

Metody numeryczne

Laboratorium 6

Poszukiwanie zer wielomianów metodą iterowanego dzielenia (metoda Newtona)

22.04.2020r.

Adrian Furman

1. Wstęp teoretyczny

Metoda Newtona znana również pod nazwą Newtona-Raphsona lub po prostu metoda stycznych to algorytm wyznaczania przybliżonych wartości pierwiastka funkcji ciągłej w sposób iteracyjny.

Istotną kwestią są założenia o istnieniu pierwiastka w badanym przedziale $[a, b]$ oraz o jednakowych znakach samej funkcji o raz jej drugiej pochodnej we wspomnianym przedziale.

Sam algorytm przebiega następująco:

1. z końca/początku przedziału prowadzimy styczną do wykresu funkcji $y = f(x)$, punkt przecięcia otrzymanej stycznej z osią OX jest naszym pierwszym przybliżeniem miejsca zerowego,
2. sprawdzamy czy otrzymane przybliżenie jest satysfakcjonujące, jeśli tak nie jest prowadzimy kolejną styczną tym razem w obecnym punkcie przecięcia,
3. Kolejny punkt przecięcia stycznej z osią OX stanowi nasze drugie przybliżenie,
4. Powtarzamy kroki 2-3 do momentu spełnienia warunku zbieżności $|x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$, gdzie ε to zadana dokładność lub do momentu przekroczenia limitu iteracji, który zabezpiecza nasz algorytm przed nieskończonym działaniem w pewnych przypadkach.

Z ogólnego równania stycznej w k-tym przybliżeniu, wyznaczamy punkt przecięcia z osią OX zwyczajnie przyjmując $y = 0$:

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k),$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad (1)$$

otrzymujemy wzór iteracyjny na k-te przybliżenie szukanego miejsca zerowego.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Celem zajęć laboratoryjnych było znalezienie zer następującego wielomianu:

$$f(x) = x^5 + 14x^4 + 33x^3 - 92x^2 - 196x + 240.$$

W ogólności, wielomian:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0 = 0$$

możemy zapisać w następującej formie, dwa razy dzieląc go przez dwumian $(x - x_j)$:

$$f(x) = (x - x_j)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0) + R_j, \quad (2)$$

$$f(x) = (x - x_j)^2(c_{n-2} x^{n-2} + c_{n-3} x^{n-3} + \dots + c_0) + R'_j(x - x_j) + R_j, \quad (3)$$

gdzie współczynniki obliczamy w następujący sposób (c analogicznie):

$$\begin{aligned} b_n &= 0, \\ b_k &= a_{k+1} + x_j b_{k+1}, \quad k = n-1, n-2, \dots, 0, \\ R_j &= a_0 + x_j b_0. \end{aligned}$$

Następnie zauważamy, że podstawiając do wzoru (1) granice równań (2) i (3) przy x zbiegającym do x_j otrzymujemy analogiczny wzór na kolejne przybliżenia pierwiastka wielomianu:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{R_j}{R'_j}.$$

Po uzyskaniu zbieżności dla danego pierwiastka dokonujemy dzielenia wielomianu przez dwumian $(x - x_j)$ tym samym pozbywając się znalezionej miejsca zerowego i umożliwiając w analogiczny sposób obliczenie kolejnych zer

2.2. Wyniki

W tabelach poniżej zamieszczone zostały serie kolejnych dokładniejszych przybliżeń poszczególnych pierwiastków naszego wejściowego wielomianu. Jak widać uzyskane rezultaty są zgodne z oczekiwanymi. Podczas obliczeń ustawiliśmy maksymalną liczbę iteracji na 30 i jak widzimy przy żadnym pierwiastku nawet nie zbliżyliśmy się do tej granicy co pokazuje jak szybką zbieżnością oraz skutecznością cechuje się metoda Newtona-Raphsona. W późniejszych iteracjach zauważamy poprawę dokładności wyniku o nawet dwie cyfry znaczące na każdą iterację co niewątpliwie jest bardzo dobrym wynikiem.

L	it	x_k	R_j	R_j'
1	1	1.22448980	240.00000000	-196.00000000
1	2	0.95291921	-43.12894968	-158.81303726
1	3	0.99911084	10.57141217	-228.85989600
1	4	0.99999964	0.19569461	-220.17937522
1	5	1.00000000	0.00007965	-220.00007313
1	6	1.00000000	0.00000000	-220.00000000

Tabela 1. Kolejne iteracje dla miejsca zerowego $x = 1$.

L	it	x_k	R_j	R_j'
2	1	-5.454545	-240.000000	-44.000000
2	2	-4.463517	-120.975343	122.070623
2	3	-4.108252	-24.275461	68.330401
2	4	-4.009574	-4.317535	43.753919
2	5	-4.000089	-0.347977	36.689077
2	6	-4.000000	-0.003236	36.006472
2	7	-4.000000	-0.000000	36.000000

Tabela 2. Kolejne iteracje dla miejsca zerowego $x = 4$.

L	it	x_k	R_j	R_j'
3	1	15.000000	-59.999999	3.999999
3	2	9.202180	5850.000162	1009.000018
3	3	5.537523	1687.531902	460.488347
3	4	3.383158	469.259437	217.818008
3	5	2.335342	118.158848	112.766776
3	6	2.027699	22.069987	71.739007
3	7	2.000214	1.675047	60.944091
3	8	2.000000	0.012884	60.007300
3	9	2.000000	0.000000	60.000000

Tabela 3. Kolejne iteracje dla miejsca zerowego $x = 2$.

L	it	x_k	R_j	R_j'
4	1	-2.307692	30.000000	13.000000
4	2	-2.942836	5.325443	8.384615
4	3	-2.999540	0.403408	7.114326
4	4	-2.999999	0.003215	7.000918
4	5	-3.000000	0.000000	7.000000

Tabela 4. Kolejne iteracje dla miejsca zerowego $x = -3$.

L	it	x_k	R_j	R_j'
5	1	-10.000000	10.000000	1.000000
5	2	-10.000000	0.000000	1.000000

Tabela 5. Kolejne iteracje dla miejsca zerowego $x = -10$.

3. Wnioski

Metoda Newtona-Raphsona zwana także metodą stycznych jest niezwykle wydajnym narzędziem pozwalającym na znalezienie miejsca zerowego funkcji. Jak widać w naszym przypadku bez większej trudności można tą metodą poszerzyć o iteracyjne dzielenie wielomianów co pozwala nam wyznaczyć wszystkie pierwiastki badanego wielomianu.

Ze względu na swoją szybką zbieżność oraz dokładność metoda stycznych jest często stosowana w różnego typu solverach. Trzeba jednak pamiętać, że nie mamy zagwarantowanej zbieżności przed czym chronimy się ustalając maksymalną liczbę

iteracji. Efektem tej niepewności jest użycie mniej wydajnych metod do wyznaczenia przedziałów zbieżności aby w następnym kroku szybko i dokładnie uzyskać wyniki za pomocą rozważanej przez nas metody.