

- Introduction/Motivation

- 逆向運動學 (Inverse Kinematics)
- 給定需要碰到的點 (end effector)，針對給定的、能夠移動的骨架，計算需要的姿勢。

- Fundamentals

- Jacobian matrix (Kinematics.ppt p.31、p.41)
- Inverse-Jacobian method (Kinematics.ppt p.41、p.43)
- Pseudoinverse method (Kinematics.ppt p.46)
- 對各項變數、參數及函數的理解

- Implementation

- InverseJacobianIKSolver

首先計算 Jacobian matrix：

$$\text{Kinematics.ppt p.31 : } J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}, \text{ p.41 : } \frac{\partial p}{\partial \theta_i} = a_i \times (p - r_i)$$

其中需要對每個 bone 的 x、y、z 做檢查，dof 不為 0 才要計算。

因為將 x、y、z 分開計算，所以在使用 a_i 時需要先轉成只剩下 x、y、z 軸相關，再與 $(p - r_i)$ 做外積。

再來根據 `math::PseudoinverseSolver::Solve` 計算角度變化，並使用

Kinematics.ppt p.43： $\theta_{k+1} = \theta_k + \Delta t \times \dot{\theta}$ ，計算出新的角度。與計算 Jacobian matrix 相同，要分成 x、y、z 軸判斷 dof 有無再做計算，順序也要一樣。

- Pseudoinverse Method

$$\text{Kinematics.ppt p.46 : } J^+ = (J^T J)^{-1} J^T$$

最初使用 PPT 上所列的算式，但運算時發現骨架會不見，後來根據相同計算方式導出 J^+ 也可以等於 $J^T (J J^T)^{-1}$ ，因為 $J J^T$ 是一個 3*3 矩陣，相較於 $J^T J$ (N*N) 更好算 inverse，因此使用 $J^+ = J^T (J J^T)^{-1}$ 這個算

式。

- Result & Discussion

- step 的大小會造成移動順暢度的差別。越大在移動 marker 中的骨架動作越順暢，越小則越延宕。
- distance_epsilon 是指 end effector 和 end_bone_idx 所在的 bone 最末端位置的最大容忍距離。其大小會影響骨架與 end effector 是否有接觸，越小則越能精確表示有相碰，越大則會使骨架在碰到 end effector 前就停止迭代，甚至連迭代過程都不會進入。
- start_bone_idx 在 11 與在 25 的差別：前者是上半身全部都會動，因此能夠碰到的 end effector 位置範圍較大，後者則因為只有右手臂關節會動，能夠碰到的 end effector 位置範圍小很多。例如當 end effector 在 (-1.0, 1.49, -1.5) 這個位置時，若 start_bone_idx 是 25 的話就會因為完全碰不到而一直不斷進入迭代。而若 start_bone_idx 是 11 的話，因為連同上半身也可以移動的關係，可以碰得到。
- 原本看 demo 影片在 start_bone_idx 為 11 時整個上半身會移動，以為是連 sibling 以及 sibling 的 child 都要計算在內，但發現全部算下去反而整個骨架會變得很扭曲。因此改為僅計算 child-parent 關係的路徑，做出來就會跟 demo 影片差不多。

原本有包含 sibling 的想法中為了方便計算在檔案中 include queue 及 stack，但後來改為僅計算 child-parent 路徑只需要 vector 就好。

- Conclusion

- 這次作業比較需要注意的地方是計算 Jacobian 的 pseudo inverse。原先照著上課講義內容做時發現骨架會直接不見，一直以為是在解 IK 時出現問題，後來在網路上查 pseudo inverse of Jacobian 才發現多數用的都是 $J^+ = J^T(JJ^T)^{-1}$ 這個算式。仔細想過之後才發現是矩陣大小的問題，畢竟 3*3 跟 N*N 的逆矩陣運算困難度的確差很多。

- 根據跑出來的結果會發現，因為是給定要碰到的點（end effector）再去計算，姿勢上並不是特別自然，這也是 IK 計算的缺點。