FACULTE DES SCIENCES BEN M'SICK
UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

# Algorithmes d’optimisation

Pr. Faouzia Benabbou (faouzia.benabbou@univh2c.ma)
Département de mathématiques et Informatique
Master Data Science & Big Data
2024-2025

# Plan du Module: Algorithmes d’optimisation

01 Introduction

02 Rappels mathématiques

03 Algorithmes d’Optimisation Sans Contraintes

04 Algorithmes d’Optimisation avec Contraintes

05 Programmation Linéaire et non Linéaire

06 Optimisation combinatoire et globale

07 Méthodes heuristiques et métaheuristiques

# Rappels mathématiques

# Fonctions et Dérivées

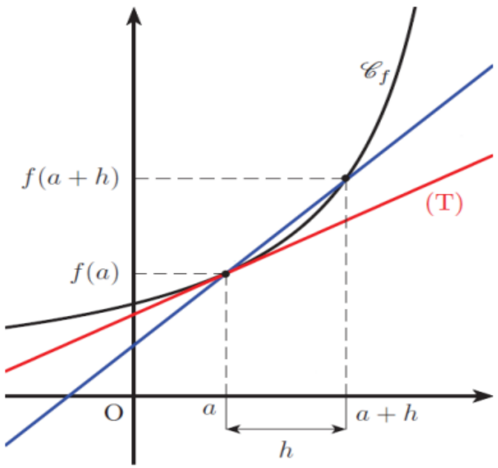
## Définitions

Soient f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et a un réel de I.

On dit que f est dérivable en a si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un réel fini quand h tend vers 0.

On note alors f '(a) cette limite, et on l'appelle le nombre dérivé de f en a.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

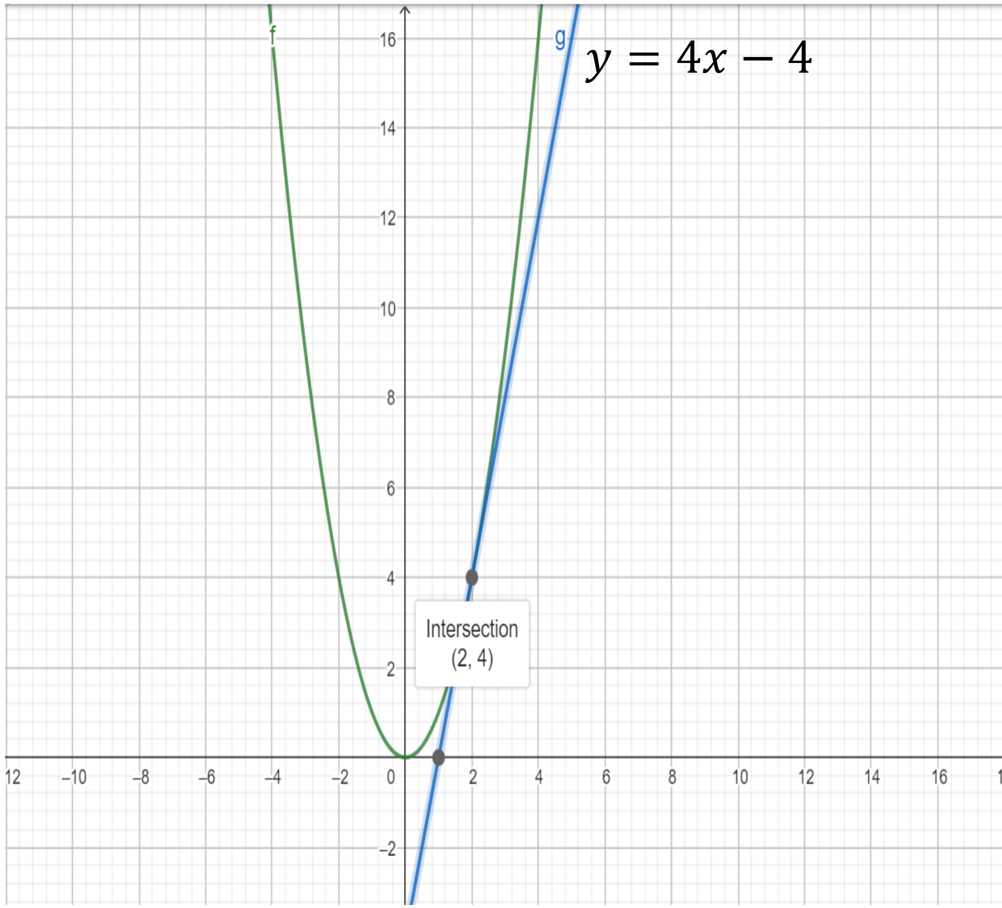


# Fonctions et Dérivées

- **Équation de la tangente**
  - Le nombre dérivée f '(a) est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe Cf au point d'abscisse a.
  - L'équation (réduite) de la tangente à la courbe Cf de la fonction f au point a est donnée par la formule :

    $y - f(a) = f'(a)(x - a)$
- **Exemple :**
  - Soit la fonction $f(x) = x^2$,
  - $f'(x) = 2x,\ y - 4 = 4(x - 2)$
  - L'équation de la tangente à la courbe Cf au point (2,4) est :

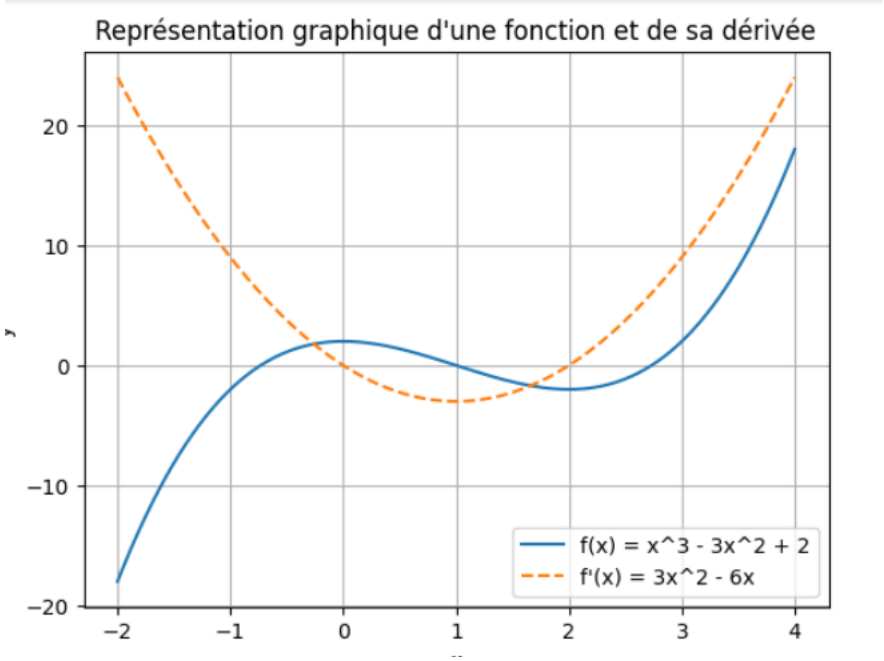
    $y = 4x - 4.$



# Fonctions et Dérivées

## Définitions

Si f est **dérivable** pour toute valeur a de I, alors on note $f' : x \to f'(x)$ est appelée la fonction dérivée de f.



# Fonctions et Dérivées

## Propriétés sur les dérivées

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

- f + g , k f (où k $\in \mathbb{R}$), sont dérivables sur I
- si g(x)≠0 pour tout réel x de I, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I.
- dérivée de la somme (f + g )'= f ' + g '
- dérivée du produit par un scalaire (k f)'=k f '
- dérivée du produit (f g)'= f ' g + f g'
- dérivée du quotient $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{\mathbf{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}}{\mathbf{[g(x)]2}}$
- dérivée du $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g.$

# Fonctions et Dérivées

- Exemples: Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes:
  - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x^2 + 5x - 8$.
  - Soit f la fonction définie sur $]7;+\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{-x+7}$
  - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, **par** $\mathbf{f(x) = \frac{x2}{3x+1}}$

```python
import sympy as sp
# 1. Définir la variable et la fonction
x = sp.symbols('x', real=True)
f = x**3 - 3*x**2 + 2
g = (- 3*x**2) +5*x - 8.
h = (2*x + 3)/(-x + 7)
t = x**2/(3*x + 1)
# 2. Calculer la dérivée première
f_prime = sp.diff(f, x)
print("f'(x) =", f_prime)
g_prime = sp.diff(g, x)
print("g'(x) =", g_prime)
h_prime = sp.diff(h, x)
print("h'(x) =", h_prime)
t_prime = sp.diff(t, x)
print("t'(x) =", t_prime)
```

```
f'(x) = 3*x**2 - 6*x
g'(x) = 5 - 6*x
h'(x) = 2/(7 - x) + (2*x + 3)/(7 - x)**2
t'(x) = -3*x**2/(3*x + 1)**2 + 2*x/(3*x + 1)
```

# Fonctions et Dérivées

- Exemples: Déterminer la fonction dérivée des cas suivants :
  - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f( x)=$x^3 - 3x^2 + 2$.
  - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par g (x )= $-3x^2 + 5x - 8$
  - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{7\}, par\ \ h(x) = \frac{2\,x+3}{-x+7}$
  - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{3}\right\}, par$ t(x)=$\frac{\mathbf{x2}}{\mathbf{3x+1}}$

```python
import sympy as sp
# 1. Définir la variable et la fonction
x = sp.symbols('x', real=True)
f = x**3 - 3*x**2 + 2
g = (- 3*x**2) +5*x - 8.
h = (2*x + 3)/(-x + 7)
t = x**2/(3*x + 1)
# 2. Calculer la dérivée première
f_prime = sp.diff(f, x)
print("f'(x) =", f_prime)
g_prime = sp.diff(g, x)
print("g'(x) =", g_prime)
h_prime = sp.diff(h, x)
print("h'(x) =", h_prime)
t_prime = sp.diff(t, x)
print("t'(x) =", t_prime)
```

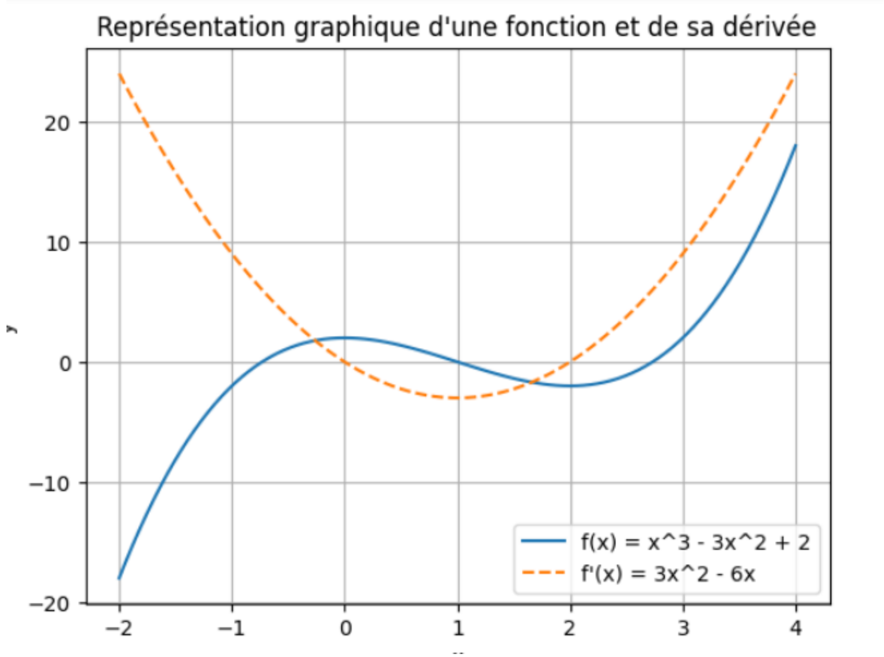
```
f'(x) = 3*x**2 - 6*x
g'(x) = 5 - 6*x
h'(x) = 2/(7 - x) + (2*x + 3)/(7 - x)**2
t'(x) = -3*x**2/(3*x + 1)**2 + 2*x/(3*x + 1)
```

# Fonctions et Dérivées

- **Sens de variation**
  - La dérivée nous renseigne sur la variation d'une fonction.
  - Le signe de la dérivée d'une fonction est très utiles pour analyser les comportements croissants ou décroissants d'une fonction sur un intervalle donné.
  - Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ les règles de base sur le signe de la dérivée d'une fonction sont :
    - ✓ Si $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante ou constante sur I (strictement croissante si $f'(x) > 0$ ).
    - ✓ Si $\forall x \in I$, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante ou constante sur I sur I (strictement croissante si $f'(x) < 0$ ).

# Fonctions et Dérivées

- **Sens de variation**
  - ✓ Si $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$ alors f est croissante ou constante sur I (strictement croissante si $f'(x) > 0$ ).
  - ✓ Si $\forall x \in I$, $f'(x) \leq 0$ alors f est décroissante ou constante sur I sur I (strictement croissante si $f'(x) < 0$ ).



# Fonctions et Dérivées

- **Points critiques**
  - un **point critique** est un point où la dérivée d'une fonction est nulle ou n'existe pas.
  - En d'autres termes, c'est un point où la pente de la tangente à la courbe représentative de la fonction est horizontale ou indéfinie.

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)=0$$

  - Les point critiques peuvent être des **minima**, des **maximas** ou des points **selle**, et comprendre leur comportement est essentiel pour optimiser des fonctions complexes.
  - On le verra en détail ultérieurement.

# Fonctions et Dérivées

- **Dérivées partielles**
  - Les dérivées partielles sont une généralisation de la dérivée aux fonctions à plusieurs variables.
  - Les dérivées partielles sont essentielles dans les problèmes d'optimisation d’une fonction **multivariée**.
  - Lorsqu'on cherche à maximiser ou minimiser une fonction de plusieurs variables, on calcule les dérivées partielles de la fonction par rapport à chaque variable pour trouver les **points critiques**.

# Fonctions et Dérivées

- **Définition.** Soit f : D ⊆ $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application et i ∈ [1, n],

x=$(x_1,\cdots,x_n)$ ∈ D .

On dit que la i-ième dérivée de f existe si la limite suivante existe et finie :

$$\frac{\partial f}{\partial xi}(x_1,\cdots,x_n)= \lim_{h\to 0}\frac{f\,(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\cdots,x_n)-f\,(x_1,\cdot\cdot,x_i,\cdot,x_n)}{h}$$

- On l'appelle la i-ème dérivée partielle de f au point $(x_1,\cdots,x_n)$.
- Pour calculer une dérivée partielle par rapport à la variable $x_i$, on **fixe** les autres variables et on calcul la dérivée au sens usuel où la variable est $x_i$.

# Fonctions et Dérivées

- **Exercice** :

1) On considère sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions suivantes :

$$f_1 : (x,y) \to x \in \mathbb{R}, \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = 1, \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 0,\ \nabla f_1 = \binom{1}{0}$$

$$f_2 : (x,y) \to y \in \mathbb{R}, \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 0, \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = 1,\ \nabla f_2 = \binom{0}{1}$$

$$f_3 : (x,y) \to (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer les que f1, f2, f3 admettent en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles par rapport à x et à y, et les expliciter.

# Fonctions et Dérivées

- **Exercice** :

$f_3 : (x,y) \rightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2.$

- Première composante : $\mathbf{f_3^1(x,y)=x}$
- Dérivée partielle par rapport à x : $\frac{\partial \mathrm{f}_3^1}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dx}} = 1$
- Dérivée partielle par rapport à y : $\frac{\partial f_3^1}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$
- Deuxième composante : $\mathbf{f_3^2(x,y)=y}$
- Dérivée partielle par rapport à x : $\frac{\partial \mathrm{f}_3^2}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}} = 0$
- Dérivée partielle par rapport à y : $\frac{\partial f_3^2}{\partial y} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1$
- En résumé nous avons :
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \binom{1}{0}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \binom{0}{1}$

# Fonctions et Dérivées

**Définition.** Soit f une fonction définie sur un intervalle D de $\mathbb{R}$ .

- On dit que f est de classe $C^n$, où $n \geq 1$ est un entier, si toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre n existent sur I, et si la dérivée nième $f^n$ est continue sur D.
- On dit que f est de classe $C^\infty$, si f est $C^n$ sur D pour tout $n \geq 1$. Autrement dit, si f est indéfiniment dérivable sur D.

**Définition.** Soit f une fonction définie sur un intervalle D de $\mathbb{R}^n$.

- On dit que f est de classe $C^k$, où $k \geq 1$ est un entier, si toutes ses dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k existent sur $D$ et ces dérivées sont continues sur $D$

# Fonctions et Dérivées

- **Définition.** La dérivée partielle de f d'ordre j par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_j$ est définie par :

$$\frac{\partial^j f}{\partial x_1 \cdots \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial^{j-1}}{\partial x_2 \cdots \partial x_j} f\right)$$

- **Exemple:** $f(x, y, z) = x^2y + xyz + z^3$ , cette fonction dépend de trois variables : x, y et z.
  - Calculer ses dérivées partielles d'ordre 2.

# Fonctions et Dérivées

- $f(x, y, z) = x^2y + xyz + z^3$
  - **Calcul des dérivées partielles d'ordre 1**
    - ✓ Dérivée partielle par rapport à x
      $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ =2xy+yz
    - ✓ Dérivée partielle par rapport à y :
      $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ =$x^2$+xz
    - ✓ Dérivée partielle par rapport à z : :
      $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ =xy+3z2

# Fonctions et Dérivées

- **Dérivées d'ordre 1 :** $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ =2xy+yz, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$ =$x^2$+xz et $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)$ =xy+3$z^2$
- **Calcul des dérivées partielles d'ordre 2**
  - Dérivées partielles secondes "pures" :
    - ✓ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y, z) = 2y$ , $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y, z) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z}(x, y, z) = 6z$
  - Dérivées partielles secondes "mixtes" :
    - ✓ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) = 2x+z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2x+z$

      (remarquons que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z)$, conformément au théorème de Schwarz)
    - ✓ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = y$
    - ✓ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = x$

# Fonctions et Dérivées

- Les dérivées partielles d'une fonction $f\ (x_1,\cdots,x_n)$ à plusieurs variables, peuvent être classées en deux types : **pures ou mixtes.**
- Par exemple pour une fonction à 2 variables x et y**,** $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$ sont pures et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont mixtes.

**Théorème de schwartz.** Soit f : D ⊆ $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application de et i,j ∈ [1, n], x=$(x_1, \ \ , x_n)$ ∈ D.

- Si les dérivées partielles secondes mixtes existent et sont **continues** sur D, alors on on a $\forall i\ \forall j\ \frac{\partial^2 f}{\partial xi \partial xj}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial xj \partial xi}(x)$.

# Fonctions et Dérivées

- **Définition Gradient**

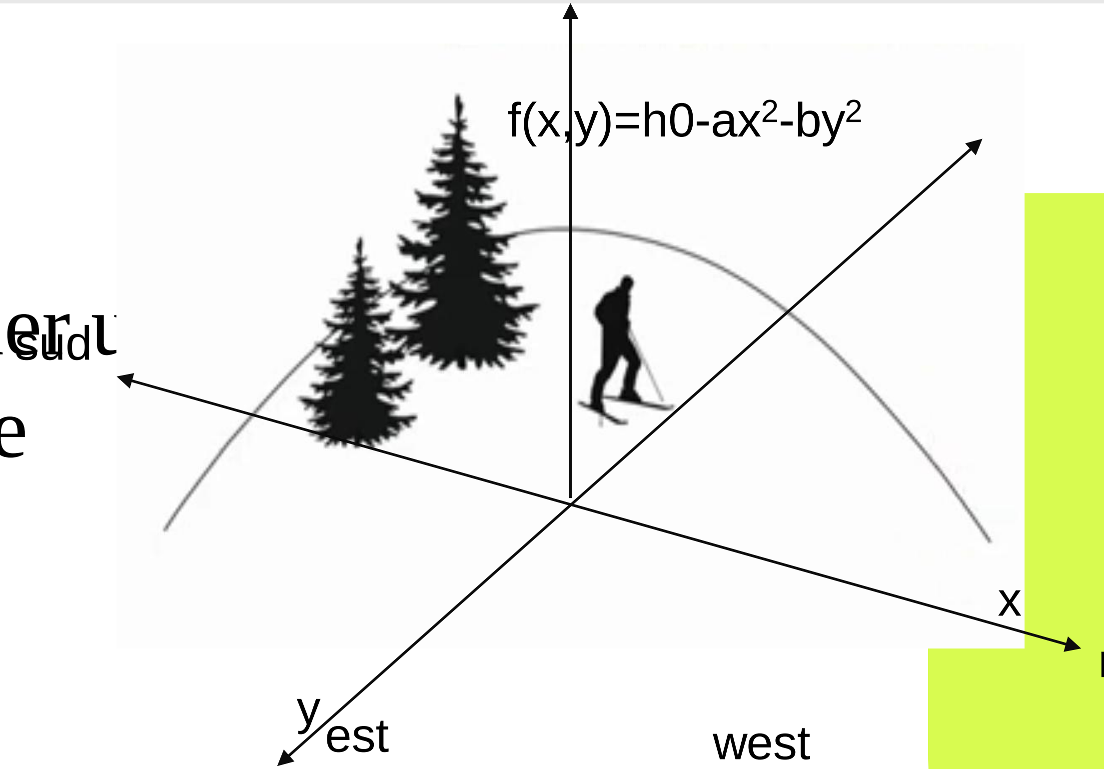
Soit f : D $\subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application. Si toutes les dérivées partielles de f existent en un point $\bar{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in$ D, alors on appelle **gradient** de f au point $\bar{a}$ le vecteur :

$$\nabla f\,(a_1, \cdots, a_n) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \cdots, a_n), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \cdots, a_n) \right)$$

- C'est un vecteur qui indique la direction de la plus forte augmentation de f en un point donné.
-

# Fonctions et Dérivées

- L'idée principale est d'imaginer u
montagne où f(x,y) représente l'altitude en fonction des coordonnées (x,y)



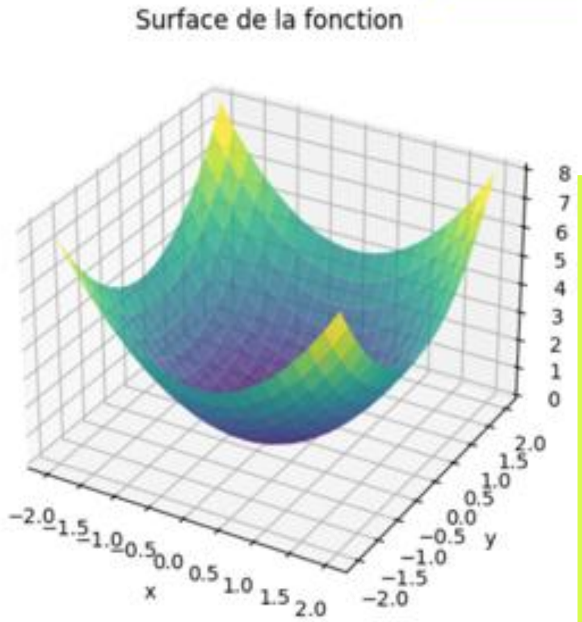

- Pour une Montée rapide → Aller dans la direction de ∇f.
- Pour une Descente rapide → Aller dans la direction opposée −∇f.
- Pour se déplacer sans changer de valeur → Aller perpendiculairement au gradient.

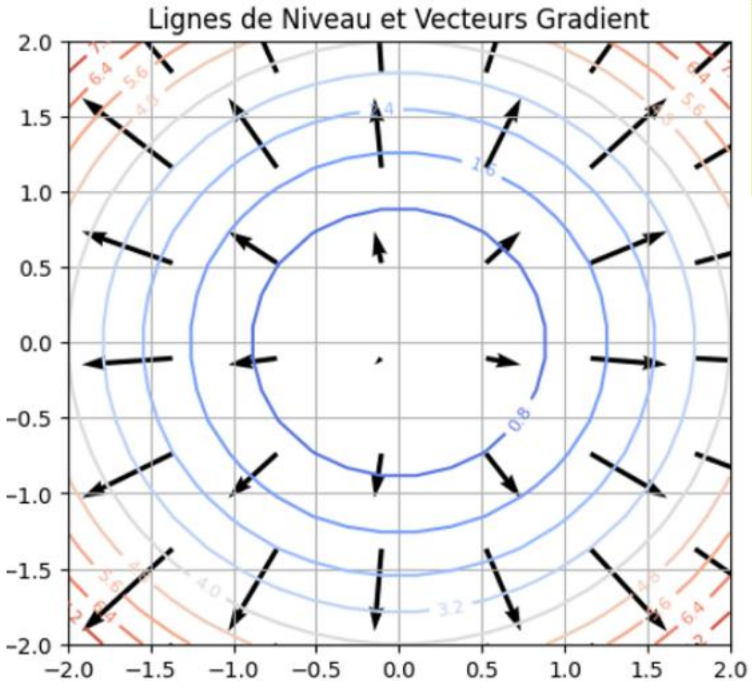
# Fonctions et Dérivées

- Lignes de niveau et gradient
  - Une **ligne de niveau** est un ensemble de points où la fonction prend la même valeur :$f(x,y) = C$,
    où C est une constante.
  - Si on suit une ligne de niveau, l'altitude ne change pas.
  - Le gradient est toujours **perpendiculaire** à la ligne de niveau.

# Fonctions et Dérivées

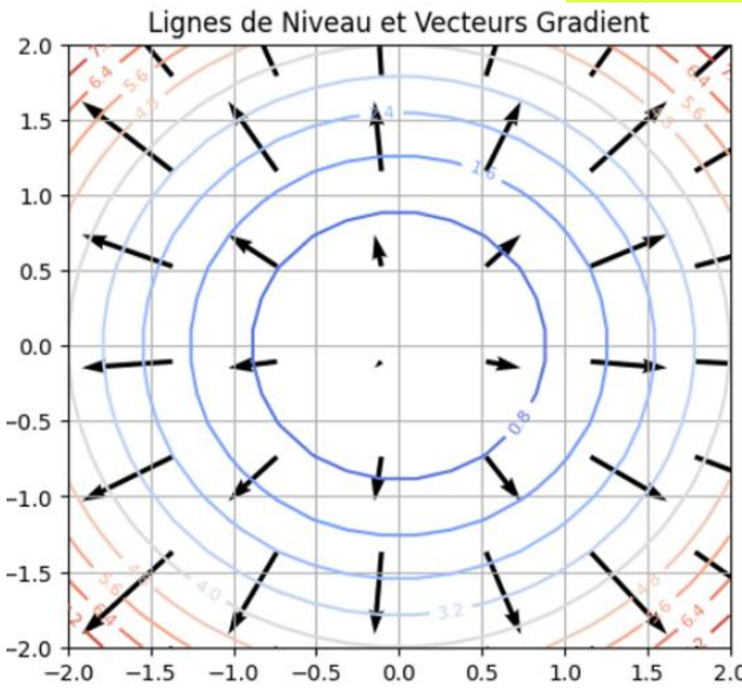
- **Exemple : Gradient**
  - Soit la fonction $f(x,y)=x^2+y^2$
  - Calculer le **gradient** $\nabla f=(2x,2y)$
  - Afficher les **lignes de niveau** de f(x,y).
  - Tracer les **vecteurs gradients**, qui sont perpendiculaires aux lignes de niveau.
  - Chaque courbe correspond à un certain niveau de la fonction, c'est-à-dire une valeur de $f(x,y)$.
  - Plus les lignes de niveau sont proches, plus la fonction change rapidement dans cette région, indiquant une pente plus forte.



# Fonctions et Dérivées

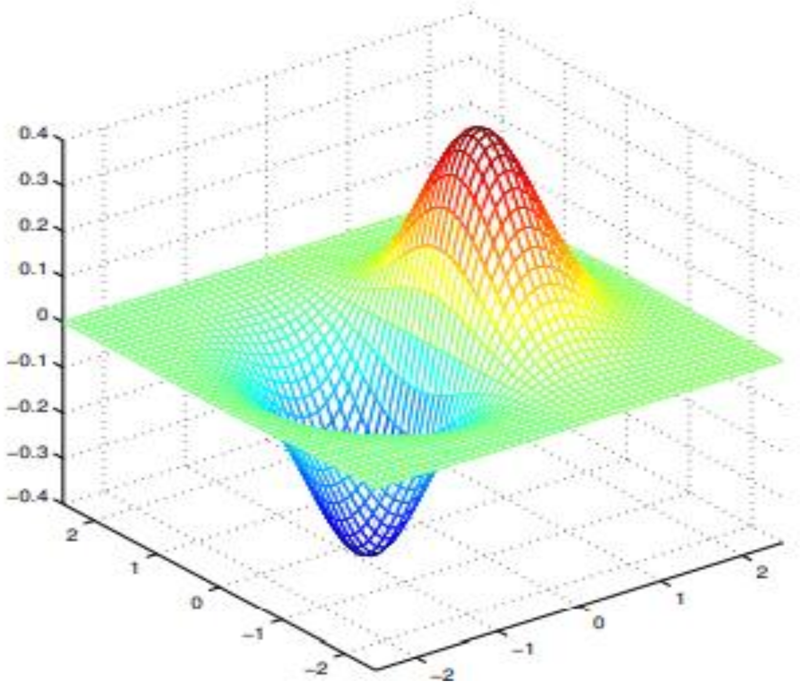
- **Exemple : Gradient**
  - Les flèches noires représentent les vecteurs du gradient $\nabla f = (2x, 2y)$ à chaque point du graphique.
  - Le gradient indique la direction de la croissance maximale de la fonction à partir de chaque point.
  - À chaque point, la direction du gradient montre la direction dans laquelle la fonction $f(x,y)$ augmente le plus rapidement.
  - La longueur des flèches représente **l'intensité** du gradient, plus la fonction change rapidement (i.e., plus la pente est forte), plus les flèches sont longues.

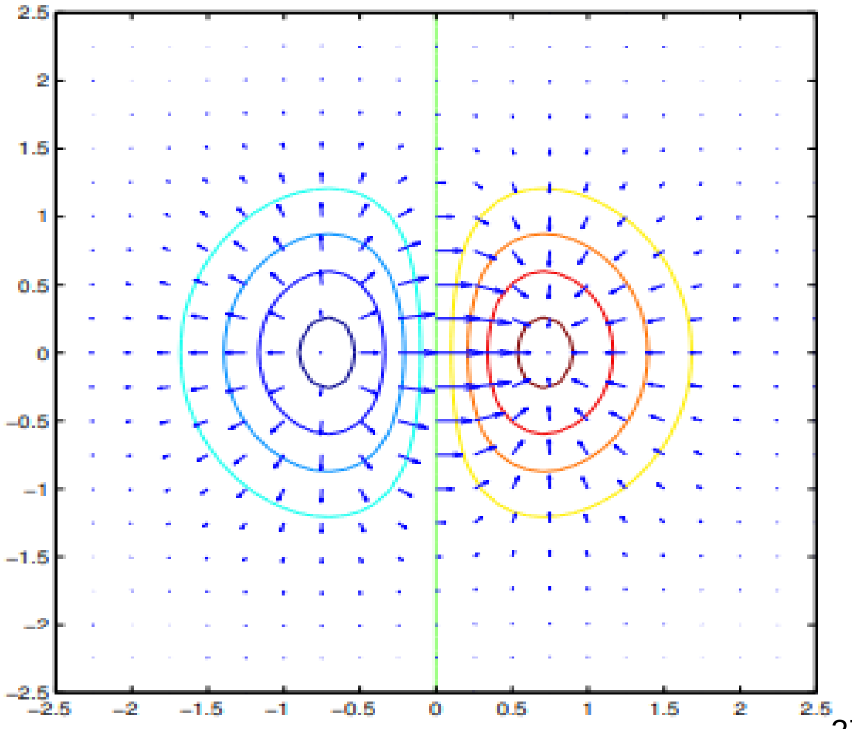


# Fonctions et Dérivées

- **Exemple : Gradient**

Soit $f(x) = xe^{-(x^2+y^2)}$, la courbe de la fonction et son gradient sont représentés dans la figure suivante :





# Fonctions et Dérivées

- **Exercice:** Soit la fonction $f(x, y) = x^4 + y^3$

1. Calculer les dérivées partielles
2. Tracer sa courbe
3. Tracer son gradient

# Fonctions et Dérivées

- **Développement de Taylor**
  - Pour analyser une fonction complexe au voisinage d'un point donné, on peut utiliser son approximation (fonction plus simple) , c’est-à-dire une fonction qui se rapproche de cette fonction.
  - Cette approximation facilite l'analyse et la résolution de problèmes complexes et offre une représentation plus simple de la fonction dans un voisinage proche du point d'approximation.
  - La formule de Taylor permet d'approximer une fonction **dérivable** au voisinage d'un point par un **polynôme**.

# Fonctions et Dérivées

- **Définition. Développement de Taylor ,** Soit $f:[a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - **Formule de Taylor-Young,** f est n−1 fois dérivable dans un voisinage de a et la dérivée nième en a existe.

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)(h)+\frac{f''(a)}{2!}(h)^2+\cdots+\frac{f(n)}{n!}(a)(h)^n+o(h^n)$$

où $o(h^n)$ est un terme qui tend vers 0 plus rapidement que $(h^n)$ lorsque x tend vers a.

f est n−1 fois dérivable dans un voisinage de a et que dérivée nième en a existe

  - **Formule de Taylor avec reste de Lagrange,** Soit f une fonction de classe $C^{n+1}$.

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)(h)+\frac{f''(a)}{2!}(h)^2+\cdots+\frac{f(n)}{n!}(a)(h)^n+R_n(a+h)$$

- où $R_n(x)$ est le reste de Lagrange, représente l'erreur commise en approchant la fonction par le polynôme. $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, $\xi$ est un point situé entre a et x (x-a=h).
  - **Formule de Taylor avec reste intégral de Laplace,** soit f une fonction de classe $C^{n+1}$

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f(n)}{n!}(a)(b-a)^n+\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

## Fonctions et Dérivées

- **Exemple :**

1) L'approximation d'ordre 1 (linéaire) :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

2) L'approximation d'ordre 2 (quadratique) :

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$$

3) Considérons la fonction $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Donner la formule de Taylor à l'ordre 2 de f:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + 2f''(a)(x - a)2$$

# Fonctions et Dérivées

- **Exemple :**

  $f(x)=x^4-2x^2+1$. $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) +$
  $2f''(a)(x-a)2$

  $f'(a)=4a^3-4a$

  $f''(a)=12a^2-4$

  $$f(x)\approx f(a)+(4a^3-4a)(x-a)+\frac{12a^2-4}{2}(x-a)^2$$

  Pour $a=0$, $f(x) \approx 1-2x^2$

# Fonctions et Dérivées

**Théorème (formule de Taylor-Young à l'ordre 2)** :

- Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et soit a un point de U.
- On suppose que f est deux fois différentiable en a.

$$f(a+h) = f(a)+\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(||h||^2)$$

- Plus généralement, si on note :

$$D^k f(a)(h)^k = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a) h_{i_1} \cdots h_{i_k}$$

# Fonctions et Dérivées

**Théorème (formule de Taylor-Young à l'ordre 2)** :

- Soit f une fonction 2 fois dérivable définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et soit a un point de U.
- on a :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + o(||h||^2)$$

# Fonctions et Dérivées

**Théorème (formule de Taylor-Young à l'ordre k)** :

- Soit f k fois différentiable en a un point de U et définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.
- Pour h$\in \mathbb{R}^n$ tel que a+h $\in$ U,

$$f(a+h) = f(a) + Df(a)(h) + \cdots + \frac{1}{k!} D^k f(a)(h)^k + o(\| h \|^k).$$

- Où :

$$D^k f(a)(h)^k = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a) h_{i_1} \cdots h_{i_k}$$

# Les Matrices

- Une matrice n × m est un tableau de nombres à n lignes et m colonnes.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nm} \end{bmatrix}$$

- Si n = m, la matrice est appelée *matrice carrée*.

# Les Matrices

- matrice particulière.

**Matrice unité :**

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Matrice diagonale :**

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{bmatrix}$$

**Matrice triangulaire supérieure** :

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix}$$

**Matrice triangulaire inférieure**

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{bmatrix}$$

# Les Matrices

- La **transposé** d'une matrice :

  Si A est une matrice de dimension n×m (n lignes et m colonnes), alors sa transposé, notée $A^T$ ou A′ est une matrice de dimension m×n définie par :

  $\forall i \in \{1,\ldots,n\}, \forall j \in \{1,\ldots,m\}, (A^T)_{ij} = A_{ji}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- Une matrice carrée A est dite **symétrique** si : $A = A^T$.

# Les Matrices

- **Les valeurs propres**

  **Définition.** Soit A est une matrice carrée, *v* est un vecteur non nul, et λ est un scalaire, alors λ est une valeur propre de A si l'équation suivante est satisfaite :

$$A * v = \lambda\, v$$

  - A est la matrice carrée
  - λ est la valeur propre
  - *v* est le vecteur propre

# Les Matrices

- **Les valeurs propres**

$$A * v = \lambda\, v$$

- Géométriquement, cela signifie que lorsque la matrice A est appliquée au **vecteur propre v**, le résultat est un vecteur qui **pointe** dans la même direction que v, mais qui est mis à l'échelle par un facteur λ.
- La valeur propre λ détermine de combien le vecteur propre est étiré ou compressé lorsqu'il est transformé par la matrice A.
- Pour trouver les valeurs propres d'une matrice A, on doit résoudre l'équation caractéristique suivante :
- $det(A - \lambda I) = 0$, det() est le déterminant et I est la matrice identité

# Les Matrices

- **Exemple** : soit f : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ A est la matrice associée.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Cherchons les valeurs propres de f,$\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Soit } \det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{cases} 1 - \lambda = 0 \\ 2 - \lambda = 0 \\ 3 - \lambda = 0 \end{cases} \text{donc} \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \\ \lambda = 3 \end{cases}$$ {1,2,3} sont les valeurs propres A.

# Les Matrices

- **Exemple** : soit f : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ A est la matrice associée.

- **Définition.** Soit λ ∈ K et f une application linéaire de $K^n$ vers $K^n$ et soit A la matrice associée. L'*espace des vecteurs propres associé à* λ valeur p Pour trouver les vecteurs propres de chaque valeur propre, on résout l'équation $(A - \lambda I)x = 0$, x ∈ $\mathbb{R}^3$, x=$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

- Pour trouver les vecteurs propres de chaque valeur propre, on résout l'équation définie par : $(A - \lambda I)x = 0$

- $\begin{cases} x_1 - x_1 = 0 \\ 2x_2 - x_2 = 0 \\ 3x_3 - x_3 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 - x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases}$

- E*1*={($x_1$,0,0), $x_1 \in \mathbb{R}$}, E2={(0, $x_2$,0), $x_2 \in \mathbb{R}$} E3={(0,0, $x_3$ ), $x_3 \in \mathbb{R}$}