FSBM

FACULTE DES SCIENCES BEN M'SICK
UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

Algorithmes d’optimisation

Pr. Faouzia Benabbou (faouzia.benabbou@univh2c.ma)
Département de mathématiques et Informatique
Master Data Science & Big Data
2024-2025

Plan du Module: Algorithmes d’optimisation

Introduction

Rappels mathématiques

Algorithmes d’Optimisation Sans Contraintes

Algorithmes d’Optimisation avec Contraintes

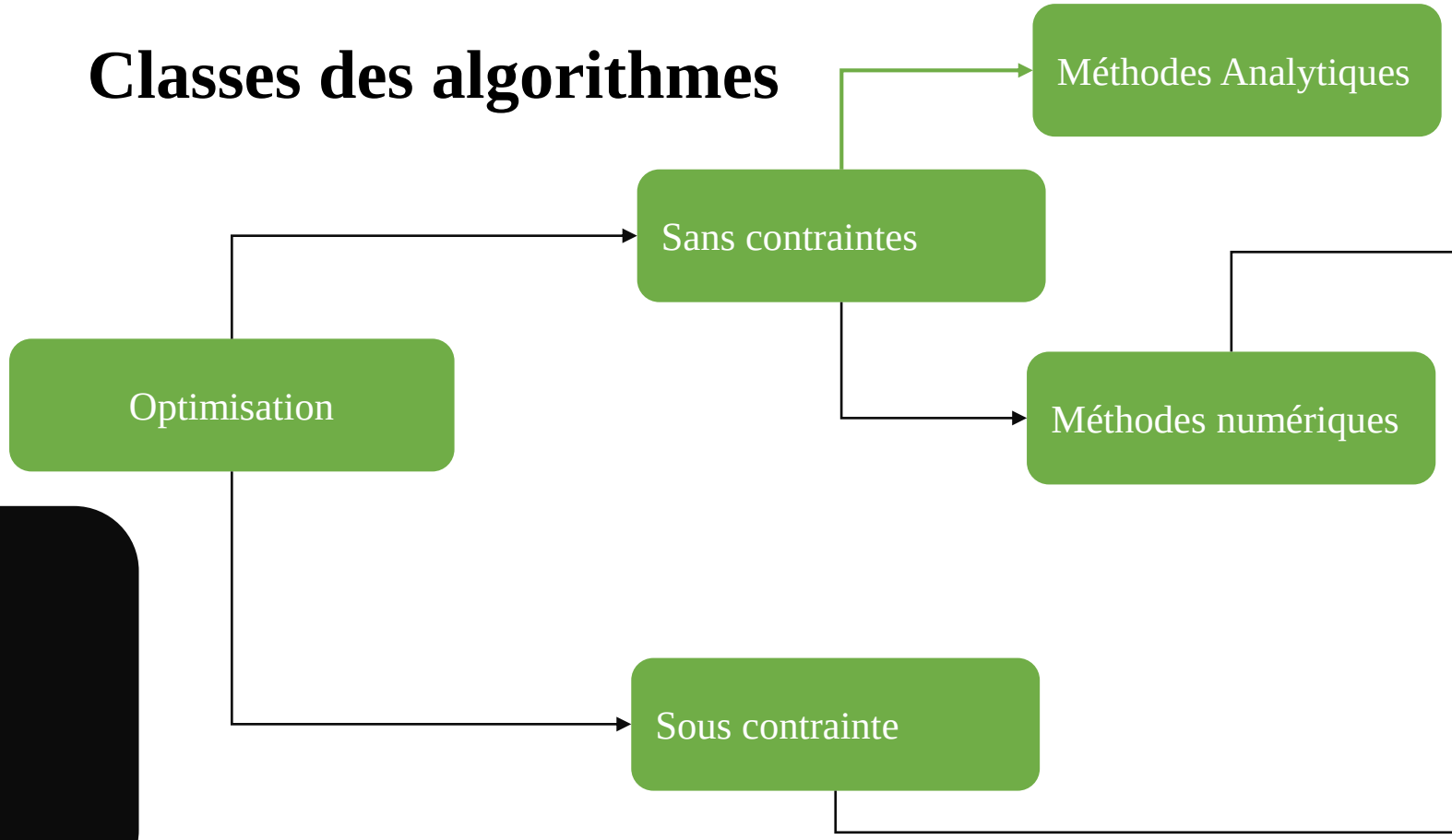
Programmation Linéaire et non Linéaire

Optimisation combinatoire et globale

Méthodes heuristiques et métaheuristiques

Les algorithmes d’optimisation

Classes des algorithmes



- Méthode sans gradient
- Méthode de descente de gradient:
  - ✓ Méthode de gradient à pas fixe et optimal
  - ✓ Méthode de gradient conjugué
  - ✓ Méthode de Newton
  - ✓ Méthodes du gradient quasi-newton

- Méthodes générales de résolutions de PCE, PCI
- Programmation linéaire et non linéaire
- Optimisation combinatoire et globale
- Méthodes heuristiques et métaheuristiques
- Algorithmes multi-objectifs

PO sous Contraintes d’inégalité ou mixte

- **Méthode Lagrangien augmenté (Augmented Lagrangian Method — ALM)**
  - La Méthode des Multiplicateurs de Lagrange Augmentés (ALM) est une technique d'optimisation conçue pour résoudre des **problèmes non linéaires** où l'on cherche à minimiser une fonction sous des contraintes **d'égalité et/ou d'inégalité.**
  - Son principal atout réside dans sa capacité à combiner les avantages de la méthode des **multiplicateurs de Lagrange** classique avec ceux des méthodes de **pénalisation**, tout en atténuant leurs inconvénients respectifs.
  - Comme les autres méthodes, l'ALM transforme le problème d'optimisation contraint en **une série de sous-problèmes d'optimisation** non contrainte résolvables par les méthodes classiques comme la méthode quasi- Newton BFGS.

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode Lagrangien augmenté**

Soit le problème (P) $\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x), f \text{ une fonction objective.} \\ g(x) \quad 0 \\ h(x) = 0 \end{cases}$

- où h : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe **C¹**, la fonction de contrainte d'égalité.
- g : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, est de classe **C¹**, la fonction de contrainte d'inégalité.
- $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des variables de décision.

Définition. La fonction Lagrangienne Augmentée pour un problème général avec égalités et inégalités se définie comme suit :

- $\lambda \in \mathbb{R}^p$: multiplicateurs pour égalités
- $\mu \in \mathbb{R}^m, \mu \geq 0$: multiplicateurs pour inégalités
- $\rho > 0$: paramètre de pénalisation

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode Lagrangien augmenté :** Version simplifiée

$$L\rho(x,\lambda,\mu)=$$

$$f(x)+\lambda^T h(x)+ \mu^T g(x)+\frac{\rho}{2}\left[\sum_{i=1}^{i=p}(\boldsymbol{h_i}(x))^2 + \sum_{j=1}^{j=m}\max\left(\mathbf{0}, g_j(\mathbf{x})\right)^2\right]$$

En d'autres termes :

$$L(x, \lambda, \mu, \rho)=$$

$$f(x)+\lambda^T h(x) + \frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{i=p}\boldsymbol{h_i}(x)^2 + \mu^T g(x)+\frac{\rho}{2}\sum_{j=1}^{j=m}\max(\mathbf{0}, g_j(x))^2\ ]$$

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode Lagrangien augmenté : version plus stable**

$$L\rho(x,\lambda,\mu)=$$

$$L(x, \lambda, \mu,\rho)=f(x)+\lambda^{T}h(x) + \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{i=p}(\boldsymbol{h_i}(x))^2+ \frac{\rho}{2}\sum_{j=1}^{j=m}(\max(\mathbf{0}, g_j(x) + \frac{\mu_j}{\rho})^2 - \left(\frac{\mu_j}{\rho}\right)^2))$$

Le terme $\max(\mathbf{0}, g_j(x) + \frac{\mu_j}{\rho})$ agit comme une **"contrainte relaxée"**.

- Si $g_j(x) + \frac{\mu_j}{\rho} \leq 0$, La pénalisation est nulle (contrainte inactive)
- Si $g_j(x) + \frac{\mu_j}{\rho} > 0$, La pénalisation devient quadratique en $g_j(x)$.

$$\frac{\rho}{2}(\max(\mathbf{0}, g_j(x) + \frac{\mu_j}{\rho})^2 - \left(\frac{\mu_j}{\rho}\right))^2= \begin{cases} \mu_j g_j(x) + \frac{\rho}{2} \boldsymbol{g_j}(x)^2 \boldsymbol{si}\ g_j(x) + \frac{\mu_j}{\rho} \geq 0 \\ -\frac{\mu_j{}^2}{2\rho} \end{cases}$$

- est un **correcteur** qui empêche les multiplicateurs μ_j de diverger.
- **Pour les problèmes complexes** cette version et plus stable et converge plus rapidement.

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode Lagrangien augmenté**

Algorithme 13. Pénalisation classique (interne)

1. Initialisation : $x_0, \varepsilon\ (1e-6),\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ \lambda_0, \mu_0$

paramètre de pénalité $\rho_0 > 0$, $\beta > 1$, k=0, max_iter = 100.

2. Répéter :

a)Résoudre le problème sans contrainte (algorithme de descente, Newton):

$$\min_{\mathbf{x}}[L(x, \lambda_k, \boldsymbol{\mu}_k, \rho_k)]$$

b) Mise à jour: x_{k+1} est la solution approchée

c) Mise à jour des multiplicateurs de Lagrange :

pour chaque contrainte d'égalités $\boldsymbol{h_i}$: $\boldsymbol{\lambda_i^{k+1}} = \lambda_i^k + \rho_k \cdot \boldsymbol{h_i}(x_{k+1})$

pour chaque contrainte d'égalités $\boldsymbol{g_j}$: $\boldsymbol{\mu_j^{k+1}} = \max(0,\ \boldsymbol{\mu_j^k} + \rho_k \cdot \boldsymbol{g_j}(x_{k+1}))$

d) diminuer la pénalité : $\rho_{k+1} = \beta\ \rho_k$,

e)violation 1 = $\max(\ \max_{i}\ |\boldsymbol{h_i}(x_{k+1})|,\ \boldsymbol{violation\ 2} = \max_{j}\ (\boldsymbol{max}(\mathbf{0}, \boldsymbol{g_j}(xk_{+1}))$

3. Jusqu'à ($violation1 < \boldsymbol{\varepsilon}$ **et** violation2 < $\boldsymbol{\varepsilon}$) **o**u max_iter *atteint*

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode Lagrangien augmenté**
  - les critères d'arrêt signifient :
    - ✓ **Satisfaction des Contraintes d'Égalité** $\max_i |h_i(x_{k+1})| < \epsilon$ **) :**
      - Le problème original impose que les contraintes d'égalité hi(x)=0 soient satisfaites., ce critère vérifie si la valeur absolue de la fonction de contrainte d'égalité h évaluée à la solution courante xk+1 est suffisamment proche de zéro. Si cette condition est satisfaite pour toutes les contraintes d'égalité, cela signifie que la solution courante est presque réalisable par rapport à ces contraintes.
      - La tolérance ϵ définit le niveau de précision souhaité pour la satisfaction des contraintes. Une valeur plus petite de ϵ exigera une satisfaction plus stricte des contraintes.
    - ✓ **Satisfaction des Contraintes d'Inégalité** $|max(0, g(x_{k+1})| < \varepsilon$ **:**
      - Le problème original impose que les contraintes d'inégalité $g_j(x) \leq 0$ soient satisfaites.

        La fonction $max\left(0, g_j(x_{k+1})\right)$ évalue la violation de la contrainte d'inégalité.

        Si $g_j(x_{k+1}) \leq 0$, alors $\max(0, g_j(x_{k+1})) = 0$, ce qui signifie que la contrainte est satisfaite.
        Si $g_j(x_{k+1}) > 0$, alors $\max(0, g_j(x_{k+1})) = g_j(x_{k+1})$, ce qui représente la quantité de violation de la contrainte.

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode Lagrangien augmenté**

Exemple.

$$\begin{cases} \min f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 \\ h(x,y) = x + y - 1 = 0 \\ g(x,y) = x - 0.5 \leq 0 \end{cases}$$

(1) $L\rho(x,\lambda,\mu)=$

$$f(x)+\lambda^T h(x)+ \mu^T g(x)+\frac{\rho}{2} \left[\sum_{i=1}^{i=p} (\boldsymbol{h_i}(x))^2 + \sum_{j=1}^{j=m} \max\left(\mathbf{0}, g_j(\mathbf{x})\right)^2 \right]$$

(2) $L(x, \lambda, \mu, \rho)=$

$$L(x, \lambda, \mu,\rho)=f(x)+\lambda^T h(x) + \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{i=p} (\boldsymbol{h_i}(x))^2 + \frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^{j=m} (\max(\mathbf{0}, g_j(x) + \frac{\mu_j}{\rho})^2 - \left(\frac{\mu_j}{\rho}\right)^2))$$

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode Lagrangien augmenté**

Ex

```python
# Méthode ALM
def alm_algo(f, h, g, x0, lam0=0.0, mu0=0.0, rho=10.0, tol=1e-6, max_iter=20, verbose=True):
    xk = x0.copy()
    lam = lam0
    mu = mu0
    beta = 1.5
    history = {
        'x': [xk.copy()],
        'f': [f(xk)],
        'L_aug': [L_aug(xk, lam, mu, rho)],
        'h': [h(xk)],
        'g': [g(xk)],
    }
    if verbose:
        print("Itération | x          | y          | lambda     | mu         | h(x)       | g(x)")

    for k in range(max_iter):
        res = minimize(lambda x: L_aug(x, lam, mu, rho), xk, method='BFGS')
        xk = res.x
        h_val = h(xk)
        g_val = g(xk)
        lam = lam + rho * h_val
        mu = max(0, mu + rho * g_val)
        rho = beta*rho

        history['x'].append(xk.copy())
        history['f'].append(f(xk))
        history['L_aug'].append(L_aug(xk, lam, mu, rho))
        history['h'].append(h_val)
        history['g'].append(g_val)

        if verbose:
            print(f"{k+1:9} | {xk[0]:.6f} | {xk[1]:.6f} | {lam:.6f} | {mu:.6f} | {h_val:+.2e} | {g_val:+.2e}")

        if abs(h_val) < tol and max(0, g_val) < tol:
            break
    return xk, history
```

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode Lagrangien augmenté**

Exemple.
$$\begin{cases} \min f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2) \\ h(x,y) = x + y - 1 = 0 \\ g(x,y) = x - 0.5 \leq 0 \end{cases}$$

```python
# Lagrangien augmenté version 1
def L_aug(x, lam, mu, rho):
    h_val = h(x)
    g_val = g(x)
    penalty_eq = lam * h_val + (rho / 2) * h_val**2
    penality_ineq = mu * g_val + (rho / 2) * ( max(0, g_val)**2)
    return f(x) + penalty_eq +penalty_ineq
```

```python
# Fonction objective
def f(x):
    return (x[0] - 1)**2 + (x[1] - 2)**2

# Contraintes
def h(x):
    return x[0] + x[1] - 1  # égalité : x + y = 1

def g(x):
    return x[0] - 0.5       # inégalité : x <= 0.5

# Lagrangien augmenté version robuste
def L_aug(x, lam, mu, rho):
    h_val = h(x)
    g_val = g(x)
    penalty_eq = lam * h_val + (rho / 2) * h_val**2
    # Terme pour l'inégalité (version 2)
    if g_val + mu/rho > 0:
        penalty_ineq = (rho/2)*(g_val + mu/rho)**2 - (mu**2)/(2*rho)
    else:
        penalty_ineq = -(mu**2)/(2*rho)

    return f(x) + penalty_eq + penalty_ineq
```

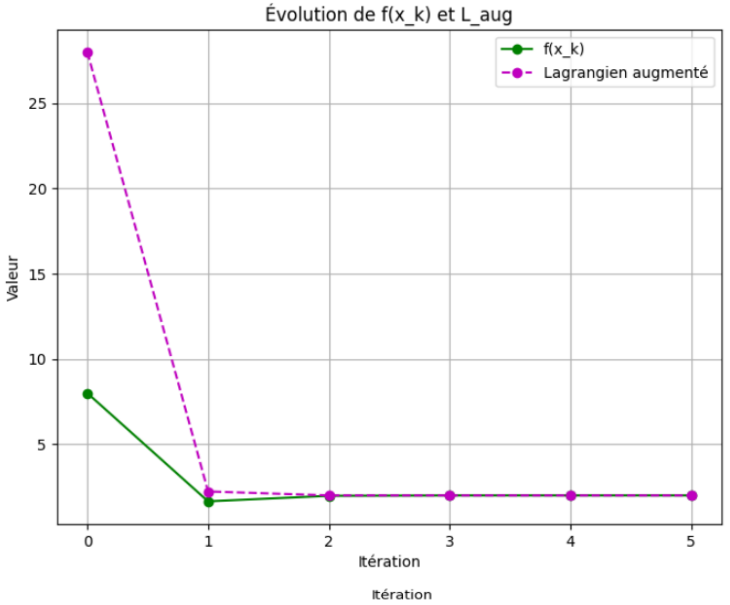
PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

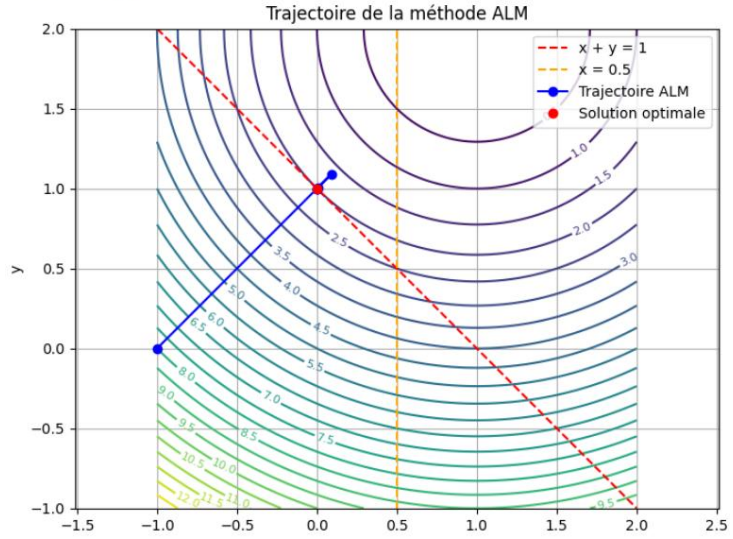
- **Méthode Lagrangien augmenté**

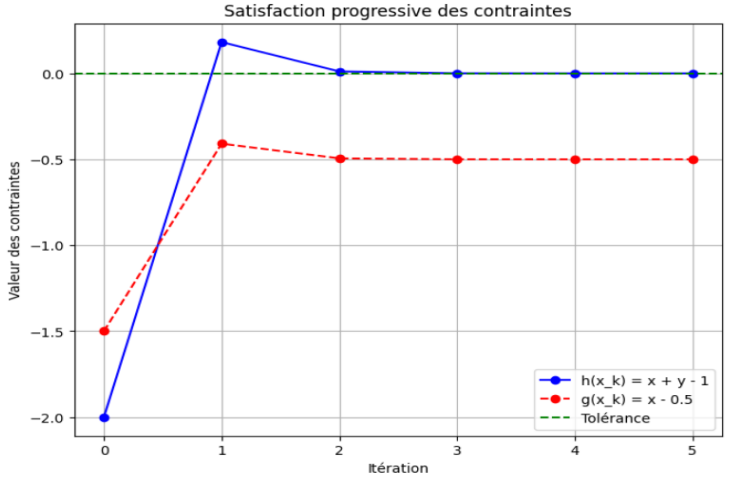
Exemple.
$$\begin{cases} \min f(x,y) = (x-1)^2 + (y-2)^2 \\ h(x,y) = x + y - 1 = 0 \\ g(x,y) = x - 0.5 \leq 0 \end{cases}$$

```
Itération | x         | y         | lambda    | mu        | h(x)      | g(x)
        1 | 0.090909 | 1.090909 | 1.818182 | 0.000000 | +1.82e-01 | -4.09e-01
        2 | 0.005682 | 1.005682 | 1.988636 | 0.000000 | +1.14e-02 | -4.94e-01
        3 | 0.000242 | 1.000242 | 1.999516 | 0.000000 | +4.84e-04 | -5.00e-01
        4 | 0.000007 | 1.000007 | 1.999986 | 0.000000 | +1.39e-05 | -5.00e-01
        5 | 0.000000 | 1.000000 | 1.999999 | 0.000000 | +2.67e-07 | -5.00e-01

Minimum trouvé :
x = 0.000000, y = 1.000000
f(x, y) = 1.999999
```







PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode Lagrangien augmenté**
  - **Avantage :**
    - ✓ Gestion des contraintes complexes : Combine pénalisation quadratique et multiplicateurs de Lagrange pour traiter égalités/inégalités.
    - ✓ Bien adapté aux Problèmes non linéaires.
    - ✓ Convergence théorique solide et plus rapide que les pénalisations pures
    - ✓ utilisé dans l'optimisation sous contraintes en ingénierie, machine learning.
    - ✓ Moins sensible que la méthode de pénalisation pure (quadratique) où des valeurs énormes de pénalité peuvent rendre la fonction mal conditionnée.
  - **Inconvénient :**
    - ✓ Chaque itération demande de résoudre un sous-problème non contraint via une méthode numérique classique
    - ✓ Sensibilité au choix des paramètres ρ, β : Si ρ est trop grand le problème devient mal conditionné.
    - ✓ Peut converger vers des minima locaux si f(x) ou les contraintes sont non convexes.