

Metody numeryczne

Laboratorium 1

Rozwiązywanie układów równań liniowych metodami bezpośrednimi

04.03.2020r.

Adrian Furman

1. Wstęp teoretyczny

Metoda Gaussa-Jordana (metoda eliminacji zupełnej) polega na zapisaniu układu równań liniowych w postaci macierzowej a następnie sprowadzeniu macierzy współczynników do macierzy jednostkowej co w efekcie doprowadza nas do ostatecznego rozwiązania układu równań ponieważ po lewej stronie zostaje jedynie wektor niewiadomych a po prawej wektor wynikowych wartości.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Algorytm sprowadzania macierzy współczynników do macierzy jednostkowej polega na sprowadzeniu tej macierzy do postaci trójkątnej górnej a w następnym kroku wykonanie analogicznych przekształceń na jej górnej części poprzez odpowiednie operacje na wierszach.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1^n \\ b_2^n \\ \vdots \\ b_n^n \end{pmatrix}.$$

co sprowadza się do:

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1^n \\ x_2 &= b_2^n \\ \vdots &= \vdots \\ x_n &= b_n^n \end{aligned}$$

Górny indeks przy wyrazach b oznacza wartość tego wyrazu po wcześniej wspomnianych przekształceniach.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Źródłem układu równań liniowych podczas laboratorium było równanie różniczkowe opisujące prosty oscylator harmoniczny. Na podstawie drugiej zasady dynamiki Newtona:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} x(t) = -\omega^2 x(t). \quad (1)$$

Następnie przybliżając ilorazem różnicowym lewą stronę powyższego równania, czyli drugą pochodną położenia po czasie otrzymujemy:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t+\Delta t) - 2x(t) + x(t-\Delta t)}{(\Delta t)^2}.$$

Przyjmując następujące oznaczenia: $\Delta t = h$, $x_i = x(ih)$ dochodzimy do iteracyjnego przepisu, dzięki któremu możemy wyznaczyć x_{i+1} w zależności od x_i i x_{i-1} :

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0. \quad (2)$$

Uwzględnienie warunków początkowych: $x_0 = A$ oraz $(x_1 - x_0)/h = v_0$, gdzie A to początkowe wychylenie oscylatora z położenia równowagi a v_0 to wartość prędkości początkowej ciała, pozwala nam na uzyskanie jednoznacznego rozwiązania rozważanego układu równań.

Aplikując warunki początkowe do równania (2) możemy je przedstawić w postaci macierzowej – tutaj dla siedmiu pierwszych kroków czasowych w celu zobrazowania analogii wypełnienia macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

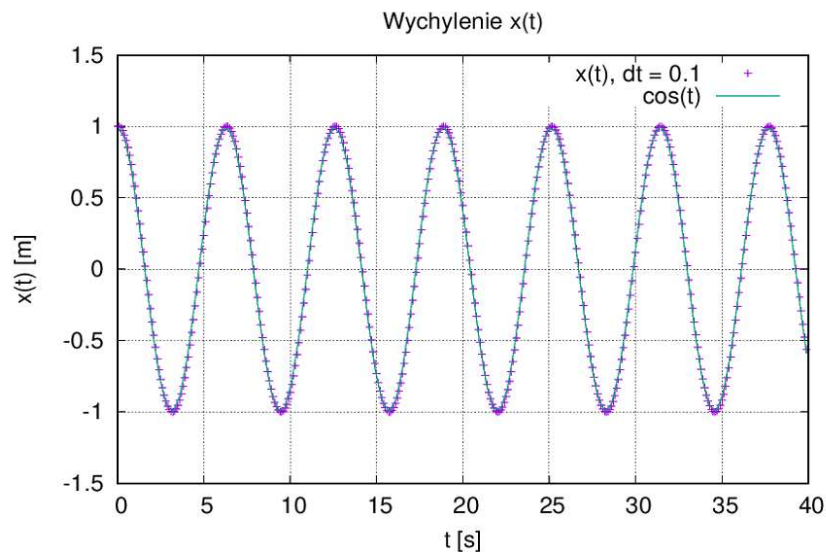
Dokonując obliczeń przy użyciu biblioteki GSL przyjęto:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{k}{m} = 1, \\ A &= 1, \\ v_0 &= 0. \end{aligned}$$

Krok czasowy: $h = 0.1 \text{ s}$, liczba kroków: $N = 400$.

2.2. Wyniki

Otrzymane wyniki zostały zapisane do pliku a następnie na ich podstawie oraz przy użyciu programu gnuplot wygenerowany został poniższy wykres:



Rysunek 1: Zależność wychylenia od czasu dla wartości obliczonej i dokładnej.

Jak widać na wykresie uzyskane wyniki świetnie pokrywają się z dokładnym wykresem funkcji cosinus. Na tej podstawie można stwierdzić, że obliczenia zostały wykonane z wystarczającą dokładnością.

3. Wnioski

Metoda Gaussa-Jordana należąca do rodziny metod bezpośrednich dobrze sprawdza się przy rozwiązywaniu układów równań liniowych a dokładność uzyskanych za jej pomocą rezultatów jest satysfakcjonująca. Wspomniana dokładność zależy oczywiście od wybranego kroku czasowego (całkowania), jeśli zależy nam na dużej dokładności powinniśmy zmniejszyć ten parametr mając oczywiście na uwadze wzrost ilości wymaganych obliczeń.