Metody numeryczne

Laboratorium 7

Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów

30.04.2020r.

Adrian Furman

1. Wstęp teoretyczny

Interpolacja – szczególny przypadek numerycznych metod aproksymacyjnych. Metoda polegająca na wyznaczaniu w przedziale $[a,\ b]$, takiej funkcji interpolującej $F(x)$, która w określonych węzłach przyjmuje z góry zadane wartości, natomiast w punktach nie będących węzłami, osiąga przybliżone wartości funkcji interpolowanej $f(x)$.

Interpolacja Newtona polega na zastosowaniu jako funkcji interpolującej tzw. wielomianu interpolacyjnego Newtona:

$$W_n(x) \;=\; \sum_{j=0}^{n} f^{(j)}(x_0)\;\cdot\;\prod_{i=0}^{j-1}(x\;-\;x_i),\quad \textit{(1).}$$

gdzie $f^{(j)}(x_0)$ to iloraz różnicowy rzędu j. Wielomian naturalnie spełnia warunek w węzłach interpolacji: $W_n(x_i) \;=\; f(x_i),\quad i=0,1,2,\ldots,n.$

Iloraz różnicowy – przyrost funkcji w danym przedziale (przedziały te nie muszą być stałe: $\Delta x_i \;=\; x_{i+1}-x_i$). W przypadku pierwszego rzędu definiujemy jako:

$$f(x_{n-1};x_n) \;=\; \frac{f(x_n)\;-\;f(x_{n-1})}{x_n\;-\;x_{n-1}}.\quad \textit{(2).}$$

Odpowiednio drugiego rzędu:

$$f(x_{n-2};x_{n-1};x_n) \;=\; \frac{f(x_{n-1};x_n)\;-\;f(x_{n-2};x_{n-1})}{x_n\;-\;x_{n-2}},\quad \textit{(3).}$$

itd. zauważając rekurencyjną zależność ilorazy różnicowe funkcji np. wielomianowej można w wygodny sposób przedstawić w postaci macierzy trójkątnej dolnej, której pierwsza kolumna to wartości funkcji w węzłach, natomiast kolejne kolumny to odpowiednio ilorazy różnicowe („pochodne”) rzędów odpowiadających numerom kolumn.

Wielomiany Czebyszewa **–** rodzina wielomianów, których miejsca zerowe stanowią optymalne położenia węzłów interpolacji, które w efekcie pozwalają na uzyskanie interpolacji o najmniejszym oszacowaniu błędu interpolacji: $\varepsilon(x) = f(x) - W_n(x)$. Dla funkcji wielomianowych w przedziale $[a, b]$, zera wielomianów Czebyszewa można wyznaczyć korzystając z następującego wzoru:

$$x_i = \frac{1}{2}\left[(x_{min} - x_{max}) \cdot \cos\left(\pi \frac{2i+1}{2n+2}\right) + (x_{min} + x_{max})\right] \quad \textit{(4).}$$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Celem ćwiczeń laboratoryjnych było przeprowadzenie interpolacji wielomianowej Newtona dla funkcji:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad \textit{(5).}$$

Pierwszym krokiem było uzupełnienie tabeli (macierzy trójkątnej dolnej) ilorazami różnicowymi, zgodnie z rekurencyjną zależnością wynikającą ze wzorów (2) i (3):

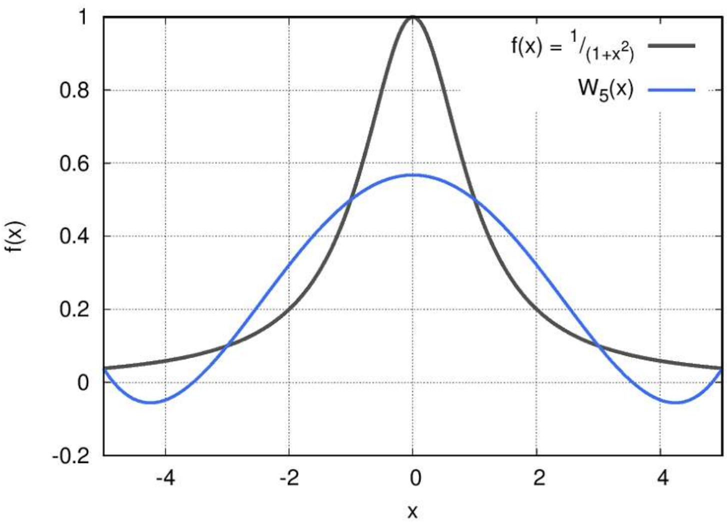
$$\begin{pmatrix} y_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & f_{x_0}^{(1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ y_2 & f_{x_1}^{(1)} & f_{x_0}^{(2)} & 0 & \cdots & 0 \\ y_3 & f_{x_2}^{(1)} & f_{x_1}^{(2)} & f_{x_0}^{(3)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & f_{x_{n-1}}^{(1)} & f_{x_{n-2}}^{(2)} & f_{x_{n-3}}^{(3)} & \cdots & f_{x_0}^{(n)} \end{pmatrix},$$

gdzie $y_i = f(x_i)$.

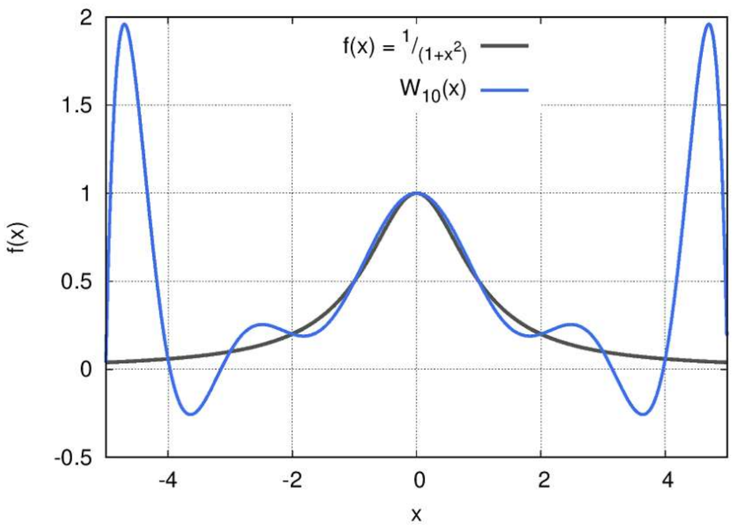
Interpolacji dokonywano w przedziale $[-5, 5]$, dla $n+1$ węzłów $i=0,1,2,...,n$, gdzie za n kolejno przyjmowano $\{5, 10, 15, 20\}$. W pierwszym doświadczeniu węzły rozłożono równolegle co $h = \frac{x_{max} - x_{min}}{n}$ natomiast w drugim przypadku położenia węzłów wyznaczone zostały zgodnie z zerami wielomianów Czebyszewa, wzór (4). Za pomocą wielomianu Newtona (1) szukano przybliżeń wartości dla położeń międzywęzłowych z krokiem $k = 0.01$.

2.2. Wyniki

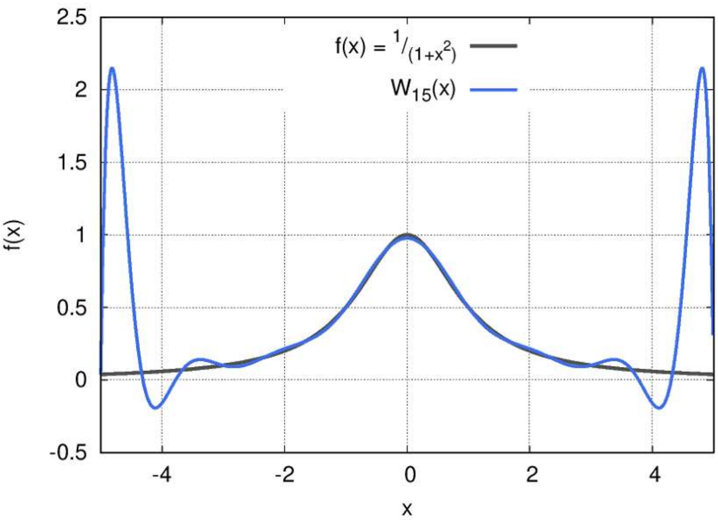
Na wykresach zamieszczonych poniżej przedstawione zostały porównania funkcji interpolującej z funkcją interpolowaną (5). Do wygenerowania wykresów użyty został program *gnuplot.* Pierwsze cztery egzemplarze przedstawiają rezultaty pierwszego doświadczenia dla węzłów równoodległych. Kolejne cztery wykresy obrazują drugie doświadczenie z wykorzystaniem zer wielomianów Czebyszewa jako węzłów interpolacyjnych.

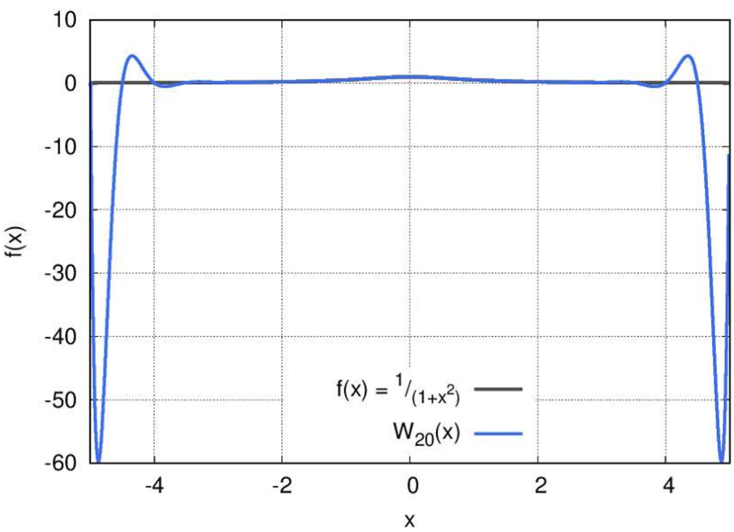


Wykres 1. Porównanie funkcji interpolującej dla n=5 z funkcją interpolowaną.



Wykres 2. Porównanie funkcji interpolującej dla n=10 z funkcją interpolowaną.

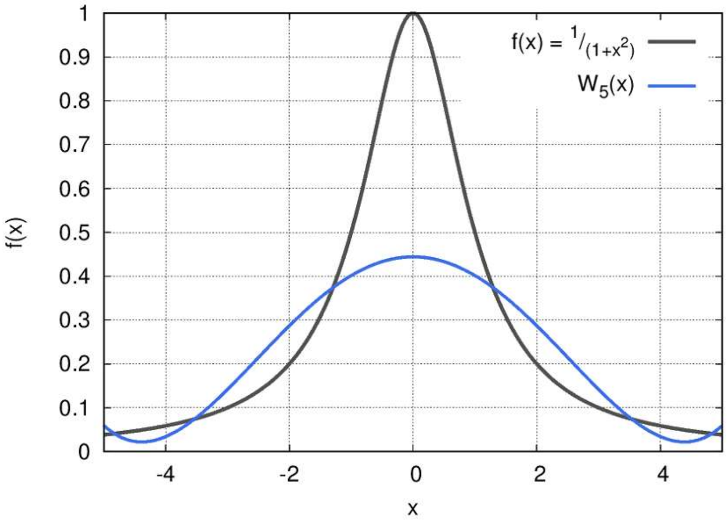




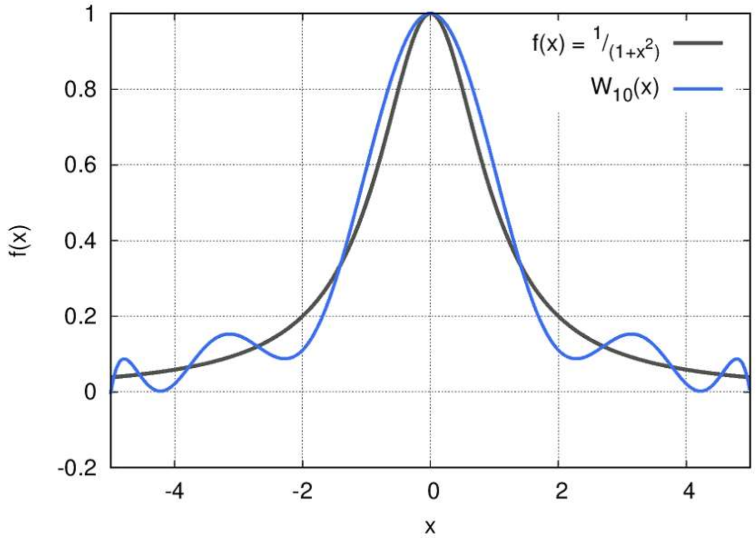
Wykres 3. Porównanie funkcji interpolującej dla n=15 z funkcją interpolowaną.

Wykres 4. Porównanie funkcji interpolującej dla n=20 z funkcją interpolowaną.

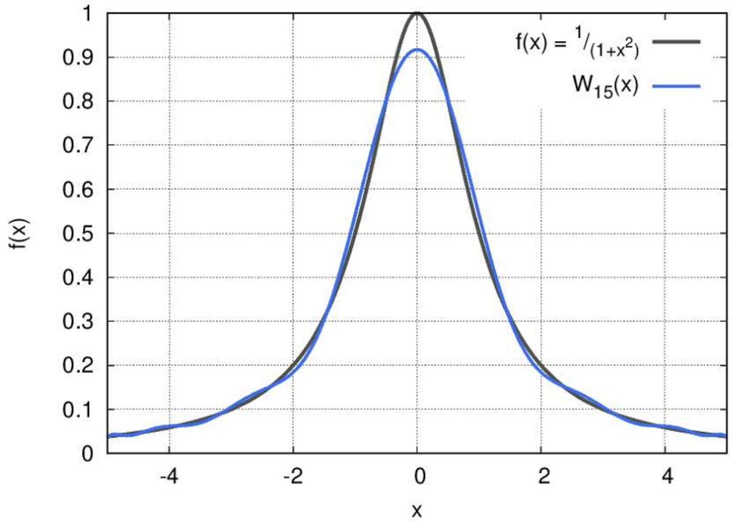
Węzły jako zera wielomianów Czebyszewa:



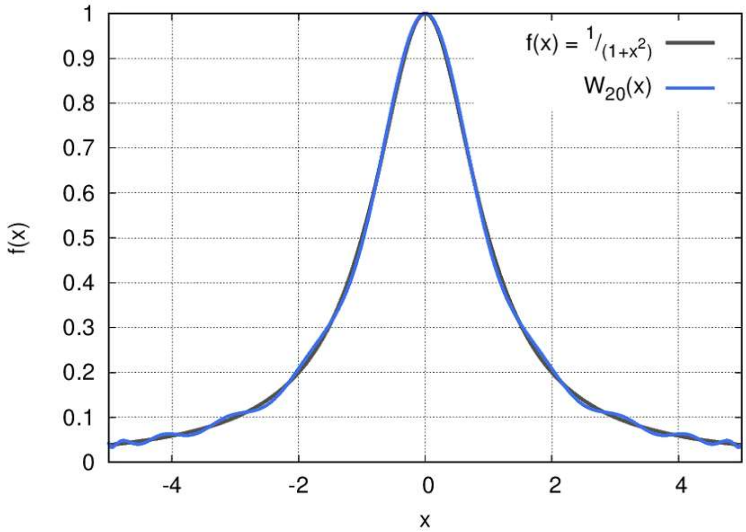
Wykres 5. Porównanie funkcji interpolującej dla n=5 (Czebyszew) z funkcją interpolowaną.



Wykres 6. Porównanie funkcji interpolującej dla n=10 (Czebyszew) z funkcją interpolowaną.



Wykres 7. Porównanie funkcji interpolującej dla n=15 (Czebyszew) z funkcją interpolowaną.



Wykres 8. Porównanie funkcji interpolującej dla n=20 (Czebyszew) z funkcją interpolowaną.

Dla węzłów równoodległych (wykresy 1,2,3,4) wraz ze wzrostem liczby węzłów obserwujemy coraz lepszą interpolację w środkowej części przedziału co dopowiada naszym oczekiwaniom (przynajmniej do n = 15, dalej wykres nie jest już czytelny i w celu sprawdzenia dokładności należało by posłużyć się np. błędem oszacowania) – im więcej danych (większe zagęszczenie węzłów) tym dokładniejsza interpolacja. Jednak na końcach naszego przedziału widoczny jest efekt przeciwny, im większa liczba węzłów interpolacyjnych tym większe rozbieżności pomiędzy funkcją interpolowaną a interpolującą. Powodem takich zachowań są oscylacje wielomianów wyższych rzędów (im więcej węzłów tym większy stopień wielomianu interpolującego Newtona (1)).

Obserwowane anomalie noszą nazwę ***efektu Rungego*** – jakość interpolacji wielomianowej pogarsza się pomimo zwiększenia liczby węzłów.

Rozwiązaniem tego problemu jest takie dobranie węzłów, aby były one gęściej upakowane na krańcach przedziału interpolacji. Realizacją takiego podejścia jest użycie zer wielomianów Czebyszewa (4) a jego efekt oraz znaczna poprawa dokładności interpolacji widoczne są na kolejnych czterech wykresach – 5,6,7,8. Wspomniane oscylacje dla większej ilości węzłów są minimalne a funkcja interpolująca dobrze odzwierciedla funkcję interpolowaną.

3. Wnioski

Wyniki otrzymane podczas zajęć są zgodne z wzorcowymi co świadczy o poprawnym wykonaniu ćwiczenia.

Interpolacja wielomianowa Newtona przy równo rozłożonych węzłach nie daje satysfakcjonujących rezultatów z uwagi na przytoczony efekt Rungego – im więcej węzłów tym większy stopień wielomianu interpolującego a to prowadzi do oscylacji wielomianów wyższych rzędów co najbardziej widoczne jest na końcach przedziału.

Stosunkowo prostym a zarazem efektywnym rozwiązaniem jest optymalizacja położeń węzłów wykorzystując do ich wyznaczenia zera wielomianów Czebyszewa, które gęściej upakowane są na krańcach przedziału interpolacji. Po wdrożeniu takiej optymalizacji rezultaty można uznać za jak najbardziej satysfakcjonujące.