

# Metody numeryczne

## Laboratorium 13

*Szacowanie całek niewłaściwych przy użyciu kwadratur Gaussa.*

11.06.2020r.

*Adrian Furman*

### 1. Wstęp teoretyczny

**Kwadratury Gaussa** – podobnie jak w przypadku kwadratur Newtona-Cotesa obliczamy współczynniki kwadratury  $A_k$  z wagą  $p(x)$  a ostateczny wynik otrzymujemy jako sumę  $S(f)$ :

$$A_k = \int_a^b p(x) \phi_k(x) dx, \quad (1)$$

$$S(f) = \sum_{k=0}^N A_k f(x_k). \quad (2)$$

Funkcja wagowa  $p(x)$  jest ustalona dla wybranego przypadku, natomiast poza współczynnikami  $A_k$  musimy znaleźć także położenia  $N+1$  węzłów. Położenia węzłów wyznacza się jako zera wielomianów ortogonalnych, których postać zależy od wybranej metody.

**Kwadratura Gaussa-Legendre'a** – stosowana dla przedziałów całkowania  $[a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Za funkcję wagową przyjmowana jest  $p(x) = 1$ .

Wielomiany Legendre'a mają postać:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n. \quad (3)$$

Współczynniki kwadratury obliczane są następująco:

$$A_k = -\frac{2}{(N+2)P_{N+2}(x_k)P'_{N+1}(x_k)}. \quad (4)$$

**Kwadratura Gaussa-Hermite'a** – stosowana dla całkowania w przedziale  $(a, b) = (-\infty, \infty)$ . Za funkcję wagową przyjmowana jest  $p(x) = e^{-x^2}$ .

Wielomiany Hermite'a mają postać:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \quad (5)$$

Obowiązuje dla nich także rekurencyjna zależność:

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}. \quad (6)$$

**Kwadratura Gaussa-Laguerre'a** – stosowana dla przedziału całkowania  $[a, b] = [0, \infty)$ . Za funkcję wagową przyjmowana jest  $p(x) = e^{-x}$ .

Wielomiany Laguerre'a mają postać:

$$L_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}). \quad (7)$$

Współczynniki kwadratury obliczane są następująco:

$$A_k = \frac{((N+1)!)^2}{L'_{N+1}(x_k)L_{N+2}(x_k)}. \quad (8)$$

## 2. Zadanie do wykonania

### 2.1 Opis problemu

Celem zajęć było obliczenie 3 całek niewłaściwych wykorzystując do tego trzy rodzaje kwadratur Gaussa: Gaussa-Legendre'a, Gaussa-Hermite'a oraz Gaussa-Laguerre'a w zależności od rozważanego przedziału. Dla każdej z całek podana była jej wartość w celu późniejszego zaprezentowania funkcji błędu  $f(n) = |c_i - c_{ia}|$  gdzie n to liczba węzłów całkowania.

1. Całka:

$$c_1 = \int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx, \quad (9)$$

wartość dokładna:  $c_{1a} = \pi/3$ ,

liczba węzłów:  $n = 2, 3, \dots, 100$ ,

kwadratura: Gaussa-Legendre'a.

## 2. Całka:

$$c_2 = \int_0^{\infty} \ln(x) \exp(-x^2) dx, \quad (10)$$

wartość dokładna:  $c_{2a} = -0.8700577$ ,  
kwadratury:

### 1) Gaussa-Hermite'a

liczba węzłów:  $n = 2, 4, 6, \dots, 100$ ,

### 2) Gaussa-Legendre'a

liczba węzłów:  $n = 2, 3, 4, 5, \dots, 100$ ,  
w zawężonym przedziale:  $x \in [0, 5]$ .

## 3. Całka:

$$c_3 = \int_0^{\infty} \sin(2x) e^{-3x} dx, \quad (11)$$

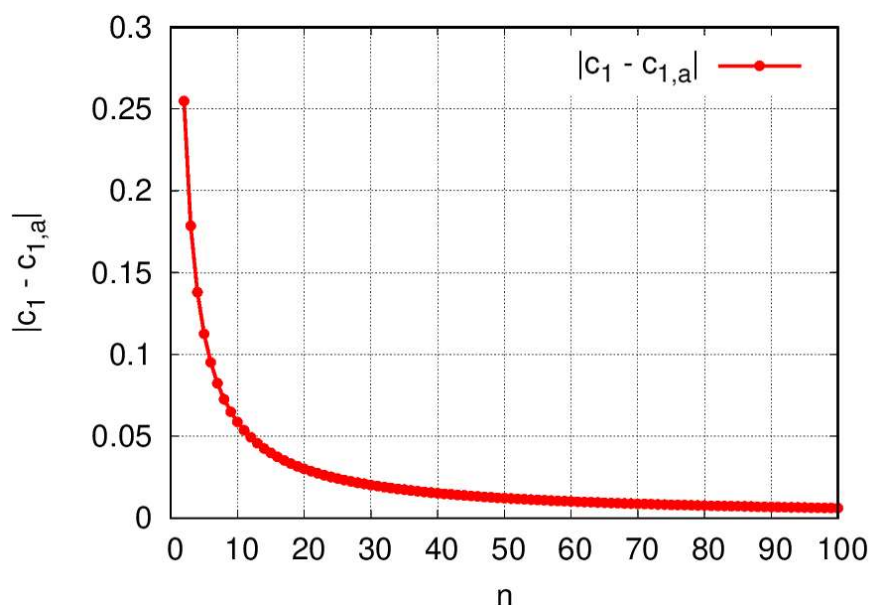
wartość dokładna:  $c_{3a} = 2/13$ ,  
liczba węzłów:  $n = 2, 3, \dots, 20$ ,  
kwadratura: Gaussa-Laguerre'a.

W przypadku drugiej całki, podpunkt 1) z racji na różnice w przedziale całkowania a przedziale kwadratury dokonano odbicia wykresu względem osi OY a wynik podzielono przez 2.

W przypadku trzeciej całki w funkcji podcałkowej najpierw wydzielono odpowiednią dla kwadratury funkcję wagową:  $e^{-x}$  a następnie dokonano obliczeń.

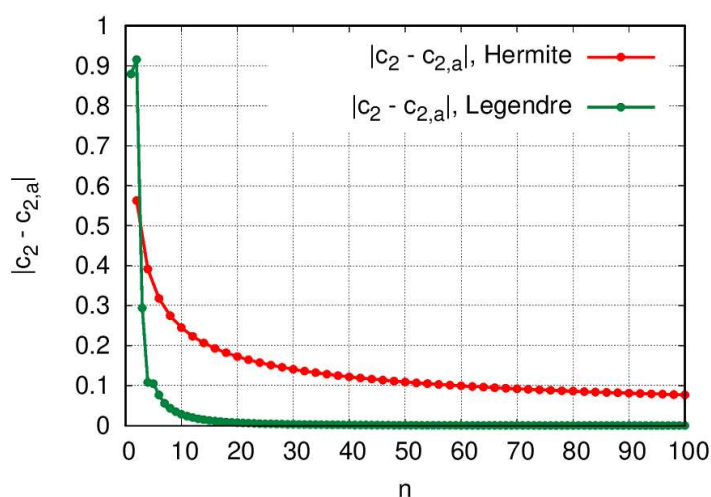
## 2.2 Wyniki

Na podstawie serii danych wypisanych do pliku podczas obliczania każdej całki wygenerowane zostały wykresy funkcji błędu  $f(n) = |c_i - c_{ia}|$  od liczby węzłów. Do wyrysowania wykresów użyty został program *gnuplot*.

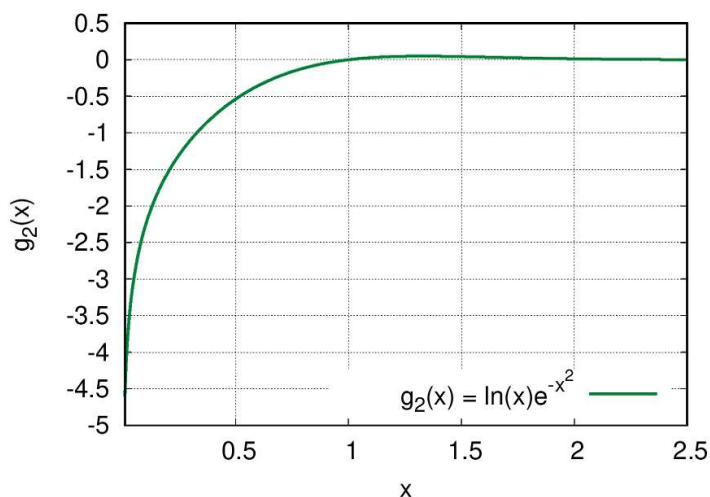


Wykres 1. Funkcja błędu od liczby węzłów dla pierwszej całki.

Wraz ze wzrostem liczby węzłów całkowania zauważamy zmniejszenie błędu przy czym funkcja błędu zależy od liczby węzłów w sposób przypominający zależność eksponencjalną. Dla ostatnich iteracji dokładność wyniku można uznać za wystarczająco dokładną.



Wykres 2. Funkcja błędu od liczby węzłów dla drugiej całki dla dwóch metod.

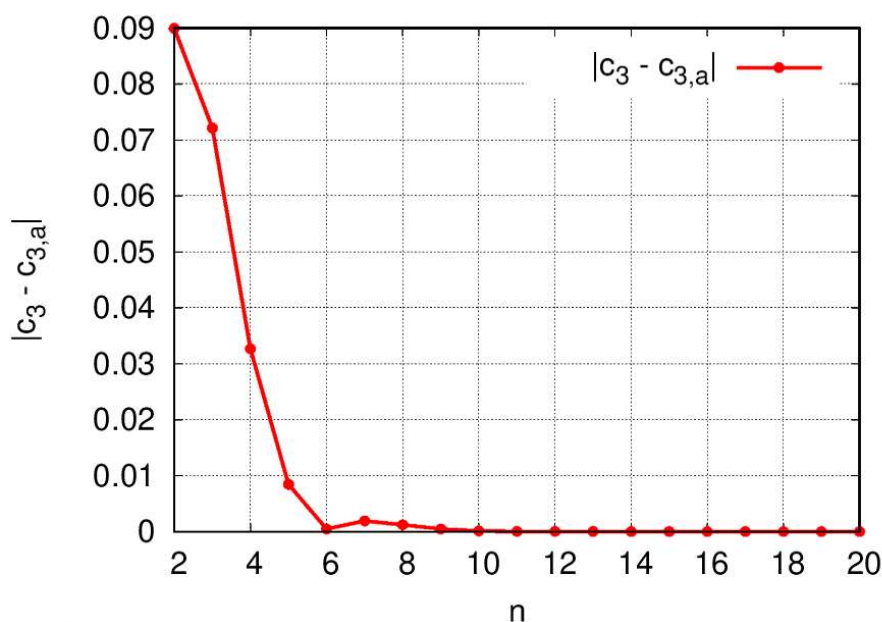


Wykres 3. Analityczny wykres funkcji podcałkowej(10).

W przypadku drugiej całki (10) dokonano porównania dokładności dwóch kwadratur – Hermite’a oraz Legendre’a przy czym w przypadku tej drugiej przedział ograniczono do  $[0,5]$  z powodu specyfiki tej kwadratury. Jak widzimy na wykresie kwadratura Legendre’a okazała się znacznie dokładniejsza dając niezwykle mały błąd już od  $n = 30$  podczas gdy kwadratura Hermite’a nawet dla 100 węzłów nie dawała dostatecznie małego

błędu. Takie zachowanie może mieć związek z silną zależnością szacowanego błędu całkowania od położenia węzłów w przedziale całkowania więc można na tej podstawie wysnuć wniosek że dla rozpatrywanej funkcji podcałkowej lepsze węzły uzyskuje się przy pomocy wielomianów Legendre'a niż Hermite'a .

Wykres (3) pokazuje, że ograniczenie przedziału do  $[0,5]$  w przypadku kwadratury kwadratury Legendre'a jest jak najbardziej uzasadnione ze względu na wartości jakie przyjmuje funkcja podcałkowa w tym przedziale. Już od  $x = 2$  jej wartości są niezwykle bliskie zeru więc tym bardziej wartości dla argumentów większy od 5 można uznać za pomijalnie małe.



Wykres 4. Funkcja błędu od liczby węzłów dla trzeciej całki (11).

W tym przypadku widzimy niezwykle szybką zbieżność w porównaniu do poprzednich przykładów. Już dla 10 węzłów błąd całkowania jest przyrównywalny do zera. Na tej podstawie można postawić tezę, że dla tej konkretnej funkcji podcałkowej miejsca zerowe wielomianu Hermite'a świetnie spełniają rolę węzłów całkowania.

### 3. Wnioski

Kwadratury Gaussa pozwalają na wyznaczenie wartości całek oznaczonych w tym niewłaściwych. Należy jednak mieć na uwadze, że nie wszystkie rodzaje kwadratur dają wystarczająco dokładne rezultaty dla konkretnych przypadków funkcji podcałkowej. Wspomniana zależność błędów całkowania od rozpieszczenia węzłów w przedziale sprawia, że należy dobrać odpowiednią kwadraturę do rozważanej całki jak i przedziału całkowania. W naszym przypadku dla drugiej całki nieodpowiednia okazała się kwadratura Hermite'a podczas gdy kwadratura Legendre'a okazała się już właściwa.