UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA
FACULTE DES SCIENCES BEN M'SICK
DEPARTEMENT DE MATHEMATIQUES INFORMATIQUE

TP 4

Module Algorithmes d'optimisation

Exercice 1 : KKT

Une entreprise fabrique deux modèles de voitures miniatures, les modèles X et Y. Le modèle X, le plus abordable, se vend à 1euro / pièce. Quant au modèle Y, beaucoup plus sophistiqué, il se vend à 3 euros.

Le coût de fabrication, exprimé en euro, est donné par la fonction suivante :

$$C(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x - 1000.$$

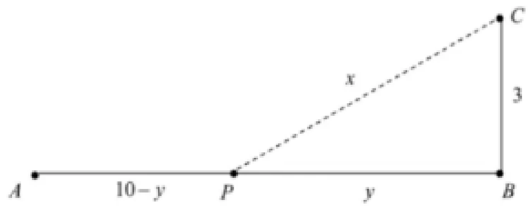
où x est le nombre de petites voitures du modèle X et y est le nombre de petites voitures du modèle Y.

On suppose que les jouets fabriqués sont tous écoulés sur le marché.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^{*+2}$, déterminer la fonction profit P(x, y) réalisé par l'entreprise lorsqu'elle a vendu x jouets de modèle X et y jouets de modèle Y.
2. Étudier la convexité de la fonction P sur $\mathbb{R}^{*+2}$.
3. La capacité de production de l'entreprise est au total de 20 jouets par jour. En supposant que l'entreprise tourne à plein régime, trouver la répartition optimale entre les modèles de type X et Y permettant de maximiser le profit quotidien en utilisant la méthode KKT
4. Le conseil d'administration de l'entreprise s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité. Il se demande s'il ne peut pas augmenter le profit en relaxant les contraintes. Donner une proposition qui réalise cet objectif.
   NB : dans cette question et la suivante, on ne tiendra pas compte des contraintes $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Vérifier que cela ne change pas le résultat si elles sont prises en compte.

Exercice 2: KKT

Une ville B est à 10km à l'est d'une ville A et une ville C est à 3km au nord de la ville B. On veut réaliser un projet d'autoroute entre les villes A et C. le coût de 1km d'autoroute le long de la route existante entre A et B est de 400000euros, alors que le coût de 1 km d'autoroute ailleurs est de 500000 euros. On désire déterminer où doit se situer le point pivot **P** (cad, à quelle distance de A , l'autoroute doit bifurquer pour minimiser le coût de réalisation de l'autoroute. Enfin, on impose que la bifurcation ait lieu à au moins 3km de l'entrée de la ville B, afin d'éviter qu'elle ne subisse une trop forte pollution au quotidien.



1. Formuler le problème en un problème d'optimisation mathématique clair, comprenant :

a. une fonction objective à minimiser
b. 3 contraintes d'inégalités ;
c. 1 contrainte d'égalité.

2. Construire la fonction lagrangienne en incorporant les contraintes.
3. Étudier l'existence et l'unicité des solutions
4. Résoudre le problème obtenu.

Exercice 3 :Pénalités extérieures

Une usine spécialisée dans la production de batteries électriques fabrique deux types de produits : des batteries Lithium-Ion (Li-ion) et des batteries Nickel-Métal Hydrure (NiMH). L'entreprise cherche à optimiser sa production pour maximiser son bénéfice net tout en respectant des contraintes liées aux ressources disponibles, à la demande minimale du marché et à des réglementations environnementales strictes. Chaque millier de batteries Li-ion vendu génère un revenu de 50 k€. Chaque millier de batteries NiMH vendu rapporte 30 k€**.** La production de batteries Li-ion entraîne un coût quadratique estimé à $2x_1^2$ (en k€), où x_1 représente la quantité produite (en milliers d'unités). La production de batteries NiMH a un coût quadratique de x_2^2 (en k€), où x_2 est la quantité produite. Un coût d'interaction de x_1x_2 (en k€) est également observé, dû à des contraintes logistiques partagées entre les deux lignes de production.

La fabrication des batteries consomme des matériaux critiques. L'usine dispose d'un stock maximal de 100 tonnes de ces ressources, avec les besoins suivants : 2 tonnes par millier de batteries Li-ion, et 1 tonne par millier de batteries NiMH.

Pour des raisons contractuelles, l'usine doit produire au moins 10 batteries Li-ion ($x_1 \geq 10$) et 5 batteries NiMH ($x_2 \geq 5$). Les émissions de CO_2 de l'usine sont strictement encadrées. La production totale ne doit pas dépasser 60 k-tonnes de CO_2, avec les coefficients suivants : 1 k-tonne par millier de Li-ion ; 2 k-tonnes par millier de NiMH. l'usine doit atteindre exactement ce quota pour éviter des pénalités : $x_1+2\,x_2=60$.

1. Formuler la fonction objective bénéfice net f(x1,x2).
2. Exprimer toutes les contraintes sous forme standard ($g_i(x) \leq 0$, $h(x)=0$).
3. Construire la fonction pénalisée en incorporant les contraintes.
4. Implémenter en Python et afficher à chaque itération les valeurs de f, g, h.
5. Quel est le bénéfice maximal atteint ?
6. Tracer la courbe de f et f pénalisée selon les solutions obtenu à chaque itération.
7. Discuter de l'impact des contraintes sur le bénéfice (ex. que se passe-t-il si la réglementation CO_2 est assouplie ?).
8. Que se passe-t-il si les coûts d'interaction sont négligés ?

Exercice 4 : pénalités extérieures

Une entreprise dispose de deux types de centrales pour produire de l'électricité : l'une **thermique** et produit x MW, la deuxième est une centrale **solaire** et produit y MW. Le coût de production est modélisé par :

$C(x,y)=3x^2+2y^2+xy$. Les contraintes sont :

- la production totale doit couvrir au moins 70 MW : $x+y \geq 80$
- la centrale thermique ne doit pas dépasser une production de 50 MW : $x \leq 60$
- Équilibre environnemental : $x-2y=10$

Le but est de minimiser le coût de production tout en respectant les contraintes de la production énergétique des deux sources.

1. formuler le problème en un problème d'optimisation, comprenant :
   - une fonction objective à minimiser ;
   - des contraintes d'inégalités ;

- une contrainte d'égalité.

2. Construire la fonction pénalisée en incorporant les contraintes.
3. Implémenter l'algorithme en Python et afficher à chaque itération f, g et h
4. Quel est le coût minimal ? les contraintes sont respectés en cette solution?
5. Tracer la courbe de f et f pénalisée avec les solutions obtenu à chaque itération.

Exercice 5 : Pénalités intérieures (barrière)

Une entreprise fabrique deux produits, P1 et P2, avec des coûts de production 50 et 30 euros (par unité). On veut optimiser des coûts de production sous contraintes de capacité, demande minimale et stock.

Les contraintes sont :

Le temps total de production sur une machine ne doit pas dépasser 2000 heures/mois, sachant que le temps de production par unité de P est de 2h, et celui de P2 est de 1 ,5h. Il faut produire au moins. Il faut produire au moins 100 de P1 et 200 unités de P2 pour répondre à la demande. Le stock ne doit pas dépasser 1200 unités.

1. formuler le problème en un problème d'optimisation, comprenant :
   - une fonction objective à minimiser
   - des contraintes d'inégalités ;
   - une contrainte d'égalité.
2. Construire la fonction de pénalité intérieure en utilisant la fonction logarithmique.
3. Implémenter l'algorithme en Python et vérifier qu'à chaque itération les contraintes sont respectée
4. **4.** L'algorithme converge vers quelle solution, est-elle admissible ?

Exercice 6 : Pénalités intérieures

Fatima est membre de l'équipe des jeunes entrepreneurs de son école . Son projet est de peindre des motifs sur des vases et des sucriers. Elle met 2 heures pour peindre les motifs d'une vase et 3 heures pour ceux du sucrier. Durant l'année scolaire, elle va consacrer un maximum de 120 heures à son projet et prévoit un maximum de 50 objets. Pour répondre à la demande des clients, elle doit peindre au moins 10 sucriers. Chaque vase sera ensuite vendu à 14$ et les sucriers seront vendus à 10$ chacun. Combien de vases et de sucriers doit-elle vendre pour maximiser ses profits ?

1. formuler le problème en un problème de minimisation, comprenant :
   - une fonction objective à minimiser
   - des contraintes d'inégalités ;
2. Construire la fonction de pénalité intérieure en utilisant la fonction logarithmique.
3. Implémenter l'algorithme en Python et vérifier qu'à chaque itération les contraintes sont respectée
4. **4.** Ce problème a-t-il une solution admissible ?

Exercice 7 : ALM

Une entreprise souhaite concevoir un réservoir cylindrique (avec un fond et un couvercle) pour stocker un volume donné $V_0=10m^3$, en minimisant le coût de fabrication. Les variables de décision sont r : rayon du réservoir (en mètres), et h : hauteur du réservoir (en mètres). L'objectif est de minimiser la surface totale du cylindre pour réduire le coût du matériau (surface du cylindre + fond + couvercle). La contrainte principale est que le volume doit être égal à $V_0=10m^3$ et que bien sûre r et h soient positifs.

1. formuler le problème en un problème de minimisation, comprenant :
   - une fonction objective à minimiser
   - des contraintes d'inégalités et égalités ;

2. Construire la fonction Lagrangienne Augmentée.
3. Implémenter l'algorithme en Python et afficher xk, f(xk), f_aml(xk), iteration
4. L'algorithme converge-t-il ?

Exercice 8 : ALM

Reprendre l'exercice 4 en utilisant la méthode ALM.

Comparer les deux méthodes en termes de temps CPU, et nombre d'itérations et qualité de la solution.