

## 二維點位公差與製程能力

### Two-dimensional position tolerances and Process Capability

來新陽<sup>1</sup> 陳文魁 Wen-kuei Chen<sup>2</sup> 蔡祥智<sup>3</sup>

<sup>1</sup>中華台北品質學會品研會主任委員<sup>23</sup>研究員

#### 摘要

於 ISO 22514-6 第六篇，它的焦點主題是：「多維常態分配之製程能力的統計」。於幾何特性譬如洞孔中心，對洞心位置律定公差，它涉及的產品量測問題需要智能計算。洞心規格帶來傳統紅利型矩形公差帶；從百件產品之量測結果，可以獲得等量機率之橢圓。此際，沒有求取橢圓公差帶之內極限等機率橢圓的算程，智能量測就得止步。本文將以實例，探討常態分配下製程能力高效率演算法之開發，及其背後所需之統計理論。因此，我們可以正式走入 Q4.0 了。

英文關鍵詞：multivariate normal distribution, two-dimensional position tolerances, elliptic tolerance zone, probability contours, Process Capability

中文關鍵詞：多變量常態分配、二維位置公差、橢圓公差區域、等機率曲線、製程能力

日期：2021 年 10 月 10 日

## 1.0 序言 Introduction

ISO 於 2013 年發布 ISO 22514-6 第一版，第六篇的焦點主題是：「多維常態分配之製程能力的統計」。於幾何特性譬如洞孔中心，對洞心位置律定公差，它涉及的產品量測問題需要智能計算。洞心規格帶來傳統紅利型矩形公差帶；從百件產品之量測結果，可以獲得等量機率之橢圓。此際，沒有求取橢圓公差帶之內極限等機率橢圓的算程，智能量測就得止步。當然，它將衍生出製程能力之解析無以為繼。

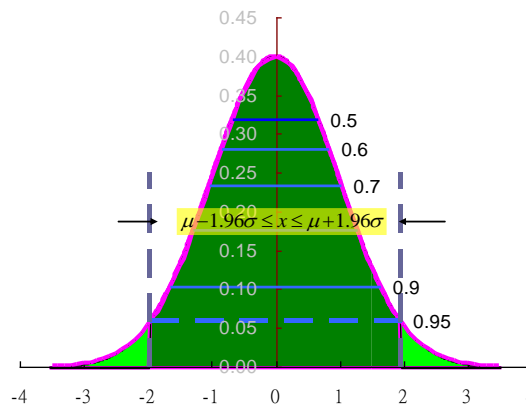
## 2.0 常態分配 Normal Distribution

### 2.1 單維常態家族

任一單維常態母體  $N(\mu, \sigma^2)$  都懷具兩項母數，平均數  $\mu$  及變異數  $\sigma^2$ ，其隨機變數  $\tilde{x}$  之機率密度函數  $f(x)$  是如下式所示。

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2}, \quad -\infty < x < +\infty$$

注意，以平均數  $\mu$  為中心，距離  $c$  個標準差  $\sigma$  之範圍  $\mu \pm c\sigma$  內決定機率密度曲線所圍面積的大小，示如下圖深綠色區域；換言之，常態機率密度曲線在  $\mu \pm 1.96\sigma$  位數範圍之面積達到 0.95。



#### 2.1.1 一般單維常態變數 $\tilde{x} \sim N(\mu, \sigma^2)$

一般單維常態變數具有兩項母數  $\mu$  及  $\sigma$ 。經由公式  $\tilde{z} = (\tilde{x} - \mu)/\sigma$ ，吾人可以將一般單維常態變數  $\tilde{x}$  轉換至標準單維常態變數  $\tilde{z} \sim N(0, 1^2)$ 。

#### 2.1.2 標準單維常態變數 $\tilde{z} \sim N(0, 1^2)$

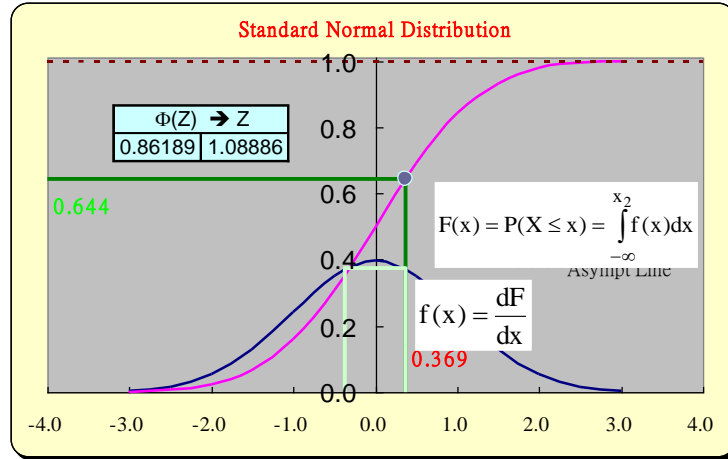
標準單維常態變數  $\tilde{z}$  的兩項母數特定是  $\mu = 0$  及  $\sigma = 1$ ，所以它是單維常態變數的特例，其機率密度函數是  $f(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2} / \sqrt{2\pi}$ ；注意，吾人常將標準常態變數的機率密度和累積機率函數分別記作  $\phi(z)$  和  $\Phi(z)$ 。另外，經由  $\tilde{x} = \mu + \sigma\tilde{z}$ ，可以將標準單維常態變數轉換成一般單維常態變數  $\tilde{x} \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。

#### 2.1.3 單維卡方 $\tilde{z}^2 \sim \chi_1^2$

若  $\tilde{z}$  是標準單維常態變數，則其平方  $\tilde{z}^2$  是單自由度的卡方變數。若  $\tilde{x}$  是單維常態變數，則其標準化數值之平方  $[(\tilde{x} - \mu)/\sigma]^2$  亦是單自由度的卡方變數。單自由度卡方變數的機率密度是  $f(u) = u^{-1/2} e^{-u/2} / \sqrt{2\pi}$ ，式中變數  $u > 0$ 。當右尾機率達 0.05 時，對應的卡方位值是 3.84，亦即  $\chi_{0.05}^2 = 3.84$ ；換言之， $\tilde{z}^2 \leq 3.84$  的機率達 0.95；此際， $(\tilde{x} - \mu)\sigma^{-1}(\tilde{x} - \mu) > 3.84$ 。由於 3.84 的平方根是 1.96，故知一般常態變數之數值落入範圍  $\mu - 1.96\sigma \leq x \leq \mu + 1.96\sigma$  的機率達 0.95。

#### 2.1.4 單維常態亂數 $\tilde{u} \in [0, 1]$

如下圖所示，製造齊一亂數  $\tilde{u} \in [0,1]$  後，若將  $u$  視作常態左尾累積機率  $\Phi(z)$ ，則吾人可以利用反函數  $\Phi^{-1}(u)$  來求取齊一分配的位數  $z$ ，並且將它視為單維的標準常態亂數；Excel 提供函數 RAND() 可造  $[0,1]$  範圍的齊一亂數，故知利用聯合函數 NORMSINV (RAND())，吾人能夠逕自製造單維的標準常態亂數  $z$ 。然後，經由轉換公式  $x = \mu + \sigma z$ ，吾人可以製造一般的單維常態亂數  $\tilde{x} \in N(\mu, \sigma^2)$ ；惟在 Excel 中，只要利用聯合函數 NORMINV(RAND(),  $\mu, \sigma$ )，吾人就能逕直製造它們。



### 2.1.5 利用卡方製造單維常態亂數

製造自由度為 1 的卡方亂數  $\chi^2_\alpha$ ，取其平方根  $\chi_\alpha$ ，再乘上  $\{+1, -1\}$  的亂數，它就是一項標準單維常態亂數。將齊一亂數  $\tilde{u} \in [0,1]$  視作卡方右尾累積機率  $F(u)$ ，逆算自由度 1 的卡方位數  $\alpha = F^{-1}(u)$ ，該值之平方根是正值的標準單維常態亂數。於 Excel，利用聯合函數 (IF(RAND() > 0.5, +1, -1)) \* SQRT(CHIINV(RAND(), 1))，吾人能夠製造單維標準常態亂數。另外，利用公式  $\mu + \sigma * (IF(RAND() > 0.5, +1, -1)) * SQRT(CHIINV(RAND(), 1))$ ，吾人能夠製造一般單維常態亂數。

## 2.2 二維常態家族

任何二維常態母體  $N\left([\mu_1, \mu_2], \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right)$  都懷具五項母數，平均數  $\mu_1$  和  $\mu_2$ 、變異數  $\sigma_1^2$ 、 $\sigma_2^2$  及共變異數  $\sigma_{12}$  或  $\sigma_{21}$  等；注意，此際  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ 。令共變矩陣  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ ，二維常態  $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$  的機率密度函數  $f(\tilde{\mathbf{x}})$  可以示如下式。

$$f(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}[\mathbf{x}_1 - \mu_1, \mathbf{x}_2 - \mu_2]\Sigma^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 - \mu_1 \\ \mathbf{x}_2 - \mu_2 \end{bmatrix}}$$

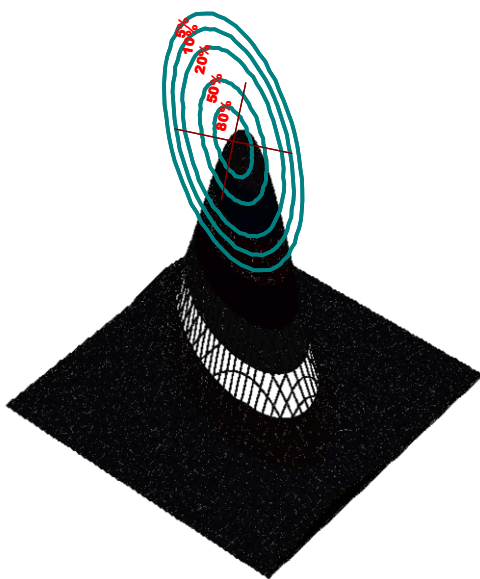
由於行列值  $|\Sigma| = (1 - \rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2$ ，故知共變異反矩陣  $\Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2} \begin{pmatrix} \sigma_1^{-2} & -\rho/\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho/\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^{-2} \end{pmatrix}$ 。

如下圖所示常態機率密度曲面，其任一水平切面都是以平均數  $[\mu_1, \mu_2]$  為中心的乙式橢圓，位於橢圓之上的任何圖點都具有相同大小的機率密度。換言之，二維常態機率曲面的任一水平橢圓切面，橢圓上的諸多圖點與平均中心的馬氏距離  $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\Sigma^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'$  都是相同的。

給予一項馬氏距離  $\chi^2_\alpha$ ，即可在常態曲面上獲得對應的切面橢圓，該曲面之下的投影體積當然都不會大於 1.0。如下圖所示，指定切面橢圓的投影之外的體積  $\chi^2_\alpha$ ，計算對應的馬氏距離後，可以獲得攸關的切面橢圓。如以代數式表達，二維常態變數的機率密度函數是如下所示。

$$f(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1 - \rho^2)}\left[\left(\frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho \times \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \times \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]}$$

換言之，具有相同馬氏距離  $\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho \times \frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} \times \frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2 = (1-\rho^2)\chi^2$  之諸點會構成常態曲面的一片水平切面。



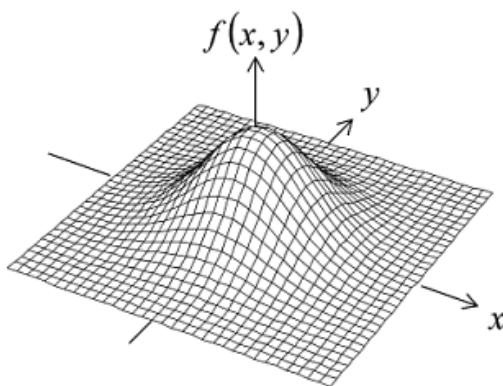
### 2.2.1 標準獨立二維常態 $N\left([0\ 0], \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

當乙組二維隨機變數  $z = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$  的成分是相互獨立的標準常態變數時，標準差  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ，相關係數  $\rho_{12} = 0$ ，這兩項變數的聯合機率是  $f(\tilde{z}) = f(\tilde{z}_1) f(\tilde{z}_2) = e^{-\frac{1}{2}[z_1^2 + z_2^2]} / 2\pi$ 。該聯合機率密度的水平切面是正圓，當切圓之半徑是  $\chi_\alpha^2$  時，其正圓方程式是  $z_1^2 + z_2^2 = \chi_\alpha^2$ 。

### 2.2.2 原點獨立二維常態 $N\left([0\ 0], \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right)$

當懷有平均數  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  之乙組二維常態變數  $\tilde{x} = (x, y)$  的成分是相互獨立的一般常態變數時，這兩項變數的聯合機率是  $f(\tilde{x}) = f(x) \cdot f(y) = e^{-\frac{1}{2}(x^2/\sigma_1^2 + y^2/\sigma_2^2)} / 2\pi\sigma_1\sigma_2$ ，兩標準差是  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ ，相關係數  $\rho_{12} = 0$ 。當  $\sigma_1 > \sigma_2$  時，該機率密度的切面圖形是正軸橢圓，其方程式是  $x^2/\sigma_1^2 + y^2/\sigma_2^2 = \chi_\alpha^2$ ，而半長軸和半短軸之長度分別是  $\chi_\alpha\sigma_1$  和  $\chi_\alpha\sigma_2$ ；當  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  時，圖形是半徑長度達  $\chi_\alpha\sigma$  的正圓。

其實，當  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  時， $[u\ v] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \chi_\alpha^2$  是正軸橢圓的矩陣形式。若設  $\lambda_1 = \sigma_1^2$  和  $\lambda_2 = \sigma_2^2$ ，則  $[x\ y] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \chi_\alpha^2$ ，或者  $\mathbf{x}\Lambda^{-1}\mathbf{x}' = \mathbf{x}\sqrt{\Lambda}^{-1} \cdot \sqrt{\Lambda}^{-1}\mathbf{x}' = \chi_\alpha^2$ ，該正軸橢圓的半長軸和半短軸之長度分別是  $\chi_\alpha\sqrt{\lambda_1}$  和  $\chi_\alpha\sqrt{\lambda_2}$ ；亦即， $\left[\frac{x}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{y}{\sqrt{\lambda_2}}\right] \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{y}{\sqrt{\lambda_2}} \end{bmatrix}' = \chi_\alpha^2$ 。



### 2.2.3 原點二維常態變數 $N\left([0\ 0], \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right)$

當懷具平均數  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  的乙組二維隨機變數  $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$  的成分是非獨立常態變數時，它們的聯合機率是  $f(\tilde{\mathbf{x}}) = e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(x_1^2/\sigma_1^2 - 2\rho x_1 x_2/\sigma_1 \sigma_2 + x_2^2/\sigma_2^2)} / 2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$ ，兩標準差是  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ ，相關係數是  $\rho_{12} \neq 0$ 。此際，機率密度的切面圖形是斜軸橢圓；其實，斜軸橢圓的矩陣形式是  $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \chi_\alpha^2$ ，式中變矩陣  $\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$ 。

### 2.2.4 一般二維常態變數 $N\left([\mu_1\ \mu_2], \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 \end{bmatrix}\right)$

當懷具平均數  $\mu_1$  和  $\mu_2$  的乙組二維隨機變數  $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2)$  的成分是非獨立常態變數時，這兩項變數的聯合機率是  $f(\tilde{\mathbf{x}}) = e^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\left[\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2 - 2\rho\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2} + \left[\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right]^2\right)} / 2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}$ ，兩項標準差是  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$ ，相關係數是  $\rho_{12} \neq 0$ ； $\begin{bmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{bmatrix} \mathbf{\Sigma}^{-1} \begin{bmatrix} x_1-\mu_1 \\ x_2-\mu_2 \end{bmatrix} = \chi_\alpha^2$  是該聯合機率密度的切面矩陣之形式。因此，與原點二維常態變數相比，一般二維常態變數的機率切面圖形僅只是前者圖形之中心的  $(\mu_1, \mu_2)$  位移，亦即  $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' = \chi_\alpha^2$ 。

假設斜軸橢圓  $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' = \chi_\alpha^2$  之半長軸和半短軸的長度分別是  $\chi_\alpha \sqrt{\lambda_1}$  和  $\chi_\alpha \sqrt{\lambda_2}$ 。先從原點正軸橢圓來看，其長軸和短軸的兩頂點分別是  $[\pm\chi_\alpha \sqrt{\lambda_1}, 0]$  和  $[0, \pm\chi_\alpha \sqrt{\lambda_2}]$ ；若將該橢圓轉軸  $\varphi$ ，則原點斜軸橢圓之長軸和短軸的兩頂點分別是  $[\pm\chi_\alpha \sqrt{\lambda_1} \cos\varphi, \mp\chi_\alpha \sqrt{\lambda_1} \sin\varphi]$  和  $[\pm\chi_\alpha \sqrt{\lambda_2} \sin\varphi, \mp\chi_\alpha \sqrt{\lambda_2} \cos\varphi]$ ；然後，再將之移位  $(\mu_1, \mu_2)$ ，得知一般斜軸橢圓之長軸和短軸的兩處頂點分別是  $[\mu_1 \pm \chi_\alpha \sqrt{\lambda_1} \cos\varphi, \mu_2 \mp \chi_\alpha \sqrt{\lambda_1} \sin\varphi]$  和  $[\mu_1 \pm \chi_\alpha \sqrt{\lambda_2} \sin\varphi, \mu_2 \mp \chi_\alpha \sqrt{\lambda_2} \cos\varphi]$ 。

當  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$  時， $\lambda_1 = \lambda_2$  及軸角  $\varphi = \pi/4$ ；當  $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$  時， $\sigma_{12} > 0$  時，逆時鐘旋轉角度  $\varphi = \tan^{-1}(2\sigma_{12}/(\sigma_1^2 - \sigma_2^2))/2$ ；反之，順時鐘旋轉角度  $\varphi$ 。

### 2.2.5 二維卡方 $z_1^2 + z_2^2 \sim \chi_2^2$

若  $z_1$  和  $z_2$  是兩項獨立標準單維常態變數，則其平方和  $z_1^2 + z_2^2$  是雙自由度的卡方變數； $\chi_2^2$  之機率密度是  $f(u) = e^{-u/2}/2$ ，右尾累積機率是  $R(u) = e^{-u/2}$ ，式中  $u$  是正數。另外， $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})'$  也是雙自由度的卡方變數。由於  $\chi_{5\%}^2 = 5.99$ ，二維常態機率密度的切面  $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \mathbf{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \leq 5.99$  的投影佔有二維常態之 95% 體積。

### 2.2.6 利用卡方製造二維常態亂數

製造對應於卡方亂數的兩項標準常態亂數，將之轉軸及平移，吾人可以製造二維常態亂數  $\tilde{\mathbf{x}} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ 。首先，利用共變矩陣  $\mathbf{\Sigma}$  算出軸角  $\varphi$ ，利用  $\varphi$  計算轉軸矩陣  $\mathbf{R}$ ，進而再算出特徵矩陣  $\boldsymbol{\Lambda}$ 。接著，製造雙自由度卡方亂數  $\chi_\alpha^2$ ，再製造兩項相互獨立的標準單維常態亂數  $(z_1, z_2)$ ，它們符合條件  $z_1^2 + z_2^2 = \chi_\alpha^2$ 。最後，計算  $(x, y) = (\mu_1, \mu_2) + (z_1, z_2) \sqrt{\boldsymbol{\Lambda}} \mathbf{P}$ ，它們就是所要求的乙組二維常態亂數。注意，公式  $(z_1, z_2) \sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}$  將正圓圖點  $(z_1, z_2)$  轉換成正軸橢圓圖點  $(u, v)$ ，公式  $(u, v) \mathbf{P}$  將正軸橢圓圖點  $(u, v)$  轉換成斜軸橢圓圖點  $(t, s)$ ，公式  $(t, s) + (\mu_1, \mu_2)$  將斜軸橢圓圖點  $(t, s)$  轉換成斜軸橢圓圖點  $(x, y)$ 。

現在，剩下這項問題：「卡方值特定時，如何製造兩項相互獨立的標準常態亂數？」為了達成前述製造目的，吾人僅需遵照如下的程序：「首先，製造齊一亂數  $\theta \in [0, 2\pi]$ ，然後計算  $z_1 = \chi_\alpha \cos \theta$  和  $z_2 = \chi_\alpha \sin \theta$ 。」



總之，製造二維常態亂數的訣竅是公式： $(x,y) = (\mu_1,\mu_2) + (z_1,z_2)\sqrt{\Lambda}P$ 。為製造常態母體  $N(\mu, \Sigma)$  的亂數，吾人可將程序區分成如下三大階段：❶計算共變矩陣  $\Sigma$  的轉軸矩陣  $P$  及特徵矩陣  $\Lambda$ ；❷製造卡方值及製造符合該值的兩項標準常態亂數  $(z_1,z_2)$ ；❸將常態數點轉軸  $\sqrt{\Lambda}P$  及將中心平移  $\mu$ 。

## 2.3 三維常態家族

### 2.3.1 標準獨立三維常態 $N\left([0\ 0\ 0], \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

當三維隨機變數  $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3)$  的成分變數是相互獨立的標準常態時，它們的聯合機率是  $f(\tilde{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}[z_1^2+z_2^2+z_3^2]}$ 。該機率密度的水平切面圖形是正球體，當球體之半徑是  $\chi$  時，其正球體方程式是  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \chi_\alpha^2$ 。

### 2.3.2 原點獨立三維常態 $N\left([0\ 0\ 0], \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}\right)$

當懷有平均數  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$  之三維常態變數  $\tilde{w} = (t,u,v)$  的成分變數是相互獨立的一般常態時，這三項變數的聯合機率是  $f(\tilde{w}) = e^{-\frac{1}{2}(t^2/\sigma_1^2+u^2/\sigma_2^2+v^2/\sigma_3^2)}/2\pi\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ 。該機率密度的切體圖形是正軸橢圓體，其方程式是  $t^2/\sigma_1^2 + u^2/\sigma_2^2 + v^2/\sigma_3^2 = \chi_\alpha^2$ ，而半長軸和半短軸之長度分別是  $\chi_\alpha\sigma_1$ 、 $\chi_\alpha\sigma_2$  和  $\chi_\alpha\sigma_3$ 。

其實， $[t\ u\ v] \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} = \chi_\alpha^2$  是正軸橢圓體的矩陣形式。若設  $\lambda_1 = \sigma_1^2$ 、 $\lambda_2 = \sigma_2^2$  和  $\lambda_3 = \sigma_3^2$ ，則  $[t\ u\ v] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} t \\ u \\ v \end{bmatrix} = \chi_\alpha^2$ ，或者  $\mathbf{w}\Lambda^{-1}\mathbf{w}' = \chi_\alpha^2$ ，該正軸橢圓體的半長軸和半短軸之長度分別是  $\chi_\alpha\sqrt{\lambda_1}$ 、 $\chi_\alpha\sqrt{\lambda_2}$  和  $\chi_\alpha\sqrt{\lambda_3}$ 。

### 2.3.3 原點三維常態變數 $N\left([0\ 0\ 0], \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}\right)$

當懷具平均數  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$  之三維隨機變數  $\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3)$  的成分變數是非獨立常態時，這三項變數的聯合機率是  $f(\tilde{\mathbf{x}}) = e^{-\frac{1}{2}[x_1\ x_2\ x_3]\Sigma^{-1}[x_1\ x_2\ x_3]'} / (2\pi)^{3/2} \sqrt{|\Sigma|}$ 。此際，機率密度的切體圖形是斜軸橢圓體；

其實，斜軸橢圓體的矩陣形式是  $[x_1\ x_2\ x_3]\Sigma^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \chi_\alpha^2$ ，式中  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$  係共變異矩陣。

### 2.3.4 一般三維常態變數 $N\left([\mu_1\ \mu_2\ \mu_3], \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}\right)$

當懷具平均數  $\mu_1$ 、 $\mu_2$  和  $\mu_3$  之三維隨機變數  $\tilde{\mathbf{x}}(x_1, x_2, x_3)$  的成分變數是非獨立常態時，這三項變數的聯合機率是  $f(\tilde{\mathbf{x}}) = e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu)\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)'}/(2\pi)^{3/2} \sqrt{|\Sigma|}$ ；機率密度之切體的矩陣形式是  $(\mathbf{x}-\mu)\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)' =$

$\chi^2_\alpha$ ，式中共變矩陣  $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_3^2 \end{bmatrix}$ 。因此，與原點三維常態變數相比，一般三維常態變數的機率切體圖形僅只是前者圖形之中心的  $[\mu_1, \mu_2, \mu_3]$  位移。

### 2.3.5 三維卡方 $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \sim \chi^2_3$

若  $z_1$ 、 $z_2$  和  $z_3$  是三項獨立標準單維常態變數，則其平方和  $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$  是三自由度的卡方變數，而  $\chi^2_3$  之機率密度是  $f(u) = \sqrt{u}e^{-u/2}/\sqrt{2\pi}$ ,  $u > 0$ 。另外， $(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)'$  也是三自由度的卡方變數。由於  $\chi^2_{3,0.05} = 7.81$ ，三維常態機率密度的切面  $(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)' \leq 7.81$  的投影佔有 0.95 體積。

### 2.3.6 利用卡方製造三維常態亂數

製造對應於卡方亂數的三項標準常態亂數，將之轉軸及平移，吾人可以製造三維常態亂數  $\tilde{x} \sim N(\mu, \Sigma)$ ；注意，製造三維常態亂數的訣竅是公式： $(x, y, z) = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) + (z_1, z_2, z_3)\sqrt{\Lambda}P$ 。為製造常態母體  $N(\mu, \Sigma)$  的亂數，吾人可將程序區分成如下三大階段：❶ 計算共變矩陣  $\Sigma$  的特徵矩陣  $P$  及對角矩陣  $\Lambda$ ；❷ 製造自由度三的卡方值及製造符合該值的三項標準常態亂數  $(z_1, z_2, z_3)$ ；❸ 將常態數點轉軸  $\sqrt{\Lambda}P$  及將中心平移  $\mu$ 。

現在，剩下這項問題：「給予自由度為三的特定卡方值，如何製造三項相互獨立的標準常態亂數？」為了達成前述製造目的，吾人僅須遵照如下的程序：「首先，令  $r_1 = \sqrt{\chi^2_\alpha}$ ，製造仰角亂數  $\theta_1 \in [0, 2\pi]$ ，用以計算仰高  $y_1 = r_1 \sin \theta_1$  和  $r_2 = r_1 |\cos \theta_1|$ ；然後，再製造轉角亂數  $\theta_2 \in [0, 2\pi]$ ，用以計算橫長  $y_2 = r_2 \sin \theta_2$  和縱長  $y_3 = r_2 \cos \theta_2$ ；最後，隨機調整  $(y_1, y_2, y_3)$  位置以獲得三維亂數  $(z_1, z_2, z_3)$ 。」

## 3.0 實例 Example

### 3.1 另件製程 Part Process

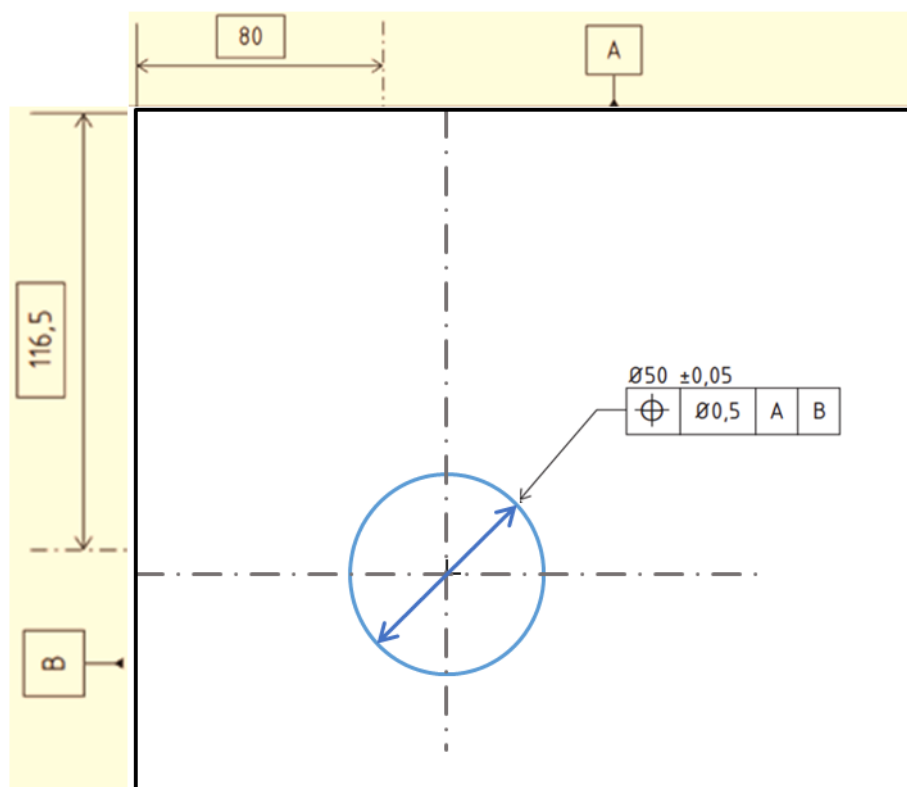
於製程取來乙只另件，量測其鑽孔的中心點。示如〔圖一〕，X-軸標稱值(nominal value)是 80mm 及 Y-軸是 -116.5mm。給定孔洞直徑是  $\varnothing 50\text{mm}$ ，公差  $\pm 0.05\text{mm}$ 。

另件量測數目是  $n = 100$ 。規格界限(Specification limits)： $L_X = 79.750$ ； $L_Y = -116.750$ ； $U_X = 80.250$ ； $U_Y = -116.250$ 。從產製另件獲得了示如〈表一〉的一百組數值。

〈表一〉 測出之數值及算出的離心距離

Nr.	D 值	X-座標	Y-座標	Nr.	D 值	X-座標	Y-座標	Nr.	D 值	X-座標	Y-座標
1	0.038	79.976	-116.470	36	0.090	79.995	-116.410	71	0.107	79.986	-116.394
2	0.094	79.993	-116.406	37	0.097	80.002	-116.403	72	0.073	80.016	-116.429
3	0.086	80.031	-116.420	38	0.113	80.027	-116.390	73	0.069	79.995	-116.431
4	0.041	79.968	-116.475	39	0.021	79.995	-116.520	74	0.108	79.975	-116.395
5	0.105	79.973	-116.399	40	0.085	80.010	-116.416	75	0.118	79.965	-116.387
6	0.092	79.983	-116.410	41	0.110	80.005	-116.390	76	0.122	79.971	-116.382
7	0.099	80.008	-116.401	42	0.081	80.004	-116.419	77	0.119	79.978	-116.383
8	0.086	80.014	-116.415	43	0.055	79.966	-116.457	78	0.118	79.999	-116.382
9	0.075	80.020	-116.428	44	0.097	80.013	-116.404	79	0.024	80.008	-116.477
10	0.076	79.979	-116.427	45	0.078	80.021	-116.425	80	0.094	80.005	-116.406
11	0.064	79.978	-116.440	46	0.118	79.989	-116.383	81	0.056	80.007	-116.444
12	0.086	80.016	-116.416	47	0.111	79.988	-116.390	82	0.093	80.032	-116.413

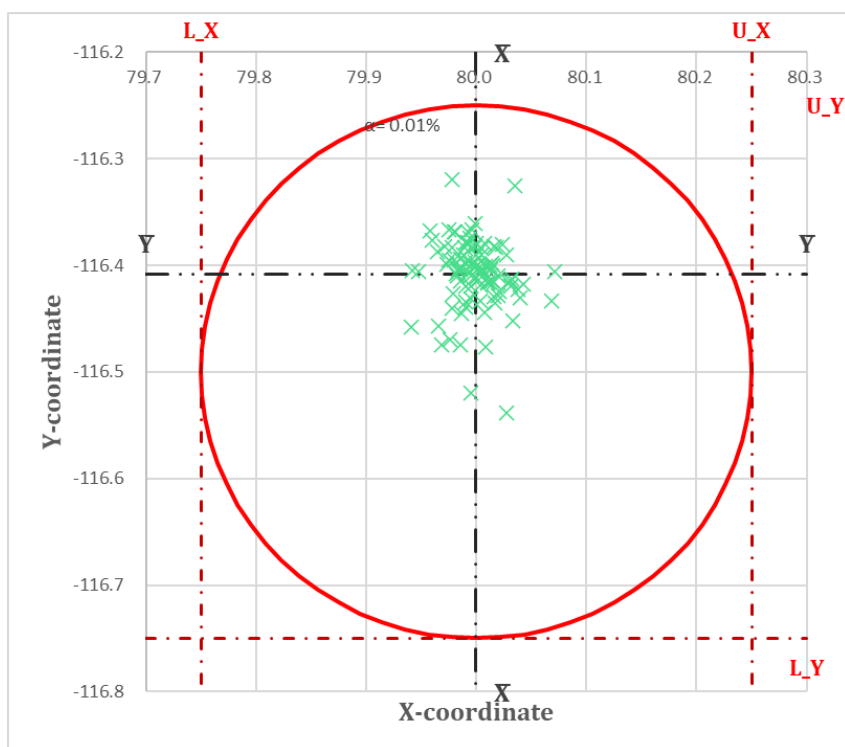
13	0.067	79.990	-116.434	48	0.057	79.987	-116.445	83	0.139	79.958	-116.368
14	0.120	79.992	-116.380	49	0.101	80.012	-116.400	84	0.122	79.990	-116.378
15	0.103	79.999	-116.397	50	0.067	80.017	-116.435	85	0.126	79.994	-116.374
16	0.119	80.016	-116.382	51	0.099	80.000	-116.401	86	0.089	80.029	-116.416
17	0.086	80.038	-116.423	52	0.101	79.995	-116.399	87	0.110	80.000	-116.390
18	0.118	80.018	-116.383	53	0.139	79.999	-116.361	88	0.084	80.010	-116.417
19	0.116	80.005	-116.384	54	0.086	80.002	-116.414	89	0.121	80.000	-116.379
20	0.118	80.071	-116.406	55	0.095	80.068	-116.433	90	0.131	79.992	-116.369
21	0.072	79.941	-116.458	56	0.103	79.990	-116.397	91	0.122	79.992	-116.378
22	0.097	79.984	-116.404	57	0.178	80.035	-116.325	92	0.062	79.990	-116.439
23	0.029	79.986	-116.475	58	0.107	79.980	-116.395	93	0.098	79.999	-116.402
24	0.093	80.043	-116.418	59	0.182	79.978	-116.319	94	0.086	79.986	-116.415
25	0.047	80.027	-116.538	60	0.099	80.000	-116.401	95	0.097	79.986	-116.404
26	0.090	80.031	-116.415	61	0.080	79.995	-116.420	96	0.092	80.020	-116.410
27	0.097	80.005	-116.403	62	0.133	79.996	-116.367	97	0.095	79.984	-116.406
28	0.122	80.024	-116.380	63	0.088	80.000	-116.412	98	0.133	79.980	-116.369
29	0.081	80.040	-116.430	64	0.107	79.948	-116.406	99	0.132	79.981	-116.369
30	0.094	80.006	-116.406	65	0.101	80.015	-116.400	100	0.058	80.033	-116.452
31	0.099	79.986	-116.402	66	0.081	79.990	-116.420				
32	0.094	79.982	-116.408	67	0.087	80.009	-116.413				
33	0.111	79.942	-116.405	68	0.067	80.004	-116.433				
34	0.135	79.975	-116.367	69	0.130	79.960	-116.376				
35	0.103	80.014	-116.398	70	0.121	80.007	-116.379				



〔圖一〕 量測任務是孔洞之中心位置

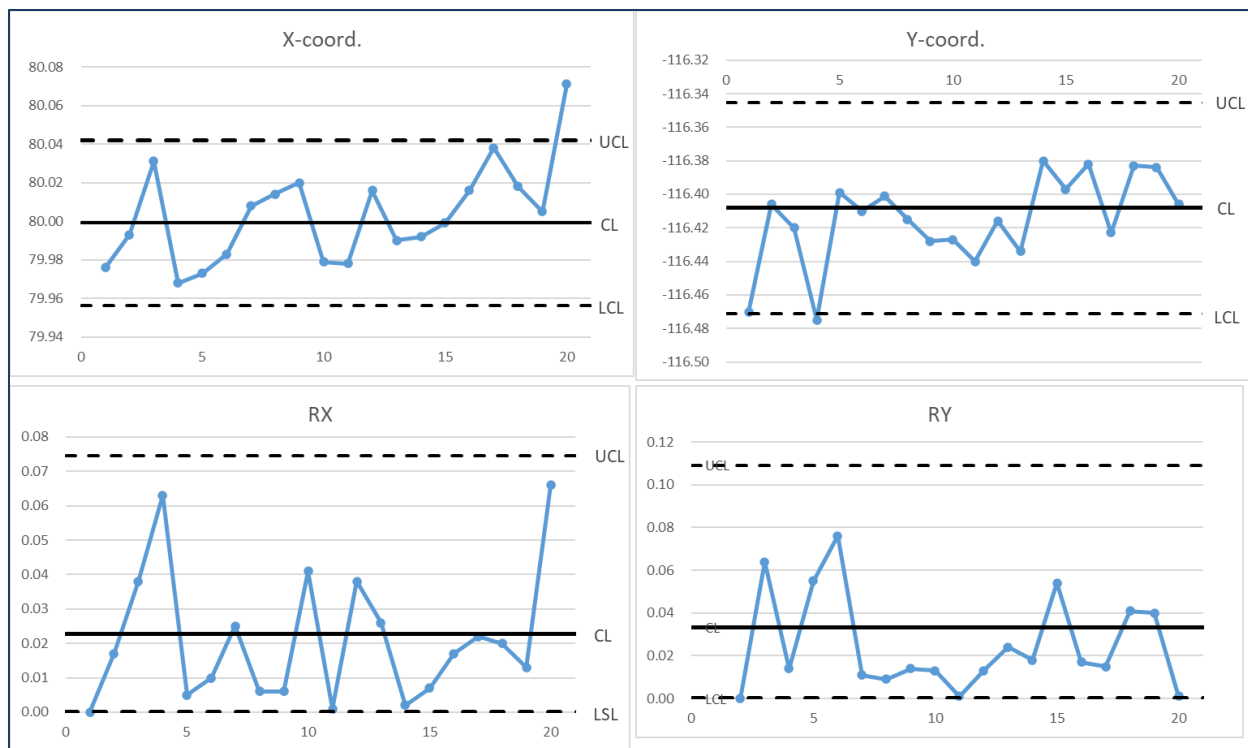


這百組孔心的座標數值，其散布示如〔圖二〕；這些孔心，位置散布大多向上偏離目標中心是  $(X_0, Y_0) = (80, -116.5)$ ，平均中心是  $(\bar{X}, \bar{Y}) = (79.999, -116.408)$ 。



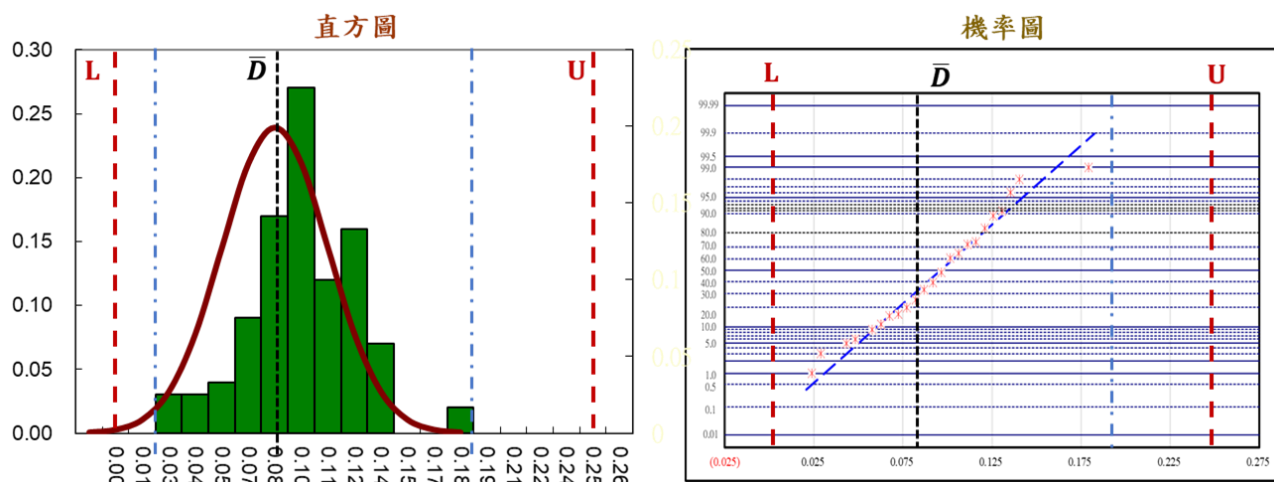
〔圖二〕孔洞中心點的散布圖

示如〔圖三〕，孔洞前二十組數值之  $X$ -軸與  $Y$ -軸的  $\bar{X}$  與  $R$  管制圖。 $X$  座標與  $Y$  座標的  $R$  管制圖，兩者皆都呈現穩定。 $X$  座標的  $\bar{X}$  管制圖地 20 點逸出管制界線， $Y$  座標的  $\bar{X}$  管制圖串點卻呈現偏向下側。



〔圖三〕孔洞前二十組數值之  $X$ -軸與  $Y$ -軸的  $\bar{X}$  &  $R$  管制圖

示如〔圖四〕，計有兩圖：孔洞百筆離心距離的直方圖與機率圖。相較於常態密度曲線，直方圖呈現左偏；檢視規格，這百點的離心距離全數符合規格。檢視機率圖，這百點的中心確有顯著偏離目標中心。

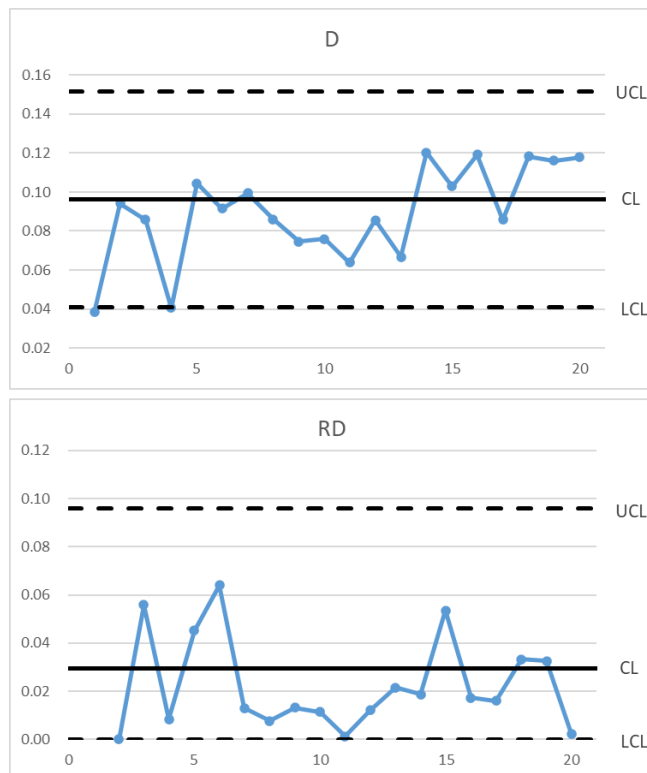


〔圖四〕百筆離心距離之  $\bar{X}$  & R 管制圖

考量百筆離心距離，其公式是

$$D = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

示如〔圖五〕，孔洞之中心位置之前二十筆之離心距離，形成離心距離  $D$  之  $\bar{X}$  與  $R$  管制圖； $R$  管制圖呈現穩定。 $D$  值管制圖串點也呈現偏向下側。



〔圖五〕百筆  $D$  值之直方圖與機率圖

### 3.2 另件統計量 Part Statistics

示如〈表二〉，計算  $D$  值、 $X$  座標及  $Y$  座標等三變數的統計量：包括樣本數、最小值、最大值、全距數、平均數  $\bar{X}$ 、分位數  $X_{0.135\%}$ 、中央數、分位數  $X_{99.865\%}$ 、眾位數、標準差、變異數、標準誤、峰度、偏態。全距數是最小值與最大值之差；樣本數是  $n$ ，標準差是  $\hat{\sigma}$  時，標準誤  $\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma}/\sqrt{n}$ 。中央數等於變數之 50% 分位數  $X_{50\%}$ 。

〈表二〉 $D$  值、 $X$  座標及  $Y$  座標等變數的計算統計量

$D$		$X$ -座標		$Y$ -座標	
樣本數	100	樣本數	100	樣本數	100
最小值	0.021	最小值	79.941	最小值	-116.538
最大值	0.182	最大值	80.071	最大值	-116.319
全距數	0.162	全距數	0.130	全距數	0.219
平均數	0.096	平均數	79.999	平均數	-116.408
$X_{0.135\%}$	0.021	中間值	79.941	中間值	-116.536
中央數	0.097	中央數	79.999	中央數	-116.406
眾位數	0.086	眾位數	79.990	眾位數	-116.406
$X_{99.865\%}$	0.182	中間值	-116.320	中間值	0.094
標準差	0.028	標準差	0.023	標準差	0.033
變異數	0.001	變異數	0.001	變異數	0.001
標準誤	0.003	標準誤	0.002	標準誤	0.003
峰度	1.228	峰度	0.981	峰度	3.232
偏態	-0.096	偏態	0.270	偏態	-0.931

根據〈表二〉， $X$  座標數值之分配稍稍右偏，及  $Y$  座標數值之分配左偏；比起常態，前項分配稍稍陡峭，後項分配極為陡峭。另外， $D$  值之分配尚屬對稱，比起常態其型態極為陡峭。

### 3.3 孔洞位置統計量 Hole Position Statistics

假設二維變數遵循常態分配： $\tilde{\mathbf{x}} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 。首先，利用共變矩陣  $\boldsymbol{\Sigma}$  算出轉軸角度  $\varphi$ ，利用  $\varphi$  計算轉軸矩陣  $\mathbf{R}$ ，進而再算出特徵矩陣  $\boldsymbol{\Lambda}$ 。接著，製造雙自由度卡方亂數  $\chi_\alpha^2$ ，再製造兩項相互獨立的標準單維常態亂數  $(z_1, z_2)$ ，它們符合條件  $z_1^2 + z_2^2 = \chi_\alpha^2$ 。最後，計算  $(x, y) = (\mu_1, \mu_2) + (z_1, z_2)\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}\mathbf{P}$ ，它們就是所要求的乙組二維常態亂數。注意，公式  $(z_1, z_2)\sqrt{\boldsymbol{\Lambda}}$  將正圓圖點  $(z_1, z_2)$  轉換成正軸橢圓圖點  $(u, v)$ ，公式  $(u, v)\mathbf{P}$  將正軸橢圓圖點  $(u, v)$  轉換成斜軸橢圓圖點  $(t, s)$ ，公式  $(t, s) + (\mu_1, \mu_2)$  將斜軸橢圓圖點  $(t, s)$  轉換成斜軸橢圓圖點  $(x, y)$ 。

以向量表示，洞孔之目標中心是  $\mathbf{X}_0 = (X_0, Y_0) = (80, -116.5)$ ，計算的平均中心是  $\hat{\boldsymbol{\mu}} = (\bar{X}, \bar{Y}) = (79.999, -116.408)$ 。計算之共變異矩陣(Variance-covariance matrix)是

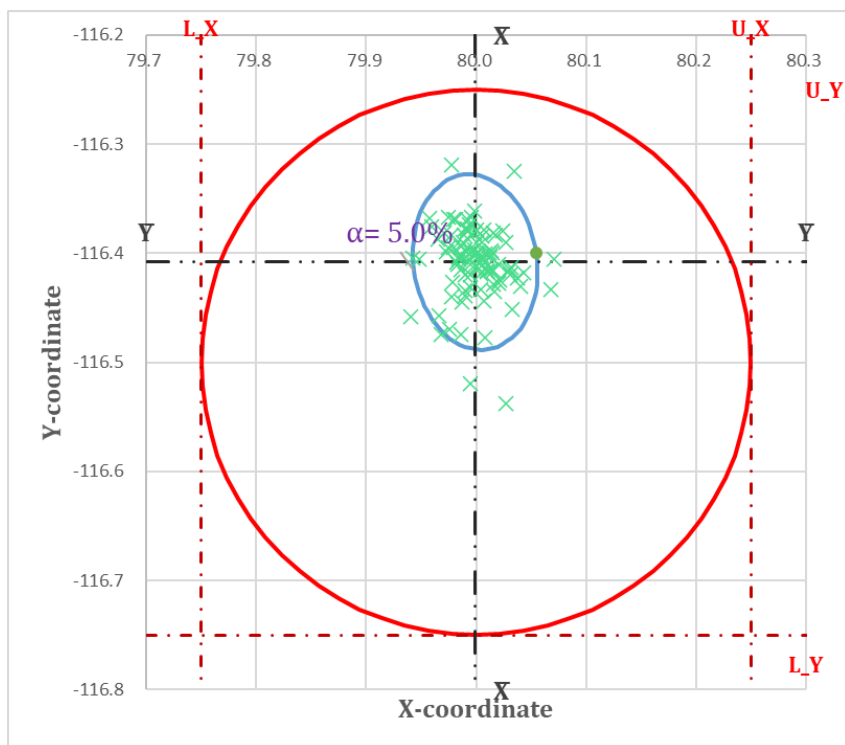
$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \begin{bmatrix} 0.0005 & -0.0001 \\ -0.0001 & 0.0011 \end{bmatrix}$$

$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$  的反矩陣是

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.991 & 0.135 \\ -0.135 & 0.991 \end{bmatrix}$$

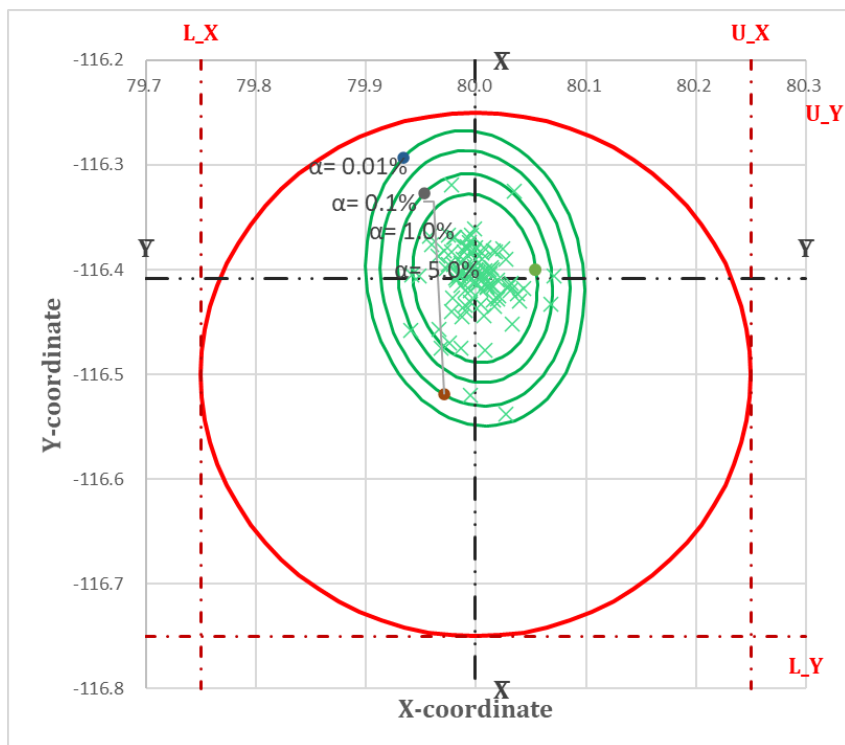
$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$  的特徵向量是  $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = [0.0005, 0.0011]$ 。

示如〔圖六〕，該等機率曲線所圍成區域是橢圓，它是孔洞中心之 95%信賴區間；此際， $\alpha = 5\%$ ， $\chi_{\alpha}^2 = 5.99$  及  $\chi_{\alpha} = 2.45$ 。



〔圖六〕孔洞中心等機率曲線圍成之 95%橢圓信賴區域

示如〔圖七〕，它呈現多條等機率曲線所圍成的多項橢圓信賴區域。當  $\alpha = 5\%$  時， $\chi_{\alpha}^2 = 5.99$  及  $\chi_{\alpha} = 2.45$ ；當  $\alpha = 1\%$  時， $\chi_{\alpha}^2 = 9.21$  及  $\chi_{\alpha} = 3.03$ ；當  $\alpha = 0.1\%$  時， $\chi_{\alpha}^2 = 13.82$  及  $\chi_{\alpha} = 3.72$ ；當  $\alpha = 0.01\%$  時， $\chi_{\alpha}^2 = 18.42$  及  $\chi_{\alpha} = 4.29$ 。



〔圖七〕孔洞中心多條等機率曲線圍成多項橢圓信賴區域

### 3.4 製程能力 $\hat{P}_{pk}$

檢視〔圖七〕，我們有待尋求最大橢圓區域，讓它完全落入紅色之規格圓形區域。顯然，最大等機率橢圓會與正圓在上側相切。為求取該相切橢圓，我們需要乙套智能算程。

利用如下微軟 Excel 規劃求解(Solver)，開發智能算程。首先，於儲存格\$AA\$11 設定顯著機率  $\alpha$  的放大初值 A 為 100，而於儲存格\$X\$11 讓  $\alpha = A/10^6 = 0.01\%$ ；此際  $\chi^2 = 18.42$ ， $\chi = 4.29$ 。每  $5^\circ$  安排一點，讓規格正圓與信賴橢圓各產生完整 72 圖點；計算這 72 組圖點之距離，於儲存格\$AB\$12 計算平方總和等於 1.6969。於規劃求解輸入盤，設定 72 條限制式，讓各筆距離之數值都必須小於或等於規格半徑  $\emptyset = 0.25$ 。利用  $A \geq 1$  來設定算程的誤差水準。

設定目標式(T):

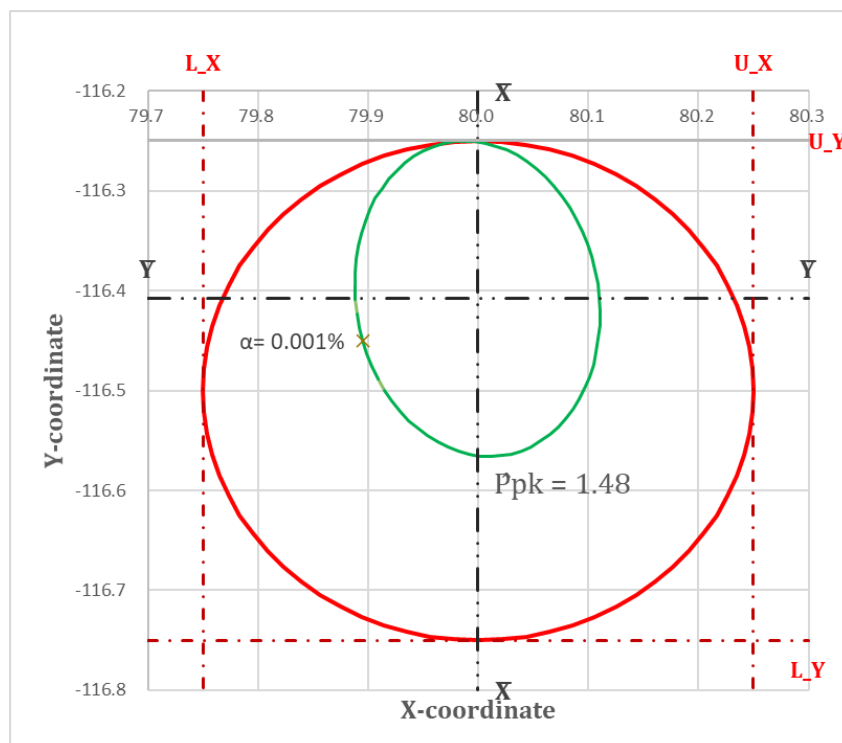
至: ☒ 最大值(M) ☐ 最小(N) ☐ 值(V)

藉由變更變數儲存格(B):

設定限制式(U):

示如〔圖八〕，求解後，顯著機率  $\alpha = 0.0000094$ 。此際， $\chi^2 = \text{CHIINV}(\alpha, 2) = 23.15$ ，及  $\chi = 4.81$ 。所以，利用常態分配函數，算出製程能力  $\hat{P}_{pk}$  等於 1.48。

$$\hat{P}_{pk} = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)/3 = \text{NORM.S.INV}(1-\alpha/2)/3 = 1.48$$



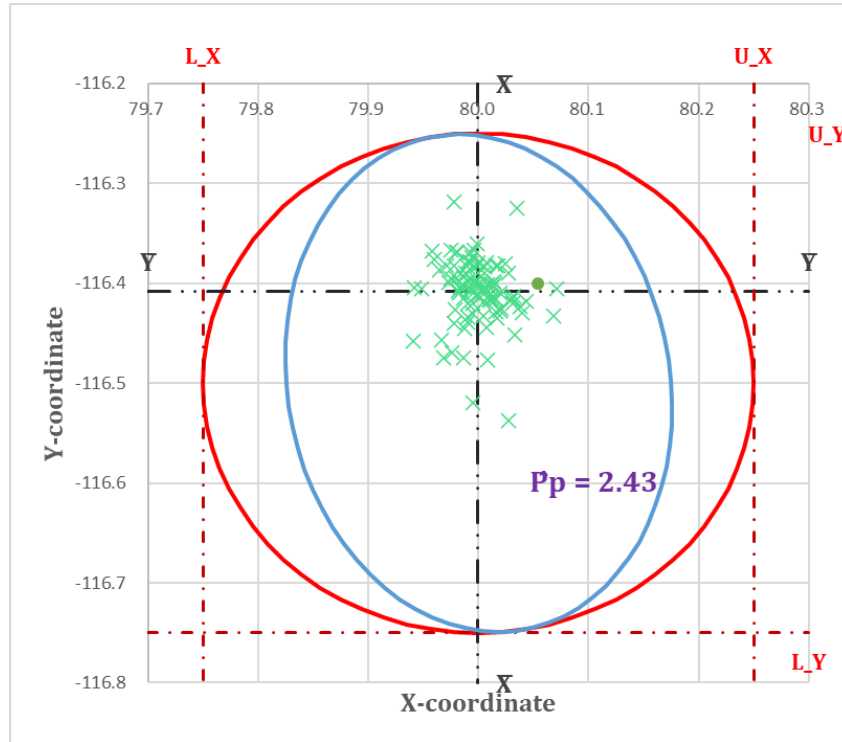
〔圖八〕製程能力  $\hat{P}_{pk}$  之等機率圖

### 3.5 製程能力 $\hat{P}_p$

檢視〔圖八〕，不考慮準確度時，我們必須讓規格正圓與信賴橢圓同心，尋求其中最大橢圓區域，讓橢圓內切正圓。顯然，最大等機率橢圓之長軸長度理當等於孔洞的目標半徑。已知， $\lambda_1 = 0.0005$  和  $\lambda_2 = 0.0011$ ，使得  $\text{MAX}(\lambda_1, \lambda_2) = 0.0011$ 。當目標  $r_0 = 0.25$ ，求解  $\chi = r_0 / \sqrt{\text{MAX}(\lambda_1, \lambda_2)} = 7.58$ ；所以，對應的卡方  $\chi^2 = 57.51$ 。

示如〔圖九〕顯著機率  $\alpha = 1 - \text{CHISQ.DIST}(\chi^2, 2, 1) = 3.26 \text{ E-}13$ 。所以，製程能力  $\hat{P}_p$  等於 2.43。

$$\hat{P}_p = \Phi^{-1}(1 - \alpha/2)/3 = \text{NORM.S.INV}(1 - \alpha/2)/3 = 2.43$$



〔圖九〕製程能力  $\hat{P}_p$  之等機率圖

### 4.0 結論 CONCLUSION

本篇論文提供智能算程，用以計算另件之幾何位置的製程能力。ISO 於 2013 年發布 ISO 22514-6 第一版，第六篇的焦點主題是：「多維常態分配之製程能力的統計」。於幾何特性譬如洞孔中心，對洞心位置律定公差，它涉及的產品量測問題需要智能計算。洞心規格帶來傳統紅利型矩形公差帶。

### REFERENCES

- [1] Chen Wen-Kuei., Cheng-Feng Hu, Is the Isoplot an Ellipse? A Study on Isoplot for the Measurement System Analysis. *Quality Engineering*. 2014, 26 (3)
- [2] ISO/IEC Guide 99:2007, *International vocabulary of metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM)*
- [3] ISO 1101, *Geometrical product specifications (GPS) — Geometrical tolerancing — Tolerances of form, orientation, location and run-out*
- [4] ISO/TR 22514-4, *Statistical methods in process management — Capability and performance — Part 4: Process capability estimates and performance measures*



- [5] ISO/TR 22514-6, *Statistical methods in process management — Capability and performance — Part 6: Process capability statistics for characteristics following a multivariate normal distribution*
- [6] Taam W., Subbaiah P., Liddy J.W. A note on Multivariate Capability Indices. *J. Appl. Stat.* 1993, 20 pp. 339–351
- [7] Wang F.K., Hubele N.F., Lawrence F.P., Miskulin J.D. Shahriari, H. Comparison of three Multivariate Process Capability Indices. *Journal of Quality Technology.* 2000, 32 (3) pp. 263–275