabla[\nabla \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] - \nabla^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &= \mu \sigma \nabla \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}] \\ \nabla(0) - \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left[ \mu \mathbf{J}_{l(\mathbf{r},t)} + \mu \frac{\partial \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] & \nabla(0) - \nabla^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &= -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[ -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} \right] \\ 0 - \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} & 0 - \nabla^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &= -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &= \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} & \nabla^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &= \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} \\ &= \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} + \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} & &= \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} + \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} + \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} \\ \nabla^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} + \frac{1}{v_\varphi^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2} \end{cases} \quad (25.6)$$

### 25.2.3.1 Velocidad De Fase

Debido a que las ecuaciones de Maxwell para conductores eléctricos coinciden con las de medios materiales LIH pero con un término extra de difusión, su velocidad de propagación (velocidad de fase) es la misma:

$$v_{\varphi} := \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad (25.7)$$

### Observación: Índice De Refracción

El índice de refracción de las ondas en conductores es el mismo:

$$n := \frac{c}{v_{\varphi}} = \sqrt{\mu_{\text{r}}\varepsilon_{\text{r}}} \quad (25.8)$$

## 25.3 Ondas Electromagnéticas Planas

La solución de las ecuaciones de onda electromagnéticas en ausencia de fuentes (ya sea en vacío o en medios materiales), son *ondas planas*.

### 25.3.1 Campo Electromagnético

Las expresiones de ondas planas para el campo eléctrico y el campo magnético son de la forma:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = \text{Re}\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\} \\ \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = \text{Re}\{\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\} \end{cases} \quad \forall \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0 \in \mathbb{C} \quad (25.9)$$

### Observación

Los frentes de onda de una onda plana son constantes, es decir:

$$\varphi_{(\mathbf{r},t)} := \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = C \quad (25.10)$$

### 25.3.2 Espacio De Fourier

En el espacio de Fourier, las ecuaciones de ondas para el campo electromagnético son de la forma:

Por la ecuación de ondas del campo eléctrico, tenemos que:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2}$$

Antitransformando Fourier al campo eléctrico, tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} d\omega \right] &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} d\omega \right] \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} d\omega &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c^2} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{-i\omega t}) d\omega \\ \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-i\omega)^2}{c^2} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} d\omega \\ \Leftrightarrow \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} &= -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} \\ \left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} = 0 \\ \left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{B}_{(\mathbf{r},\omega)} = 0 \end{cases} \quad (25.11)$$

### Medios Materiales LIH

En medios materiales LIH, las ecuaciones de onda para el campo electromagnético en el espacio de Fourier son de la forma:

$$\begin{cases} \left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{v_{\varphi}^2} \right) \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} = 0 \\ \left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{v_{\varphi}^2} \right) \mathbf{B}_{(\mathbf{r},\omega)} = 0 \end{cases} \quad (25.12)$$

#### 25.3.2.1 Conductores Eléctricos

En conductores eléctricos, las ecuaciones de onda para el campo electromagnético en el espacio de Fourier son de la forma:

### Campo Eléctrico

Para hallar la ecuación de ondas del campo eléctrico en el espacio de Fourier, procedemos análogamente como con la ecuación de ondas del campo eléctrico en vacío, de la forma:

Por la ecuación de ondas del campo eléctrico, tenemos que:

$$\nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t^2}$$

Antitransformando Fourier al campo eléctrico, tenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} d\omega \right] &= \mu\sigma \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} d\omega \right] + \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} d\omega \right] \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} d\omega &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu\sigma \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} \frac{\partial}{\partial t} (e^{-i\omega t}) d\omega + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu\varepsilon \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (e^{-i\omega t}) d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} (-i\mu\sigma\omega) \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} (-i\omega)^2 \mu\varepsilon \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} d\omega \\
\int_{-\infty}^{\infty} \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} [-\mu\omega(\omega\varepsilon + i\sigma)] \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} e^{-i\omega t} d\omega \\
&\Leftrightarrow \nabla^2 \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} = -\mu\omega(\omega\varepsilon + i\sigma) \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} \\
[\nabla^2 + \mu\omega(\omega\varepsilon + i\sigma)] \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} &= 0
\end{aligned}$$

Como el cálculo para el campo  $\mathbf{B}$  es idéntico, tenemos que:

$$[\nabla^2 + \mu\omega(\omega\varepsilon + i\sigma)] \mathbf{B}_{(\mathbf{r},\omega)} = 0$$

$$\therefore \boxed{\begin{cases} [\nabla^2 + \mu\omega(\omega\varepsilon + i\sigma)] \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} = 0 \\ [\nabla^2 + \mu\omega(\omega\varepsilon + i\sigma)] \mathbf{B}_{(\mathbf{r},\omega)} = 0 \end{cases}} \quad (25.13)$$

### 25.3.3 Relación De Dispersión

Sean  $\mathbf{E}_0$  y  $\mathbf{B}_0$  dos números complejos ( $\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0 \in \mathbb{C}$ ) y sea  $\mathbf{k} := |\mathbf{k}| \hat{\mathbf{k}} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  el vector de onda, entonces:

Por la ecuación de ondas en el espacio de Fourier, tenemos que:

$$\left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} = 0$$

Proponiendo una solución de onda plana  $\mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) (\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) &= 0 \\
\mathbf{E}_0 \nabla^2 (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) + \frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} &= 0 \\
(i|\mathbf{k}|)^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \frac{\omega^2}{c^2} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} &= 0 \\
-|\mathbf{k}|^2 + \frac{\omega^2}{c^2} &= 0 \\
|\mathbf{k}| &= \frac{\omega}{c}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{k} := |\mathbf{k}| \hat{\mathbf{k}} = \frac{\omega}{c} \hat{\mathbf{k}}} \quad (25.14)$$

#### 25.3.3.1 Medios Materiales LIH

En medios materiales LIH, el vector de onda es de la forma:

$$\boxed{\mathbf{k} := |\mathbf{k}| \hat{\mathbf{k}} = \frac{\omega}{v_\varphi} \hat{\mathbf{k}}} \quad (25.15)$$

### Índice De Refracción

En términos del índice de refracción, la relación de dispersión de las ondas electromagnéticas puede escribirse de la forma:

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{v_\varphi}$$

Por la definición de índice de refracción, tenemos:

$$= \frac{n\omega}{c}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{k} := |\mathbf{k}| \hat{\mathbf{k}} = \frac{n\omega}{c} \hat{\mathbf{k}}} \quad (25.16)$$

#### 25.3.3.2 Conductores Eléctricos

En un conductor eléctrico, el vector de onda es de la forma:

Por la ecuación de ondas en el espacio de Fourier, tenemos que:

$$[\nabla^2 + \mu\omega(\omega\varepsilon + i\sigma)] \mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} = 0$$

Proponiendo una solución de onda plana  $\mathbf{E}_{(\mathbf{r},\omega)} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}
[\nabla^2 + \mu\omega(\omega\varepsilon + i\sigma)] (\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) &= 0 \\
\mathbf{E}_0 \nabla^2 (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) + \mu\omega(\omega\varepsilon + i\sigma) \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} &= 0 \\
(i|\mathbf{k}|)^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + \mu\omega(\omega\varepsilon + i\sigma) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} &= 0 \\
-|\mathbf{k}|^2 + \mu\omega(\omega\varepsilon + i\sigma) &= 0
\end{aligned}$$

$$|\mathbf{k}| = \pm \sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 \left( 1 + i \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)} \Leftrightarrow \mathbf{k} \in \mathbb{C}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{k} := |\mathbf{k}| \hat{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 \left( 1 + i \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)} \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}_{\text{re}} + i\mathbf{k}_{\text{im}}} \quad (25.17)$$

#### 25.3.3.3 Relación Del Vector De Onda Con El Campo Electromagnético

Por las ecuaciones de Maxwell en vacío, tenemos que:

$\nabla \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = 0$	$\nabla \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t}$
$\nabla \cdot [\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] = 0$	$\nabla \cdot [\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] = 0$	$\nabla \times [\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] = -\frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}]$
$i\mathbf{k} \cdot [\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] = 0$	$i\mathbf{k} \cdot [\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] = 0$	$i\mathbf{k} \times [\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] = -(-i\omega) [\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}]$
$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{E}$	$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{k} \perp \mathbf{B}$	$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = \omega \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}$

$$\therefore \boxed{\begin{cases} \mathbf{k} \perp \mathbf{E} \\ \mathbf{k} \perp \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = \omega \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \end{cases}} \quad (25.18)$$

### Regla De Terna Derecha

Las tres condiciones halladas pueden resumirse en una única condición de *terna derecha*, de la forma:

$$\mathbf{k} = \omega \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \quad (25.19)$$

### Regla De Terna Derecha En Medios Materiales LIH

En medios materiales LIH la regla de terna derecha entre los campos eléctrico y magnético y el vector de onda, es de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \omega \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \\ \frac{n\omega}{c} \hat{\mathbf{k}} &= \omega \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \\ \hat{\mathbf{k}} &= \frac{c}{n} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \end{aligned}$$

$$\therefore \hat{\mathbf{k}} = \frac{c}{n} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \quad (25.20)$$

### Fase

De la relación de terna derecha, se sigue que el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y el campo magnético  $\mathbf{B}$  son vectores perpendiculares entre sí, que viven en un plano cuyo vector normal es el vector de onda  $\mathbf{k}$ . Por esta razón, el campo eléctrico y el campo magnético están en *fase*.

## 25.3.4 Vector De Poynting

Mediante el vector de Poynting, es posible hallar el flujo de energía de una onda plana con dirección de propagación  $\hat{\mathbf{k}}$ , debida al campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$ , de la forma:

$$\mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} := \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}$$

Por la regla de terna derecha del campo electromagnético, tenemos que:

$$= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \times \left[ \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \right]$$

Por la regla del triple producto vectorial, tenemos que:

$$= \frac{1}{\mu_0 \omega} (\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}) \mathbf{k} - (\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}$$

Como  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mu_0 \omega} |\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}|^2 \mathbf{k} - (0) \cdot \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \\ &= \frac{1}{\mu_0 \omega} |\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}|^2 \frac{n\omega}{c} \hat{\mathbf{k}} - 0 \\ &= \frac{n}{\mu_0 c} |\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}|^2 \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{\mu_0 \omega} |\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}|^2 \mathbf{k} = \frac{n}{\mu_0 c} |\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}|^2 \hat{\mathbf{k}} \quad (25.21)$$

#### 25.3.4.1 Parte Real

En términos de la parte real del campo electromagnético, el vector de Poynting es de la forma:

Por la definición del vector de Poynting, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} &:= \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})} e^{-i\omega t}\} \times \operatorname{Re}\{\mathbf{B}_{0(\mathbf{r})} e^{-i\omega t}\} \end{aligned}$$

Como  $\operatorname{Re}\{z\} = \frac{z + z^*}{2}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{2} [\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})} e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}^* e^{i\omega t}] \times \frac{1}{2} [\mathbf{B}_{0(\mathbf{r})} e^{-i\omega t} + \mathbf{B}_{0(\mathbf{r})}^* e^{i\omega t}] \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left\{ \frac{1}{4} [\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})} \times \mathbf{B}_{0(\mathbf{r})} e^{-2i\omega t} + \mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}^* \times \mathbf{B}_{0(\mathbf{r})}^* e^{2i\omega t}] + \frac{1}{4} [\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})} \times \mathbf{B}_{0(\mathbf{r})}^* + \mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}^* \times \mathbf{B}_{0(\mathbf{r})}] \right\} \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})} \times \mathbf{B}_{0(\mathbf{r})} e^{-2i\omega t}\} + \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})} \times \mathbf{B}_{0(\mathbf{r})}^*\} \right] \end{aligned}$$

Como  $\omega \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}$ , tenemos que:

$$= \frac{1}{2\mu_0} \left\{ \operatorname{Re}\left\{ \mathbf{E}_{0(\mathbf{r})} \times \left[ \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{0(\mathbf{r})} \right] e^{-2i\omega t} \right\} + \operatorname{Re}\left\{ \mathbf{E}_{0(\mathbf{r})} \times \left[ \frac{1}{\omega} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}^* \right] \right\} \right\}$$

Por la regla del triple producto vectorial, tenemos que:

$$= \frac{1}{2\mu_0 \omega} \left\{ \operatorname{Re}\{[(\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}) \mathbf{k} + (\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}] e^{-2i\omega t}\} + \operatorname{Re}\{(\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}) \mathbf{k} + (\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}\} \right\}$$

Como  $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\mu_0 \omega} \left\{ \operatorname{Re}\left\{ [|\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \mathbf{k} + 0 \cdot \mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}] e^{-2i\omega t} \right\} + \operatorname{Re}\left\{ |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \mathbf{k} + 0 \cdot \mathbf{E}_{0(\mathbf{r})} \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{2\mu_0 \omega} \left\{ \operatorname{Re}\left\{ [|\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \mathbf{k} + 0] e^{-2i\omega t} \right\} + \operatorname{Re}\left\{ |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \mathbf{k} + 0 \right\} \right\} \\ &= \frac{1}{2\mu_0 \omega} \left[ \operatorname{Re}\left\{ |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \mathbf{k} e^{-2i\omega t} \right\} + \operatorname{Re}\left\{ |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \mathbf{k} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{2\mu_0 \omega} \left[ \operatorname{Re}\left\{ |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \mathbf{k} e^{-2i\omega t} \right\} + \operatorname{Re}\left\{ |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \mathbf{k} \right\} \right] \quad (25.22)$$

### Valor Medio

El valor medio del vector de Poynting será de la forma:

$$\langle \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \frac{1}{2\mu_0\omega} \left[ \operatorname{Re} \left\{ |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \mathbf{k} e^{-2i\omega t} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \mathbf{k} \right\} \right] \right\} dt \\
&= \frac{1}{2\mu_0\omega T} \operatorname{Re} \left\{ |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \mathbf{k} \int_0^T e^{-2i\omega t} dt \right\} + \frac{1}{2\mu_0\omega T} \operatorname{Re} \left\{ |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \mathbf{k} \right\} \int_0^T dt
\end{aligned}$$

Si  $\omega$  es una frecuencia muy alta, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\mu_0\omega T} \operatorname{Re} \left\{ |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \mathbf{k} \cdot 0 \right\} + \frac{1}{2\mu_0\omega T} \operatorname{Re} \left\{ |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \mathbf{k} \right\} (t)|_0^T \\
&= \frac{1}{2\mu_0\omega T} \operatorname{Re} \{0\} + \frac{1}{2\mu_0\omega T} \operatorname{Re} \left\{ |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \mathbf{k} \right\} (T - 0)
\end{aligned}$$

Como  $\mathbf{k} = \frac{n\omega}{c} \hat{\mathbf{k}}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}
&= 0 + \frac{1}{2\mu_0\omega T} \operatorname{Re} \left\{ |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \frac{n\omega}{c} \hat{\mathbf{k}} \right\} T \\
&= \frac{n}{2\mu_0 c} |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\langle \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} \rangle = \frac{n}{2\mu_0 c} |\mathbf{E}_{0(\mathbf{r})}|^2 \hat{\mathbf{k}}} \quad (25.23)$$

### 25.3.5 Polarización

Se denomina *polarización* a la propiedad de las ondas transversales de tener una orientación geométrica en sus oscilaciones bien definida. Las ondas electromagnéticas admiten polarización debido a que son ondas que se producen de manera transversal (por los campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$ ) a la dirección de propagación (el vector de onda  $\mathbf{k}$ ).

#### 25.3.5.1 Deducción

- Sea un campo eléctrico  $\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}$  que se propaga con vector de onda  $\mathbf{k}$ , definido por la terna derecha  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{k}})$ , entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &:= \mathbf{E}_{1(\mathbf{r},t)} \hat{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{E}_{2(\mathbf{r},t)} \hat{\mathbf{e}}_2 \\
&= \operatorname{Re} \left\{ E_0^{(1)} e^{i\varphi_1} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right\} \hat{\mathbf{e}}_1 + \operatorname{Re} \left\{ E_0^{(2)} e^{i\varphi_2} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \right\} \hat{\mathbf{e}}_2 \\
&= \operatorname{Re} \left\{ E_0^{(1)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_1)} \right\} \hat{\mathbf{e}}_1 + \operatorname{Re} \left\{ E_0^{(2)} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_1)} \right\} \hat{\mathbf{e}}_2
\end{aligned}$$

Definiendo a  $\begin{cases} t_0 := \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \varphi_1}{\omega} \\ \varphi := \varphi_2 - \varphi_1 \end{cases}$ , tenemos que:

$$= \operatorname{Re} \left\{ E_0^{(1)} e^{i\omega(t_0 - t)} \right\} \hat{\mathbf{e}}_1 + \operatorname{Re} \left\{ E_0^{(2)} e^{i[\omega(t_0 - t) + \varphi]} \right\} \hat{\mathbf{e}}_2$$

Por la fórmula de Euler, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \left\{ E_0^{(1)} \{ \cos[\omega(t_0 - t)] + i \sin[\omega(t_0 - t)] \} \right\} \hat{\mathbf{e}}_1 + \operatorname{Re} \left\{ E_0^{(2)} \{ \cos[\omega(t_0 - t) + \varphi] + i \sin[\omega(t_0 - t) + \varphi] \} \right\} \hat{\mathbf{e}}_2 \\
&= E_0^{(1)} \cos[\omega(t_0 - t)] \hat{\mathbf{e}}_1 + E_0^{(2)} \cos[\omega(t_0 - t) + \varphi] \hat{\mathbf{e}}_2
\end{aligned}$$

Como el coseno es par, tenemos:

$$= E_0^{(1)} \cos[\omega(t - t_0)] \hat{\mathbf{e}}_1 + E_0^{(2)} \cos[\omega(t - t_0) - \varphi] \hat{\mathbf{e}}_2$$

Definiendo el tiempo  $\tau := t - t_0$ , tenemos:

$$= E_0^{(1)} \cos(\omega\tau) \hat{\mathbf{e}}_1 + E_0^{(2)} \cos(\omega\tau - \varphi) \hat{\mathbf{e}}_2$$

Por las propiedades de suma y resta de ángulos, tenemos:

$$= E_0^{(1)} \cos(\omega\tau) \hat{\mathbf{e}}_1 + E_0^{(2)} [\cos(\omega\tau) \cos(\varphi) + \sin(\omega\tau) \sin(\varphi)] \hat{\mathbf{e}}_2$$

Es decir, obtuvimos que:

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{E}_{1(\mathbf{r},t)}}{E_0^{(1)}} = \cos(\omega\tau) \\ \frac{\mathbf{E}_{2(\mathbf{r},t)}}{E_0^{(2)}} = \cos(\omega\tau) \cos(\varphi) + \sin(\omega\tau) \sin(\varphi) \end{cases}$$

Definiendo  $\begin{cases} E_1 := \mathbf{E}_{1(\mathbf{r},t)} \\ E_2 := \mathbf{E}_{2(\mathbf{r},t)} \end{cases}$ , tenemos que:

$$\begin{cases} \frac{E_1}{E_0^{(1)}} = \cos(\omega\tau) \\ \frac{E_2}{E_0^{(2)}} = \cos(\omega\tau) \cos(\varphi) + \sin(\omega\tau) \sin(\varphi) \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{\begin{cases} \frac{E_1}{E_0^{(1)}} = \cos(\omega\tau) \\ \frac{E_2}{E_0^{(2)}} = \cos(\omega\tau) \cos(\varphi) + \sin(\omega\tau) \sin(\varphi) \end{cases}} \quad (25.24)$$

- Restando la segunda ecuación, la primera ecuación multiplicada por  $\cos(\varphi)$ , tenemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{E_2}{E_0^{(2)}} - \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \cos(\varphi) &= \cos(\omega\tau) \cos(\varphi) + \sin(\omega\tau) \sin(\varphi) - \cos(\omega\tau) \cos(\varphi) \\
\frac{E_2}{E_0^{(2)}} - \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \cos(\varphi) &= \sin(\omega\tau) \sin(\varphi) \\
\left[ \frac{E_2}{E_0^{(2)}} - \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \cos(\varphi) \right]^2 &= \sin^2(\omega\tau) \sin^2(\varphi) \\
\left[ \frac{E_2}{E_0^{(2)}} \right]^2 + \left[ \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \right]^2 \cos^2(\varphi) - 2 \frac{E_1 E_2}{E_0^{(1)} E_0^{(2)}} \cos(\varphi) &= \left( 1 - \left[ \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \right]^2 \right) \sin^2(\varphi) \\
\left[ \frac{E_2}{E_0^{(2)}} \right]^2 + \left[ \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \right]^2 [\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)] - 2 \frac{E_1 E_2}{E_0^{(1)} E_0^{(2)}} \cos(\varphi) &= \sin^2(\varphi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{E_2}{E_0^{(2)}} \right]^2 + \left[ \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \right]^2 - 2 \frac{E_1 E_2}{E_0^{(1)} E_0^{(2)}} \cos(\varphi) &= \sin^2(\varphi) \\
\left[ \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \right]^2 + \left[ \frac{E_2}{E_0^{(2)}} \right]^2 - 2 \frac{E_1 E_2}{E_0^{(1)} E_0^{(2)}} \cos(\varphi) &= \sin^2(\varphi) \\
\therefore \left[ \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \right]^2 + \left[ \frac{E_2}{E_0^{(2)}} \right]^2 - 2 \frac{E_1 E_2}{E_0^{(1)} E_0^{(2)}} \cos(\varphi) &= \sin^2(\varphi)
\end{aligned} \tag{25.25}$$

- Es decir, obtuvimos la ecuación de una elipse para las componentes  $E_1$  y  $E_2$ . Ésta elipse tendrá distintos casos particulares dependiendo del valor de la fase  $\varphi$  y de las amplitudes  $E_0^{(1)}$  y  $E_0^{(2)}$ .

### 25.3.5.2 Polarización Lineal

Si  $\varphi = n\pi \ \forall \ n \in \mathbb{Z}$  se obtiene la denominada *polarización lineal*, de la forma:

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \right]^2 + \left[ \frac{E_2}{E_0^{(2)}} \right]^2 - 2 \frac{E_1 E_2}{E_0^{(1)} E_0^{(2)}} \cos(n\pi) &= \sin^2(n\pi) \\
\left[ \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \right]^2 + \left[ \frac{E_2}{E_0^{(2)}} \right]^2 - 2 \frac{E_1 E_2}{E_0^{(1)} E_0^{(2)}} \cdot (\mp 1) &= 0 \\
\left[ \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \pm \frac{E_2}{E_0^{(2)}} \right]^2 &= 0 \\
\pm \left[ \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \pm \frac{E_2}{E_0^{(2)}} \right] &= 0 \\
\pm \frac{E_1}{E_0^{(1)}} + \frac{E_2}{E_0^{(2)}} &= 0 \\
\frac{E_1}{E_0^{(1)}} &= \pm \frac{E_2}{E_0^{(2)}}
\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{E_1}{E_0^{(1)}} = \pm \frac{E_2}{E_0^{(2)}} \tag{25.26}$$

### Campo Eléctrico

Cuando la polarización es lineal, el campo eléctrico es de la forma:

$$\mathbf{E}_{\text{lin}(\mathbf{r},t)} = \left[ E_0^{(1)} \hat{\mathbf{e}}_1 + E_0^{(2)} \hat{\mathbf{e}}_2 \right] \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \tag{25.27}$$

### 25.3.5.3 Polarización Circular

Si  $\varphi = n\pi + \frac{\pi}{2} \ \forall \ n \in \mathbb{Z}$  y se cumple que  $E_0^{(1)} = E_0^{(2)} \equiv E_0$ , se obtiene la denominada *polarización circular*, de la forma:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{E_1}{E_0} \right)^2 + \left( \frac{E_2}{E_0} \right)^2 - 2 \frac{E_1 E_2}{E_0 E_0} \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin^2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\
\left( \frac{E_1}{E_0} \right)^2 + \left( \frac{E_2}{E_0} \right)^2 - 2 \frac{E_1 E_2}{E_0^2} \cdot 0 &= (\pm 1)^2 \\
\left( \frac{E_1}{E_0} \right)^2 + \left( \frac{E_2}{E_0} \right)^2 - 0 &= 1 \\
E_1^2 + E_2^2 &= E_0^2
\end{aligned}$$

$$\therefore E_1^2 + E_2^2 = E_0^2 \tag{25.28}$$

### Campo Eléctrico

Cuando la polarización es circular, el campo eléctrico es de la forma:

$$\mathbf{E}_{\text{circ}(\mathbf{r},t)} = E_0 [\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \hat{\mathbf{e}}_2] \tag{25.29}$$

### 25.3.5.4 Polarización Elíptica

Si  $\varphi = n\pi + \frac{\pi}{2} \ \forall \ n \in \mathbb{Z}$ , o no se cumple el caso de polarización lineal o circular, se obtiene la denominada *polarización elíptica*, de la forma:

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \right]^2 + \left[ \frac{E_2}{E_0^{(2)}} \right]^2 - 2 \frac{E_1 E_2}{E_0^{(1)} E_0^{(2)}} \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin^2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \\
\left[ \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \right]^2 + \left[ \frac{E_2}{E_0^{(2)}} \right]^2 - 2 \frac{E_1 E_2}{E_0^{(1)} E_0^{(2)}} \cdot 0 &= (\pm 1)^2 \\
\left[ \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \right]^2 + \left[ \frac{E_2}{E_0^{(2)}} \right]^2 - 0 &= 1 \\
\left[ \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \right]^2 + \left[ \frac{E_2}{E_0^{(2)}} \right]^2 &= 1
\end{aligned}$$

$$\therefore \left[ \frac{E_1}{E_0^{(1)}} \right]^2 + \left[ \frac{E_2}{E_0^{(2)}} \right]^2 = 1 \tag{25.30}$$

### Campo Eléctrico

Cuando la polarización es elíptica, el campo eléctrico es de la forma:

$$\mathbf{E}_{\text{el}(\mathbf{r},t)} = E_0^{(1)} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \hat{\mathbf{e}}_1 + E_0^{(2)} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{e}}_2 \tag{25.31}$$



### 25.3.6 Ondas Planas En Una Interfaz

Sean dos medios (1) y (2) de índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$ , separados por una interfaz en el plano  $z = 0$  sobre la cual incide una onda electromagnética plana con ángulo de incidencia  $\theta_i$ , entonces:

#### Onda Incidente

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{i(\mathbf{r},t)} := \mathbf{E}_{i0} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \\ \mathbf{B}_{i(\mathbf{r},t)} := \frac{n_1}{c} \hat{\mathbf{k}}_i \times \mathbf{E}_{i(\mathbf{r},t)} \end{cases} \quad (25.32)$$

#### Onda Reflejada

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{r(\mathbf{r},t)} := \mathbf{E}_{r0} e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)} \\ \mathbf{B}_{r(\mathbf{r},t)} := \frac{n_1}{c} \hat{\mathbf{k}}_r \times \mathbf{E}_{r(\mathbf{r},t)} \end{cases} \quad (25.33)$$

#### Onda Transmitida

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{t(\mathbf{r},t)} := \mathbf{E}_{t0} e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t)} \\ \mathbf{B}_{t(\mathbf{r},t)} := \frac{n_2}{c} \hat{\mathbf{k}}_t \times \mathbf{E}_{t(\mathbf{r},t)} \end{cases} \quad (25.34)$$

#### Vectores De Onda

$$\begin{cases} \mathbf{k}_i = \frac{n_1 \omega_i}{c} [\text{sen}(\theta_i) \hat{\mathbf{x}} - \cos(\theta_i) \hat{\mathbf{z}}] \\ \mathbf{k}_r = \frac{n_1 \omega_r}{c} [\text{sen}(\theta_r) \hat{\mathbf{x}} + \cos(\theta_r) \hat{\mathbf{z}}] \\ \mathbf{k}_t = \frac{n_2 \omega_t}{c} [\text{sen}(\theta_t) \hat{\mathbf{x}} - \cos(\theta_t) \hat{\mathbf{z}}] \end{cases} \quad (25.35)$$

##### 25.3.6.1 Condiciones Cinemáticas

Se denomina *condiciones cinemáticas* a la condición de contorno que deben satisfacer las ondas planas en una interfaz que establece que cualquier combinación lineal de las ondas incidente, reflejada y transmitida debe ser nula, de la forma:

$$0 = \alpha e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} + \beta e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - \omega_r t)} + \gamma e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} - \omega_t t)}$$

Para un vector  $\mathbf{r}$  fijo en el plano, esta condición se cumple  $\forall t \Leftrightarrow \omega_i = \omega_r = \omega_t \equiv \omega$ , entonces:

$$0 = \alpha e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} e^{-i\omega t} + \beta e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} e^{-i\omega t} + \gamma e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})} e^{-i\omega t}$$

$$0 = \alpha e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})} + \beta e^{i(\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})} + \gamma e^{i(\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r})}$$

Esta condición vale  $\forall \mathbf{r}$  en el plano  $\Leftrightarrow \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}$ .

$$\therefore \quad \boxed{\text{Condiciones Cinemáticas} := \begin{cases} \omega_i = \omega_r = \omega_t \\ \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r} \end{cases}} \quad (25.36)$$

#### Ley De Reflexión

Imponiendo las condiciones de contorno cinemáticas sobre los vectores de onda, puede obtenerse la denominada *ley de reflexión*, de la forma:

Como  $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{n_1 \omega_i}{c} [\text{sen}(\theta_i) \hat{\mathbf{x}} - \cos(\theta_i) \hat{\mathbf{z}}] \right\} \cdot (x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}) &= \left\{ \frac{n_1 \omega_r}{c} [\text{sen}(\theta_r) \hat{\mathbf{x}} + \cos(\theta_r) \hat{\mathbf{z}}] \right\} \cdot (x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}) \\ \frac{n_1 \omega_i}{c} [\text{sen}(\theta_i) x - \cos(\theta_i) z] &= \frac{n_1 \omega_r}{c} [\text{sen}(\theta_r) x + \cos(\theta_r) z] \end{aligned}$$

Como  $\omega_i = \omega_r \equiv \omega$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{n_1 \omega}{c} [\text{sen}(\theta_i) x - \cos(\theta_i) z] &= \frac{n_1 \omega}{c} [\text{sen}(\theta_r) x + \cos(\theta_r) z] \\ \Rightarrow \frac{n_1 \omega}{c} \text{sen}(\theta_i) x &= \frac{n_1 \omega}{c} \text{sen}(\theta_r) x \\ \text{sen}(\theta_i) &= \text{sen}(\theta_r) \\ \Leftrightarrow \theta_i &= \theta_r \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{\theta_i = \theta_r} \quad (25.37)$$

#### Ley De Ibn-Sahl-Snell: Ley De Refracción

Imponiendo las condiciones de contorno cinemáticas sobre los vectores de onda, puede obtenerse la denominada *ley de Ibn-Sahl-Snell* o *ley de refracción*, de la forma:

Como  $\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{n_1 \omega_i}{c} [\text{sen}(\theta_i) \hat{\mathbf{x}} - \cos(\theta_i) \hat{\mathbf{z}}] \right\} \cdot (x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}) &= \left\{ \frac{n_2 \omega_t}{c} [\text{sen}(\theta_t) \hat{\mathbf{x}} - \cos(\theta_t) \hat{\mathbf{z}}] \right\} \cdot (x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}) \\ \frac{n_1 \omega_i}{c} [\text{sen}(\theta_i) x - \cos(\theta_i) z] &= \frac{n_2 \omega_t}{c} [\text{sen}(\theta_t) x - \cos(\theta_t) z] \end{aligned}$$

Como  $\omega_i = \omega_t \equiv \omega$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{n_1 \omega}{c} [\text{sen}(\theta_i) x - \cos(\theta_i) z] &= \frac{n_2 \omega}{c} [\text{sen}(\theta_t) x - \cos(\theta_t) z] \\ \Rightarrow \frac{n_1 \omega}{c} \text{sen}(\theta_i) x &= \frac{n_2 \omega}{c} \text{sen}(\theta_t) x \\ n_1 \text{sen}(\theta_i) &= n_2 \text{sen}(\theta_t) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{n_1 \text{sen}(\theta_i) = n_2 \text{sen}(\theta_t)} \quad (25.38)$$

### 25.3.6.2 Condiciones Dinámicas

Se denomina *condiciones dinámicas* a las condiciones de contorno electrodinámicas necesarias y suficientes que deben imponerse para la continuidad y el salto de los campos eléctrico  $\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}$  y magnético  $\mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}$  sobre la interfaz  $z = 0$ , y son de la forma:

$$\text{Condiciones Dinámicas} := \begin{cases} \hat{\mathbf{n}}_e \cdot [\mathbf{D}_{2(\mathbf{r},t)} - \mathbf{D}_{1(\mathbf{r},t)}] \big|_{z=0} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}_e \times [\mathbf{E}_{2(\mathbf{r},t)} - \mathbf{E}_{1(\mathbf{r},t)}] \big|_{z=0} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}_e \cdot [\mathbf{B}_{2(\mathbf{r},t)} - \mathbf{B}_{1(\mathbf{r},t)}] \big|_{z=0} = 0 \\ \hat{\mathbf{n}}_e \times [\mathbf{H}_{2(\mathbf{r},t)} - \mathbf{H}_{1(\mathbf{r},t)}] \big|_{z=0} = 0 \end{cases} \quad (25.39)$$

### 25.3.6.3 Coeficientes De Fresnel

Dados dos medios (1) y (2) de índices de refracción  $n_1 = \sqrt{\mu_{r1}\varepsilon_{r1}}$  y  $n_2 = \sqrt{\mu_{r2}\varepsilon_{r2}}$ , respectivamente, se denomina *coeficientes de Fresnel* a los valores que toman el módulo de las amplitudes reflejadas y transmitidas del campo eléctrico en término de la amplitud del campo eléctrico incidente  $E_i$  y su ángulo de incidencia  $\theta_i$ , y de los índices de refracción  $n_1$  y  $n_2$  de los medios separados por la interfaz. Estos coeficientes se obtienen al despejar las amplitudes del campo eléctrico de las condiciones dinámicas.

#### Caso Transverso Eléctrico (TE)

Se denomina *caso transverso eléctrico (TE)* al caso en el que el campo eléctrico tiene dirección normal al plano donde se representa el corte entre los medios (1) y (2) (si la interfaz se encuentra en  $z = 0$ , la dirección del campo es  $-\hat{\mathbf{y}}$ ). En este caso los coeficientes de Fresnel son de la forma:

$$\begin{cases} E_r^{\text{TE}} = \frac{n_1 \cos(\theta_i) - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2(\theta_i)}}{n_1 \cos(\theta_i) + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2(\theta_i)}} E_i \\ E_t^{\text{TE}} = \frac{2n_1 \cos(\theta_i)}{n_1 \cos(\theta_i) + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2(\theta_i)}} E_i \end{cases} \quad \text{cuando } \mathbf{E} \perp \text{ plano de corte.} \quad (25.40)$$

#### Caso Transverso Magnético (TM)

Se denomina *caso transverso magnético (TM)* al caso en el que el campo magnético tiene dirección normal al plano donde se representa el corte entre los medios (1) y (2) (si la interfaz se encuentra en  $z = 0$ , la dirección del campo es  $-\hat{\mathbf{y}}$ ). En este caso los coeficientes de Fresnel son de la forma:

$$\begin{cases} E_r^{\text{TM}} = \frac{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos(\theta_i) - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2(\theta_i)}}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos(\theta_i) + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2(\theta_i)}} E_i \\ E_t^{\text{TM}} = \frac{2n_1 n_2 \cos(\theta_i)}{\frac{\mu_1}{\mu_2} n_2^2 \cos(\theta_i) + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2(\theta_i)}} E_i \end{cases} \quad \text{cuando } \mathbf{B} \perp \text{ plano de corte.} \quad (25.41)$$

#### Observación

Si  $n_2^2 - n_1^2 \sin^2(\theta_i) \geq 0$ , los coeficientes de Fresnel son reales.

### 25.3.6.4 Ángulo Crítico

Se denomina *ángulo crítico* al ángulo en el cual la onda plana transmitida únicamente es paralela a la superficie de la interfaz ( $\theta_t = \pi/2$ ), es decir:

Por la ley de Ibn-Sahl-Snell, tenemos que:

$$\begin{aligned} n_1 \sin(\theta_i) &= n_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \theta_i &= \arcsen\left(\frac{n_2 \cdot 1}{n_1}\right) \\ &= \arcsen\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \end{aligned}$$

$$\theta_{\text{cr}} := \theta_i \big|_{\theta_t = \frac{\pi}{2}} = \arcsen\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad \forall \quad n_2 < n_1 \quad (25.42)$$

#### Reflexión Total Interna

Se denomina *reflexión total interna* al fenómeno de reflexión total que se produce en el caso en el cual el ángulo de incidencia es mayor al ángulo crítico, donde no hay onda transmitida, de la forma:

$$\theta_{i(\theta_t)} := \arcsen\left[\frac{n_2 \sin(\theta_i)}{n_1}\right] \quad \forall \quad \theta_i \in \left(\theta_{\text{cr}}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (25.43)$$

### 25.3.6.5 Ángulo De Brewster

Se denomina *ángulo de Brewster* solo en modo TM al ángulo:

$$\theta_{\text{B}} := \arctan\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \quad (25.44)$$

## 25.3.7 Ondas Planas En Materiales Conductores

### 25.3.7.1 Vector De Onda

El vector de onda en un conductor eléctrico es complejo, por lo que para hallar su expresión hacemos lo siguiente:

- Definimos al vector de onda  $\mathbf{k}$  como una parte real e imaginaria, y la relacionamos con la relación de dispersión para conductores eléctricos, cuya expresión es conocida:

$$\mathbf{k} := k_0(x + iy)$$

$$|\mathbf{k}|^2 = [k_0(x + iy)] \cdot [k_0(x + iy)]$$

Por la relación de dispersión en conductores, tenemos:

$$\mu\varepsilon\omega^2 \left(1 + i \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) = k_0^2(x^2 + ixy + iyx + i^2y^2)$$

$$\mu\varepsilon\omega^2 \left(1 + i \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) = k_0^2(x^2 - y^2 + i2xy)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k_0 = \sqrt{\mu\varepsilon}\omega \\ x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k_0 = \sqrt{\mu\varepsilon}\omega \\ x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \end{cases} \quad (25.45)$$

- Es decir, obtuvimos un sistema de dos ecuaciones para las variables  $x$  e  $y$ . Para hallarlas, despejamos dos veces  $x$  e  $y$  de la segunda ecuación y la reemplazamos en la primera, respectivamente, de la forma:

Como  $y = \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon x}$ , tenemos que:

$$x^2 - \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon x}\right)^2 = 1$$

$$\frac{\sigma^2}{4\omega^2\varepsilon^2 x^2} = x^2 - 1$$

$$x^4 - x^2 - \frac{\sigma^2}{4\omega^2\varepsilon^2} = 0$$

Sustituyendo  $v = x^2$ , tenemos que:

$$v^2 - v - \frac{\sigma^2}{4\omega^2\varepsilon^2} = 0$$

$$v_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.\left(-\frac{\sigma^2}{4\omega^2\varepsilon^2}\right)}}{2.1}$$

Deshaciendo la sustitución, tenemos:

$$x^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}$$

Debido a que  $x \in \mathbb{R}$ , solo contamos la rama positiva:

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}}$$

Tomando los valores de  $x > 0$ , tenemos que:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1}$$

$$\therefore \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1} \end{cases} \quad (25.46)$$

- Finalmente, el vector de onda será de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &:= k_0(x + iy)\hat{\mathbf{k}} \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon}\omega \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1} \right] \hat{\mathbf{k}} \\ &= \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left[ \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1} + i \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1} \right] \hat{\mathbf{k}} \end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{k} = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left[ \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1} + i \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1} \right] \hat{\mathbf{k}} \quad (25.47)$$

### 25.3.7.2 Onda Incidente

Sea  $\mathbf{k} := \mathbf{k}_{\text{re}} + i\mathbf{k}_{\text{im}}$  el vector de onda complejo ( $\mathbf{k} \in \mathbb{C}$ ) de una onda electromagnética incidente sobre un conductor eléctrico, entonces:

$$\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = \mathbf{E}_0 e^{-\mathbf{k}_{\text{im}} \cdot \mathbf{r}} e^{i(\mathbf{k}_{\text{re}} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (25.48)$$

#### Observación

Las ondas se propagan en dirección  $\mathbf{k}_{\text{r}}$  y se atenúan en dirección  $\mathbf{k}_{\text{im}}$ .

### 25.3.7.3 Buen Conductor

Se dice que un medio material es un *buen conductor* cuando  $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$ .

#### Vector De Onda

En un buen conductor el vector de onda es de la forma:

$$\mathbf{k} = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left[ \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1} + i \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1} \right] \hat{\mathbf{k}}$$

Si  $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$ , tomando la aproximación binomial en el segundo término tenemos:

$$\simeq \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left( \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1} + i \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

$$\simeq \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left( \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} + i \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} \right) \hat{\mathbf{k}}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\mu\varepsilon\omega^2}{2} \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}} (1+i) \hat{\mathbf{k}} \\
&= \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}} (1+i) \hat{\mathbf{k}} \\
&= \frac{1}{\delta} (1+i) \hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{k} = \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{2}} (1+i) \hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{\delta} (1+i) \hat{\mathbf{k}}} \quad (25.49)$$

### Longitud De Penetración

Se denomina *longitud de penetración*  $\delta$  a la longitud característica que representa cuánto una onda electromagnética puede atravesar un conductor eléctrico sin atenuarse, y es de la forma:

$$\delta := \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}} \quad (25.50)$$

### Onda Incidente

En un buen conductor, una onda electromagnética plana incidente es de la forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{i(\mathbf{r},t)} &:= \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t)} \\
&= \mathbf{E}_0 e^{i \left[ \frac{1}{\delta} (1+i) \hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r} - \omega_i t \right]} \\
&= \mathbf{E}_0 e^{\frac{i}{\delta} (\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}) + \frac{i^2}{\delta} (\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}) - i\omega_i t} \\
&= \mathbf{E}_0 e^{-\frac{1}{\delta} (\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r})} e^{i \left( \frac{\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}}{\delta} - \omega_i t \right)}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{E}_{i(\mathbf{r},t)} = \mathbf{E}_0 e^{-\frac{1}{\delta} (\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r})} e^{i \left( \frac{\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \mathbf{r}}{\delta} - \omega_i t \right)}} \quad (25.51)$$

#### 25.3.7.4 Mal Conductor

Se dice que un medio material es un *mal conductor* cuando  $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1$ .

### Vector De Onda

En un mal conductor el vector de onda es de la forma:

$$\mathbf{k} = \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left[ \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1} + i \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1} \right] \hat{\mathbf{k}}$$

Si  $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1$ , tomando la aproximación binomial en el segundo término tenemos:

$$\begin{aligned}
&\simeq \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left( \sqrt{\sqrt{1 + 0^2} + 1} + i \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right) \hat{\mathbf{k}} \\
&= \omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}} \left( \sqrt{1 + 1} + i \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{\mathbf{k}} \\
&= \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \left( 1 + i \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon} \right) \hat{\mathbf{k}}
\end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\mathbf{k} = \omega \sqrt{\mu\varepsilon} \left( 1 + i \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon} \right) \hat{\mathbf{k}}} \quad (25.52)$$

# CAPÍTULO 26: RADIACIÓN ELECTROMAGNÉTICA

## 26.1 Radiación Electromagnética De Una Carga Puntual

### 26.1.1 Potencial De Liénard-Wiechert

Se denomina *potencial de Liénard-Wiechert* al potencial electromagnético con gauge de Lorenz producido por una carga puntual en movimiento. Este potencial tiene en cuenta las correcciones relativistas debidas al movimiento de la carga pero no tiene en cuenta efectos cuánticos.

#### 26.1.1.1 Deducción

Sea una carga puntual  $q$  que se encuentra en la posición  $\mathbf{r}_0 := \mathbf{r}_{0(t)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  y que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_0 := \mathbf{v}_{0(t)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  y aceleración  $\dot{\mathbf{v}}_0 := \dot{\mathbf{v}}_{0(t)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , entonces:

#### Distribución De Carga Eléctrica Volumétrica

La distribución de carga eléctrica volumétrica de la carga puntual será de la forma:

$$\rho(\mathbf{r}', t') := q \delta_{[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{0(t')}]^3} \quad (26.1)$$

#### Densidad De Corriente Eléctrica Volumétrica

La densidad de corriente eléctrica volumétrica generada por la carga puntual será de la forma:

$$\mathbf{J}_{(\mathbf{r}', t')} := q \mathbf{v}_{0(t')} \delta_{[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{0(t')}]^3} \quad (26.2)$$

#### Potenciales

El potencial de Liénard-Wiechert se obtiene a partir de la definición de los potenciales retardados, de la forma:

Por la definición del potencial eléctrico retardado, tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi_{(\mathbf{r}, t)} &:= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\mathbf{r}', t'_r)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{q \delta_{[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{0(t'_r)}]}^3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{q \delta_{[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{0(t')}]^3}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta_{(t' - t'_r)} d^3\mathbf{r}' dt' \end{aligned}$$

Por el teorema de Fubini, tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q \delta_{[t' - t'_{r(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)}]} \delta_{[\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{0(t')}]^3}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dt' d^3\mathbf{r}' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0(t')}|} \delta_{[t' - t'_{r(\mathbf{r}, \mathbf{r}_{0(t')}, t)}]} dt' \end{aligned}$$

Por la propiedad:  $\delta_{[f(x)]} = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_{(x-x_i)}}{\left| \frac{df(x_i)}{dx} \right|}$ , (con  $x_i$  los ceros de  $f$ ), entonces:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0(t')}|} \frac{\delta_{(t' - t_r)}}{\left| \frac{\partial}{\partial t'} (t' - t'_r) \right|_{t'=t_r}} dt', \text{ pues } t_r \text{ es el único cero de } f_{(t')}. \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0(t')}|} \frac{\delta_{(t' - t_r)}}{\left| 1 - \frac{\partial}{\partial t'} \left[ t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0(t')}|}{c} \right] \right|_{t'=t_r}} dt' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0(t')}|} \frac{\delta_{(t' - t_r)}}{\left| 1 - \left[ 0 - \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0(t_r)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0(t_r)}|} \cdot (-\mathbf{v}_{0(t_r)}) \right] \right|} dt' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0(t')}|} \frac{\delta_{(t' - t_r)}}{1 - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{(t_r)} \cdot \boldsymbol{\beta}_{(t_r)}} dt' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0(t_r)}|} \frac{1}{1 - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{(t_r)} \cdot \boldsymbol{\beta}_{(t_r)}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta}) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right]_{t_r} \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} \phi_{(\mathbf{r}, t)} := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta}) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right]_{t_r} \\ \mathbf{A}_{(\mathbf{r}, t)} := \frac{\mu_0 c}{4\pi} \left[ \frac{q \boldsymbol{\beta}}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta}) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right]_{t_r} \end{cases} \quad (26.3)$$

#### Parámetros

- Factor Beta:

$$\boldsymbol{\beta} := \boldsymbol{\beta}_{(t)} = \frac{\mathbf{v}_{0(t)}}{c} = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}_{0(t)}}{dt} \quad (26.4)$$

- Versor Normal:

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} := \hat{\boldsymbol{\eta}}_{(t)} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0(t)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0(t)}|} \quad (26.5)$$

- Factor De Lorentz:

$$\gamma := \gamma_{(t)} = \frac{1}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{\beta}_{(t)}|^2}} \quad (26.6)$$

### 26.1.1.2 Potencial Electromagnético

#### Potencial Eléctrico

El primer potencial de Liénard-Wiechert, el potencial eléctrico producido por la carga puntual en movimiento, es de la forma:

$$\phi_{(\mathbf{r},t)} := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta}) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right] \Big|_{t_r} \quad (26.7)$$

#### Potencial Magnético

El segundo potencial de Liénard-Wiechert, el potencial magnético producido por la carga puntual en movimiento, es de la forma:

$$\mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} := \frac{\mu_0 c}{4\pi} \left[ \frac{q\boldsymbol{\beta}}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta}) |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right] \Big|_{t_r} \quad (26.8)$$

## 26.1.2 Campo Electromagnético

El campo electromagnético producido por la carga puntual en movimiento, será de la forma:

### 26.1.2.1 Deducción

Los campos eléctrico y magnético pueden obtenerse a partir de los potenciales de Liénard-Wiechert, de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} &:= -\nabla \phi_{(\mathbf{r},t)} - \frac{\partial \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)}}{\partial t} & \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} &:= \nabla \times \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} \\ &= & &= \end{aligned}$$

### 26.1.2.2 Campo Eléctrico

El campo eléctrico de la carga puntual es de la forma:

$$\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} := \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\beta})}{\gamma^2(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} + \frac{q\hat{\boldsymbol{\eta}} \times [(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{c(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right\} \Big|_{t_r} \quad (26.9)$$

#### Campo De Velocidades

Se denomina *campo de velocidades* al primer término del campo eléctrico, que corresponde a la parte estática del campo eléctrico de la carga puntual, y es de la forma:

$$\mathbf{E}_{\text{vel}(\mathbf{r},t)} := \frac{q}{4\pi\epsilon_0\gamma^2} \frac{(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\beta})}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \Big|_{t_r} \quad (26.10)$$

El campo de velocidades decae como  $\frac{1}{R^2}$ . El campo es radial respecto al punto en el que está la carga puntual con velocidad  $\mathbf{v}$  uniforme.

#### Campo De Radiación

Se denomina *campo de radiación* al segundo término del campo eléctrico, que corresponde a la parte que tiene en cuenta la aceleración de la carga puntual, y es de la forma:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}(\mathbf{r},t)} := \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\hat{\boldsymbol{\eta}} \times [(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \Big|_{t_r} \quad (26.11)$$

El campo de velocidades decae como  $\frac{1}{R}$  y lleva energía al infinito, es decir, el campo de radiación abarca todo el espacio. El campo está polarizado en el plano que contiene a  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$  y a la normal  $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ .

### 26.1.2.3 Campo Magnético

El campo magnético de la carga puntual es de la forma:

$$\mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} := \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{qc(\boldsymbol{\beta} \times \hat{\boldsymbol{\eta}})}{\gamma^2(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} + \frac{q\hat{\boldsymbol{\eta}} \times \{\hat{\boldsymbol{\eta}} \times [(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]\}}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right) \Big|_{t_r} \quad (26.12)$$

#### Observación

$$\mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} = \frac{1}{c} \hat{\boldsymbol{\eta}}_{(t_r)} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \quad (26.13)$$

#### Campo De Velocidades

El *campo de velocidades* del campo magnético se define como:

$$\mathbf{B}_{\text{vel}(\mathbf{r},t)} := \frac{\mu_0 qc}{4\pi\gamma^2} \frac{\boldsymbol{\beta} \times \hat{\boldsymbol{\eta}}}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \Big|_{t_r} \quad (26.14)$$

El campo de velocidades decae como  $\frac{1}{R^2}$ .

## Campo De Radiación

El *campo de radiación* del campo magnético se define como:

$$\mathbf{B}_{\text{rad}(\mathbf{r},t)} := \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\hat{\boldsymbol{\eta}} \times \{ \hat{\boldsymbol{\eta}} \times [(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}] \}}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \bigg|_{t_r} \quad (26.15)$$

El campo de velocidades decae como  $\frac{1}{R}$  y lleva energía al infinito, es decir, el campo de radiación abarca todo el espacio.

### 26.1.2.4 Efectos Relativistas

Hay dos tipos de efectos relativistas producidos por los campos de radiación: el primero de ellos es debido al ángulo que forman  $\boldsymbol{\beta}$  y  $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ ; y el segundo de ellos es debido a la transformación del sistema de referencia de la carga al del observador  $(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta})$ .

## 26.1.3 Potencia Total Irradiada

A partir de la expresión del campo eléctrico de radiación, puede obtenerse la potencia total irradiada por una carga puntual en movimiento acelerado mediante su vector de Poynting  $\mathbf{S}$ , de la siguiente forma:

### 26.1.3.1 Deducción

Sea una carga puntual  $q$  que se encuentra en la posición  $\mathbf{r}_0 := \mathbf{r}_{0(t)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  y que se mueve con velocidad  $\mathbf{v}_0 := \mathbf{v}_{0(t)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  y aceleración  $\dot{\mathbf{v}}_0 := \dot{\mathbf{v}}_{0(t)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , donde  $\theta$  es el ángulo entre la aceleración  $\dot{\mathbf{v}}$  y el versor normal  $\hat{\boldsymbol{\eta}} := \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0(t)}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{0(t)}|}$ , entonces:

Definimos a la potencia irradiada de la forma:

$$dP := \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} \cdot d\mathbf{A}$$

Por la expresión del vector de Poynting en ondas planas, tenemos:

$$dP = \left[ \frac{n}{\mu_0 c} |\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}|^2 \hat{\mathbf{k}} \right] \cdot R^2 d\Omega \hat{\boldsymbol{\eta}}, \text{ donde } \begin{cases} R := |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \\ \Omega := \text{Ángulo Sólido} \end{cases}$$

Como  $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\boldsymbol{\eta}}$ , tenemos que:

$$\frac{dP_{\text{rad}(\Omega)}}{d\Omega} = \frac{n}{\mu_0 c} |R \mathbf{E}_{\text{rad}(\mathbf{r},t)}|^2 (\hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}})$$

Por el campo eléctrico de radiación de una carga puntual, tenemos:

$$= \frac{n}{\mu_0 c} \left| R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\hat{\boldsymbol{\eta}} \times [(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right|_{t_r}^2 .1$$

Como  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \frac{nq^2}{16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^3} \left| |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| \frac{\hat{\boldsymbol{\eta}} \times [(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \right|_{t_r}^2 \\ &= \frac{nq^2}{16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^3} \left| \frac{\hat{\boldsymbol{\eta}} \times [(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right|_{t_r}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dP_{\text{rad}(\Omega)}}{d\Omega} := \frac{nq^2}{16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^3} \left| \frac{\hat{\boldsymbol{\eta}} \times [(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right|_{t_r}^2 \quad (26.16)$$

### 26.1.3.2 Potencia Total Irradiada: Caso Clásico

Si la partícula se mueve a velocidades bajas, es decir,  $\mathbf{v} \ll c$ , tenemos que:

$$\frac{dP_{\text{rad}(\Omega)}}{d\Omega} = \frac{nq^2}{16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^3} \left| \frac{\hat{\boldsymbol{\eta}} \times [(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right|_{t_r}^2$$

Si  $\mathbf{v} \ll c \Rightarrow \boldsymbol{\beta} \rightarrow 0$ , es decir:

$$\begin{aligned} &\simeq \frac{nq^2}{16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^3} \left| \frac{\hat{\boldsymbol{\eta}} \times [(\hat{\boldsymbol{\eta}} - 0) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - 0)^3} \right|^2 \\ &= \frac{nq^2}{16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^3} |\hat{\boldsymbol{\eta}} \times (\hat{\boldsymbol{\eta}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2 \end{aligned}$$

Por la relación del producto vectorial con el producto interno, tenemos:

$$= \frac{nq^2}{16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^3} |\hat{\boldsymbol{\eta}}|^2 |\hat{\boldsymbol{\eta}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 - [\hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\eta}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]^2$$

Como  $\hat{\boldsymbol{\eta}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \perp \hat{\boldsymbol{\eta}}$ , tenemos que:

$$= \frac{nq^2}{16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^3} |\hat{\boldsymbol{\eta}}|^2 |\hat{\boldsymbol{\eta}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 - (0)^2$$

Como  $|\hat{\boldsymbol{\eta}}| = 1$ , tenemos que:

$$= \frac{nq^2}{16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^3} 1 \cdot |\hat{\boldsymbol{\eta}} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 - 0$$

Por la definición del producto vectorial, tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \frac{nq^2}{16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^3} ||\hat{\boldsymbol{\eta}}| |\dot{\boldsymbol{\beta}}| \text{sen}(\theta) \hat{\boldsymbol{\eta}}_{\perp}|^2 \\ &= \frac{nq^2}{16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^3} |\hat{\boldsymbol{\eta}}|^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 |\text{sen}(\theta)|^2 |\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\perp}|^2 \end{aligned}$$

Como  $|\text{sen}(\theta)|^2 = \text{sen}^2(\theta)$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \frac{nq^2}{16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^3} 1 \cdot |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2 \text{sen}^2(\theta) .1 \\ &= \frac{nq^2}{16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^5} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \text{sen}^2(\theta) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dP_{\text{rad}(\Omega)}}{d\Omega} = \frac{nq^2}{16\pi^2 \mu_0 \epsilon_0^2 c^5} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \text{sen}^2(\theta) \quad (26.17)$$

### Movimiento Lineal: Fórmula De Larmor

Si la partícula es no relativista y es acelerada linealmente en la misma dirección de su movimiento, es decir,  $\boldsymbol{\beta} \parallel \dot{\boldsymbol{\beta}}$ , integrando a lo largo de todo el ángulo sólido se obtiene la denominada *fórmula de Larmor*, de la forma:

$$\frac{dP_{\text{rad}(\Omega)}}{d\Omega} = \frac{nq^2}{16\pi^2\mu_0\varepsilon_0^2c^5} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \sin^2(\theta)$$

Integrando a lo largo del ángulo sólido  $\Omega$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^{P_{\text{rad}}} dP'_{\text{rad}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{nq^2}{16\pi^2\mu_0\varepsilon_0^2c^5} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \sin^2(\theta) \sin(\theta) d\theta d\varphi \\ P_{\text{rad}} - 0 &= \frac{nq^2}{16\pi^2\mu_0\varepsilon_0^2c^5} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3(\theta) d\theta \\ P_{\text{rad}} &= \frac{nq^2}{16\pi^2\mu_0\varepsilon_0^2c^5} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{nq^2}{6\pi\mu_0\varepsilon_0^2c^5} |\dot{\mathbf{v}}|^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{P_{\text{Lar}} := \frac{nq^2}{6\pi\mu_0\varepsilon_0^2c^5} |\dot{\mathbf{v}}|^2} \quad (26.18)$$

#### 26.1.3.3 Potencia Total Irradiada: Caso Relativista

En el caso relativista, la potencia total irradiada por la carga puntual  $q$  en el sistema de referencia de la fuente (de la carga), es de la forma:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{\text{rad}(\Omega,t')}}{d\Omega} &= R^2 \mathbf{S}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}} \frac{dt}{dt'} \\ &= \frac{nq^2}{16\pi^2\mu_0\varepsilon_0^2c^3} \left| \frac{\hat{\boldsymbol{\eta}} \times [(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right|_{t_r}^2 (1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta}) \\ &= \frac{nq^2}{16\pi^2\mu_0\varepsilon_0^2c^3} \frac{|\hat{\boldsymbol{\eta}} \times [(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{|1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta}|^5} \bigg|_{t_r} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\frac{dP_{\text{rad}(\Omega,t')}}{d\Omega} = \frac{nq^2}{16\pi^2\mu_0\varepsilon_0^2c^3} \frac{|\hat{\boldsymbol{\eta}} \times [(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]|^2}{|1 - \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\beta}|^5} \bigg|_{t_r}} \quad (26.19)$$

### Movimiento Lineal

Si la partícula es relativista y es acelerada linealmente en la misma dirección de su movimiento, es decir,  $\boldsymbol{\beta} \parallel \dot{\boldsymbol{\beta}}$ , la potencia total irradiada es de la forma:

$$\boxed{\frac{dP_{\text{rad}(\Omega,t')}}{d\Omega} = \frac{nq^2}{16\pi^2\mu_0\varepsilon_0^2c^3} \frac{\sin^2(\theta)}{[1 - |\boldsymbol{\beta}| \cos(\theta)]^5} |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2} \quad (26.20)$$

## 26.2 Radiación Electromagnética De Fuentes Localizadas



# CAPÍTULO 27: FORMULACIÓN COVARIANTE

Se denomina *formulación covariante* a una formulación tensorial de la electrodinámica clásica que busca unificar el electromagnetismo con la relatividad especial. Para ello, considera un espacio-tiempo en ausencia de gravedad descrito por la métrica de Minkowski, y no tiene en cuenta efectos cuánticos.

## 27.1 Transformación De Lorentz En Electromagnetismo

Campo	Transformación De Lorentz	Transformación De Lorentz En Componentes
Densidad De Carga Eléctrica	$\rho'_{(\mathbf{r},t)} = \gamma_{(\mathbf{v})} \left[ \rho_{(\mathbf{r},t)} - \frac{1}{c^2} \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)} \right]$	
Densidad De Corriente Eléctrica	$\mathbf{J}'_{(\mathbf{r},t)} = \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} - \gamma_{(\mathbf{v})} \rho_{(\mathbf{r},t)} \mathbf{v}_{(t)} + [\gamma_{(\mathbf{v})} - 1] (\mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}$	$\begin{cases} \mathbf{J}'_{\parallel(\mathbf{r},t)} = \gamma_{(\mathbf{v})} [\mathbf{J}_{\parallel(\mathbf{r},t)} - \rho_{(\mathbf{r},t)} \mathbf{v}_{(t)}] \\ \mathbf{J}'_{\perp(\mathbf{r},t)} = \mathbf{J}_{\perp(\mathbf{r},t)} \end{cases}$
Fuerza Electromagnética	$\mathbf{F}'_{\text{em}(\mathbf{r},t)} = q [\mathbf{E}'_{(\mathbf{r},t)} + \mathbf{v}'_{(t)} \times \mathbf{B}'_{(\mathbf{r},t)}]$	
Potencial Eléctrico	$\phi'_{(\mathbf{r},t)} = \gamma_{(\mathbf{v})} [\phi_{(\mathbf{r},t)} - \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)}]$	
Potencial Magnético	$\mathbf{A}'_{(\mathbf{r},t)} = \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} - \frac{1}{c^2} \gamma_{(\mathbf{v})} \phi_{(\mathbf{r},t)} \mathbf{v}_{(t)} + [\gamma_{(\mathbf{v})} - 1] (\mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}$	$\begin{cases} \mathbf{A}'_{\parallel(\mathbf{r},t)} = \gamma_{(\mathbf{v})} \left[ \mathbf{A}_{\parallel(\mathbf{r},t)} - \frac{1}{c^2} \phi_{(\mathbf{r},t)} \mathbf{v}_{(t)} \right] \\ \mathbf{A}'_{\perp(\mathbf{r},t)} = \mathbf{A}_{\perp(\mathbf{r},t)} \end{cases}$
Campo Eléctrico	$\mathbf{E}'_{(\mathbf{r},t)} = \gamma_{(\mathbf{v})} [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \mathbf{v}_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] - [\gamma_{(\mathbf{v})} - 1] (\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}$	$\begin{cases} \mathbf{E}'_{\parallel(\mathbf{r},t)} = \mathbf{E}_{\parallel(\mathbf{r},t)} \\ \mathbf{E}'_{\perp(\mathbf{r},t)} = \gamma_{(\mathbf{v})} [\mathbf{E}_{\perp(\mathbf{r},t)} + \mathbf{v}_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \end{cases}$
Campo Magnético	$\mathbf{B}'_{(\mathbf{r},t)} = \gamma_{(\mathbf{v})} \left[ \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_{(t)} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \right] - [\gamma_{(\mathbf{v})} - 1] (\mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}$	$\begin{cases} \mathbf{B}'_{\parallel(\mathbf{r},t)} = \mathbf{B}_{\parallel(\mathbf{r},t)} \\ \mathbf{B}'_{\perp(\mathbf{r},t)} = \gamma_{(\mathbf{v})} \left[ \mathbf{B}_{\perp(\mathbf{r},t)} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_{(t)} \times \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \right] \end{cases}$
Campo Desplazamiento Eléctrico	$\mathbf{D}'_{(\mathbf{r},t)} = \gamma_{(\mathbf{v})} \left[ \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_{(t)} \times \mathbf{H}_{(\mathbf{r},t)} \right] - [\gamma_{(\mathbf{v})} - 1] (\mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}$	$\begin{cases} \mathbf{D}'_{\parallel(\mathbf{r},t)} = \mathbf{D}_{\parallel(\mathbf{r},t)} \\ \mathbf{D}'_{\perp(\mathbf{r},t)} = \gamma_{(\mathbf{v})} \left[ \mathbf{D}_{\perp(\mathbf{r},t)} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_{(t)} \times \mathbf{H}_{(\mathbf{r},t)} \right] \end{cases}$
Campo Intensidad Magnética	$\mathbf{H}'_{(\mathbf{r},t)} = \gamma_{(\mathbf{v})} [\mathbf{H}_{(\mathbf{r},t)} - \mathbf{v}_{(t)} \times \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)}] - [\gamma_{(\mathbf{v})} - 1] (\mathbf{H}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \hat{\mathbf{v}}$	$\begin{cases} \mathbf{H}'_{\parallel(\mathbf{r},t)} = \mathbf{H}_{\parallel(\mathbf{r},t)} \\ \mathbf{H}'_{\perp(\mathbf{r},t)} = \gamma_{(\mathbf{v})} [\mathbf{H}_{\perp(\mathbf{r},t)} - \mathbf{v}_{(t)} \times \mathbf{D}_{(\mathbf{r},t)}] \end{cases}$

Tabla 27.1: Transformación de Lorentz de campos en el electromagnetismo.

## 27.2 Cuadriescalares

### 27.2.1 Intervalo Espacio-temporal

$$ds = \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \sqrt{\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}$$

(27.1)

### 27.2.2 Tiempo Propio

$$d\tau := \sqrt{\frac{ds^2}{c^2}}$$

(27.2)

### 27.2.3 Masa En Reposo

$$m_0 := \frac{1}{c} \sqrt{\eta_{\mu\nu} p^\mu p^\nu} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}_{(t)}|^2}$$

(27.3)

### 27.2.4 Invariante Electromagnético

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 \left[ |\mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}|^2 - \frac{|\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}|^2}{c^2} \right]$$

(27.4)

## 27.3 Cuadrivectores

Los cuadrivectores son vectores en cuatro dimensiones que pueden pensarse como cuadritensores de rango 1. Cualquier producto entre cuadrivectores en el que dos índices se encuentran repetidos, corresponde a sumar sobre dichos índices de acuerdo al convenio de suma en notación de Einstein.

### 27.3.1 Cuadriector Contravariante

Se denomina *cuadriector contravariante* a todo cuadriector de la forma:

$$x^\mu := (x^0; x^i) = (x^0, x^1, x^2, x^3), \text{ con } \begin{cases} 0 : \text{parte temporal} \\ i : \text{parte espacial} \end{cases}$$

(27.5)

### Transformación

Los cuadvectores contravariantes transforman de la forma:

$$x'^{\mu} := \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu} = \sum_{\nu=0}^3 \left( \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} x^{\nu} \right) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^0} x^0 + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^1} x^1 + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^3} x^3 \quad (27.6)$$

### Observación

- $$\frac{\partial y}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial y}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\mu}} \quad (27.7)$$

- $$\frac{\partial y}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial y}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \quad (27.8)$$

#### 27.3.2 Cuadrivector Covariante

Se denomina *cuadrivector covariante* a todo cuadvector de la forma:

$$x_{\mu} := (x_0; -x_i) = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3), \text{ con } \begin{cases} 0 : \text{parte temporal} \\ i : \text{parte espacial} \end{cases} \quad (27.9)$$

### Transformación

Los cuadvectores covariantes transforman de la forma:

$$x'_{\mu} := \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} x_{\nu} = \sum_{\nu=0}^3 \left( \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} x_{\nu} \right) = \frac{\partial x^0}{\partial x'^{\mu}} x_0 + \frac{\partial x^1}{\partial x'^{\mu}} x_1 + \frac{\partial x^2}{\partial x'^{\mu}} x_2 + \frac{\partial x^3}{\partial x'^{\mu}} x_3 \quad (27.10)$$

#### 27.3.3 Operaciones

##### 27.3.3.1 Producto Covariante-Contravariante

$$x_{\mu} y^{\mu} := \sum_{\mu=0}^3 x_{\mu} y^{\mu} = x_0 y^0 + x_1 y^1 + x_2 y^2 + x_3 y^3 \quad (27.11)$$

##### 27.3.3.2 Producto Contravariante-Covariante

$$x^{\mu} y_{\mu} := \sum_{\mu=0}^3 x^{\mu} y_{\mu} = x^0 y_0 + x^1 y_1 + x^2 y_2 + x^3 y_3 \quad (27.12)$$

##### 27.3.3.3 Producto Mixto

$$x_{\mu} x^{\mu} = x^{\mu} x_{\mu} = (x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \quad (27.13)$$

##### 27.3.3.4 Conversión

### Subir Un Índice

$$x_{\mu} = g_{\mu\nu} x^{\nu} \quad (27.14)$$

### Bajar Un Índice

$$x^{\mu} = g^{\mu\nu} x_{\nu} \quad (27.15)$$

#### 27.3.4 Cuadvectores Comunes

##### 27.3.4.1 Cuadrivector Posición

Se denomina *cuadrivector posición* o *cuadriposición* al vector contravariante de la forma:

$$x^{\mu}_{(t)} := (ct; \mathbf{r}_{(t)}) = (ct, x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)}) \quad (27.16)$$

### Norma

La norma (la longitud) de un cuadvector posición está dado por el intervalo en el espacio-tiempo de Minkowski, de la forma:

$$\begin{aligned} x_{\mu} x^{\mu} &= \sum_{\mu=0}^3 x_{\mu} x^{\mu} \\ &= x_0 x^0 + x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3 \\ &= (ct) \cdot (ct) + [-x_{(t)}] \cdot x_{(t)} + [-y_{(t)}] \cdot y_{(t)} + [-z_{(t)}] \cdot z_{(t)} \\ &= c^2 t^2 - x_{(t)}^2 - y_{(t)}^2 - z_{(t)}^2 \end{aligned}$$

Por la definición del intervalo espacio-temporal, tenemos que:

$$= s^2$$

$$\therefore \boxed{x_{\mu} x^{\mu} = s^2} \quad (27.17)$$

### 27.3.4.2 Cuadrivector Velocidad

Se denomina *cuadrivector velocidad* o *cuadrivelocidad* al cuadrivector contravariante que representa la derivada temporal (respecto al tiempo propio) del cuadrivector posición, de la forma:

$$\begin{aligned} v_{(t)}^\mu &:= \frac{dx_{(t)}^\mu}{d\tau} \\ &= \frac{d}{d\tau}(ct, x_{(t)}, y_{(t)}, z_{(t)}) \\ &= \left( c \frac{dt}{d\tau}, \frac{dx_{(t)}}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \frac{dy_{(t)}}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \frac{dz_{(t)}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) \\ &= (c\gamma_{(\mathbf{v})}, \gamma_{(\mathbf{v})}v_{x(t)}, \gamma_{(\mathbf{v})}v_{y(t)}, \gamma_{(\mathbf{v})}v_{z(t)}) \\ &= \gamma_{(\mathbf{v})}(c, v_{x(t)}, v_{y(t)}, v_{z(t)}) \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{v_{(t)}^\mu := \frac{dx_{(t)}^\mu}{d\tau} = \gamma_{(\mathbf{v})}(c; \mathbf{v}_{(t)}) = \gamma_{(\mathbf{v})}(c, v_{x(t)}, v_{y(t)}, v_{z(t)})} \quad (27.18)$$

#### Norma

La norma (módulo) del cuadrivector velocidad es la velocidad de la luz, de la forma:

$$\begin{aligned} v_\mu v^\mu &= \sum_{\mu=0}^3 v_\mu v^\mu \\ &= v_0 v^0 + v_1 v^1 + v_2 v^2 + v_3 v^3 \\ &= [\gamma_{(\mathbf{v})}c] \cdot [\gamma_{(\mathbf{v})}c] + [-\gamma_{(\mathbf{v})}v_{x(t)}] \cdot [\gamma_{(\mathbf{v})}v_{x(t)}] + [-\gamma_{(\mathbf{v})}v_{y(t)}] \cdot [\gamma_{(\mathbf{v})}v_{y(t)}] + [-\gamma_{(\mathbf{v})}v_{z(t)}] \cdot [\gamma_{(\mathbf{v})}v_{z(t)}] \\ &= c^2 \gamma_{(\mathbf{v})}^2 - \gamma_{(\mathbf{v})}^2 v_{x(t)}^2 - \gamma_{(\mathbf{v})}^2 v_{y(t)}^2 - \gamma_{(\mathbf{v})}^2 v_{z(t)}^2 \\ &= \gamma_{(\mathbf{v})}^2 [c^2 - v_{x(t)}^2 - v_{y(t)}^2 - v_{z(t)}^2] \end{aligned}$$

Por la definición de gamma, tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1 - \frac{|\mathbf{v}_{(t)}|^2}{c^2}} [c^2 - |\mathbf{v}_{(t)}|^2] \\ &= \frac{1}{\frac{1}{c^2} [c^2 - |\mathbf{v}_{(t)}|^2]} [c^2 - |\mathbf{v}_{(t)}|^2] \\ &= c^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{v_\mu v^\mu = c^2} \quad (27.19)$$

### 27.3.4.3 Cuadrivector Aceleración

Se denomina *cuadrivector aceleración* o *cuadriaceleración* al cuadrivector contravariante que representa la derivada temporal (respecto al tiempo propio) del cuadrivector velocidad, de la forma:

$$\begin{aligned} a_{(t)}^\mu &:= \frac{dv_{(t)}^\mu}{d\tau} \\ &= \frac{d}{d\tau}(c\gamma_{(\mathbf{v})}, \gamma_{(\mathbf{v})}v_{x(t)}, \gamma_{(\mathbf{v})}v_{y(t)}, \gamma_{(\mathbf{v})}v_{z(t)}) \\ &= \left( c \frac{d\gamma_{(\mathbf{v})}}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \frac{d}{d\tau}[\gamma_{(\mathbf{v})}v_{x(t)}], \frac{d}{d\tau}[\gamma_{(\mathbf{v})}v_{y(t)}], \frac{d}{d\tau}[\gamma_{(\mathbf{v})}v_{z(t)}] \right) \\ &= \left( c\dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}\gamma_{(\mathbf{v})}, \frac{d\gamma_{(\mathbf{v})}}{dt} \frac{dt}{d\tau} v_{x(t)} + \gamma_{(\mathbf{v})} \frac{dv_{x(t)}}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\gamma_{(\mathbf{v})}}{dt} \frac{dt}{d\tau} v_{y(t)} + \gamma_{(\mathbf{v})} \frac{dv_{y(t)}}{dt} \frac{dt}{d\tau}, \frac{d\gamma_{(\mathbf{v})}}{dt} \frac{dt}{d\tau} v_{z(t)} + \gamma_{(\mathbf{v})} \frac{dv_{z(t)}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) \\ &= \left( c\dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}\gamma_{(\mathbf{v})}, \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}\gamma_{(\mathbf{v})}v_{x(t)} + \gamma_{(\mathbf{v})}^2 \alpha_{x(t)}, \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}\gamma_{(\mathbf{v})}v_{y(t)} + \gamma_{(\mathbf{v})}^2 \alpha_{y(t)}, \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}\gamma_{(\mathbf{v})}v_{z(t)} + \gamma_{(\mathbf{v})}^2 \alpha_{z(t)} \right) \\ &= \gamma_{(\mathbf{v})}(c\dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}, \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}v_{x(t)} + \gamma_{(\mathbf{v})}\alpha_{x(t)}, \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}v_{y(t)} + \gamma_{(\mathbf{v})}\alpha_{y(t)}, \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}v_{z(t)} + \gamma_{(\mathbf{v})}\alpha_{z(t)}) \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{a_{(t)}^\mu := \frac{dv_{(t)}^\mu}{d\tau} = \frac{d^2 x_{(t)}^\mu}{d\tau^2} = \gamma_{(\mathbf{v})}(c\dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}; \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}\mathbf{v}_{(t)} + \gamma_{(\mathbf{v})}\boldsymbol{\alpha}_{(t)}) = \gamma_{(\mathbf{v})}(c\dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}, \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}v_{x(t)} + \gamma_{(\mathbf{v})}\alpha_{x(t)}, \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}v_{y(t)} + \gamma_{(\mathbf{v})}\alpha_{y(t)}, \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}v_{z(t)} + \gamma_{(\mathbf{v})}\alpha_{z(t)})} \quad (27.20)$$

#### Observación: Ortogonalidad

Los cuadrivectores velocidad y aceleración son ortogonales, es decir:

$$\begin{aligned} v_\mu v^\mu &= c^2 \\ \frac{d}{d\tau}(v_\mu v^\mu) &= \frac{d}{d\tau}(c^2) \\ \frac{dv_\mu}{d\tau} v^\mu + v_\mu \frac{dv^\mu}{d\tau} &= 0 \\ \frac{dv^\mu}{d\tau} v_\mu + v_\mu \frac{dv^\mu}{d\tau} &= 0 \\ 2v_\mu \frac{dv^\mu}{d\tau} &= 0 \\ v_\mu a^\mu &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{v_\mu a^\mu = 0} \quad (27.21)$$

### 27.3.4.4 Cuadrivector Momento

Se denomina *cuadrivector momento* o *cuadrimomento lineal* al cuadrivector contravariante que representa el producto de la masa en reposo por el cuadrivector velocidad, de la forma:

$$\begin{aligned} p^\mu &:= m_0 v^\mu \\ &= m_0 \gamma_{(\mathbf{v})}(c, v_{x(t)}, v_{y(t)}, v_{z(t)}) \\ &= \left( \frac{\gamma_{(\mathbf{v})} m_0 c^2}{c}, m_0 \gamma_{(\mathbf{v})} v_{x(t)}, m_0 \gamma_{(\mathbf{v})} v_{y(t)}, m_0 \gamma_{(\mathbf{v})} v_{z(t)} \right) \end{aligned}$$

Por la definición de energía y momento lineal relativistas, tenemos:

$$= \left( \frac{E}{c}, p_x(t), p_y(t), p_z(t) \right)$$

$$\therefore \boxed{p_{(t)}^\mu := \left( \frac{E}{c}; \mathbf{p}_{(t)} \right) = \left( \frac{E}{c}, p_x(t), p_y(t), p_z(t) \right)} \quad (27.22)$$

### Relación Con La Velocidad

$$\boxed{p_{(t)}^\mu := m_0 v_{(t)}^\mu = m_0 \frac{dx_{(t)}^\mu}{d\tau} = m_0 \gamma_{(\mathbf{v})}(c, \mathbf{v}_{(t)}) = m_0 \gamma_{(\mathbf{v})}(c, v_x(t), v_y(t), v_z(t))} \quad (27.23)$$

### Norma

La norma (la longitud) de un cuadvivector posición está dado por el intervalo en el espacio-tiempo de Minkowski, de la forma:

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu &= \sum_{\mu=0}^3 p_\mu p^\mu \\ &= p_0 p^0 + p_1 p^1 + p_2 p^2 + p_3 p^3 \\ &= \left( \frac{E}{c} \right) \cdot \left( \frac{E}{c} \right) + [-p_x(t)] \cdot p_x(t) + [-p_y(t)] \cdot p_y(t) + [-p_z(t)] \cdot p_z(t) \\ &= \frac{E^2}{c^2} - p_{x(t)}^2 - p_{y(t)}^2 - p_{z(t)}^2 \\ &= \frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}_{(t)}|^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}_{(t)}|^2} \quad (27.24)$$

### Equivalencia Masa-Energía

$$\begin{aligned} p_\mu p^\mu &= \frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}_{(t)}|^2 \\ m_0^2 v_\mu v^\mu &= \frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}_{(t)}|^2 \end{aligned}$$

Por la norma del cuadvivector velocidad, tenemos:

$$\begin{aligned} m_0^2 c^2 &= \frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}_{(t)}|^2 \\ E &= \sqrt{|\mathbf{p}_{(t)}|^2 c^2 + m_0^2 c^4} \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{E = \sqrt{|\mathbf{p}_{(t)}|^2 c^2 + m_0^2 c^4}} \quad (27.25)$$

#### 27.3.4.5 Cuadvivector Fuerza

Se denomina *cuadvivector fuerza* o *cuadrifuerza* al cuadvivector contravariante que representa la derivada temporal (respecto al tiempo propio) del cuadvivector momento, de la forma:

$$\begin{aligned} f_{(t)}^\mu &:= \frac{dp_{(t)}^\mu}{d\tau} \\ &= \frac{d}{d\tau} [m_0 v_{(t)}^\mu] \\ &= m_0 \frac{d}{d\tau} [\gamma_{(\mathbf{v})}(c; \mathbf{v}_{(t)})] \\ &= m_0 \frac{d\gamma_{(\mathbf{v})}}{dt} \frac{dt}{d\tau}(c; \mathbf{v}_{(t)}) + m_0 \gamma_{(\mathbf{v})} \left( \frac{dc}{d\tau}; \frac{d\mathbf{v}_{(t)}}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right) \\ &= m_0 \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})} \gamma_{(\mathbf{v})}(c; \mathbf{v}_{(t)}) + m_0 \gamma_{(\mathbf{v})}(0; \boldsymbol{\alpha}_{(t)} \gamma_{(\mathbf{v})}) \\ &= m_0 \gamma_{(\mathbf{v})}(c \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}; \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})} \mathbf{v}_{(t)} + \gamma_{(\mathbf{v})} \boldsymbol{\alpha}_{(t)}) \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{f_{(t)}^\mu := \frac{dp_{(t)}^\mu}{d\tau} = m_0 \frac{dv_{(t)}^\mu}{d\tau} = m_0 \gamma_{(\mathbf{v})}(c \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}; \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})} \mathbf{v}_{(t)} + \gamma_{(\mathbf{v})} \boldsymbol{\alpha}_{(t)}) = m_0 \gamma_{(\mathbf{v})}(c \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})}, \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})} v_x(t) + \gamma_{(\mathbf{v})} \alpha_x(t), \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})} v_y(t) + \gamma_{(\mathbf{v})} \alpha_y(t), \dot{\gamma}_{(\mathbf{v})} v_z(t) + \gamma_{(\mathbf{v})} \alpha_z(t))} \quad (27.26)$$

#### 27.3.4.6 Fuerza De Minkowski

Se denomina *fuerza de Minkowski* al cuadvivector contravariante que representa la fuerza electromagnética y la potencia electromagnética que posee el campo electromagnético mediante el cuadritensor campo electromagnético, y se define como:

$$\begin{aligned} K^\mu &:= q F^{\mu\nu} v_\nu \\ &= q \sum_{\nu=0}^3 F^{\mu\nu} v_\nu \\ &= q(F^{\mu 0} v_0 + F^{\mu 1} v_1 + F^{\mu 2} v_2 + F^{\mu 3} v_3) \\ &= q(F^{00} v_0 + F^{01} v_1 + F^{02} v_2 + F^{03} v_3, F^{10} v_0 + F^{11} v_1 + F^{12} v_2 + F^{13} v_3, F^{20} v_0 + F^{21} v_1 + F^{22} v_2 + F^{23} v_3, F^{30} v_0 + F^{31} v_1 + F^{32} v_2 + F^{33} v_3) \end{aligned}$$

Como las diagonales del tensor campo electromagnético son nulas, tenemos que:

$$\begin{aligned} &= q(0.v_0 + F^{01} v_1 + F^{02} v_2 + F^{03} v_3, F^{10} v_0 + 0.v_1 + F^{12} v_2 + F^{13} v_3, F^{20} v_0 + F^{21} v_1 + 0.v_2 + F^{23} v_3, F^{30} v_0 + F^{31} v_1 + F^{32} v_2 + 0.v_3) \\ &= q(0 + F^{01} v_1 + F^{02} v_2 + F^{03} v_3, F^{10} v_0 + 0 + F^{12} v_2 + F^{13} v_3, F^{20} v_0 + F^{21} v_1 + 0 + F^{23} v_3, F^{30} v_0 + F^{31} v_1 + F^{32} v_2 + 0) \\ &= q(F^{01} v_1 + F^{02} v_2 + F^{03} v_3, F^{10} v_0 + F^{12} v_2 + F^{13} v_3, F^{20} v_0 + F^{21} v_1 + F^{23} v_3, F^{30} v_0 + F^{31} v_1 + F^{32} v_2) \\ &= q \left( \left( -\frac{E_x}{c} \right) \cdot (-\gamma v_x) + \left( -\frac{E_y}{c} \right) \cdot (-\gamma v_y) + \left( -\frac{E_z}{c} \right) \cdot (-\gamma v_z), \frac{E_x}{c} \cdot \gamma c + (-B_z)(-\gamma v_y) + B_y(-\gamma v_z), \frac{E_y}{c} \cdot \gamma c + B_z(-\gamma v_x) + (-B_x)(-\gamma v_z), \frac{E_z}{c} \cdot \gamma c + (-B_y)(-\gamma v_x) + B_x(-\gamma v_y) \right) \\ &= q \left( \frac{\gamma}{c} (E_x v_x + E_y v_y + E_z v_z), \gamma E_x + \gamma (v_y B_z - v_z B_y), \gamma E_y + \gamma (v_z B_x - v_x B_z), \gamma E_z + \gamma (v_x B_y - v_y B_x) \right) \\ &= \gamma_{(\mathbf{v})} \left( \frac{1}{c} (q \mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)}), q E_x + q [\mathbf{v}_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}]_x, q E_y + q [\mathbf{v}_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}]_y, q E_z + q [\mathbf{v}_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}]_z \right) \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{v}_{(t)} \perp \mathbf{v}_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} &= \gamma_{(\mathbf{v})} \left( \frac{1}{c} q [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \mathbf{v}_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \cdot \mathbf{v}_{(t)}, q [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} + \mathbf{v}_{(t)} \times \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \right) \\ &= \gamma_{(\mathbf{v})} \left( \frac{1}{c} (\mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)}), \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{K_{(\mathbf{r},t)}^\mu := \gamma_{(\mathbf{v})} \left( \frac{1}{c} (\mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)}), \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \right) = q \gamma_{(\mathbf{v})} \left( \frac{1}{c} (\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)}), E_{x(\mathbf{r},t)} + v_{y(t)} B_{z(\mathbf{r},t)} - v_{z(t)} B_{y(\mathbf{r},t)}, E_{y(\mathbf{r},t)} + v_{z(t)} B_{x(\mathbf{r},t)} - v_{x(t)} B_{z(\mathbf{r},t)}, E_{z(\mathbf{r},t)} + v_{x(t)} B_{y(\mathbf{r},t)} - v_{y(t)} B_{x(\mathbf{r},t)} \right)} \quad (27.27)$$

### Observación

Por la segunda ley de Newton, tenemos que:

$$f_{(t)}^\mu := \frac{dp_{(t)}^\mu}{d\tau}$$

Si el cuadrivector fuerza es la fuerza de Minkowski, tenemos que:

$$\begin{aligned} K_{(\mathbf{r},t)}^\mu &= \frac{dp_{(t)}^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau} \\ \gamma_{(\mathbf{v})} \left( \frac{1}{c} (\mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)}), \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \right) &= \frac{dp_{(t)}^\mu}{dt} \gamma_{(\mathbf{v})} \\ \left( \frac{1}{c} (\mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)}), \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \right) &= \frac{d}{dt} [m_0 \gamma_{(\mathbf{v})} (c, \mathbf{v}_{(t)})] \end{aligned}$$

Por la definición de cuadrivector momento, tenemos que:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{c} (\mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)}), \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \right) &= \left( \frac{d}{dt} [m_0 \gamma_{(\mathbf{v})} c], \frac{d}{dt} [m_0 \gamma_{(\mathbf{v})} \mathbf{v}_{(t)}] \right) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{c} (\mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)}) = \frac{d}{dt} [m_0 \gamma_{(\mathbf{v})} c] \\ \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} = \frac{d}{dt} [m_0 \gamma_{(\mathbf{v})} \mathbf{v}_{(t)}] \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)} = \frac{d}{dt} [m_0 \gamma_{(\mathbf{v})} c^2] \\ \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} = \frac{d}{dt} [m_0 \gamma_{(\mathbf{v})} \mathbf{v}_{(t)}] \end{cases} \end{aligned}$$

Por la definición de energía y momento lineal relativistas, tenemos que:

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)} = \frac{dE_{(t)}}{dt} \\ \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} = \frac{d\mathbf{p}_{(t)}}{dt} \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{\begin{cases} \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)} = \frac{dE_{(t)}}{dt} \\ \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} = \frac{d\mathbf{p}_{(t)}}{dt} \end{cases}} \quad (27.28)$$

### Segunda Ley De Newton

La fuerza de Minkowski satisface la segunda ley de Newton para la fuerza electromagnética, de la forma:

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} = \frac{d\mathbf{p}_{(t)}}{dt}} \quad (27.29)$$

### Potencia Mecánica

De la fuerza de Minkowski se desprende una expresión para la potencia electromagnética a partir de la fuerza electromagnética y la velocidad, de la forma:

$$\boxed{P_{(t)} := \frac{dE_{(t)}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{em}(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{v}_{(t)}} \quad (27.30)$$

#### 27.3.4.7 Cuadrivector Vector De Onda

Se denomina *cuadrivector vector de onda* al cuadrivector contravariante que representa el vector de onda de una onda plana en el espacio-tiempo de Minkowski, y es de la forma:

$$\boxed{k_{(t)}^\mu := \left( \frac{\omega}{c}; \mathbf{k}_{(t)} \right) = \left( \frac{\omega}{c}, k_{x(t)}, k_{y(t)}, k_{z(t)} \right)} \quad (27.31)$$

#### 27.3.4.8 Cuadrivector Corriente

Se denomina *cuadrivector corriente* O *cuadricorriente* al cuadrivector contravariante que representa la distribución volumétrica de carga eléctrica y a la densidad volumétrica de corriente eléctrica en el espacio, y se define como:

$$\begin{aligned} J_{(\mathbf{r},t)}^\mu &:= (c\rho_{(\mathbf{r},t)}; \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)}) \\ &= (c\rho_{(\mathbf{r},t)}, J_{x(\mathbf{r},t)}, J_{y(\mathbf{r},t)}, J_{z(\mathbf{r},t)}) \\ &= (c\rho_{(\mathbf{r},t)}, \rho_{(\mathbf{r},t)} v_{x(t)}, \rho_{(\mathbf{r},t)} v_{y(t)}, \rho_{(\mathbf{r},t)} v_{z(t)}) \\ &= \rho_{(\mathbf{r},t)} (c, v_{x(t)}, v_{y(t)}, v_{z(t)}) \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{J_{(\mathbf{r},t)}^\mu := (c\rho_{(\mathbf{r},t)}; \mathbf{J}_{(\mathbf{r},t)}) = (c\rho_{(\mathbf{r},t)}, J_{x(\mathbf{r},t)}, J_{y(\mathbf{r},t)}, J_{z(\mathbf{r},t)})} \quad (27.32)$$

### Cuadrivector Corriente En Función De La Velocidad

$$\boxed{J_{(\mathbf{r},t)}^\mu := \rho_{(\mathbf{r},t)} (c, \mathbf{v}_{(t)}) = \rho_{(\mathbf{r},t)} (c, v_{x(\mathbf{r},t)}, v_{y(\mathbf{r},t)}, v_{z(\mathbf{r},t)})} \quad (27.33)$$

#### 27.3.4.9 Cuadrivector Potencial

Se denomina *cuadrivector potencial* o *cuadripotencial* al cuadrivector contravariante que representa el potencial electromagnético en el espacio, y se define como:

$$\boxed{A_{(\mathbf{r},t)}^\mu := \left( \frac{\phi_{(\mathbf{r},t)}}{c}; \mathbf{A}_{(\mathbf{r},t)} \right) = \left( \frac{\phi_{(\mathbf{r},t)}}{c}, A_{x(\mathbf{r},t)}, A_{y(\mathbf{r},t)}, A_{z(\mathbf{r},t)} \right)} \quad (27.34)$$

## 27.4 Cuadritensores

Los cuadritensores son matrices de cuatro dimensiones que pueden tener distinto rango. Cualquier producto entre cuadritensores o cuadvectores en el que dos índices se encuentran repetidos, corresponde a sumar sobre dichos índices de acuerdo al convenio de suma en notación de Einstein.

### 27.4.1 Cuadritensor Contravariante

Se denomina *cuadritensor contravariante* a todo cuadritensor de la forma:

$$T^{\mu\nu} := \left( \begin{array}{c|c} T^{00} & T^{0j} \\ \hline T^{i0} & T^{ij} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} 0 : \text{parte temporal} \\ i, j : \text{parte espacial} \end{cases} \quad (27.35)$$

#### Transformación

Los cuadritensores contravariantes transforman de la forma:

$$T'^{\mu\nu} := \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta} = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 \left( \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta} \right) \quad (27.36)$$

### 27.4.2 Cuadritensor Covariante

Se denomina *cuadritensor covariante* a todo cuadritensor de la forma:

$$T_{\mu\nu} := \left( \begin{array}{c|c} T_{00} & T_{0j} \\ \hline T_{i0} & T_{ij} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} T_{00} & T_{01} & T_{02} & T_{03} \\ T_{10} & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{20} & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{30} & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} 0 : \text{parte temporal} \\ i, j : \text{parte espacial} \end{cases} \quad (27.37)$$

#### Transformación

Los cuadritensores covariantes transforman de la forma:

$$T'_{\mu\nu} := \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 \left( \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T_{\alpha\beta} \right) \quad (27.38)$$

### 27.4.3 Cuadritensor Mixto

Se denomina *cuadritensor mixto* a todo cuadritensor de la forma:

$$T^{\mu}_{\nu} := \left( \begin{array}{c|c} T^0_0 & T^0_j \\ \hline T^i_0 & T^i_j \end{array} \right) = \begin{pmatrix} T^0_0 & T^0_1 & T^0_2 & T^0_3 \\ T^1_0 & T^1_1 & T^1_2 & T^1_3 \\ T^2_0 & T^2_1 & T^2_2 & T^2_3 \\ T^3_0 & T^3_1 & T^3_2 & T^3_3 \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} 0 : \text{parte temporal} \\ i, j : \text{parte espacial} \end{cases} \quad (27.39)$$

#### Transformación

Los cuadritensores mixtos transforman de la forma:

$$T'^{\mu}_{\nu} := \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T^{\alpha}_{\beta} = \sum_{\alpha, \beta=0}^3 \left( \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} T^{\alpha}_{\beta} \right) \quad (27.40)$$

### 27.4.4 Operaciones

#### 27.4.4.1 Producto Con Un Cuadvector Covariante

$$x^{\mu} = T^{\mu\nu} y_{\nu} := \sum_{\nu=0}^3 T^{\mu\nu} y_{\nu} = T^{\mu 0} y_0 + T^{\mu 1} y_1 + T^{\mu 2} y_2 + T^{\mu 3} y_3 \quad (27.41)$$

#### 27.4.4.2 Producto Con Un Cuadvector Contravariante

$$x_{\mu} = T_{\mu\nu} y^{\nu} := \sum_{\nu=0}^3 T_{\mu\nu} y^{\nu} = T_{\mu 0} y^0 + T_{\mu 1} y^1 + T_{\mu 2} y^2 + T_{\mu 3} y^3 \quad (27.42)$$

#### 27.4.4.3 Conversión

##### Cuadritensor Contravariante A Covariante

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} T^{\alpha\beta} \quad (27.43)$$

##### Cuadriensor Covariante A Contravariante

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} T_{\alpha\beta} \quad (27.44)$$

##### Cuadritensor Mixto

$$\begin{cases} T^{\mu}_{\nu} = g_{\alpha\nu} T^{\mu\alpha} \\ T^{\nu}_{\mu} = g_{\mu\beta} T^{\beta\nu} \\ T^{\nu}_{\alpha} = g_{\alpha\mu} T^{\mu}_{\nu} \\ T^{\mu}_{\beta} = g^{\mu\nu} T^{\beta}_{\nu} \end{cases} \quad (27.45)$$

### 27.4.5 Cuadritensores Comunes

#### 27.4.5.1 Cuadritensor Momento

Se denomina *cuadritensor momento* o *cuadrimomento angular* al cuadritensor de segundo orden que representa el producto tensorial antisimetrizado del cuadvivector momento con el cuadvivector posición, y es de la forma:

$$L^{\mu\nu} := \begin{pmatrix} 0 & r_x & r_y & r_z \\ -r_x & 0 & L_z & -L_y \\ -r_y & -L_z & 0 & L_x \\ -r_z & L_y & -L_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ctp_x - \frac{x E}{c} & ctp_y - \frac{y E}{c} & ctp_z - \frac{z E}{c} \\ \frac{x E}{c} - ctp_x & 0 & xp_y - yp_x & xp_z - zp_x \\ \frac{y E}{c} - ctp_y & yp_x - xp_y & 0 & yp_z - zp_y \\ \frac{z E}{c} - ctp_z & zp_x - xp_z & zp_y - yp_z & 0 \end{pmatrix} \quad (27.46)$$

#### 27.4.5.2 Cuadritensor Campo Electromagnético

Se denomina *cuadritensor campo electromagnético* al cuadritensor de segundo orden que representa al campo eléctrico y magnético en todo el espacio, y es de la forma:

##### Forma Contravariante

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (27.47)$$

##### Relación Con El Cuadvivector Potencial

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (27.48)$$

##### Forma Covariante

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (27.49)$$

##### Relación Con El Cuadvivector Potencial

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (27.50)$$

##### Propiedades

- Antisimetría:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad (27.51)$$

- Traza:

$$F^\mu_\mu = 0 \quad (27.52)$$

- Producto Interno:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 \left[ \frac{1}{c^2} |\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}|^2 + |\mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}|^2 \right] \quad (27.53)$$

- Invariante Pseudo-escalar:

$$F_{\mu\nu} G^{\mu\nu} = G_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} = -4 [\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}] \quad (27.54)$$

Es decir:

$$\text{Si } \mathbf{E} \perp \mathbf{B} \text{ en el sistema S} \implies \mathbf{E}' \perp \mathbf{B}' \text{ en todo sistema S'}. \quad (27.55)$$

$$\text{Si } |\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2 > 0 \text{ en el sistema S} \implies |\mathbf{E}'|^2 - |\mathbf{B}'|^2 > 0 \text{ en todo sistema S'}. \quad (27.56)$$

- Determinante:

$$\det(F^{\mu\nu}) = \frac{1}{c^2} (\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} \cdot \mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)})^2 \quad (27.55)$$

#### 27.4.5.3 Cuadritensor Dual

Se denomina *cuadritensor dual* al cuadritensor de segundo orden que representa el campo magnético en todo el espacio, y es de la forma:

$$G^{\mu\nu} := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & \frac{E_z}{c} & -\frac{E_y}{c} \\ B_y & -\frac{E_z}{c} & 0 & \frac{E_x}{c} \\ B_z & \frac{E_y}{c} & -\frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix} \quad (27.56)$$

Forma Covariante

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -\frac{E_z}{c} & \frac{E_y}{c} \\ -B_y & \frac{E_z}{c} & 0 & -\frac{E_x}{c} \\ -B_z & -\frac{E_y}{c} & \frac{E_x}{c} & 0 \end{pmatrix}$$

(27.57)

27.4.5.4 Cuadritensor De Energía-Momento

Se denomina *cuadritensor de energía-momento* al cuadritensor de segundo orden que representa la contribución debida al tensor de esfuerzos de Maxwell  $\sigma_{ij}$  y al tensor de campo electromagnético  $F^{\mu\nu}$  debido a un campo electromagnético con vector de Poynting  $\mathbf{S}$ , y es de la forma:

$$T^{\mu\nu} := \frac{1}{\mu_0} \left( F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}_{(\mathbf{r},t)}|^2 & \frac{S_x}{c} & \frac{S_y}{c} & \frac{S_z}{c} \\ \frac{S_x}{c} & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ \frac{S_y}{c} & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ \frac{S_z}{c} & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

(27.58)

Propiedades

- Simetría:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$$

(27.59)

- Traza:

$$T^{\mu}_{\mu} = 0$$

(27.60)

Ley De Conservación

Tanto la conservación del momento lineal como de la energía mecánica pueden escribirse mediante la divergencia del tensor de energía-momento, donde  $f_{\mu}$  es la fuerza electromagnética espacio-temporal y por unidad de volumen en la materia, de la forma:

$$\partial_{\nu} T^{\mu\nu} + \eta^{\mu\alpha} f_{\alpha} = 0$$

(27.61)

## 27.5 Operadores

### 27.5.1 Operador Derivada Parcial

$$\partial^{\mu} := \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, -\nabla \right)$$

(27.62)

### 27.5.2 Operador D’Alembertiano

$$\begin{aligned} \partial_{\mu} \partial^{\mu} &= \sum_{\mu=0}^3 \partial_{\mu} \partial^{\mu} \\ &= \partial_0 \partial^0 + \partial_1 \partial^1 + \partial_2 \partial^2 + \partial_3 \partial^3 \\ &= \frac{\partial}{\partial x^0} \cdot \frac{\partial}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial x^1} \cdot \left[ -\frac{\partial}{\partial x^1} \right] + \frac{\partial}{\partial x^2} \cdot \left[ -\frac{\partial}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial}{\partial x^3} \cdot \left[ -\frac{\partial}{\partial x^3} \right] \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \square := \partial_{\mu} \partial^{\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

(27.63)

## 27.6 Formulación Covariante Del Electromagnetismo Clásico

- $$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = \mu_0 J^{\nu}$$

(27.64)

- $$\frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} = 0$$

(27.65)

- Identidad De Bianchi:
$$\epsilon^{\delta\alpha\beta\gamma} \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial F_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial F_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0$$

(27.66)

$$\partial_{\gamma} F_{\alpha\beta} + \partial_{\alpha} F_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} F_{\gamma\alpha} = 0$$

(27.67)

- $$F^{\alpha\beta} = \frac{\partial A^{\beta}}{\partial x_{\alpha}} - \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x_{\beta}}$$

(27.68)

- Ec’s maxwell in lorentz gauge:
$$\square A^{\mu} = \mu_0 J^{\mu}$$

(27.69)

- $$F'^{\alpha\beta} = \Lambda_{\mu}^{\alpha} \Lambda_{\nu}^{\beta} F^{\mu\nu}$$

(27.70)



Ecuación De Continuidad

$$\frac{\partial J^\mu_{(\mathbf{r},t)}}{\partial x^\mu} = 0$$

(27.71)

Gauge De Lorenz

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

(27.72)

27.6.1 Transformación De Lorentz

---

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & \Lambda_2^0 & \Lambda_3^0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 \\ \Lambda_0^2 & \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 \\ \Lambda_0^3 & \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$$

(27.73)

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

(27.74)

27.6.2 Ondas Planas

---

En fomulación covariante, una onda plana se escribe de la forma:

$$\mathbf{E}_{(\mathbf{r},t)} = \mathbf{E}_0 e^{ik_\mu x^\mu}$$

(27.75)

Observación

$$k'_\mu x'^\mu = k_\mu x^\mu$$

(27.76)

Observación

La fase de las ondas es un invariante relativista.

27.7 Formulación Lagrangiana Del Electromagnetismo Clásico

---

## Apéndice

# APÉNDICE A: CIENCIAS MATEMÁTICAS

## A.1 Identidades De Números

### A.1.1 Identidades Del Valor Absoluto

	Identidad
•	$ a  = \pm a$
•	$ -a  =  a $
•	$\sqrt{a^2} =  a $
•	$ a ^2 = a^2$
•	$ a ^n =  a^n $
•	$ a + b + c + \dots + n  \leq  a  +  b  +  c  + \dots +  n $
•	$ a^n + b^n + c^n + \dots + z^n  = a^n + b^n + c^n + \dots + z^n$ , con $n$ potencias pares.
•	$ a  =  b  \Rightarrow a = \pm b \vee b = \pm a$
•	$ \lambda a  =  \lambda  a $
•	$ ab  =  a  b $
•	$\left \frac{a}{b}\right  = \frac{ a }{ b }$ , con $b \neq 0$
•	$ a - b  = 0 \Leftrightarrow a = b$
•	$ a  \geq 0$
•	$- a  \leq a \leq  a $
•	$ a - b  \leq  a - c  +  c - b $
•	$ a - b  \geq   a  -  b  $

### A.1.2 Identidades De La Potenciación Y Radicación

	Potenciación	Radicación
•	$x^0 = 1$	$\sqrt[0]{x} = \infty$
•	$x^1 = x$	$\sqrt[1]{x} = x$
•	$x^{n+m} = x^n x^m$	
•	$x^{n-m} = \frac{x^n}{x^m}$	
•	$x^{nm} = (x^n)^m$	$\sqrt[nm]{x} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}}$
•	$\frac{x^n}{x^m}$	$\sqrt[m]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^m$
•	$(xy)^n = x^n y^n$	$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}$
•	$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$	$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$
•	$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$	$\left(\sqrt[n]{\frac{x}{y}}\right)^{-1} = \sqrt[n]{\frac{y}{x}}$
•		$y \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{xy^n}$

### A.1.3 Identidades Del Logaritmo

	Identidad
•	$\log_a(x) = b \Leftrightarrow a^b = x$
•	$\log_a(1) = 0$
•	$\log_a(a) = 1$
•	$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
•	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) = -\log_a\left(\frac{y}{x}\right)$
•	$\log_a\left(x^{\frac{n}{m}}\right) = \frac{n}{m} \log_a(x) = \log_a\left(\sqrt[m]{x^n}\right)$
•	$a^{\log_a(x)} = x$
•	$\log_a(a^x) = x$
•	$\log_{a^m}(x^n) = \frac{n}{m} \log_a x \Leftrightarrow m \neq 0$
•	$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)} = \frac{1}{\log_b(a)}$
•	$\log_{\sqrt[n]{b}}(b) = a$
•	$\log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x)$
•	$\log_a(b) \log_b(x) = \log_a(x)$
•	$^{\lceil \log_a(b) \rceil} \sqrt[n]{b} = a$

## A.2 Identidades De Trigonometría

### A.2.1 Identidades Trigonométricas

1.2.1.1 Funciones Trigonométricas

Función	Definición	Función Inversa	Definición
Seno	$\text{sen}(x)$	Arcoseno	$\text{sen}^{-1}(x) := \arcsen(x)$
Coseno	$\cos(x)$	Arcocoseno	$\cos^{-1}(x) := \arccos(x)$
Tangente	$\tan(x) := \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$	Arcotangente	$\tan^{-1}(x) := \arctan(x)$
Cosecante	$\csc(x) := \frac{1}{\text{sen}(x)}$	Arcocosecante	$\csc^{-1}(x) := \text{arccsc}(x)$
Secante	$\sec(x) := \frac{1}{\cos(x)}$	Arcosecante	$\sec^{-1}(x) := \text{arcsec}(x)$
Cotangente	$\cot(x) := \frac{1}{\tan(x)}$	Arcocotangente	$\cot^{-1}(x) := \text{arccot}(x)$

1.2.1.2 Relación Con Las Funciones Trigonométricas Hiperbólicas

Función	Relación
Seno	$\text{sen}(x) = -i \sinh(ix)$
Coseno	$\cos(x) = \cosh(ix)$

1.2.1.3 Relación Con La Función Exponencial

Función	Relación
Seno	$\text{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
Coseno	$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

1.2.1.4 Identidades Pitagóricas

	Expresión
•	$\cos^2(\lambda x) + \text{sen}^2(\lambda x) = 1$
•	$\sec^2(\lambda x) - \tan^2(\lambda x) = 1$
•	$\csc^2(\lambda x) - \cot^2(\lambda x) = 1$

1.2.1.5 Relación Entre Funciones Trigonométricas

Función	Seno	Coseno	Tangente	Cosecante	Secante	Cotangente
Seno	$\text{sen}(x)$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2(x)}$	$\pm \frac{\tan(x)}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$	$\frac{1}{\csc(x)}$	$\pm \frac{\sqrt{\sec^2(x) - 1}}{\sec(x)}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2(x)}}$
Coseno	$\pm \sqrt{1 - \text{sen}^2(x)}$	$\cos(x)$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}$	$\pm \frac{\sqrt{\csc^2(x) - 1}}{\csc(x)}$	$\frac{1}{\sec(x)}$	$\pm \frac{\cot(x)}{\sqrt{1 + \cot^2(x)}}$
Tangente	$\pm \frac{\text{sen}(x)}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(x)}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2(x)}}{\cos(x)}$	$\tan(x)$	$\pm \frac{1}{\sqrt{\csc^2(x) - 1}}$	$\pm \sqrt{\sec^2(x) - 1}$	$\frac{1}{\cot(x)}$
Cosecante	$\frac{1}{\text{sen}(x)}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \tan^2(x)}}{\tan(x)}$	$\csc(x)$	$\pm \frac{\sec(x)}{\sqrt{\sec^2(x) - 1}}$	$\pm \sqrt{1 + \cot^2(x)}$
Secante	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(x)}}$	$\frac{1}{\cos(x)}$	$\pm \sqrt{1 + \tan^2(x)}$	$\pm \frac{\csc(x)}{\sqrt{\csc^2(x) - 1}}$	$\sec(x)$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \cot^2(x)}}{\cot(x)}$
Cotangente	$\pm \frac{\sqrt{1 - \text{sen}^2(x)}}{\text{sen}(x)}$	$\pm \frac{\cos(x)}{\sqrt{1 - \cos^2(x)}}$	$\frac{1}{\tan(x)}$	$\pm \sqrt{\csc^2(x) - 1}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{\sec^2(x) - 1}}$	$\cot(x)$

1.2.1.6 Periodicidad

Función	Período	Cuarto De Período	Medio Período	Período Completo
Seno	$2\pi$	$\text{sen}\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos(x)$	$\text{sen}(x + \pi) = -\text{sen}(x)$	$\text{sen}(x + 2k\pi) = \text{sen}(x)$
Coseno	$2\pi$	$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \text{sen}(x)$	$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$	$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$
Tangente	$\pi$	$\tan\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan(x) \pm 1}{1 \mp \tan(x)}$	$\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot(x)$	$\tan(x + k\pi) = \tan(x)$
Cosecante	$2\pi$	$\csc\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \sec(x)$	$\csc(x + \pi) = -\csc(x)$	$\csc(x + 2k\pi) = \csc(x)$
Secante	$2\pi$	$\sec\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \csc(x)$	$\sec(x + \pi) = -\sec(x)$	$\sec(x + 2k\pi) = \sec(x)$
Cotangente	$\pi$	$\cot\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cot(x) \mp 1}{1 \pm \cot(x)}$	$\cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan(x)$	$\cot(x + k\pi) = \cot(x)$

1.2.1.7 Reflexiones

Función	En $\varphi = 0$	En $\varphi = \frac{\pi}{4}$	En $\varphi = \frac{\pi}{2}$	En $\varphi = \frac{3\pi}{4}$	En $\varphi = \pi$
Seno	$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$	$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$	$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen}(x)$	$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos(x)$	$\operatorname{sen}(2\pi - x) = -\operatorname{sen}(x)$
Coseno	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen}(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{sen}(x)$	$\cos(2\pi - x) = \cos(x)$
Tangente	$\tan(-x) = -\tan(x)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$	$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cot(x)$	$\tan(2\pi - x) = -\tan(x)$
Cosecante	$\csc(-x) = -\csc(x)$	$\csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec(x)$	$\csc(\pi - x) = \csc(x)$	$\csc\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\sec(x)$	$\csc(2\pi - x) = -\csc(x)$
Secante	$\sec(-x) = \sec(x)$	$\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc(x)$	$\sec(\pi - x) = -\sec(x)$	$\sec\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\csc(x)$	$\sec(2\pi - x) = \sec(x)$
Cotangente	$\cot(-x) = -\cot(x)$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$	$\cot(\pi - x) = -\cot(x)$	$\cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \tan(x)$	$\cot(2\pi - x) = -\cot(x)$
Arcoseno	$\arcsen(-x) = -\arcsen(x)$				
Arccoseno	$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$				
Arcotangente	$\arctan(-x) = -\arctan(x)$				
Arcocosecante	$\operatorname{arccsc}(-x) = -\operatorname{arccsc}(x)$				
Arcosecante	$\operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec}(x)$				
Arcocotangente	$\operatorname{arccot}(-x) = -\operatorname{arccot}(x)$				

1.2.1.8 Suma Y Resta De Ángulos

Función	Expresión
Seno	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x) \cos(y) \pm \cos(x) \operatorname{sen}(y)$
Coseno	$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)$
Tangente	$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \tan(y)}$
Cosecante	$\csc(x \pm y) = \frac{\sec(x) \sec(y) \csc(x) \csc(y)}{\sec(x) \csc(y) \pm \csc(x) \sec(y)}$
Secante	$\sec(x \pm y) = \frac{\sec(x) \sec(y) \csc(x) \csc(y)}{\csc(x) \csc(y) \mp \sec(x) \sec(y)}$
Cotangente	$\cot(x \pm y) = \frac{\cot(x) \cot(y) \mp 1}{\cot(y) \pm \cot(x)}$

1.2.1.9 Ángulo Múltiple

Función	Ángulo Medio	Ángulo Doble	Ángulo Triple	Ángulo $n$ -ésimo
Seno	$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$	$\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen}(x) \cos(x)$	$\operatorname{sen}(3x) = 3 \operatorname{sen}(x) - 4 \operatorname{sen}^3(x)$	$\operatorname{sen}(nx) = \sum_{k \text{ impar}} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) \operatorname{sen}^k(x)$
Coseno	$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$	$\cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)$	$\cos(3x) = 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$	$\cos(nx) = \sum_{k \text{ par}} (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \cos^{n-k}(x) \operatorname{sen}^k(x)$
Tangente	$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$	$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$	$\tan(3x) = \frac{3 \tan(x) - \tan^3(x)}{1 - 3 \tan^2(x)}$	$\tan(nx) = \frac{\sum_{k \text{ impar}} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \binom{n}{k} \tan^k(x)}{\sum_{k \text{ par}} (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \tan^k(x)}$
Cosecante	$\csc\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{2}{1 - \cos(x)}}$	$\csc(2x) = \frac{\csc(x) \sec(x)}{2}$	$\csc(3x) = \frac{\csc^3(x)}{3 \csc^2(x) - 4}$	...
Secante	$\sec\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{2}{1 + \cos(x)}}$	$\sec(2x) = \frac{\sec^2(x)}{2 - \sec^2(x)}$	$\sec(3x) = \frac{\sec^3(x)}{4 - 3 \sec^2(x)}$	...
Cotangente	$\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}$	$\cot(2x) = \frac{\cot^2(x) - 1}{2 \cot(x)}$	$\cot(3x) = \frac{3 \cot(x) - \cot^3(x)}{1 - 3 \cot^2(x)}$	...

1.2.1.10 Potencia

Función	Cuadrada	Cúbica	Cuártica	Potencia $n$ -ésima
Seno	$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$	$\operatorname{sen}^3(x) = \frac{3 \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(3x)}{4}$	$\operatorname{sen}^4(x) = \frac{3 - 4 \cos(2x) + \cos(4x)}{8}$	$\operatorname{sen}^n(x) = \begin{cases} \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{n-2k-1}{2}} \binom{n}{k} \operatorname{sen}[(n-2k)x] & \text{para todo } n \text{ impar} \\ \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} (-1)^{\frac{n-2k}{2}} \binom{n}{k} \cos[(n-2k)x] & \text{para todo } n \text{ par} \end{cases}$
Coseno	$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$	$\cos^3(x) = \frac{3 \cos(x) + \cos(3x)}{4}$	$\cos^4(x) = \frac{3 + 4 \cos(2x) + \cos(4x)}{8}$	$\cos^n(x) = \begin{cases} \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} \cos[(n-2k)x] & \text{para todo } n \text{ impar} \\ \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n}{2}} + \frac{2}{2^n} \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} \binom{n}{k} \cos[(n-2k)x] & \text{para todo } n \text{ par} \end{cases}$
Tangente	$\tan^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{\cos(2x) - 1}$	$\tan^3(x) = \frac{3 \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(3x)}{3 \cos(x) + \cos(3x)}$	$\tan^4(x) = \frac{3 - 4 \cos(2x) + \cos(4x)}{3 + 4 \cos(2x) + \cos(4x)}$	...
Cosecante	$\csc^2(x) = \frac{2}{1 - \cos(2x)}$	$\csc^3(x) = \frac{4}{3 \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(3x)}$	$\csc^4(x) = \frac{8}{3 - 4 \cos(2x) + \cos(4x)}$	...
Secante	$\sec^2(x) = \frac{2}{\cos(2x) + 1}$	$\sec^3(x) = \frac{4}{3 \cos(x) + \cos(3x)}$	$\sec^4(x) = \frac{8}{3 + 4 \cos(2x) + \cos(4x)}$	...
Cotangente	$\cot^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{1 - \cos(2x)}$	$\cot^3(x) = \frac{3 \cos(x) + \cos(3x)}{3 \operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(3x)}$	$\cot^4(x) = \frac{3 + 4 \cos(2x) + \cos(4x)}{3 - 4 \cos(2x) + \cos(4x)}$	...

1.2.1.11    Identidades De Suma A Producto

	Suma A Producto
•	$\operatorname{sen}(x) \pm \operatorname{sen}(y) = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cos\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$
•	$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cos\left(\frac{x - y}{2}\right)$
•	$\cos(x) - \cos(y) = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{x + y}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x - y}{2}\right)$
•	$\tan(x) \pm \tan(y) = \frac{\operatorname{sen}(x \pm y)}{\cos(x) \cos(y)}$

1.2.1.12    Identidades De Producto A Suma

	Suma A Producto
•	$\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y) = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{2}$
•	$\cos(x) \cos(y) = \frac{\cos(x - y) + \cos(x + y)}{2}$
•	$\operatorname{sen}(x) \cos(y) = \frac{\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)}{2}$
•	$\cos(x) \operatorname{sen}(y) = \frac{\operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y)}{2}$
•	$\tan(x) \tan(y) = \frac{\cos(x - y) - \cos(x + y)}{\cos(x - y) + \cos(x + y)}$

A.2.2    Identidades Trigonométricas Hiperbólicas

1.2.2.1    Funciones Trigonométricas Hiperbólicas

Función	Definición	Notación Exponencial	Función Inversa	Definición	Notación Exponencial
Seno Hiperbólico	$\operatorname{senh}(x)$	$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$	Arcoseno Hiperbólico	$\operatorname{senh}^{-1}(x) := \operatorname{arcsenh}(x)$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$
Coseno Hiperbólico	$\operatorname{cosh}(x)$	$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$	Arcocoseno Hiperbólico	$\operatorname{cosh}^{-1}(x) := \operatorname{arccosh}(x)$	$\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$
Tangente Hiperbólica	$\tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\operatorname{cosh}(x)}$	$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	Arcotangente Hiperbólica	$\tanh^{-1}(x) := \operatorname{arctanh}(x)$	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x + 1}{1 - x}\right)$
Cosecante Hiperbólica	$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\operatorname{senh}(x)}$	$\frac{2}{e^x - e^{-x}}$	Arcocosecante Hiperbólica	$\operatorname{csch}^{-1}(x) := \operatorname{arccsch}(x)$	$\ln\left(\frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}\right)$
Secante Hiperbólica	$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\operatorname{cosh}(x)}$	$\frac{2}{e^x + e^{-x}}$	Arcosecante Hiperbólica	$\operatorname{sech}^{-1}(x) := \operatorname{arcsech}(x)$	$\ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$
Cotangente Hiperbólica	$\operatorname{coth}(x) = \frac{1}{\tanh(x)}$	$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	Arcocotangente Hiperbólica	$\operatorname{coth}^{-1}(x) := \operatorname{arccoth}(x)$	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)$

1.2.2.2    Relación Con Las Funciones Trigonométricas

Función	Relación
Seno Hiperbólico	$\operatorname{senh}(x) = -i \operatorname{sen}(ix)$
Coseno Hiperbólico	$\operatorname{cosh}(x) = \cos(ix)$
Tangente Hiperbólica	$\tanh(x) = -i \tan(ix)$
Cosecante Hiperbólica	$\operatorname{csch}(x) = i \operatorname{csc}(ix)$
Secante Hiperbólica	$\operatorname{sech}(x) = \sec(ix)$
Cotangente Hiperbólica	$\operatorname{coth}(x) = i \cot(ix)$

1.2.2.3    Relación Con La Función Exponencial

Función	Relación
Seno Y Coseno Hiperbólico	$e^{\pm x} = \cosh(x) \pm \operatorname{senh}(x)$
Tangente Hiperbólica	$e^{\pm x} = \sqrt{\frac{1 \pm \tanh(x)}{1 \mp \tanh(x)}}$

1.2.2.4    Identidades Pitagóricas

	Expresión
•	$\cosh^2(\lambda x) - \operatorname{senh}^2(\lambda x) = 1$
•	$\operatorname{sech}^2(\lambda x) + \tanh^2(\lambda x) = 1$
•	$\operatorname{coth}^2(\lambda x) - \operatorname{csch}^2(\lambda x) = 1$

1.2.2.5    Periodicidad

Función	Período	Período Completo
Seno Hiperbólico	$2\pi i$	$\operatorname{senh}(z + 2k\pi i) = \operatorname{senh}(z)$
Coseno Hiperbólico	$2\pi i$	$\operatorname{cosh}(z + 2k\pi i) = \cosh(z)$
Tangente Hiperbólica	$\pi i$	$\tanh(z + k\pi i) = \tanh(z)$
Cosecante Hiperbólica	$2\pi i$	$\operatorname{csch}(z + 2k\pi i) = \operatorname{csch}(z)$
Secante Hiperbólica	$2\pi i$	$\operatorname{sech}(z + 2k\pi i) = \operatorname{sech}(z)$
Cotangente Hiperbólica	$\pi i$	$\operatorname{coth}(z + k\pi i) = \operatorname{coth}(z)$

1.2.2.6 Reflexiones

Función	Reflexión
Seno Hiperbólico	$\sinh(-x) = -\sinh(x)$
Coseno Hiperbólico	$\cosh(-x) = \cosh(x)$
Tangente Hiperbólica	$\tanh(-x) = -\tanh(x)$
Cosecante Hiperbólica	$\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch}(x)$
Secante Hiperbólica	$\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech}(x)$
Cotangente Hiperbólica	$\operatorname{coth}(-x) = -\operatorname{coth}(x)$

1.2.2.7 Suma Y Resta De Ángulos

Función	Expresión
Seno Hiperbólico	$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y)$
Coseno Hiperbólico	$\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)$
Tangente Hiperbólica	$\tanh(x \pm y) = \frac{\tanh(x) \pm \tanh(y)}{1 \pm \tanh(x) \tanh(y)}$
Cosecante Hiperbólica	$\operatorname{csch}(x \pm y) = \frac{1}{\sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y)}$
Secante Hiperbólica	$\operatorname{sech}(x \pm y) = \frac{1}{\cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)}$
Cotangente Hiperbólica	$\operatorname{coth}(x \pm y) = \frac{\cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)}{\sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y)}$

1.2.2.8 Ángulo Múltiple

Función	Ángulo Medio	Ángulo Doble	Ángulo Triple
Seno Hiperbólico	$\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}}$	$\sinh(2x) = 2\sinh(x) \cosh(x)$	$\sinh(3x) = 3\sinh(x) \cosh^2(x) + \sinh^3(x)$
Coseno Hiperbólico	$\cosh\left(\frac{x}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cosh(x)}{2}}$	$\cosh(2x) = 2\cosh^2(x) - 1$	$\cosh(3x) = 3\sinh^2(x) \cosh(x) + \cosh^3(x)$
Tangente Hiperbólica	$\tanh\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sinh(x)}{1+\cosh(x)}$	$\tanh(2x) = \frac{2\tanh(x)}{1+\tanh^2(x)}$	$\tanh(3x) = \frac{4\cosh^2(x)\tanh(x) - \tanh(x)}{4\cosh^2(x) - 3}$

1.2.2.9 Potencia

Función	Cuadrada	Cúbica	Cuártica
Seno Hiperbólico	$\sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x)-1}{2}$	$\sinh^3(x) = \frac{\sinh(3x)-3\sinh(x)}{4}$	$\sinh^4(x) = \frac{3-4\cosh(2x)+\cosh(4x)}{8}$
Coseno Hiperbólico	$\cosh^2(x) = \frac{\cosh(2x)+1}{2}$	$\cosh^3(x) = \frac{3\cosh(x)+\cosh(3x)}{4}$	$\cosh^4(x) = \frac{3+4\cosh(2x)+\cosh(4x)}{8}$
Tangente Hiperbólica	$\tanh^2(x) = \frac{\cosh(2x)-1}{\cosh(2x)+1}$	$\tanh^3(x) = \frac{\sinh(3x)-3\sinh(x)}{3\cosh(x)+\cosh(3x)}$	$\tanh^4(x) = \frac{3-4\cosh(2x)+\cosh(4x)}{3+4\cosh(2x)+\cosh(4x)}$

1.2.2.10 Identidades De Suma A Producto

	Expresión
•	$\sinh(x) \pm \sinh(y) = 2\sinh\left(\frac{x \pm y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x \mp y}{2}\right)$
•	$\cosh(x) + \cosh(y) = 2\cosh\left(\frac{x+y}{2}\right) \cosh\left(\frac{x-y}{2}\right)$
•	$\cosh(x) - \cosh(y) = 2\sinh\left(\frac{x+y}{2}\right) \sinh\left(\frac{x-y}{2}\right)$
•	$\tanh(x) \pm \tanh(y) = \frac{\sinh(x \pm y)}{\cosh(x) \cosh(y)}$

1.2.2.11 Identidades De Producto A Suma

	Expresión
•	$\sinh(x) \sinh(y) = \frac{\cosh(x+y) - \cosh(x-y)}{2}$
•	$\cosh(x) \cosh(y) = \frac{\cosh(x+y) + \cosh(x-y)}{2}$
•	$\sinh(x) \cosh(y) = \frac{\sinh(x+y) + \sinh(x-y)}{2}$
•	$\cosh(x) \sinh(y) = \frac{\sinh(x+y) - \sinh(x-y)}{2}$
•	$\tanh(x) \tanh(y) = \frac{\cosh(x+y) - \cosh(x-y)}{\cosh(x-y) + \cosh(x+y)}$

1.2.2.12 Identidades Con Números Complejos

	Expresión
•	$\sinh[ \operatorname{Im}\{z\} ] \leq  \operatorname{sen}(z)  \leq \cosh[\operatorname{Im}\{z\}]$
•	$\sinh[ \operatorname{Im}\{z\} ] \leq  \cos(z)  \leq \cosh[\operatorname{Im}\{z\}]$
•	$\operatorname{sen}(z) = \operatorname{sen}[\operatorname{Re}\{z\}] \cosh[\operatorname{Im}\{z\}] + i \sinh[\operatorname{Im}\{z\}] \cos[\operatorname{Re}\{z\}]$
•	$\cos(z) = \cos[\operatorname{Re}\{z\}] \cosh[\operatorname{Im}\{z\}] - i \sinh[\operatorname{Im}\{z\}] \operatorname{sen}[\operatorname{Re}\{z\}]$
•	$ \operatorname{sen}(z) ^2 = \operatorname{sen}^2[\operatorname{Re}\{z\}] + \sinh^2[\operatorname{Im}\{z\}]$
•	$ \cos(z) ^2 = \cos^2[\operatorname{Re}\{z\}] + \sinh^2[\operatorname{Im}\{z\}]$

## A.3 Identidades Del Análisis Real & Análisis Vectorial

### A.3.1 Identidades De Vectores

#### 1.3.1.1 Identidades Del Producto Interno

Identidad	Expresión
Definición	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} :=  \mathbf{u}  \,  \mathbf{v}  \cos(\theta)$
Cómputo	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \langle u_1, u_2, u_3, \dots, u_n \rangle \cdot \langle v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \dots + u_n v_n$
Conmutatividad Del Escalar	$(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
Distributividad	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
Conmutatividad	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
Bilinealidad	$\mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
Multiplicación Escalar	$(\lambda \mathbf{u}) \cdot (\mu \mathbf{v}) = \lambda \mu (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
Ortogonalidad	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$
Producto Interno De Versores	$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \ \forall \text{ Terna Derecha } \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$

#### 1.3.1.2 Identidades Del Producto Vectorial

Identidad	Expresión
Definición	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} :=  \mathbf{u}  \,  \mathbf{v}  \operatorname{sen}(\theta) \hat{\boldsymbol{\eta}}$
Cómputo	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \times \langle v_1, v_2, v_3 \rangle = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \hat{\mathbf{i}} + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \hat{\mathbf{j}} + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \hat{\mathbf{k}}$
Nilpotencia	$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
Anticonmutatividad	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
Bihomogeneidad	$(\lambda \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (\lambda \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{u} \times \mathbf{v}$
Ortogonalidad	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$
Distributividad De La Suma	$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{w}$
Triple Producto Escalar	$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$
Triple Producto Vectorial	$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}$
Identidad De Jacobi	$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0}$
Producto Vectorial De Versores	$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} \\ \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} \\ \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} \end{cases} \ \forall \text{ Terna Derecha } \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$
Vectores Paralelos	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$
Área Del Paralelogramo De $\mathbf{u}, \mathbf{v}$	$A =  \mathbf{u} \times \mathbf{v} $
Volumen Del Paralelepípedo De $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$	$V =  \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) $
Relación Con El Producto Interno	$ \mathbf{u} \times \mathbf{v} ^2 =  \mathbf{u} ^2  \mathbf{v} ^2 - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2$

#### 1.3.1.3 Propiedades De La Norma Vectorial Y Definiciones

Identidad	Expresión
Definición Norma 0	$  z  _0 :=  z  \ \forall \ z \in \mathbb{C}$
Definición Norma 1	$  \mathbf{u}  _1 := \sum_{i=1}^n  u_i  =  u_1  +  u_2  +  u_3  + \dots +  u_n $
Definición Norma 2	$  \mathbf{u}  _2 := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2}$
Definición Norma $p$	$  \mathbf{u}  _p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n  u_i ^p} = \sqrt[p]{ u_1 ^p +  u_2 ^p +  u_3 ^p + \dots +  u_n ^p}$
Definición Norma $\infty$	$  \mathbf{u}  _\infty := \text{máx} \{1 \leq i \leq n\}  u_i $
Subaditividad	$  \mathbf{u} + \mathbf{v}  _\alpha \leq   \mathbf{u}  _\alpha +   \mathbf{v}  _\alpha \ \forall \ \alpha$
Homogeneidad	$  \lambda \mathbf{u}  _\alpha =  \lambda  \,   \mathbf{u}  _\alpha \ \forall \ \lambda \in \mathbb{R}$
Definida Positiva	$  \mathbf{u}  _\alpha \geq 0 \ \forall \ \mathbf{u}, \text{ y }   \mathbf{u}  _\alpha = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$

#### 1.3.1.4 Identidades De La Norma 2

Identidad	Expresión
Definición Norma 2	$  \mathbf{u}  _2 := \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2}$
Desigualdad De Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz	$ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}  \leq   \mathbf{u}  _2   \mathbf{v}  _2$
Desigualdad Triangular	$  \mathbf{u} + \mathbf{v}  _2 \leq   \mathbf{u}  _2 +   \mathbf{v}  _2$
Regla Del Paralelogramo	$  \mathbf{u} + \mathbf{v}  _2^2 +   \mathbf{u} - \mathbf{v}  _2^2 = 2 \Big(   \mathbf{u}  _2^2 +   \mathbf{v}  _2^2 \Big)$
Desigualdad De Ptolomeo	$  \mathbf{u} - \mathbf{v}  _2   \mathbf{w}  _2 +   \mathbf{v} - \mathbf{w}  _2   \mathbf{u}  _2 \geq   \mathbf{u} - \mathbf{w}  _2   \mathbf{v}  _2$
Teorema De Pitágoras	$  \mathbf{u} + \mathbf{v}  _2^2 =   \mathbf{u}  _2^2 +   \mathbf{v}  _2^2 \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$
Identidad De Parseval	$\sum_{i=1}^n   u_i  _2^2 = \left\  \sum_{i=1}^n u_i \right\ _2^2 \Leftrightarrow u_i \perp u_j \ \forall \ i \neq j$



1.3.1.5 Equivalencias Entre Normas Vectoriales

Identidad	Expresión
Teorema De Equivalencia	$\lambda_1   \mathbf{u}  _\alpha \leq   \mathbf{u}  _\beta \leq \lambda_2   \mathbf{u}  _\alpha \ \forall \ \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \\ \alpha, \beta = 0, 1, 2, p, \infty \end{cases}$
•	$\frac{  \mathbf{u}  _1}{\sqrt{n}} \leq   \mathbf{u}  _2 \leq   \mathbf{u}  _1$
•	$  \mathbf{u}  _2 \leq   \mathbf{u}  _1 \leq \sqrt{n}   \mathbf{u}  _2$
•	$  \mathbf{u}  _\infty \leq   \mathbf{u}  _1 \leq n   \mathbf{u}  _\infty$
•	$  \mathbf{u}  _\infty \leq   \mathbf{u}  _2 \leq \sqrt{n}   \mathbf{u}  _\infty$

A.3.2 Identidades De Operadores Vectoriales

1.3.2.1 Identidades Del Gradiente

Identidad	Expresión	Casos
Aditividad	$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$	
Homogeneidad	$\nabla(\lambda f) = \lambda \nabla f$	
Regla Del Producto	$\nabla(fg) = (\nabla f)g + f(\nabla g)$	
Regla De La División	$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(\nabla f)g - f(\nabla g)}{g^2}$	
Regla Del Producto Interno	$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$	$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = 2(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} + 2\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{A})$
Regla De La Divergencia	$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \otimes \mathbf{A})$	
Regla Del Producto Tensorial	$\nabla(f\mathbf{A}) = (\nabla f) \otimes \mathbf{A} + f\nabla\mathbf{A}$	

1.3.2.2 Identidades Del Rotacional

Identidad	Expresión
Aditividad	$\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$
Homogeneidad	$\nabla \times (\lambda \mathbf{A}) = \lambda \nabla \times \mathbf{A}$
Regla Del Producto	$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f(\nabla \times \mathbf{A})$
Regla Del Producto (Gradiente)	$\nabla \times (f\nabla g) = (\nabla f) \times (\nabla g)$
Regla De La División	$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{A}}{f}\right) = \frac{(\nabla \times \mathbf{A})f - (\nabla f) \times \mathbf{A}}{f^2}$
Regla Del Producto Vectorial 1	$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
Regla Del Producto Vectorial 2	$\mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla_{\mathbf{B}}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$
Regla Del Producto Vectorial 3	$(\mathbf{A} \times \nabla) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} - \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$
Regla Del Producto Vectorial 4	$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \nabla\left(\frac{ \mathbf{A} ^2}{2}\right)$

1.3.2.3 Identidades De La Divergencia

Identidad	Expresión
Aditividad	$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$
Homogeneidad	$\nabla \cdot (\lambda \mathbf{A}) = \lambda \nabla \cdot \mathbf{A}$
Regla Del Producto	$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f(\nabla \cdot \mathbf{A})$
Regla De La División	$\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{A}}{f}\right) = \frac{(\nabla \cdot \mathbf{A})f - (\nabla f) \cdot \mathbf{A}}{f^2}$
Regla Del Producto Vectorial	$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$
Regla Del Gradiente	$\nabla \cdot (f\nabla g) = (\nabla f) \cdot (\nabla g) + f\nabla^2 g$
Regla Del Laplaciano Escalar	$\nabla \cdot [(\nabla f)g - f(\nabla g)] = (\nabla^2 f)g - f(\nabla^2 g)$
Regla Del Producto Tensorial	$\nabla \cdot (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$

1.3.2.4 Identidades Del Laplaciano Escalar

Identidad	Expresión
Definición	$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f)$
Aditividad	$\nabla^2(f + g) = \nabla^2 f + \nabla^2 g$
Homogeneidad	$\nabla^2(\lambda f) = \lambda \nabla^2 f$
Regla Del Producto	$\nabla^2(fg) = (\nabla^2 f)g + 2(\nabla f) \cdot (\nabla g) + f(\nabla^2 g)$
Regla Del Producto Interno	$\nabla^2(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \nabla^2 \mathbf{B} - \nabla^2 \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + 2\nabla \cdot [(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})]$
Regla De La Divergencia	$\nabla^2(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \nabla \cdot [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})] = \nabla \cdot (\nabla^2 \mathbf{A})$

1.3.2.5 Identidades Del Laplaciano Vectorial

Identidad	Expresión	Notación De Einstein
Definición	$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$	$\partial_j^2 A_i \hat{\mathbf{e}}_i = \partial_i \partial_j A_j \hat{\mathbf{e}}_i - \epsilon_{ijk} \partial_j (\epsilon_{klm} \partial_l A_m \hat{\mathbf{e}}_k) \hat{\mathbf{e}}_i$
Regla Del Producto	$\nabla^2(f\mathbf{A}) = (\nabla^2 f)\mathbf{A} + 2(\nabla f \cdot \nabla)\mathbf{A} + f\nabla^2 \mathbf{A}$	
Regla Del Gradiente	$\nabla^2(\nabla f) = \nabla[\nabla \cdot (\nabla f)] = \nabla(\nabla^2 f)$	
Regla Del Rotacional	$\nabla^2(\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla \times [\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})] = \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{A})$	

1.3.2.6 Identidades Nulas

Identidad	Expresión
Campo Irrotacional	$\nabla \times (\nabla f) = 0$
Campo Solenoidal	$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
Divergencia Del Rotor De Gradientes	$\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$

A.3.3 Identidades De Integración

Identidad	Expresión
Teorema De Green	$\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbb{D}^+} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_{\mathbb{D}} \left[ \frac{\partial Q_{(x,y)}}{\partial x} - \frac{\partial P_{(x,y)}}{\partial y} \right] dA$
Teorema De Stokes	$\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \iint_{\mathbf{S}} \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$
Teorema De Gauss	$\iiint_{\mathbf{S}^+ = \partial \mathbb{Q}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV$
Integral Por Partes En $\mathbb{R}^3$ (Divergencia)	$\iiint_{\mathbb{Q}} f(\nabla \cdot \mathbf{A}) \, dV = \iint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} (f\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} - \iiint_{\mathbb{Q}} (\nabla f) \cdot \mathbf{A} \, dV$
Integral Por Partes En $\mathbb{R}^3$ (Rotacional)	$\iiint_{\mathbb{Q}} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \, dV = \iiint_{\mathbb{Q}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} \, dV - \iint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S}$
Primera Identidad De Green	$\iint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} (f\nabla g) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathbb{Q}} [f\nabla^2 g + (\nabla f) \cdot (\nabla g)] \, dV$
Segunda Identidad De Green	$\iint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} (f\nabla g - g\nabla f) \cdot d\mathbf{S} = \iiint_{\mathbb{Q}} (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f) \, dV$
Corolario Del Teorema De Stokes	$\oint_{\mathcal{C}^+ := \partial \mathbf{S}^+} f \, ds = - \iint_{\mathbf{S}} \nabla f \times d\mathbf{S}$
Corolario Del Teorema De Gauss	$\iint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} \mathbf{F} \times d\mathbf{S} = - \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla \times \mathbf{F} \, dV$
Relación	$\iint_{\mathbf{S}^+ := \partial \mathbb{Q}} f \, dS = \iiint_{\mathbb{Q}} \nabla f \, dV$

A.3.4 Sistemas De Coordenadas Ortogonales

1.3.4.1 Conversión De Versores En Términos De Las Coordenadas De Destino

	Coordenadas Cartesianas $(x, y, z)$	Coordenadas Cilíndricas $(\rho, \varphi, z)$	Coordenadas Esféricas $(r, \theta, \varphi)$
Cartesianas	$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{(\varphi)} = \cos(\varphi)\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin(\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\mathbf{y}}_{(\varphi)} = \sin(\varphi)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos(\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{(\theta, \varphi)} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{\mathbf{r}} + \cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin(\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\mathbf{y}}_{(\theta, \varphi)} = \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{\mathbf{r}} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos(\varphi)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\mathbf{z}}_{(\theta)} = \cos(\theta)\hat{\mathbf{r}} - \sin(\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{cases}$
Cilíndricas	$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\rho}}_{(x,y)} = \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(x,y)} = \frac{-y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\rho}}_{(\theta)} = \sin(\theta)\hat{\mathbf{r}} + \cos(\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\mathbf{z}}_{(\theta)} = \cos(\theta)\hat{\mathbf{r}} - \sin(\theta)\hat{\boldsymbol{\theta}} \end{cases}$
Esféricas	$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}}_{(x,y,z)} = \frac{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(x,y,z)} = \frac{xz\hat{\mathbf{x}} + yz\hat{\mathbf{y}} - (x^2 + y^2)\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(x,y)} = \frac{-y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}}_{(\rho,z)} = \frac{\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + z\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(\rho,z)} = \frac{z\hat{\boldsymbol{\rho}} - \rho\hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{cases}$

1.3.4.2 Conversión De Versores En Términos De Las Coordenadas De Origen

	Coordenadas Cartesianas $(x, y, z)$	Coordenadas Cilíndricas $(\rho, \varphi, z)$	Coordenadas Esféricas $(r, \theta, \varphi)$
Cartesianas	$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{(x,y)} = \frac{x\hat{\boldsymbol{\rho}} - y\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \hat{\mathbf{y}}_{(x,y)} = \frac{y\hat{\boldsymbol{\rho}} + x\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}}_{(x,y,z)} = \frac{x\sqrt{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{r}} + xz\hat{\boldsymbol{\theta}} - y\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \hat{\mathbf{y}}_{(x,y,z)} = \frac{y\sqrt{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{r}} + yz\hat{\boldsymbol{\theta}} + x\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\hat{\boldsymbol{\varphi}}}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \hat{\mathbf{z}}_{(x,y,z)} = \frac{z\hat{\mathbf{r}} - \sqrt{x^2 + y^2}\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$
Cilíndricas	$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\rho}}_{(\varphi)} = \cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + \sin(\varphi)\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(\varphi)} = -\sin(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + \cos(\varphi)\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\rho}}_{(\rho,z)} = \frac{\rho\hat{\mathbf{r}} + z\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ \hat{\mathbf{z}}_{(\rho,z)} = \frac{z\hat{\mathbf{r}} - \rho\hat{\boldsymbol{\theta}}}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \end{cases}$
Esféricas	$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}}_{(\theta, \varphi)} = \sin(\theta)\cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + \sin(\theta)\sin(\varphi)\hat{\mathbf{y}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(\theta, \varphi)} = \cos(\theta)\cos(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + \cos(\theta)\sin(\varphi)\hat{\mathbf{y}} - \sin(\theta)\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}}_{(\varphi)} = -\sin(\varphi)\hat{\mathbf{x}} + \cos(\varphi)\hat{\mathbf{y}} \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}}_{(\theta)} = \sin(\theta)\hat{\boldsymbol{\rho}} + \cos(\theta)\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_{(\theta)} = \cos(\theta)\hat{\boldsymbol{\rho}} - \sin(\theta)\hat{\mathbf{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}} \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{cases}$

1.3.4.3 Conversión Entre Sistemas De Coordenadas

	Coordenadas Cartesianas $(x, y, z)$	Coordenadas Cilíndricas $(\rho, \varphi, z)$	Coordenadas Esféricas $(r, \theta, \varphi)$
Cartesianas	$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x_{(\rho,\varphi)} = \rho \cos(\varphi) \\ y_{(\rho,\varphi)} = \rho \operatorname{sen}(\varphi) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x_{(r,\theta,\varphi)} = r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi) \\ y_{(r,\theta,\varphi)} = r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi) \\ z_{(r,\theta)} = r \cos(\theta) \end{cases}$
Cilíndricas	$\begin{cases} \rho_{(x,y)} = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi_{(x,y)} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} \rho = \rho \\ \varphi = \varphi \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} \rho_{(r,\theta)} = r \operatorname{sen}(\theta) \\ \varphi = \varphi \\ z_{(r,\theta)} = r \cos(\theta) \end{cases}$
Esféricas	$\begin{cases} r_{(x,y,z)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta_{(x,y,z)} = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ \varphi_{(x,y)} = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$	$\begin{cases} r_{(\rho,z)} = \sqrt{\rho^2 + z^2} \\ \theta_{(\rho,z)} = \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right) \\ \varphi = \varphi \end{cases}$	$\begin{cases} r = r \\ \theta = \theta \\ \varphi = \varphi \end{cases}$

1.3.4.4 Operadores De Análisis Vectorial

	Coordenadas Cartesianas $(x, y, z)$	Coordenadas Cilíndricas $(\rho, \varphi, z)$	Coordenadas Esféricas $(r, \theta, \varphi)$
Definición	$\begin{cases} x = x \\ y = y, \text{ donde: } \begin{cases} x \in (-\infty, \infty) \\ y \in (-\infty, \infty) \\ z \in (-\infty, \infty) \end{cases} \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi) \\ y = \rho \operatorname{sen}(\varphi), \text{ donde: } \begin{cases} \rho \in [0, \infty) \\ \varphi \in [0, 2\pi) \\ z \in (-\infty, \infty) \end{cases} \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \operatorname{sen}(\theta) \cos(\varphi) \\ y = r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi), \text{ donde: } \begin{cases} r \in [0, \infty) \\ \theta \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{cases} \\ z = r \cos(\theta) \end{cases}$
Ángulos	—	$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$\begin{cases} \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \end{cases}$
Campo Escalar $f$	$f_{(x,y,z)}$	$f_{(\rho,\varphi,z)}$	$f_{(r,\theta,\varphi)}$
Campo Vectorial $\mathbf{F}$	$F_{x(x,y,z)}\hat{\mathbf{x}} + F_{y(x,y,z)}\hat{\mathbf{y}} + F_{z(x,y,z)}\hat{\mathbf{z}}$	$F_{\rho(\rho,\varphi,z)}\hat{\boldsymbol{\rho}} + F_{\varphi(\rho,\varphi,z)}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + F_{z(\rho,\varphi,z)}\hat{\mathbf{z}}$	$F_{r(r,\theta,\varphi)}\hat{\mathbf{r}} + F_{\theta(r,\theta,\varphi)}\hat{\boldsymbol{\theta}} + F_{\varphi(r,\theta,\varphi)}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$
Campo Tensorial $\boldsymbol{\sigma}$	$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sigma_{\rho\rho} & \sigma_{\varphi\rho} & \sigma_{z\rho} \\ \sigma_{\rho\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} & \sigma_{z\varphi} \\ \sigma_{\rho z} & \sigma_{\varphi z} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{r\varphi} \\ \sigma_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\varphi\theta} \\ \sigma_{r\varphi} & \sigma_{\theta\varphi} & \sigma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$
Gradiente $\nabla f$	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\hat{\boldsymbol{\varphi}}$
Divergencia Vectorial $\nabla \cdot \mathbf{F}$	$\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}[F_\theta \operatorname{sen}(\theta)] + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$
Rotacional $\nabla \times \mathbf{F}$	$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} \\ &+ \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} \\ &+ \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} \\ &+ \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &+ \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\right]\hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)}\left\{\frac{\partial}{\partial \theta}[\operatorname{sen}(\theta) F_\varphi] - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right\}\hat{\mathbf{r}} \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(r F_\varphi)\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned}$
Laplaciano Escalar $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\operatorname{sen}(\theta)\frac{\partial f}{\partial \theta}\right] + \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$
Laplaciano Vectorial $\nabla^2 \mathbf{F}$	$\nabla^2 F_x \hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 F_y \hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 F_z \hat{\mathbf{z}}$	$\begin{aligned} &\left(\nabla^2 F_\rho - \frac{F_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} \\ &+ \left(\nabla^2 F_\varphi - \frac{F_\varphi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &+ \nabla^2 F_z \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\left\{\nabla^2 F_r - \frac{2F_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}[F_\theta \operatorname{sen}(\theta)] - \frac{2}{r^2 \operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\right\}\hat{\mathbf{r}} \\ &+ \left[\nabla^2 F_\theta - \frac{F_\theta}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos(\theta)}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \left[\nabla^2 F_\varphi - \frac{F_\varphi}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)} + \frac{2}{r^2 \operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos(\theta)}{r^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}\frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned}$
Derivada Convectiva $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F}$	$(\mathbf{v} \cdot \nabla F_x)\hat{\mathbf{x}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla F_y)\hat{\mathbf{y}} + (\mathbf{v} \cdot \nabla F_z)\hat{\mathbf{z}}$	$\begin{aligned} &\left[(\mathbf{v} \cdot \nabla F_\rho) - \frac{v_\varphi F_\varphi}{\rho}\right]\hat{\boldsymbol{\rho}} \\ &+ \left[(\mathbf{v} \cdot \nabla F_\varphi) + \frac{v_\varphi F_\rho}{\rho}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &+ (\mathbf{v} \cdot \nabla F_z)\hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\left[(\mathbf{v} \cdot \nabla F_r) - \frac{v_\theta F_\theta}{r} - \frac{v_\varphi F_\varphi}{r}\right]\hat{\mathbf{r}} \\ &+ \left[(\mathbf{v} \cdot \nabla F_\theta) + \frac{v_\theta F_r}{r} - \frac{v_\varphi F_\varphi \cot(\theta)}{r}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \left[(\mathbf{v} \cdot \nabla F_\varphi) + \frac{v_\varphi F_r}{r} + \frac{v_\varphi F_\theta \cot(\theta)}{r}\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned}$
Divergencia Tensorial $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$	$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} \\ &+ \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{y}} \\ &+ \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \sigma_{\rho\rho}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\varphi\rho}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{z\rho}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\rho}}{\rho} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} \\ &+ \left(\frac{\partial \sigma_{\rho\varphi}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho\varphi}}{\rho} + \frac{\sigma_{\varphi\rho}}{\rho}\right)\hat{\boldsymbol{\varphi}} \\ &+ \left(\frac{\partial \sigma_{\rho z}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\rho z}}{\rho}\right)\hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\left[\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{rr}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\cot(\theta)}{r}\sigma_{\theta r} + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r}(\sigma_{\theta\theta} + \sigma_{\varphi\varphi})\right]\hat{\mathbf{r}} \\ &+ \left[\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\cot(\theta)}{r}\sigma_{\theta\theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial \sigma_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{\theta r}}{r} - \frac{\cot(\theta)}{r}\sigma_{\varphi\varphi}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \left[\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}(\theta)}\frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{\varphi r}}{r} + \frac{\cot(\theta)}{r}(\sigma_{\theta\varphi} + \sigma_{\varphi\theta})\right]\hat{\boldsymbol{\varphi}} \end{aligned}$
Longitud Escalar $ds$	$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$	$\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2}$	$\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) d\varphi^2}$
Superficie Escalar $dS$	$\begin{cases} dS_x = dydz \\ dS_y = dx dz \\ dS_z = dx dy \end{cases}$	$\begin{cases} dS_\rho = \rho d\varphi dz \\ dS_\varphi = d\rho dz \\ dS_z = \rho d\rho d\varphi \end{cases}$	$\begin{cases} dS_r = r^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta d\varphi \\ dS_\theta = r \operatorname{sen}(\theta) dr d\varphi \\ dS_\varphi = r dr d\theta \end{cases}$
Volumen Escalar $dV$	$dx dy dz$	$\rho d\rho d\varphi dz$	$r^2 \operatorname{sen}(\theta) dr d\theta d\varphi$
Longitud Vectorial $d\boldsymbol{\ell}$	$dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$dr\hat{\mathbf{r}} + r d\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r \operatorname{sen}(\theta) d\varphi\hat{\boldsymbol{\varphi}}$
Superficie Vectorial $d\mathbf{S}$	$dydz\hat{\mathbf{x}} + dx dz\hat{\mathbf{y}} + dx dy\hat{\mathbf{z}}$	$\rho d\varphi dz\hat{\boldsymbol{\rho}} + d\rho dz\hat{\boldsymbol{\varphi}} + \rho d\rho d\varphi\hat{\mathbf{z}}$	$r^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta d\varphi\hat{\mathbf{r}} + r \operatorname{sen}(\theta) dr d\varphi\hat{\boldsymbol{\theta}} + r dr d\theta\hat{\boldsymbol{\varphi}}$
Tensor Métrico $ds^2$	$dx^2 + dy^2 + dz^2$	$d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$	$dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2(\theta) d\varphi^2$
Jacobiano $J_{(T)}$	$1$	$\rho$	$r^2 \operatorname{sen}(\theta)$

A.3.5 Lista De Derivadas De Funciones De Una Variable

Nombre	Función	Derivada Primera	Derivada Segunda	Derivada $n$ -ésima
T.F.C.	$f(x) = \int\limits_{u(x)}^{v(x)} f(t) \, dt$	$\frac{df(x)}{dx} = f_{[v(x)]} \cdot v'(x) - f_{[u(x)]} \cdot u'(x)$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = f'_{[v(x)]} \cdot [v'(x)]^2 + f_{[v(x)]} \cdot v''(x) - f'_{[u(x)]} [u'(x)]^2 - f_{[u(x)]} \cdot u''(x)$	$\dots$
Constante	$f(x) = \lambda$	$\frac{df(x)}{dx} = 0$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 0$	0
Variable	$f(x) = \lambda x$	$\frac{df(x)}{dx} = \lambda$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 0$	0
Producto Escalar	$f(x) = u_{(x)} \cdot v_{(x)}$	$\frac{df(x)}{dx} = u'_{(x)} \cdot v_{(x)} + u_{(x)} \cdot v'_{(x)}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = u''_{(x)} \cdot v_{(x)} + 2 \cdot u'_{(x)} \cdot v'_{(x)} + u_{(x)} \cdot v''_{(x)}$	$\sum_{k=0}^n \left\{ \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{d^{n-k}u_{(x)}}{dx^{n-k}} \cdot \frac{d^kv_{(x)}}{dx^k} \right\}$
Triple Producto Escalar	$f(x) = u_{(x)} \cdot v_{(x)} \cdot w_{(x)}$	$\frac{df(x)}{dx} = u'_{(x)} \cdot v_{(x)} \cdot w_{(x)} + u_{(x)} \cdot v'_{(x)} \cdot w_{(x)} + u_{(x)} \cdot v_{(x)} \cdot w'_{(x)}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = u''_{(x)} \cdot v_{(x)} \cdot w_{(x)} + u_{(x)} \cdot v''_{(x)} \cdot w_{(x)} + u_{(x)} \cdot v_{(x)} \cdot w''_{(x)} + 2 \cdot u'_{(x)} \cdot v'_{(x)} \cdot w_{(x)} + 2 \cdot u'_{(x)} \cdot v_{(x)} \cdot w'_{(x)} + 2 \cdot u_{(x)} \cdot v'_{(x)} \cdot w'_{(x)}$	$\dots$
Producto Vectorial	$f(x) = u_{(x)} \times v_{(x)}$	$\frac{df(x)}{dx} = u'_{(x)} \times v_{(x)} + u_{(x)} \times v'_{(x)}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = u''_{(x)} \times v_{(x)} + 2 \cdot u'_{(x)} \times v'_{(x)} + u_{(x)} \times v''_{(x)}$	$\sum_{k=0}^n \left\{ \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{d^{n-k}u_{(x)}}{dx^{n-k}} \times \frac{d^kv_{(x)}}{dx^k} \right\}$
Triple Producto Vectorial	$f(x) = u_{(x)} \times v_{(x)} \times w_{(x)}$	$\frac{df(x)}{dx} = u'_{(x)} \times v_{(x)} \times w_{(x)} + u_{(x)} \times v'_{(x)} \times w_{(x)} + u_{(x)} \times v_{(x)} \times w'_{(x)}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = u''_{(x)} \times v_{(x)} \times w_{(x)} + u_{(x)} \times v''_{(x)} \times w_{(x)} + u_{(x)} \times v_{(x)} \times w''_{(x)} + 2 \cdot u'_{(x)} \times v'_{(x)} \times w_{(x)} + 2 \cdot u'_{(x)} \times v_{(x)} \times w'_{(x)} + 2 \cdot u_{(x)} \times v'_{(x)} \times w'_{(x)}$	$\dots$
División	$f(x) = \frac{u_{(x)}}{v_{(x)}}$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{u'_{(x)} \cdot v_{(x)} - u_{(x)} \cdot v'_{(x)}}{[v_{(x)}]^2}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{[u'_{(x)} \cdot v_{(x)} - u_{(x)} \cdot v'_{(x)}]' \cdot v_{(x)} - 2 \cdot v'_{(x)} \cdot [u'_{(x)} \cdot v_{(x)} - u_{(x)} \cdot v'_{(x)}]}{[v_{(x)}]^3}$	$\dots$
Homográfica	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{x^2}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$	$\frac{(-1)^nn!}{x^{n+1}} \, \forall \, n \geqslant 0$
Regla De La Cadena	$f(x) = u_{[v(x)]}$	$\frac{df(x)}{dx} = u'_{[v(x)]} \cdot v'_{(x)}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = u''_{[v(x)]} \cdot [v'(x)]^2 + u'_{[v(x)]} \cdot v''_{(x)}$	$\dots$
Polinomial	$f(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$	$\frac{df(x)}{dx} = \sum_{k=1}^m k a_k x^{k-1}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \sum_{k=2}^m k(k-1) a_k x^{k-2}$	$\frac{d^nf(x)}{dx^n} = \sum_{k=n}^m k(k-1)(k-2) \cdots (k-n+1) a_k x^{k-n}$
Raíz $m$ -ésima	$f(x) = \sqrt[m]{x^n} = x^{\left(\frac{n}{m}\right)}$	$\frac{df(x)}{dx} = \left(\frac{n}{m}\right) x^{\left(\frac{n-m}{m}\right)}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \left(\frac{n^2-n \cdot m}{m^2}\right) x^{\left(\frac{n-2m}{m}\right)}$	$\dots$
Potencial-Exponencial	$f(x) = u_{(x)}^{v_{(x)}}$	$\frac{df(x)}{dx} = u_{(x)}^{v_{(x)}} \cdot \frac{d\{\ln[u_{(x)}] \cdot v_{(x)}\}}{dx} = u_{(x)}^{v_{(x)}} \cdot \left\{ \frac{v_{(x)}}{u_{(x)}} + \ln[u_{(x)}] \cdot v'_{(x)} \right\}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = u_{(x)}^{v_{(x)}} \cdot \left\{ \frac{v_{(x)}}{u_{(x)}} + \ln[u_{(x)}] \cdot v'_{(x)} \right\}^2 + u_{(x)}^{v_{(x)}} \cdot \left\{ \frac{2 \cdot v'_{(x)} \cdot u_{(x)} - v_{(x)} \cdot u'_{(x)}}{[u_{(x)}]^2} + \ln[u_{(x)}] \cdot v''_{(x)} \right\}$	$\dots$
Exponencial	$f(x) = \lambda^{v_{(x)}}$	$\frac{df(x)}{dx} = \lambda^{v_{(x)}} \cdot \frac{d\{\ln(\lambda) \cdot v_{(x)}\}}{dx} = \lambda^{v_{(x)}} \cdot \ln(\lambda) \cdot v'_{(x)}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \ln(\lambda) \cdot \lambda^{v_{(x)}} \cdot \left\{ \ln(\lambda) \cdot [v'_{(x)}]^2 + v''_{(x)} \right\}$	$\dots$
Exponencial $e$ a la $x$	$f(x) = e^x$	$\frac{df(x)}{dx} = e^x \cdot \frac{d[\ln(e) \cdot x]}{dx} = e^x$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = e^x$	$e^x$
Exponencial $x$ a la $x$	$f(x) = x^x$	$\frac{df(x)}{dx} = x^x \cdot \frac{d[\ln(x) \cdot x]}{dx} = x^x \cdot [\ln(x) + 1]$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = x^x \cdot [\ln(x) + 1]^2 + x^{x-1}$	$\dots$
Logarítmica	$f(x) = \log a(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\ln(a)x}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\frac{1}{\ln(a)x^2}$	$\dots$
Logaritmo Natural	$f(x) = \ln(x) = \log e(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}$	$\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n} \, \forall \, n \geqslant 1$
Módulo de $x$	$f(x) =  x $	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{x}{ x }$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 0$	0
Seno	$f(x) = \operatorname{sen}(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = \cos(x)$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\operatorname{sen}(x)$	Función Cíclica
Coseno	$f(x) = \cos(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = -\operatorname{sen}(x)$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\cos(x)$	Función Cíclica
Tangente	$f(x) = \tan(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{2 \operatorname{sen}(x)}{\cos^3(x)}$	$\dots$
Cosecante	$f(x) = \operatorname{csc}(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x)}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{\cos^2(x) + 1}{\operatorname{sen}^3(x)}$	$\dots$
Secante	$f(x) = \sec(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{\operatorname{sen}^2(x) + 1}{\cos^3(x)}$	$\dots$
Cotangente	$f(x) = \cot(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{2 \cos(x)}{\operatorname{sen}^3(x)}$	$\dots$
Arcoseno	$f(x) = \arcsen(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$	$\dots$
Arcocoseno	$f(x) = \arccos(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$	$\dots$
Arcotangente	$f(x) = \arctan(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$	$\dots$
Seno Hiperbólico	$f(x) = \sinh(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = \cosh(x)$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \sinh(x)$	Función Cíclica
Coseno Hiperbólico	$f(x) = \cosh(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = \sinh(x)$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \cosh(x)$	Función Cíclica
Tangente Hiperbólica	$f(x) = \tanh(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x} + 1)^2}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\frac{8e^{2x}(e^{2x} - 1)}{(e^{2x} + 1)^3}$	$\dots$
Cosecante Hiperbólica	$f(x) = \operatorname{csch}(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{\cosh(x)}{\sinh^2(x)}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{\cosh^2(x) + 1}{\sinh^3(x)}$	$\dots$
Secante Hiperbólica	$f(x) = \operatorname{sech}(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{\sinh^2(x) - 1}{\cosh^3(x)}$	$\dots$
Cotangente Hiperbólica	$f(x) = \coth(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{\sinh^2(x)}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{2 \cosh(x)}{\sinh^3(x)}$	$\dots$
Arcoseno Hiperbólico	$f(x) = \operatorname{arsenh}(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 + 1)^3}}$	$\dots$
Arcocoseno Hiperbólico	$f(x) = \operatorname{arccosh}(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = -\frac{x}{\sqrt{(x^2 - 1)^3}}$	$\dots$
Arcotangente Hiperbólica	$f(x) = \operatorname{arctanh}(x)$	$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$	$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$	$\dots$

A.3.6    Lista De Integrales De Funciones De Una Variable

Nombre	Función	Integral
Constante	$f_{(x)} = \lambda$	$\int f_{(x)} \, dx = x + C$
Variable	$f_{(x)} = \lambda x$	$\int f_{(x)} \, dx = \frac{\lambda x^2}{2} + C$
Homográfica	$f_{(x)} = \frac{1}{x}$	$\int f_{(x)} \, dx = \ln( x ) + C$
Polinomial	$f_{(x)} = \sum_{k=0}^n a_k x^k$	$\int f_{(x)} \, dx = \sum_{k=0}^n \frac{a_k x^{k+1}}{k+1} + C$
Raíz $m$ -ésima	$f_{(x)} = \sqrt[m]{x^n} = x^{\left(\frac{n}{m}\right)}$	$\int f_{(x)} \, dx = \frac{m \cdot x^{\left(\frac{n+m}{m}\right)}}{n+m} + C$
Potencial-Exponencial	$f_{(x)} = u_{(x)}^{v(x)}$	$\nexists \int f_{(x)} \, dx$
Exponencial	$f_{(x)} = \lambda^{v(x)}$	$\nexists \int f_{(x)} \, dx$
Exponencial $a$ a la $x$	$f_{(x)} = a^x$	$\int f_{(x)} \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$
Exponencial $e$ a la $x$	$f_{(x)} = e^x$	$\int f_{(x)} \, dx = e^x + C$
Exponencial $x$ a la $x$	$f_{(x)} = x^x$	$\nexists \int f_{(x)} \, dx$
Logarítmica	$f_{(x)} = \log a(x)$	$\int f_{(x)} \, dx = \frac{x \ln(x) - x}{\ln(a)} + C$
Logaritmo Natural	$f_{(x)} = \ln(x) = \log e(x)$	$\int f_{(x)} \, dx = x \ln(x) - x + C$
Módulo de $x$	$f_{(x)} =  x $	$\int f_{(x)} \, dx = \frac{x \cdot  x }{2} + C$
Seno	$f_{(x)} = \text{sen}(x)$	$\int f_{(x)} \, dx = -\cos(x) + C$
Coseno	$f_{(x)} = \cos(x)$	$\int f_{(x)} \, dx = \text{sen}(x) + C$
Tangente	$f_{(x)} = \tan(x)$	$\int f_{(x)} \, dx = -\ln(x) \cdot \cos(x) + C$
Cotangente	$f_{(x)} = \cot(x)$	$\int f_{(x)} \, dx = \ln(x) \cdot \text{sen}(x) + C$
Seno Hiperbólico	$f_{(x)} = \text{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\int f_{(x)} \, dx = \cosh(x) + C$
Coseno Hiperbólico	$f_{(x)} = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\int f_{(x)} \, dx = \text{senh}(x) + C$
Tangente Hiperbólica	$f_{(x)} = \tanh(x) = \frac{\text{senh}(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	$\int f_{(x)} \, dx = \ln(e^x + e^{-x}) + C$
Arcoseno	$f_{(x)} = \arcsen(x)$	$\nexists \int f_{(x)} \, dx$
Arcocoseno	$f_{(x)} = \arccos(x)$	$\nexists \int f_{(x)} \, dx$
Arcotangente	$f_{(x)} = \arctan(x)$	$\nexists \int f_{(x)} \, dx$

A.3.7 Lista De Transformadas De Fourier

Nombre	Función	Transformada De Fourier	Parámetros
Aditividad	$h_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)}$	$\mathcal{F}_{[h_{(x)}]}(\xi) = \mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\xi) + \mathcal{F}_{[g_{(x)}]}(\xi)$	
Homogeneidad	$g_{(x)} = \alpha f_{(x)}$	$\mathcal{F}_{[g_{(x)}]}(\xi) = \alpha \mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\xi)$	$\alpha \in \mathbb{R}$
Convolución	$h_{(x)} = (f * g)_{(x)}$	$\mathcal{F}_{[h_{(x)}]}(\xi) = \mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\xi) \cdot \mathcal{F}_{[g_{(x)}]}(\xi)$	
Integral De Gauss	$f_{(x)} = e^{-\alpha x^2}$	$\mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\xi) = \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\right)e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$	$\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$
Traslación En El Dominio Espacial	$g_{(x)} = f_{(x+\alpha)}$	$\mathcal{F}_{[g_{(x)}]}(\xi) = e^{i\alpha\xi}\mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\xi)$	$\alpha \in \mathbb{R}$
Traslación En El Dominio De La Frecuencia	$g_{(x)} = e^{i\alpha x}f_{(x)}$	$\mathcal{F}_{[g_{(x)}]}(\xi) = \mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\xi-\alpha)$	$\alpha \in \mathbb{R}$
Argumento Función Lineal	$g_{(x)} = f_{(\alpha x+\beta)}$	$\mathcal{F}_{[g_{(x)}]}(\xi) = \left(\frac{e^{\frac{i\beta\xi}{\alpha}}}{ \alpha }\right)\mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\frac{\xi}{\alpha})$	$\alpha \neq 0, \beta \in \mathbb{R}$
Potencias De x	$g_{(x)} = x^n f_{(x)}$	$\mathcal{F}_{[g_{(x)}]}(\xi) = (-i)^n \left[\frac{\mathrm{d}^n \mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\xi)}{\mathrm{d}\xi^n}\right]$	$n \in \mathbb{N}$
Derivada n-ésima	$g_{(x)} = \frac{\mathrm{d}^n f_{(x)}}{\mathrm{d}x^n}$	$\mathcal{F}_{[g_{(x)}]}(\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\xi)$	$n \in \mathbb{N}$
Coseno	$g_{(x)} = f_{(x)} \cos(\alpha x)$	$\mathcal{F}_{[g_{(x)}]}(\xi) = \frac{\mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\xi-\alpha) + \mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\xi+\alpha)}{2}$	$\alpha \in \mathbb{R}$
Seno	$g_{(x)} = f_{(x)} \operatorname{sen}(\alpha x)$	$\mathcal{F}_{[g_{(x)}]}(\xi) = \frac{\mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\xi-\alpha) - \mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\xi+\alpha)}{2i}$	$\alpha \in \mathbb{R}$
Función Característica	$f_{(x)} = \chi_{[-\alpha,\alpha]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si }  x  \leq \alpha \\ 0 & \text{si } \alpha <  x  \end{cases}$	$\mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\xi) = \frac{2 \operatorname{sen}(\alpha \xi)}{\xi}$	$\alpha \in \mathbb{R}$
Función Común 1	$f_{(x)} = e^{- x }$	$\mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\xi) = \frac{2}{\xi^2 + 1}$	
Función Común 2	$f_{(x)} = \frac{1}{x^2 + 1}$	$\mathcal{F}_{[f_{(x)}]}(\xi) = \pi e^{- \xi }$	
Regla De Leibniz	$g_{(x,t)} = \frac{\partial^n f_{(x,t)}}{\partial t^n}$	$\mathcal{F}_{[g_{(x,t)}]}(\xi) = \frac{\mathrm{d}^n \mathcal{F}_{[f_{(x,t)}]}(\xi)}{\mathrm{d}t^n}$	
Derivada De La Variable A Transformar	$g_{(x,t)} = \frac{\partial^n f_{(x,t)}}{\partial x^n}$	$\mathcal{F}_{[g_{(x,t)}]}(\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}_{[f_{(x,t)}]}(\xi)$	

A.3.8 Lista De Transformadas De Laplace

Nombre	Función	Transformada De Laplace	Parámetros	Dominio
Aditividad	$h_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)}$	$\mathcal{L}_{[h_{(x)}]}(s) = \mathcal{L}_{[f_{(x)}]}(s) + \mathcal{L}_{[g_{(x)}]}(s)$		
Homogeneidad	$g_{(x)} = \alpha f_{(x)}$	$\mathcal{L}_{[g_{(x)}]}(s) = \alpha \mathcal{L}_{[f_{(x)}]}(s)$	$\alpha \in \mathbb{R}$	
Convolución	$h_{(x)} = (f * g)_{(x)}$	$\mathcal{L}_{[h_{(x)}]}(s) = \mathcal{L}_{[f_{(x)}]}(s) \cdot \mathcal{L}_{[g_{(x)}]}(s)$		$s > 0$
Exponencial	$f_{(x)} = e^{zx}$	$\mathcal{L}_{[f_{(x)}]}(s) = \frac{1}{s-z}$	$z \in \mathbb{C}$	$s > \operatorname{Re}\{z\}$
Función x	$f_{(x)} = x^n$	$\mathcal{L}_{[f_{(x)}]}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$	$n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$	$s > 0$
Coseno	$f_{(x)} = \cos(\alpha x)$	$\mathcal{L}_{[f_{(x)}]}(s) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$s > 0$
Seno	$f_{(x)} = \operatorname{sen}(\alpha x)$	$\mathcal{L}_{[f_{(x)}]}(s) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$s > 0$
Raíz	$f_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathcal{L}_{[f_{(x)}]}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$		$s > 0$
Derivada n-ésima	$g_{(x)} = \frac{\mathrm{d}^n f_{(x)}}{\mathrm{d}x^n}$	$\mathcal{L}_{[g_{(x)}]}(s) = s^n \mathcal{L}_{[f_{(x)}]}(s) - s^{n-1} f_{(0)} - s^{n-2} \left[\frac{\mathrm{d} f_{(0)}}{\mathrm{d}x}\right] - s^{n-3} \left[\frac{\mathrm{d}^2 f_{(0)}}{\mathrm{d}x^2}\right] - \dots - \frac{\mathrm{d}^{n-1} f_{(0)}}{\mathrm{d}x^{n-1}}$		
Potencias De x	$g_{(x)} = x^n f_{(x)}$	$\mathcal{L}_{[g_{(x)}]}(s) = (-1)^n \left\{ \frac{\mathrm{d}^n \mathcal{L}_{[f_{(x)}]}(s)}{\mathrm{d}s^n} \right\}$		
Traslación	$g_{(x)} = e^{\alpha x} f_{(x)}$	$\mathcal{L}_{[g_{(x)}]}(s) = \mathcal{L}_{[f_{(x)}]}(s-\alpha)$	$\alpha \in \mathbb{R}$	
Argumento Lineal	$g_{(x)} = f_{(\alpha x)}$	$\mathcal{L}_{[g_{(x)}]}(s) = \frac{\mathcal{L}_{[f_{(x)}]}(\frac{s}{\alpha})}{a}$	$\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$	
Función De Heaviside	$f_{(x)} = H_{(x-\alpha)} := \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq x \\ 0 & \text{si } x < \alpha \end{cases}$	$\mathcal{L}_{[f_{(x)}]}(s) = \frac{e^{-\alpha s}}{s}$	$\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$	$s > 0$
Heaviside 2	$g_{(x)} = H_{(x-\alpha)} f_{(x-\alpha)}$	$\mathcal{L}_{[g_{(x)}]}(s) = e^{-\alpha s} \mathcal{L}_{[f_{(x)}]}(s)$	$\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$	
Integral	$g_{(x)} = \int\limits_0^x f_{(t)} \, \mathrm{d}t$	$\mathcal{L}_{[g_{(x)}]}(s) = \frac{\mathcal{L}_{[f_{(x)}]}(s)}{s}$		

## A.4 Identidades Del Análisis Complejo

### A.4.1 Identidades De Números Complejos

#### 1.4.1.1 Definición Y Propiedades

Identidad	Expresión
Número Complejo	$z := x + iy$
Operación Suma	$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$
Operación Producto	$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
Conmutatividad De La Suma	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
Asociatividad De La Suma	$(z_1 + z_2) + z_3 = (z_1 + z_3) + z_2 = z_1 + (z_2 + z_3)$
Elemento Neutro De La Suma	$z + 0 = z$
Elemento Inverso De La Suma	$z + (-z) = 0$
Conmutatividad Del Producto	$z_1 z_2 = z_2 z_1$
Asociatividad Del Producto	$(z_1 z_2) z_3 = (z_1 z_3) z_2 = z_1 (z_2 z_3)$
Elemento Neutro Del Producto	$z \cdot 1 = z$
Distributividad	$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$
Elemento Inverso Del Producto	$\exists \ z^{-1} : z z^{-1} = 1 \ \forall \ z \neq 0$
Fórmula De De Moivre	$[\cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi)]^n := \cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi) \ \forall \ n \in \mathbb{Z}$
Fórmula De Euler	$e^{\pm i\varphi} := \cos(\varphi) \pm i \operatorname{sen}(\varphi)$

#### 1.4.1.2 Representación En Formas Binómica, Trigonométrica Y Exponencial

Identidad	Expresión
Número Complejo (Forma Binómica)	$z := x + iy$
Número Complejo (Forma Trigonométrica)	$z := \rho[\cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi)]$
Número Complejo (Forma Exponencial)	$z := \rho e^{i\varphi}$
Parte Real	$x = \operatorname{Re}\{z\} := \frac{z + z^*}{2}$
Parte Imaginaria	$y = \operatorname{Im}\{z\} := \frac{z - z^*}{2i}$
Radio (Módulo)	$\rho =  z  := \sqrt{z z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$
Ángulo (Argumento)	$\varphi := \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
Propiedad Del Módulo 1	$ z  =  z^* $
Propiedad Del Módulo 2	$ z_1 z_2  =  z_1   z_2 $
Propiedad Del Argumento 1	$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$
Propiedad Del Argumento 2	$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

#### 1.4.1.3 Operaciones En Forma Binómica, Trigonométrica Y Exponencial

Operación	Forma Binómica	Forma Trigonométrica	Forma Exponencial
Número Complejo	$z := x + iy$	$z := \rho[\cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi)]$	$z := \rho e^{i\varphi}$
Complejo Conjugado	$z^* = x - iy$	$z^* = \rho[\cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(-\varphi)]$	$z^* = \rho e^{-i\varphi}$
Elemento Inverso	$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\left(-\frac{y}{x^2 + y^2}\right)$	$z^{-1} = \frac{1}{\rho}[\cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(-\varphi)]$	$z^{-1} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}$
Potencia	$z^n = (x + iy)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} (iy)^k$	$z^n = \rho^n [\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)]$	$z^n = \rho^n e^{in\varphi}$
Raíces $n$ -ésimas	$z_k := \sqrt[n]{z_0} = \sqrt[n]{x_0 + iy_0}$	$z_k := \sqrt[n]{ z_0 } \left[ \cos\left(\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right) \right]$	$z_k := \sqrt[n]{ z_0 } e^{i\left(\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right)}$

### A.4.2 Identidades De Derivadas Complejas

Identidad	Expresión
Definición De Función Compleja	$f_{(z)} := f_{(x+iy)} = u_{(x,y)} + i v_{(x,y)}$
Definición De Derivada Compleja	$\frac{\mathrm{d} f_{(z_0)}}{\mathrm{d} z} := \lim_{z \rightarrow z_0} \left[ \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \left\{ \frac{u_{(x,y)} - u_{(x_0,y_0)} + i[v_{(x,y)} - v_{(x_0,y_0)}]}{(x - x_0) + i(y - y_0)} \right\}$
Ecuaciones De Cauchy-Riemann	$\frac{\partial u_{(x_0,y_0)}}{\partial x} = \frac{\partial v_{(x_0,y_0)}}{\partial y} \qquad \frac{\partial u_{(x_0,y_0)}}{\partial y} = -\frac{\partial v_{(x_0,y_0)}}{\partial x}$
Ecuaciones De Cauchy-Riemann (Polares)	$\frac{\partial u_{(x_0,y_0)}}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_{(x_0,y_0)}}{\partial \varphi} \qquad \frac{\partial u_{(x_0,y_0)}}{\partial \varphi} = -\rho \frac{\partial v_{(x_0,y_0)}}{\partial \rho}$

### A.4.3 Identidades De Integración Compleja



Identidad	Expresión
Definición De Integral Compleja	$\int_a^b f_{(t)} \, \mathrm{d}t = \int_a^b [u_{(t)} + iv_{(t)}] \, \mathrm{d}t$
Teorema De Cauchy-Goursat	$\oint_{\mathcal{C}^+} f_{(z)} \, \mathrm{d}s = 0 \, \forall \, f \text{ Holomorfa en } \mathbb{D} \text{ Abierto}$
Fórmula Integral De Cauchy	$\oint_{\mathcal{C}^+} \frac{f_{(z)}}{z - z_0} \, \mathrm{d}s = 2\pi i f_{(z_0)}$
Fórmula Integral De Cauchy Generalizada	$\oint_{\mathcal{C}^+} \frac{f_{(z)}}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}s = \frac{2\pi i}{n!} \frac{\mathrm{d}^n f_{(z_0)}}{\mathrm{d}z^n}$
Teorema De Taylor	$f_{(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ donde } a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_r^+} \frac{f_{(w)}}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}s \, \forall \, n \in \mathbb{N}_0$
Teorema De Laurent	$f_{(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \text{ donde } a_n := \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_r^+} \frac{f_{(w)}}{(w - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}s \, \forall \, n \in \mathbb{Z}$

A.4.4    Identidades De Residuos

Identidad	Expresión
Definición De Residuo En $z_0$	$\text{Res} \left\{ f_{(z)}, z_0 \right\} := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_r^+} f_{(z)} \, \mathrm{d}s$
Residuo En Polo $z_0$ (Orden $m$ )	$\text{Res} \left\{ f_{(z)}, z_0 \right\} := \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} [(z - z_0)^m f_{(z)}] \right\} \Leftrightarrow z_0 \text{ es Polo de orden } m$
Definición De Residuo En El $\infty$	$\text{Res} \left\{ f_{(z)}, \infty \right\} := -a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_r^-} f_{(z)} \, \mathrm{d}s = -\text{Res} \left\{ \frac{1}{z^2} f_{\left(\frac{1}{z}\right)}, 0 \right\}$
Teorema De Los Residuos	$\oint_{\mathcal{C}^+} f_{(z)} \, \mathrm{d}s = 2\pi i \sum_{j=1}^N \text{Res} \left\{ f_{(z)}, z_j \right\}$
Corolario Del T. Residuos	$\sum_{j=1}^N \text{Res} \left\{ f_{(z)}, z_j \right\} = -\text{Res} \left\{ f_{(z)}, \infty \right\}$



A.5    Identidades Del Análisis Numérico

---