Metody numeryczne

Laboratorium 9

Aproksymacja w dziedzinie wielomianów Grama.

17.05.2020r.

Adrian Furman

1. Wstęp teoretyczny

Aproksymacja to zbiór czynności służących określeniu rozwiązań przybliżonych na podstawie rozwiązań znanych np. danych wartości funkcji w określonych węzłach. Istotną różnicą pomiędzy aproksymacją a interpolacją jest fakt, iż funkcja aproksymująca $F(x)$ nie musi przechodzić przez zadane punkty (węzły). Gdy nasze węzły opatrzone są pewną niedokładnością, interpolacja prowadzi do niezwykle skomplikowanych funkcji. W takich sytuacjach wskazana jest właśnie aproksymacja.

Aproksymacja średniokwadratowa funkcji $f(x)$ określonej na dyskretnym zbiorze punktów polega na znalezieniu takiej funkcji aproksymującej $F(x)$ aby zgodnie z metodą najmniejszych kwadratów poniższa suma była możliwie najmniejsza:

$$\|F(x) - f(x)\| = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x) - f(x)]^2 dx, \quad (1)$$

gdzie $w(x) \geq 0$ to funkcja wagowa.

Posiadając układ funkcji bazowych:

$$\varphi_i(x), \quad i = 0,1,2,\ldots,m,$$

szukamy takiego wielomianu $F(x)$ (funkcji aproksymującej), który jest najlepszym przybliżeniem średniokwadratowym aproksymowanej funkcji $f(x)$:

$$F(x) = \sum_{k=0}^{m} a_i \varphi_i(x). \quad (2)$$

Aproksymacja średniokwadratowa w bazie wielomianów ortogonalnych

Szukamy wielomianów tworzących bazę ortogonalną dla węzłów aproksymacji:

$$\{\varphi_m(x)\} = \varphi_0(x), \varphi_1(x), \ \dots \ , \varphi_m(x), \quad \textit{(3)}$$

spełniających dwa poniższe warunki:

$$\sum_{i=0}^{n} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) = 0, \quad j \neq k \qquad \sum_{i=0}^{n} \varphi_j^2(x_i) > 0. \quad \textit{(4), (5)}$$

Szukane wielomiany ortogonalne są **wielomianami Grama**:

$$\hat{F}_k^{(n)}(q) = \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s}\binom{k+s}{s} \frac{q^{[s]}}{n^{[n]}}, \quad \textit{(6)}$$

gdzie:

$\hat{F}_k^{(n)}(q) = 1 + b_1 q^{[1]} + b_2 q^{[2]} + \dots + b_k q^{[k]}$ *(7)* - unormowany wielomian bazowy,

$q^{[s]} = q(q-1) \dots (q-s+1)$ - wielomian czynnikowy dla $q = \dfrac{x - x_0}{h}, \ x_i \rightarrow q_i.$

Mając warunki początkowe:

$$\varphi_{-1}(x) = 0, \qquad \varphi_0(x) = 1. \quad \textit{(8)}$$

kolejne wielomiany ortogonalne wyznaczamy rekurencyjnie na podstawie poprzednich:

$$\varphi_{j+1}(x) = (x - \alpha_{j+1})\varphi_j(x) - \beta_j \varphi_{j-1}(x), \qquad j = 1,2,3,\dots \quad \textit{(9)}$$

gdzie współczynniki wyrażone są wzorami:

$$\alpha_{j+1} = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} x_i \varphi_j^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_j^2(x_i)}, \qquad \beta_j = \frac{\sum_{i=0}^{N-1} x_i \varphi_{j-1}(x_i)\varphi_j(x_i)}{\sum_{i=0}^{N-1} \varphi_{j-1}^2(x_i)}. \quad \textit{(10), (11)}$$

Wtedy szukany wielomian aproksymacyjny może być wyznaczony na podstawie wzoru:

$$F(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{c_j}{s_j} \varphi_j(x), \quad \textit{(12)}$$

gdzie:

$$c_k = \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_k(x_i), \qquad s_k = \sum_{i=0}^{n} \varphi_k^2(x_i). \quad \textit{(13), (14)}$$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Celem zajęć było użycie wielomianów Grama do aproksymacji funkcji:

$$f(x) = \sin\left(\frac{14\pi x}{x_{max} - x_{min}}\right)\left(\exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x + x_0)^2}{2\sigma^2}\right)\right), \quad (15)$$

na siatce równoodległych węzłów w przedziale $x \in [x_{min}, x_{max}]$ przy nałożeniu na węzły niewielkiego zaburzenia stochastycznego:

$$f_{szum} = f(x) + C_{rand}(x), \quad (16)$$

$$C_{rand}(x) = \frac{Y - 0.5}{5}, \quad Y \in [0, 1],$$

gdzie $C_{rand}(x)$ to liczba pseudolosowa z przedziału $[-0.1, 0.1]$.

Na podstawie wzoru rekurencyjnego (8), warunków początkowych (7) oraz współczynników (9) i (10) utworzona została macierz, której kolejne wiersze przedstawiały kolejne wielomiany Grama dla rozważanej funkcji (14). W każdym wierszu j zebrane zostały wartości j-tego wielomianu Grama w zadanych węzłach badanej funkcji. Sumaryczna liczba wierszy wyniosła 51.

Przyjmując wagę $w(x) = 1$ dokonano aproksymacji przy użyciu $m = 10, 30, 50$ wielomianów Grama na przedziale o granicach:

$$x_{min} = -4.0,$$

$$x_{max} = 4.0,$$

w $N = 201$ węzłach.

Za pozostałe parametry przyjęto następujące wartości:

$$\sigma = \frac{x_{max} - x_{min}}{16},$$

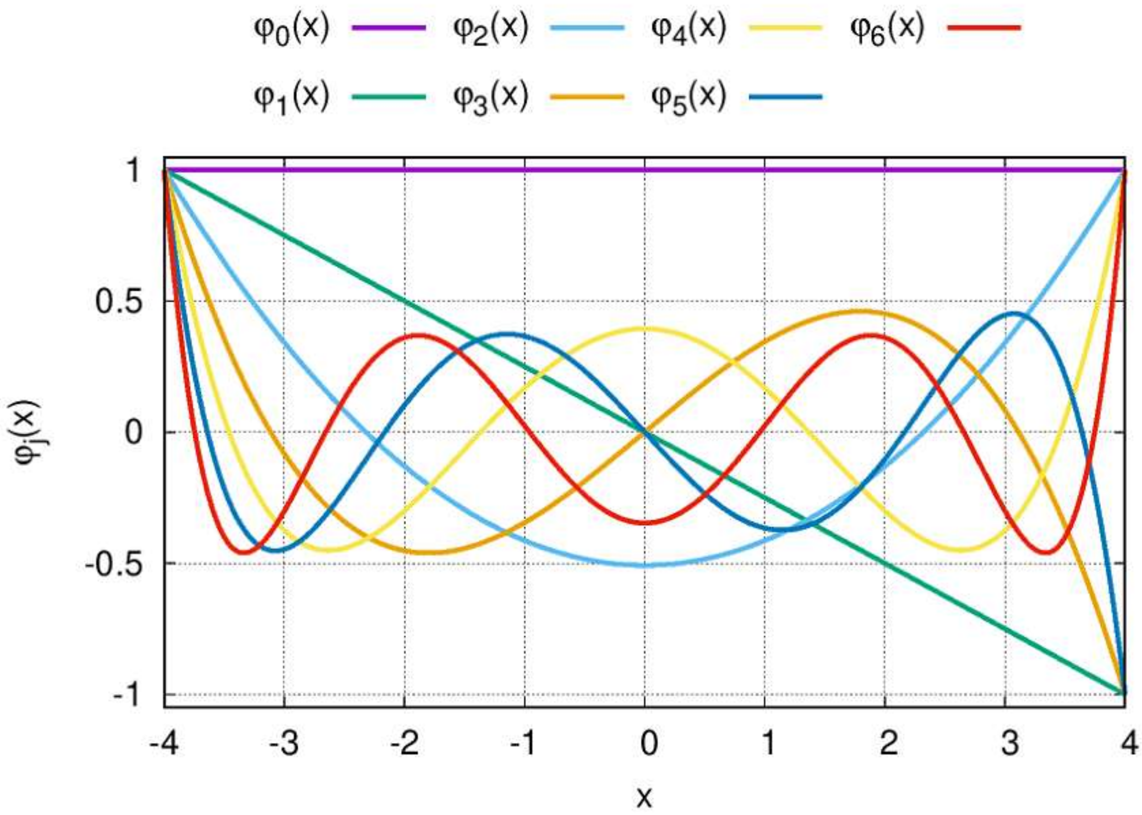
$$x_0 = 2.0.$$

Program napisany został w czystym języku C.

2.2. Wyniki

Za pomocą programu *gnuplot* wygenerowane zostały wykresy przedstawiające otrzymane rezultaty aproksymacji oraz wizualizację kilku pierwszych wielomianów Grama.

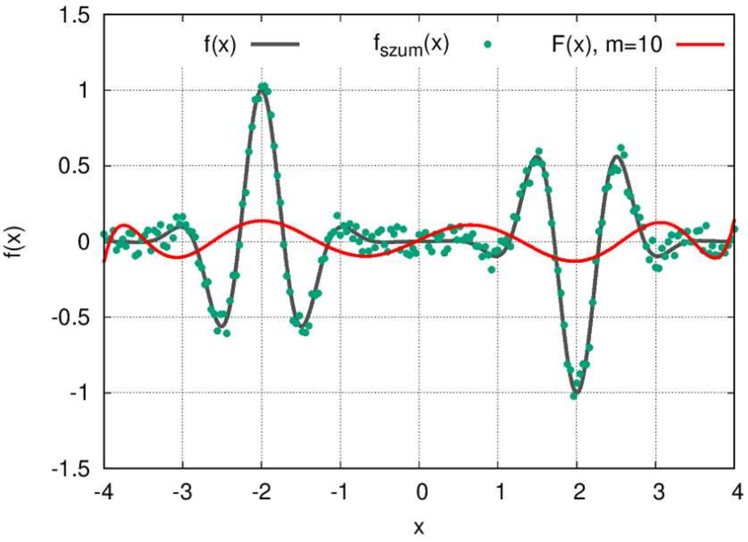
Wykres poniżej przedstawia pierwsze 7 wielomianów ortogonalnych Grama w zadanym przedziale. Kolejne wielomiany odpowiadają kolejnym stopniom [k] unormowanego wielomianu bazowego ze wzoru (7):



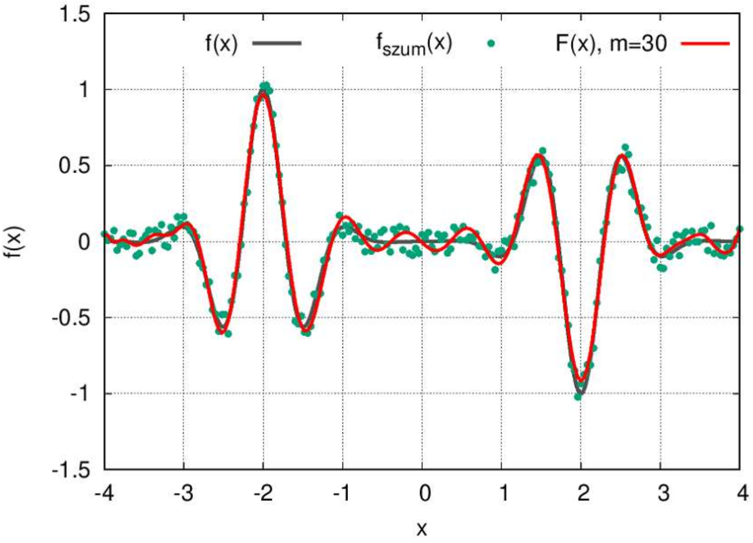
Wykres 1. Siedem pierwszych wielomianów Grama.

Kolejne trzy wykresy przedstawiają odpowiednio aproksymacje funkcji (15) wraz z nałożonym niedużym stochastycznym szumem (16) dla $m = 10, 30, 50$.

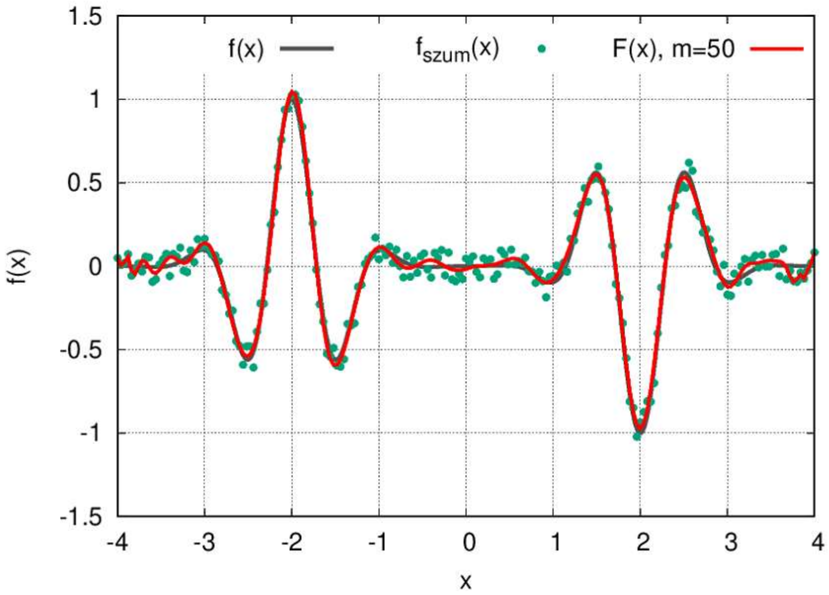
Dla m = 10 rezultat jest daleki od pożądanego, funkcja $F(x)$ nie oddaje kształtu funkcji $f(x)$. Wraz ze zwiększeniem liczby użytych wielomianów Grama obserwujemy wzrost jakości przybliżenia, dla m = 30 funkcja aproksymująca dosyć dobrze oddaje kształt funkcji aproksymowanej z lekkimi oscylacjami w przedziałach, w których badana funkcja jest stała. Na wykresie (4) dla m = 50 $F(x)$ dobrze przybliża funkcję aproksymowaną $f(x)$, nadal jednak występują oscylacje we wspomnianych wcześniej przedziałach.



Wykres 2. m = 10, z szumem.

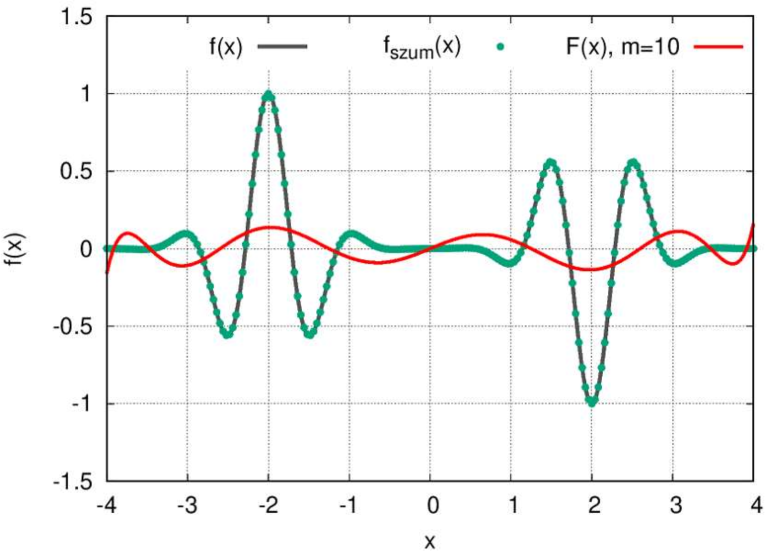


Wykres 3. m = 30, z szumem.

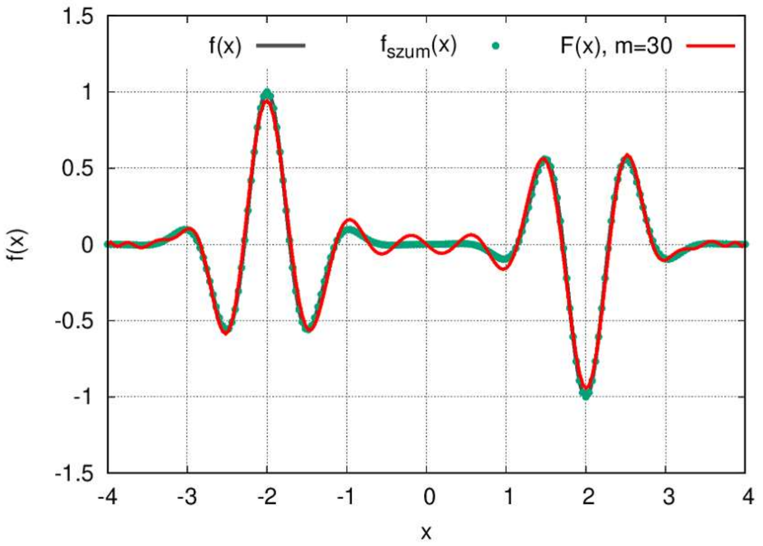


Wykres 4. m = 10, z szumem

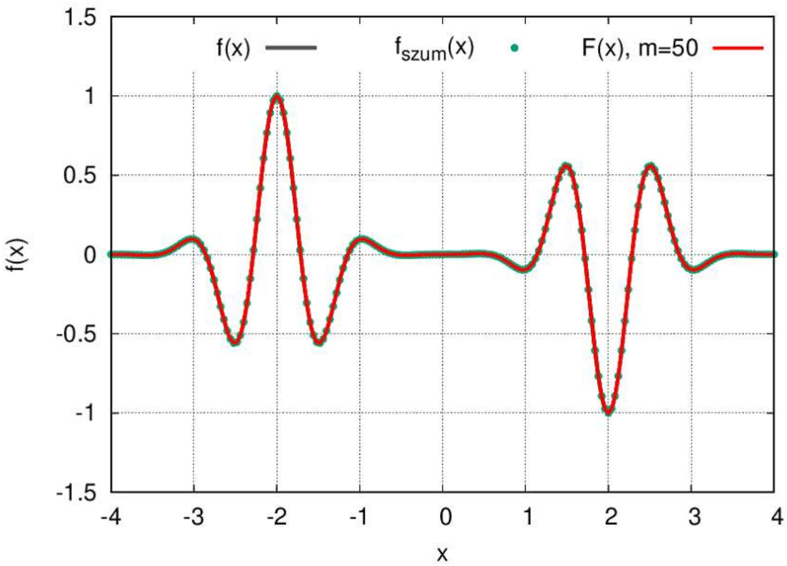
Ostatnie 3 wykresy przedstawiają porównanie aproksymacji dla funkcji bez zaszumienia. W tym przypadku o ile na wykresie (6) dla m = 30 zauważamy jeszcze oscylacje omówione w przypadku poprzedniej serii wykresów tak dla m = 50 na wykresie (7) całkowicie one ustają. Funkcja aproksymująca idealnie pokrywa się z funkcją aproksymowaną – przynajmniej z dokładnością do ludzkiego wzroku. Na tej podstawie można wysnuć dość naturalne i spodziewane wnioski o negatywnym wpływie szumu na dokładność aproksymacji.



Wykres 5. m = 10, brak szumu.



Wykres 6. m = 30, brak szumu.



Wykres 7. m = 50, brak szumu.

3. Wnioski

Metoda aproksymacji w dziedzinie wielomianów Grama pozwala na dosyć dobre przybliżenie funkcji aproksymowanej. Nie można jednak lekceważyć oscylacji, które występują w przedziałach, w których funkcja aproksymowana jest bliska lub równa funkcji stałej. Pomimo tych oscylacji jest to raczej dużo efektywniejsza metoda od jakiejkolwiek interpolacji, która w przypadku węzłów obarczonych zadaną niepewnością dała by w rezultacie niesamowicie skomplikowaną funkcję, która błędnie przechodziła by przez wszystkie zadane węzły. Stosunkowo duża odporność na szum to jedna z cech charakterystycznych oraz naturalnie zalet aproksymacji. Jak też mogliśmy zauważyć aproksymacja świetnie radzi sobie z funkcjami bez szumu.