Algorithmes d’optimisation

Pr. Faouzia Benabbou (faouzia.benabbou@univh2c.ma)
Département de mathématiques et Informatique
Master Data Science & Big Data
2024-2025

FACULTE DES SCIENCES BEN M'SICK
UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

Plan du Module: Algorithmes d’optimisation

01 Introduction

02 Rappels mathématiques

03 Algorithmes d’Optimisation Sans Contraintes

04 Algorithmes d’Optimisation avec Contraintes

05 Programmation Linéaire et non Linéaire

06 Optimisation combinatoire et globale

07 Méthodes heuristiques et métaheuristiques

Les algorithmes d’optimisation

Classes des algorithmes

- Optimisation
  - Sans contraintes
    - Méthodes Analytiques
    - Méthodes numériques
      - Méthode sans gradient
      - Méthode de descente de gradient:
        - ✓ Méthode de gradient à pas fixe et optimal
        - ✓ Méthode de gradient conjugué
        - ✓ Méthode de Newton
        - ✓ Méthodes du gradient quasi-newton
  - Sous contrainte
    - Méthodes générales de résolutions de PCE, PCI
    - Programmation linéaire et non linéaire
    - Optimisation combinatoire et globale
    - Méthodes heuristiques et métaheuristiques
    - Algorithmes multi-objectifs

Méthodes d’optimisation Sous contraintes

Critère	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	Méthode du gradient projeté	Méthode SQP (Sequential Quadratic Programming)
Type de problème	Optimisation sous contraintes d'égalité	Optimisation sous contraintes (égalité/inégalité)	Optimisation sous contraintes (égalité/inégalité)
Principe	intègre les contraintes dans la fonction objectif	Projette le gradient sur l'espace admissible défini par les contraintes	Approxime le problème par une succession de sous-problèmes quadratiques
Convergence	Convergence sous conditions	Convergence lente (linéaire)	Convergence rapide (superlinéaire sous conditions)
Complexité	Résolution d'un système d'équations non linéaires	Calcul de projection à chaque itération	Résolution d'un problème quadratique à chaque itération
Traitement des contraintes	satisfait les contraintes à l'optimum	Satisfait les contraintes à chaque itération	Satisfait les contraintes à l'optimum
Efficacité en haute dimension	Peut devenir coûteuse	S’dapte moyennement	Très efficace pour des problèmes **complexes**
Implémentation	Simple pour des problèmes analytiques	Relativement simple	Complexe, Problèmes non linéaires complexes

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Problème d'optimisation**

Un problème d'inégalités est un problème d'optimisation sous contraintes d'inégalité et éventuellement d'égalité. Il se formule comme suit :

$$\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(\mathrm{x}), f \; une \; fonction \; objective. \\ \mathrm{g(x)} \leq 0 \\ \mathrm{h(x)} = 0 \end{cases}$$

- où h : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est de classe **C¹**, la fonction de contrainte d'inégalité.
- g : $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, est de classe **C¹**, la fonction de contrainte d'égalité.
- $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des variables de décision.

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthodes d'optimisation sous Contraintes d'inégalités ou mixtes**
  - Concept de Méthodes Dual-Primal
  - Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)
  - Méthodes de Pénalisation externe et interne
  - Méthode Lagrangien augmenté (Augmented Lagrangian Method — ALM)

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthodes Dual-Primal**

En optimisation, on associe souvent à un problème **primal** un problème **dual**, qui souvent plus facile à résoudre.

- **Problème Primal:** C'est le problème d'optimisation original que l'on souhaite résoudre (par exemple, minimiser une fonction sous certaines contraintes).
- **Problème Dual:** Il est dérivé du problème primal par une transformation mathématique (exemple en utilisant la fonction Lagrangienne).
- Si le primal est un problème de **minimisation**, le dual est généralement un problème de **maximisation**, et vice versa.
- Les méthodes **primale-duales** tentent de trouver des solutions optimales pour les problèmes primal et dual en itérant et en mettant à jour simultanément les variables primales et duales.

PO sous Contraintes d’inégalité ou mixte

- **Méthodes Dual-Primal**
  - On parle de **Forte Dualité** si les valeurs optimales du problème primal et du problème dual sont égales.
  - L'écart entre les valeurs optimales est appelé **l'écart de dualité**, il est nul dans ce cas.
  - La **dualité forte** peut être atteinte sous certaines conditions comme la **convexité** du problème primal et la satisfaction de certaines **qualifications de contraintes.**

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthodes Dual-Primal: dualité forte**
  - **1-Convexité** :
    - ✓ le problème primal est convexe **:**
      - La fonction objectif **f(x)** doit être **convexe** (pour un problème de minimisation).
      - Les fonctions de contrainte d'inégalité **gi(x)** doivent être **convexes**
      - Si la contrainte est de la forme gi(x)≥0, alors gi(x) doit être **concave**.
      - Les fonctions de contrainte d'égalité **hj(x)** doivent être affines, c'est-à-dire de la forme $h_j(x) = a_j^T x - b_j$. où aj est un vecteur et bj est un scalaire.
      - Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves. $(f(\lambda x+(1-\lambda)y) = \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\ \forall x\ y\ \lambda)$

PO sous Contraintes d’inégalité ou mixte

- **Méthodes Dual-Primal : dualité forte**
  - **2- Qualification des Contraintes :** elle assure l'absence de "pathologies" au niveau des contraintes qui pourraient entraîner un écart de dualité
    - ✓ Plusieurs conditions de qualification des contraintes existent, les plus courantes sont :
      - **Slater** pour problèmes convexes

        Il existe un point x0 strictement faisable tel que : $g_i(x_0)<0\ \forall i$, $h_j(x_0)=0\ \forall j$.

        Si les gi sont affines, Slater peut être relaxé en $g_i(x_0)\leq 0$.
      - **LICQ** (Linear Independence Constraint Qualification) : LICQ est une condition plus générale qui ne nécessite pas nécessairement la convexité, elle stipule que les gradients des contraintes actives (les contraintes d'inégalité satisfaites avec égalité et toutes les contraintes d'égalité) au point optimal doivent être **linéairement indépendants.**

PO sous Contraintes d’inégalité ou mixte

- **Méthodes Dual-Primal : dualité faible**
  - En absence de ces conditions on ne peut avoir qu’une **Faible Dualité**
  - La valeur optimale du problème dual fournit toujours une borne inférieure (pour un problème de minimisation primal) à la valeur optimale du problème primal.
  - Inversement, pour un problème de maximisation primal, la valeur optimale du dual est une borne supérieure.

PO sous Contraintes d’inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**
  - Les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT), étendent la méthode des multiplicateurs de Lagrange, utilisée pour les problèmes d'optimisation, pour traiter les cas où les contraintes sont non seulement des contraintes d'égalité mais aussi des contraintes d'inégalité.
  - La fonction Lagrangienne pour un problème d'optimisation sous contrainte mixte combine les contraintes d'égalité et d'inégalité.

PO sous Contraintes d’inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**

Problème **primal** $\begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(\mathrm{x}) \text{ , } f \text{ une fonction objective.} \\ \mathrm{g(x)} \leq 0 \text{ .} \\ \mathrm{h(x)} = 0 \end{cases}$

La fonction Lagrangienne L(x, λ, μ) pour ce problème est définie comme suit:

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \mathbf{f(x)} + \sum_{\mathbf{i=1}}^{\boldsymbol{i=p}} \boldsymbol{\lambda_i h_i}(\mathbf{x}) + \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{j}=\boldsymbol{m}} \boldsymbol{\mu_j g_j}(\mathbf{x}),\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$$

$$\varphi(\lambda, \mu) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathrm{L}(\mathrm{x}, \lambda, \mu)$$

Problème **dual** $\left\{ \max\limits_{\mu \in \mathbb{R}^{m+}, \lambda \in \mathbb{R}^p} \varphi(\lambda, \mu) \text{ .} \right.$

λ_i sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes d'égalité $h_i(x)=0$.

μ_j sont les multiplicateurs de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) associés aux contraintes d'inégalité $g_j(x) \leq 0$.

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**

Problème **primal** $\begin{cases} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(\mathrm{x}), f \text{ une fonction objective}. \\ \mathrm{g(x)} \leq 0 . \\ \mathrm{h(x)} = 0 \end{cases}$

Problème **dual** $\left\{ \max_{\mu \in \mathbb{R}^{m+}, \lambda \in \mathbb{R}^p} \varphi(\lambda, \mu) . \right.$

Dualité faible : Toujours $\varphi(\lambda *, \mu *) \leq \mathrm{f}(\mathrm{x}*)$ (borne inférieure).

Dualité forte : Si conditions sont remplies alors $\varphi(\lambda *, \mu *) = \mathrm{f}(\mathrm{x}*)$

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**
  - Les conditions **KKT** sont :
    1. Condition de **Stationnarité**: $\nabla L(x^*, \lambda, \mu) = 0$
    2. Condition de **faisabilité primale** :
       - $g_i(x^*) \leq 0, i = 1, ..., m$
       - $h_j(x^*) = 0, j = 1, ..., p$
    3. Condition de **faisabilité duale**: $\mu_i \geq 0, \forall i = 1, ..., m$
    4. Condition de **dualité complémentaire** : $\mu_i \, g_i(x^*) = 0, \forall\ i=1,..,m$

PO sous Contraintes d’inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**

  Théorème. (Nécessité des Conditions KKT) : f , gi et hi, sont de classe 1.

  Si x* est une solution optimale locale et si certaines conditions de régularité (exemple, la condition de Slater pour un problème convexe, ou l’indépendance linéaire des gradients pour le cas général) sont satisfaites, alors il existe des multiplicateurs $\mu \in \mathbb{R}^m$ et $\lambda \in \mathbb{R}^p$ tels que les conditions KKT sont satisfaites.

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**
  - **Remarque.** Cas Particuliers et Suffisance des Conditions de KKT
    - ✓ Si f(x) est **convexe** et les contraintes g(x),h(x) sont **convexes**, alors les conditions de KKT sont nécessaires et suffisantes pour garantir un minimum **global**.
    - ✓ Si le problème n'est pas convexe, les conditions de KKT ne garantissent qu'un optimum local.
    - ✓ **Dans le cas non convexe, seule la dualité faible est garantie.**

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**

Exemple 1. $\begin{cases} \min\limits_{x,y\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = x^2+y^2 \text{ , } f \text{ une fonction objective.} \\ 1-x-y\leq 0 \text{ .} \\ h(x) = x-2 = 0 \end{cases}$

a)**Vérification de la condition de Slater** :

La région admissible est définie par $1-x-y\leq 0$ (ou $x+y\geq 1$) et $x-2=0$ (ou $x=2$).
L'ensemble admissible est donc la demi-droite verticale $x=2$, $y\geq -1$.

On cherche un point strictement réalisable pour la contrainte d'**inégalité.**

un point où $1-x-y<0$, prenons $(2,0)$ donne $g(2,0)<0$.

→ La contrainte d'égalité étant affine, la condition **de Slater est satisfaite.**

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**

Exemple 1.

Minimiser $f(x,y)=x^2+y^2$ Sous les contraintes : $g(x,y)=1-x-y\leq 0$ et $h(x,y)=x-2=0$

b)Fonction Lagrangienne :

La fonction Lagrangienne pour ce problème est :

$$L(x,y,\mu,\lambda)=f(x,y)+\mu g(x,y)+\lambda h(x,y)=x^2+y^2+\mu(1-x-y)+\lambda(x-2)$$

c)Conditions d'optimalité KKT :

Pour qu'un point $(x*,y*)$ soit une solution optimale locale, il doit satisfaire les conditions suivantes :

faisabilité primale : $1-x*-y*\leq 0$ $x*-2=0$

Condition de Stationnarité: $\nabla L(x*,y*,\mu*,\lambda*)=0$

Cela donne les équations partielles :

$\frac{\partial L}{\partial x}= 2x*-\mu*+\lambda*=0$ $\frac{\partial L}{\partial y}= =2y*-\mu*=0$

$\frac{\partial L}{\partial \mu}=1-x*-y*=0$ $\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x*-2=0$

faisabilité duale: $\mu*\geq 0$

Complémentarité : $\mu*(1-x*-y*)=0$

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**

Exemple 1.

Minimiser $f(x,y)=x^2+y^2$ Sous les contraintes : $g(x,y)=1-x-y\leq 0$ et $h(x,y)=x-2=0$

d) **Résolution des conditions KKT**

Utilisons la **faisabilité primale pour légalité**: $x*-2=0 \Longrightarrow \mathbf{x*=2}$.

Substituons dans les autres conditions :

Faisabilité primale pour inégalité : $1-2-y*\leq 0 \Longrightarrow -1-y*\leq 0 \Longrightarrow y*\geq -1$

Condition de Stationnarité : $2(2)-\mu*+\lambda*=0 \Longrightarrow 4-\mu*+\lambda*=0$ $2y*-\mu*=0 \Longrightarrow \mu*=2y*$

faisabilité duale: $\mu*\geq 0 \Longrightarrow 2y*\geq 0 \Longrightarrow y*\geq 0$

Complémentarité **:** $\mu*(1-2-y*)=0 \Longrightarrow 2y*(-1-y*)=0$

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**

Exemple 1.

Minimiser $f(x,y)=x^2+y^2$ Sous les contraintes : $g(x,y)=1-x-y\leq 0$ et $h(x,y)=x-2=0$

$2y*(-1-y*)=0$

Cas 1 : $y*=0$

Si $y*=0$, alors $\mu*=2(0)=0$. L'équation $4-\mu*+\lambda*=0$ devient $4-0+\lambda*=0 \Longrightarrow$ **$\lambda*=-4$**.
Vérifions la faisabilité de la contrainte d'inégalité : $y*\geq -1 \Longrightarrow 0\geq -1$ (**Satisfaite**).

Le point candidat est $(x*,y*)=(2,0)$ avec $\mu*=0$ et $\lambda*=-4$. La valeur de la fonction objectif est **f(2,0)=2*2+0*2=4.**

Cas 2 : $-1-y*=0 \Longrightarrow y*=-1$

Si $y*=-1$, alors $\mu*=2(-1)=-2$. Cependant, la condition de non-négativité exige **$\mu*\geq 0$.**
Donc, ce cas est impossible.

Le seul point qui satisfait toutes les conditions KKT est $(x*,y*)$**=(2,0)** avec les multiplicateurs $\mu*=0$ et $\lambda*=-4$.

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**

Exemple 1.

Minimiser $f(x,y)=x^2+y^2$ Sous les contraintes : $g(x,y)=1-x-y\leq 0$ et $h(x,y)=x-2=0$

Montrons que f, g et h sont convexes.

h et g sont affines donc convexes.

Pour f nous allons montrer que sa hessienne est DP.

$$\nabla f(x,y)=(2x\ 2y)^T$$

$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, La matrice hessienne est **constante** et **définie positive**

$\det(Hf-\lambda I)=0 \rightarrow (2-\lambda)^2=0$, toutes ses valeurs propres sont strictement positives : ici 2. La matrice hessienne est **constante** et **définie positive**

Donc, **f(x,y) est convexe** sur $\mathbb{R}^2$.

Donc les conditions KKT sont suffisantes et **(2,0) est le min globale** .

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**

Exemple 2.

$$\begin{cases} \min\limits_{x,y\in\mathbb{R}^2} f(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2 \text{ , } f \text{ } la \text{ } fonction \text{ } objective. \\ y-x^2\leq 0 \text{ .} \\ h(x) = x = 0 \end{cases}$$

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**

Exemple 2. $f(x, y)$=(x−1)2+(y−1)2, s.c. $g(x, y) = y - x^2 \leq 0$ et $h(x) = x = 0$

a)Vérification de la qualification des contraintes (LICQ) :

L'ensemble admissible est défini par g(x, y)≤ 2, c.-à-d. y≤ x^2 et x=0.

Vérifions la LICQ (L'Indépendance Linéaire des Gradients des Contraintes Actives) en un point (x,y) quelconque.

Les gradients des contraintes sont : $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix}$ $\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\alpha \nabla g(x,y) + \beta \nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha \begin{pmatrix} -2x \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta - 2x\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha = \beta = 0$

Les gradients sont **linéairement indépendants**, donc **LICQ est satisfaite d'où l'existence de** μ, λ vérifiant les conditions KTT**.**

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**

Exemple 2. $f(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2$, s.c. $g(x,y) = y-x^2 \leq 0$ et $h(x) = x = 0$

b) **Fonction Lagrangienne :**

La fonction Lagrangienne pour ce problème est :

$$L(x,y,\mu,\lambda)=f(x,y)+\mu.g(x,y)+\lambda.h(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2+\mu(y-x^2)+\lambda x$$

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**

Exemple 2.

Minimiser $f(x, y)=(x-1)^2+(y-1)^2$, s.c. $g(x, y) = y-x^2 \leq 0$ et $h(x) = x = 0$

c)Conditions d'optimalité KKT :

Pour qu'un point (x,y) soit une solution optimale locale, il doit satisfaire les conditions suivantes :

faisabilité primale : $y-x^2 \leq 0$, $x=0$

Condition de Stationnarité: $\nabla L(x,y,\mu,\lambda)=0$

Cela donne les équations partielles :

- $\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1)-2\mu x+\lambda=0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = =2(y-1)+\mu=0$
- $\frac{\partial L}{\partial \mu} = y-x^2=0$; $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x=0$
- **faisabilité duale:** $\mu * \geq 0$
- **Complémentarité :** $\mu * (y-x^2)=0$

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**

Exemple 2.

Minimiser $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$, s.c. $g(x, y) = y - x^2 \leq 0$ et $h(x) = x = 0$

d) **Résolution des conditions KKT**

Utilisons la contrainte d'égalité $x=0$ directement dans les autres conditions :

Faisabilité primale: $y - 0^2 \leq 0 \Rightarrow y \leq 0$

Condition de Stationnarité: $2(0-1) - 2\mu(0) + \lambda = 0 \Rightarrow -2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

$2(y-1) + \mu = 0 \Rightarrow \mu = 2(1-y)$ (*)

faisabilité duale : $\mu = 2(1-y) \geq 0 \Rightarrow 1 - y \geq 0 \Rightarrow y \leq 1$

Complémentarité : $\mu(y - 0^2) = \mu\, y = 0 \Rightarrow 2(1-y)y = 0$ (*)

PO sous Contraintes d'inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**

Exemple 2.

Minimiser $f(x, y)=(x-1)^2+(y-1)^2$, s.c. $g(x, y) = y-x^2 \leq 0$ et $h(x) = x = 0$

On a $2(1-y)y=0$

De la condition de complémentarité, nous avons deux possibilités :

Cas 1 : $y=0$

Si $y=0$, alors $\mu=2(1-0)=2\geq 0$ (satisfait). La faisabilité de l'inégalité est $0\leq 0$ (satisfait). Le point candidat est $(x,y)=(0,0)$ avec $\mu=2$ et $\lambda=2$ et $f(0,0)=2$.

Cas 2 : $1-y=0 \Longrightarrow y=1$

Si $y=1$, alors $\mu=2(1-1)=0\geq 0$ (satisfait). La faisabilité de l'inégalité est $1\leq 0$ (non satisfaite). Donc, ce cas ne donne pas une solution admissible.

PO sous Contraintes d’inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**

Exemple 2.

Minimiser $f(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2$, s.c. $g(x,y) = y-x^2 \leq 0$ et $h(x) = x = 0$

Le seul point qui satisfait toutes les conditions KKT est $(x*,y*)=(0,0)$ avec les multiplicateurs $\mu*=2$ et $\lambda*=2$.

Vérifions la convexité de f, g et h.

$Hf(x,y)= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, les valeurs propres sont 2 et -2 donc non DP

(0,0) est un minimum local de f.

PO sous Contraintes d’inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**
  - **Avantages** :
    - ✓ Gère les contraintes mixte (**inégalités + égalités**).
    - ✓ Base de nombreux **algorithmes numériques** (barrières, SQP, etc.).
    - ✓ les multiplicateurs donnent l'impact marginal de chaque contrainte, cela permet d’analyser la **sensibilité** de la solution.
  - **Limites** :
    - ✓ Conditions **nécessaires**, mais pas toujours suffisantes si le problème est **non convexe**.
    - ✓ Nécessite des **conditions de régularité** (comme Slater ou indépendance linéaire).
    - ✓ Peut être compliquée à **résoudre analytiquement** quand il y a plusieurs contraintes actives.

PO sous Contraintes d’inégalité ou mixte

- **Méthode des Multiplicateurs de Lagrange & Conditions KKT**
  - **Analyse de la sensibilité** :
    - ✓ les multiplicateurs révèle quelles contraintes ont le plus d'impact sur la solution optimale, cela permet d’analyser la **sensibilité** de la solution.
      - Les multiplicateurs de Lagrange quantifient la variation de valeur optimale de la fonction objective en réponse **à de petites variations** dans les niveaux des contraintes actives ($x+y \geq 2 \rightarrow x+y \geq 2{,}01$).
      - Les multiplicateurs aident à déterminer quelles **contraintes** sont les plus "**coûteuses**" ou les plus restrictives pour l'objectif.
      - Un multiplicateur **élevé** pour une contrainte active suggère qu'un **léger relâchement** de cette **contrainte** permettrait une **diminution** de **f**.
      - Ce qui permet dans certains problèmes de chercher à modifier ou de contourner cette contrainte si possible pour mieux optimiser.