Metody numeryczne

Laboratorium 8

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

06.05.2020r.

Adrian Furman

1. Wstęp teoretyczny

Interpolacja – szczególny przypadek numerycznych metod aproksymacyjnych. Metoda polegająca na wyznaczaniu w przedziale $[a, b]$, takiej funkcji interpolującej $F(x)$, która w określonych węzłach przyjmuje z góry zadane wartości, natomiast w punktach nie będących węzłami, osiąga przybliżone wartości funkcji interpolowanej $f(x)$.

Interpolacja funkcjami sklejanymi – Przedział interpolacji $[a, b]$, dzielimy za pomocą $n+1$ punktów:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

na podprzedziały $[x_i, x_{i+1}]$. Funkcją sklejaną stopnia m nazywamy taką funkcję $s(x) \in C^m$, która jest wielomianem stopnia co najwyżej m w każdym podprzedziale $[x_i, x_{i+1}]$.

$$s_i(x) = c_{im} \cdot x^m + c_{im-1} \cdot x^{m-1} + \dots + c_{i1} \cdot x + c_{i0}. \quad (1)$$

W rezultacie funkcję interpolującą możemy przedstawić jako kombinację liniową elementów bazy składającej się z funkcji sklejanych $s_i(x)$:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x), \quad x \in [a, b]. \quad (2)$$

Funkcje sklejane trzeciego stopnia (m = 3) – dla takich funkcji musimy wyznaczyć $n+3$ parametrów ($n+1$ węzłów + 2 stopnie swobody). Rodzaj dwóch dodatkowych warunków zależy od postaci funkcji $f(x)$ lub od znajomości jej zachowania w pobliżu krańców przedziału interpolacji $[a, b]$.

Wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach – alternatywny sposób wyznaczania funkcji sklejanej w oparciu o założenia: ciągłość i liniowość drugiej pochodnej oraz warunek interpolacji w węzłach. Końcowym efektem wykorzystania tych informacji jest układ $n-1$ równań:

$$\mu_i m_{i-1} + 2m_i + \lambda_i m_{i+1} = d_i, \quad i = 1,2,\ldots,n-1, \quad (3)$$

gdzie:

$$m_i = s^{(2)}(x_i), \quad (4)$$

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \quad (5)$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i, \quad (6)$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \cdot \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right). \quad (7)$$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Podczas zajęć należało dokonać interpolacji funkcjami sklejanymi z wykorzystaniem wartości drugich pochodnych w węzłach dwóch funkcji:

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + x^2},$$

$$f_2(x) = 2\cos(x).$$

Na podstawie równania (3) otrzymano następującą macierz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ \beta \end{pmatrix} \quad (8)$$

gdzie: $m_1 = \alpha$, $m_n = \beta$, natomiast wyrazy wolne d wyznaczono zgodnie z równaniem (7).

W naszym przypadku odległości międzywęzłowe są stałe i równe:

$$h_i = x_i - x_{i-1} = \frac{x_{max} - x_{min}}{n-1},$$

co implikuje stałość parametrów μ_i oraz λ_i.

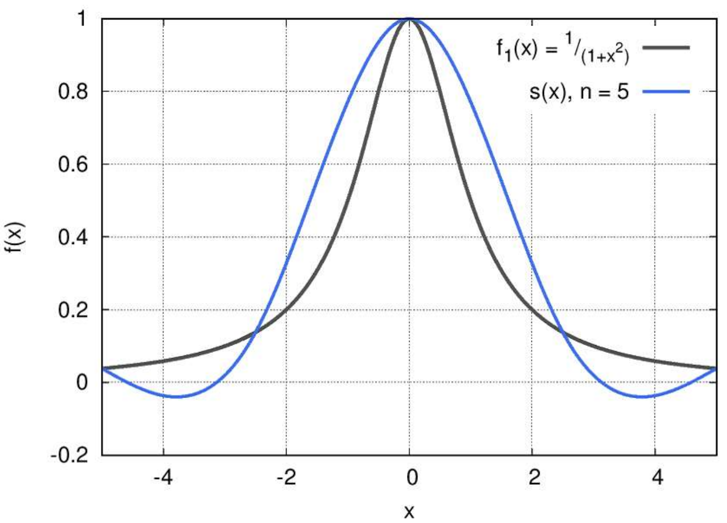
W celach porównania wartości drugich pochodnych, dla $f_1(x)$ zostały one także policzone ze standardowego wzoru dla $\Delta x = 0{,}01$:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \approx \frac{f(x-\Delta x) - 2f(x) + f(x+\Delta x)}{(\Delta x)^2}. \quad (9)$$

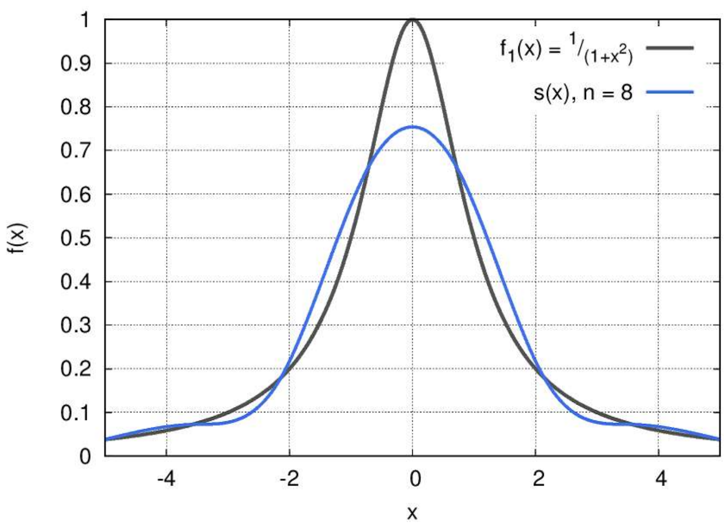
Interpolacje zostały wykonane dla każdej z funkcji trzykrotnie dla ilości węzłów kolejno $n \in \{5,\ 8,\ 21\}$, w przedziale $x \in [-5,\ 5]$.

2.2. Wyniki

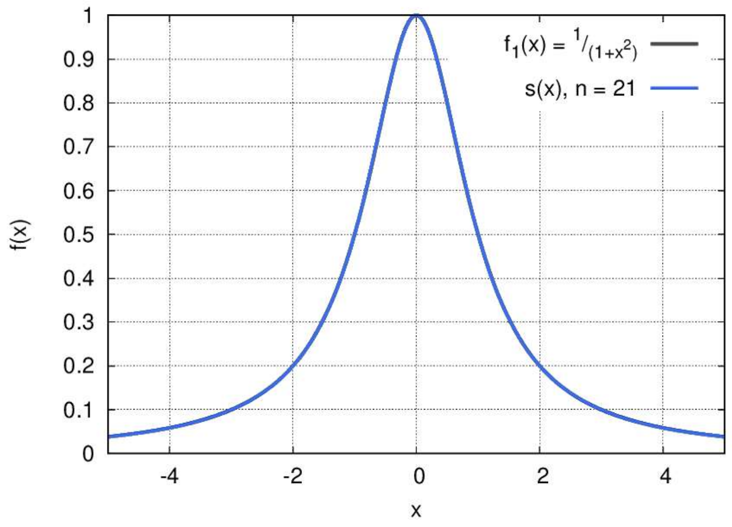
Poniżej przedstawione zostały otrzymane wyniki interpolacji zestawione z dokładnymi wykresami funkcji rozważanymi podczas ćwiczenia. Podczas rozwiązywania układu wykorzystano znaną już z wcześniejszych zajęć funkcję *gaussj.* Do wyrysowania wykresów użyto programy *gnuplot:*



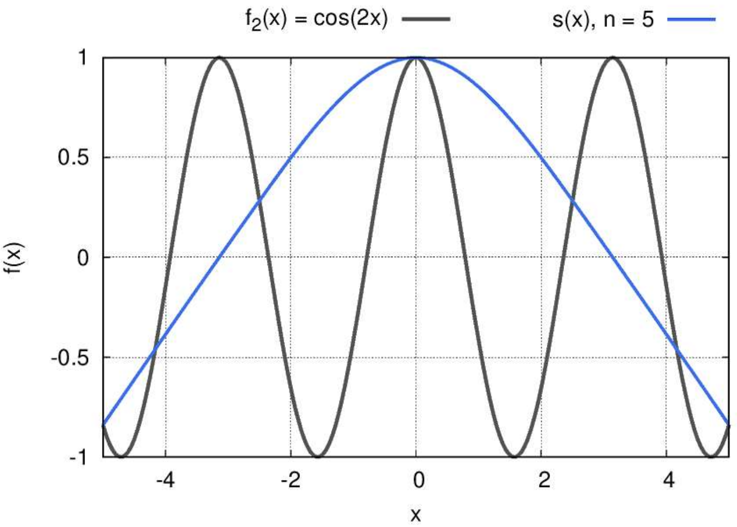
Wykres 1. Interpolacja funkcji $f_1(x)$ dla 5 węzłów interpolacji.



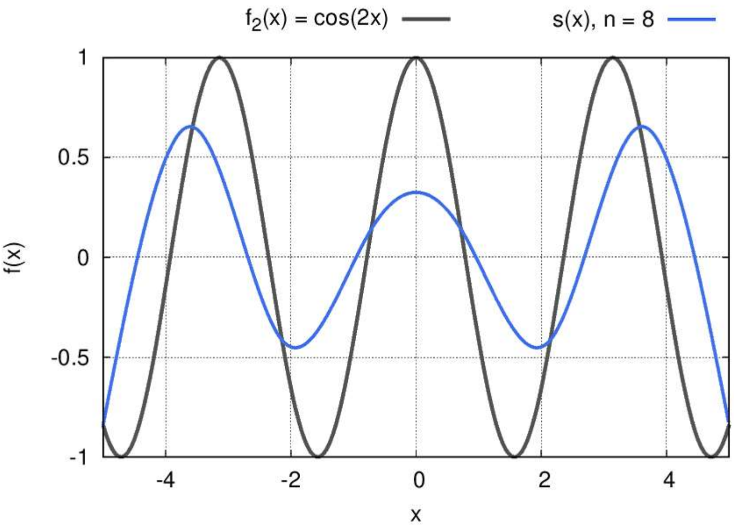
Wykres 2. Interpolacja funkcji $f_1(x)$ dla 8 węzłów interpolacji.



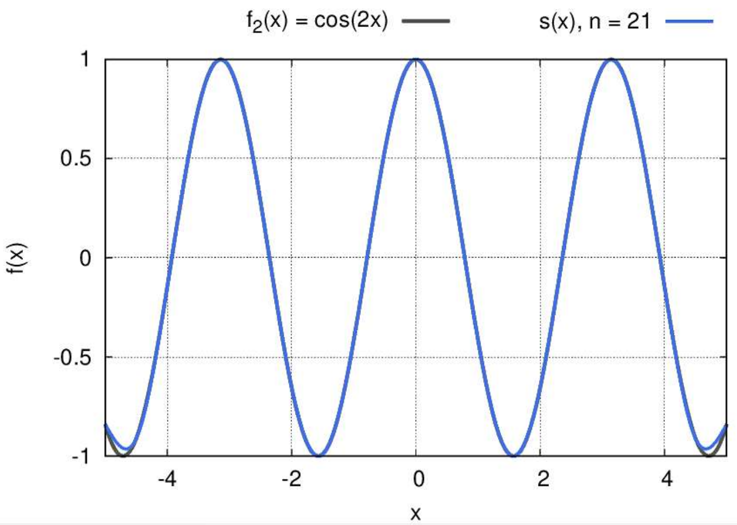
Wykres 3. Interpolacja funkcji $f_1(x)$ dla 21 węzłów interpolacji.



Wykres 4. Interpolacja funkcji $f_2(x)$ dla 5 węzłów interpolacji.



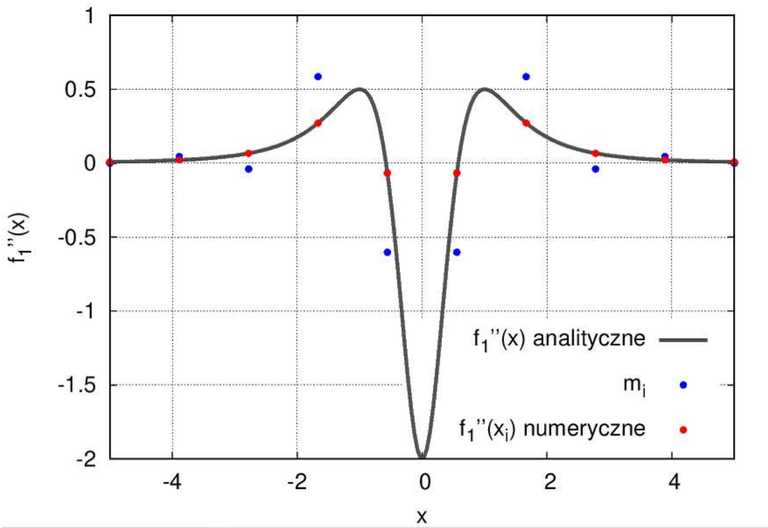
Wykres 5. Interpolacja funkcji $f_2(x)$ dla 8 węzłów interpolacji.



Wykres 6. Interpolacja funkcji $f_2(x)$ dla 21 węzłów interpolacji.

Doskonale widać, że wraz ze zwiększeniem ilości węzłów interpolacji czyli zmniejszeniem długości podprzedziałów, w których wyznaczamy funkcje sklejane $s_i(x)$ poprawia się dokładność interpolacji. Funkcja interpolacyjna z coraz większą dokładnością pokrywa się z funkcją interpolowaną zarówno dla funkcji $f_1(x)$ oraz $f_2(x)$. Jest to zgodne z naszymi przypuszczeniami – im więcej mamy danych (węzłów interpolacji) tym większe mamy pojęcie o kształcie funkcji i jesteśmy w stanie dokładniej tę funkcję oszacować/przybliżyć.

Kolejną obserwacją jest wpływ parzystości liczby węzłów na dokładność interpolacji. Z racji, że mamy do czynienia z funkcjami parzystymi, które osiągają ekstrema lokalne/globalne w środku symetrycznego przedziału interpolacji dla nieparzystych n węzeł wypada w owym ekstremum co sprawia, że nasza interpolacja lepiej oddaje zakres wartości przyjmowanych przez funkcję interpolowaną. Dla przykładu na wykresie (2) dla parzystego $n=8$ widzimy, że pomimo lepszego dopasowania funkcji na brzegach niż na wykresie (1) dla $n=5$, w miejscu środkowego maksimum globalnego interpolacja pozostawia wiele do życzenia i nie oddaje zakresu przyjmowanych przez funkcję $f_1(x)$ wartości. Na podstawie tych obserwacji można wysnuć wniosek o istotności węzłów wypadających w ekstremach lokalnych funkcji, które wnoszą do naszego algorytmu sporą dawkę istotnych informacji.



Wykres 7. Zestawienie wartości drugich pochodnych obliczonych na dwa sposoby: numerycznie oraz na drodze interpolacji funkcji z analitycznym wykresem drugiej pochodnej funkcji $f_1(x)$.

Jeśli chodzi o dokładność wyznaczania pochodnych zaprezentowaną na wykresie (7) bezapelacyjnie zwycięzcą jest sposób numeryczny na podstawie wzoru (9). Wyznaczone w ten sposób wartości drugich pochodnych wręcz idealnie pokrywają się z analitycznym wykresem tej pochodnej czego nie można powiedzieć o punktach m_i które zauważalnie odbiegają od wartości teoretycznych.

Wyniki

Interpolacja funkcjami sklejanymi stanowi dokładne narzędzie i daje satysfakcjonujące przybliżenie funkcji interpolowanej już dla stosunkowo niedużej liczby węzłów (21). Ponadto nie występują tutaj anomalie pokroju efektu Rungego jak w przypadku poprzednio rozważanej metody interpolacji, więc łatwo możemy zwiększyć dokładności interpolacji zwyczajnie zagęszczając położenia węzłów.

Wykorzystanie wartości drugich pochodnych w węzłach jest alternatywnym sposobem przeprowadzania obliczeń, wykorzystującym min. założenia o ciągłości i liniowości drugiej pochodnej. Pozwala on w efektywny i prostszy sposób uzyskać pożądane rezultaty.