Politechnika Wrocławska
Wydział Podstawowych Problemów Techniki

Obliczenia Naukowe
Sprawozdanie z Laboratorium

Lista 3

Autor:
Krzysztof Nowak
III Rok INF.
Nr Indeksu: 229807

26 listopada 2017

1 Zadania 1-3

1.1 Opis problemu

Naszym zadaniem było zaimplementowanie metod do wyznaczania miejsc zerowych funkcji: metody bisekcji, metody Newtona(stycznych) oraz metody siecznych, wg podanej specyfikacji.

1.2 Opis metody

1.2.1 Metoda bisekcji

Metoda ta opiera się na twierdzeniu Darboux, które mówi, że jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a, b]$ oraz $f(a) * f(b) < 0$ to istnieje taki punkt c znajdujący się w przedziale $[a, b]$, że $f(c) = 0$. Metoda ta wygląda następująco.

Algorithm 1: mbisekcji

Data: f,a,b,δ,ϵ gdzie
- f - funkcja,
- a - początek przedziału,
- b - koniec przedziału,
- δ - dokładność przybliżenia punktu,
- ϵ - dokładność przybliżenia wartości w punkcie

Result: r , v , it , err gdzie
- r - przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
- v - wartość $f(r)$,
- it - liczba wykonanych iteracji,
- err - sygnalizacja błędu
  - 0 - brak błędu; 1 - funkcja nie zmienia znaku w przedziale $[a, b]$

begin
  $M \longleftarrow 100$
  $u \longleftarrow f(a)$
  $v \longleftarrow f(b)$
  $e \longleftarrow b - a$
  if $sign(u) = sign(v)$ **then**
    return $0, 0, 0, 1$
  end
  for $k = 1$ **to** M **do**
    $e \longleftarrow e/2$
    $c \longleftarrow a + e$
    $w \longleftarrow f(c)$
    if $|e| < \delta$ **or** $|w| < \epsilon$ **then**
      return $c, w, k, 0$
    end
    if $sign(w) \neq sign(u)$ **then**
      $b \longleftarrow c$
      $v \longleftarrow w$
    else
      $a \longleftarrow c$
      $u \longleftarrow w$
    end
  end
  return $c, w, M, 0$
end

1.2.2 Metoda Newtona

Metoda Newtona, nazywana też metodą stycznych, jest kolejnym sposobem wyliczenia miejsca zerowego funkcji. Można ją wyprowadzić z szeregu Taylora- tj.

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + O((x - x_n)^2)$$

przeprowadzając linearyzację otrzymujemy $f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$
poprzez podstawienie $f(x) = 0$ otrzymujemy i odpowiednie przestawienie otrzymujemy wzór wykorzystywny w metodzie Newtona

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Algorithm 2: mstycznych

Data: f,pf,x_0,δ,ϵ,$maxit$ gdzie
- f - funkcja,
- pf - pochodna funkcji,
- x_0 - przybliżenie początkowe,
- δ - dokładność przybliżenia punktu,
- ϵ - dokładność przybliżenia wartości w punkcie
- $maxit$ - maksymalna dopuszczalna liczba iteracji

Result: r , v , it , err gdzie
- r - przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
- v - wartość $f(r)$,
- it - liczba wykonanych iteracji,
- err - sygnalizacja błędu

0 - metoda zbieżna; 1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w $maxit$ iteracji; 2 - pochodna bliska zeru

```
begin
    v ⟵ f(x0)
    if |v| < ε then
        return x0, v, 0, 0
    end
    for k = 1 to maxit do
        derivative ⟵ pf(x0)
        if |derivative| < ε then
            return x0, v, k, 2
        end
        x1 ⟵ x0 − v/derivative
        if |x1 − x0| < δ or|v| < ε then
            return x1, v, k, 0
        end
        x0 ⟵ x1
    end
    return x1, v, maxit, 1
end
```

1.2.3 Metoda siecznych

Metoda ta jest rozwinięciem metody Newtona, z tą zaletą, że nie musimy znać pochodnej funkcji a możemy ją wyprowazdzić w punkcie x_n przyjmując za nią wartość

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

z tego mamy: wzór metody siecznych:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$$

Algorithm 3: msiecznych

Data: f,x_0,x_1,δ,ϵ gdzie
- f - funkcja,
- x_0 - przybliżenie początkowe,
- x_1 - przybliżenie początkowe,
- δ - dokładność przybliżenia punktu,
- ϵ - dokładność przybliżenia wartości w punkcie

Result: r , v , it , err gdzie
- r - przybliżenie pierwiastka równania $f(x) = 0$,
- v - wartość $f(r)$,
- it - liczba wykonanych iteracji,
- err - sygnalizacja błędu
  - 0 - metoda zbieżna; 1 - nie osiągnięto wymaganej dokładności w $maxit$ iteracji

begin
    $fa \longleftarrow f(x_0)$
    $fb \longleftarrow f(x_1)$
    for $k = 1$ **to** $maxit$ **do**
        if $|fa| < |fb|$ **then**
            $swap(x_0, x_1)$
            $swap(fa, fb)$
        end
        $s \longleftarrow (x_1 - x_0)/(fb - fa)$
        $x_1 \longleftarrow x_0$
        $fb \longleftarrow fa$
        $x_0 \longleftarrow x_0 - fa * s$
        $fa \longleftarrow f(x_0)$
        if $|f(x_1) - f(x_0)| < \delta$ **or** $|fa| < \epsilon$ **then**
            return $x_0, fa, k, 0$
        end
    end
    return $x_0, fa, maxit, 1$
end

2 Zadanie 4

2.1 Opis problemu

Naszym zadaniem było wykorzystać napisane na poprzednich zadaniach metody do wyliczenia pierwiastka równania $sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$ dla podanych przedziałów(przybliżeń) początkowych oraz danych δ i ϵ.

2.2 Rozwiązania i wyniki

Dla metody bisekcji podano przedział początkowy $[1.5, 2]$, dla metody Newtona podano przybliżenie początkowe $x_0 = 1.5$, a dla metody siecznych przybliżenia początkowe to $x_0 = 1$ i $x_1 = 12$. Dla każdej z metod $\delta = \frac{1}{2}10^{-5}$,$\epsilon = \frac{1}{2}10^{-5}$ Otrzymano następujące wyniki:

Metoda	r	f(r)	iteracje	errorcode
Bisekcji	1.9337539672851562	$-2.7027680138402843e-7$	16	0
Newtona	1.933753779789742	$-2.2423316314856834e-8$	4	0
Siecznych	1.933753644474301	$1.564525129449379e-7$	4	0

2.3 Wnioski

Wnioski znajdują się we wnioskach zadania 6.

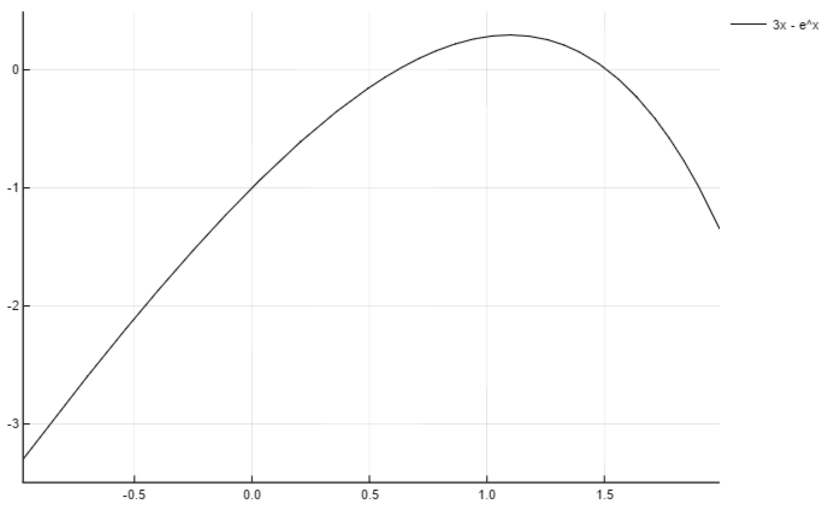
3 Zadanie 5

3.1 Opis problemu

Naszym zadaniem było znalezienie za pomocą metody bisekcji miejsca przecięcia się wykresów funkcji $y = 3x$ oraz $y = e^x$ dla $\delta = 10^{-4}$ i $\epsilon = 10^{-4}$.

3.2 Rozwiązanie i wynik

Nasze zadanie sprowadza się do znalezienia miejsca zerowego funkcji $f(x) = 3x - e^x$ Wykres tej funkcji prezentuje się następująco:



Rysunek 1: Otrzymany wykres w języku Julia

Jak możemy zauważyć funkcja ta posiada dwa miejsca zerowe. Zastosowałem więc 2 przedziały do sprawdzenia wartości tych miejsc zerowych: $[1, 2]$ oraz $[0, 1]$ oto wyniki dla tych przedziałów

Przedział	r	f(r)	iteracje	errorcode
$[1, 2]$	1.5120849609375	$7.618578602741621e-5$	13	0
$[0, 1]$	0.619140625	$9.066320343276146e-5$	9	0

Dodatkowo jeszcze sprawdziłem co by się stało gdybym podał, bez wiedzy o tym jak wygląda ta funkcja, złe przedziały:

Przedział	r	f(r)	iteracje	errorcode
$[0, 2]$	0	0	0	1
$[1.0, 1.5]$	0	0	0	1

3.3 Wnioski

Metoda bisekcji jest dobrą metodą sprawdzania miejsc zerowych funkcji z powodu na swoją globalną zbieżność, jednakże gdy podamy nieodpowiednie przedziały tj. końce mają ten sam znak, to możemy nie otrzymać satysfakcjonujących nas wyników. Dlatego też ważne jest zapoznać się przynajmniej ze szkicem wykresu funkcji zanim przejdziemy do obliczania miejsc zerowych.

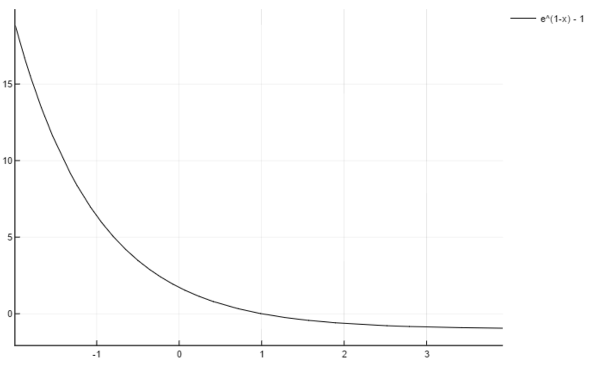
4 Zadanie 6

4.1 Opis problemu

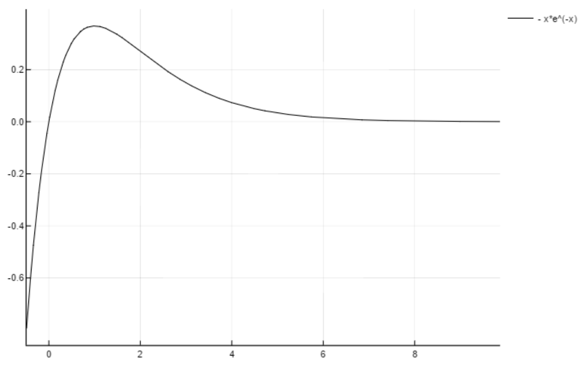
Naszym zadaniem było znalezienie miejsc zerowych dwóch funkcji: $f(x) = e^{1-x} - 1$ oraz $g(x) = xe^{-x}$ za pomocą metod bisekcji, Newtona oras siecznych dla $\delta = 10^{-5}$ i $\epsilon = 10^{-5}$. Oraz odpowiedzieć na zadane pytania.

4.2 Rozwiązania i wyniki

Przed wybieraniem przybliżeń początkowych oraz przedziałów sprawdziłem wykresy obu z podanych funkcji



Rysunek 2: $f(x) = e^{1-x} - 1$



Rysunek 3: $g(x) = xe^{-x}$

Najpierw pozwolę sobie przestawić wyniki dla $f(x)$:
Metoda bisekcji:

Przedział	r	f(r)	iteracje	errorcode
$[0.5, 1.5]$	1.0	0.0	1	0
$[0.5, 1]$	0.9999923706054688	$7.629423635080457e-6$	16	0
$[1, 1.5]$	1.0000076293945312	$-7.6293654275305656e-6$	16	0

Metoda Newtona:

x_0	r	f(r)	iteracje	errorcode
0.0	0.9999984358892101	$1.5641120130194253e-6$	4	0
0.25	0.9999999656233595	$3.437664108929539e-8$	4	0
0.5	0.9999999998878352	$1.1216494399945987e-10$	4	0
0.75	0.9999999156375783	$8.436242526776994e-8$	3	0
1.0	1.0	0.0	0	0
1.25	0.9999998362363559	$1.6376365752357458e-7$	3	0
1.5	0.9999999984736215	$1.5263785790864404e-9$	4	0
1.75	0.9999984635774625	$1.536423717807267e-6$	4	0
2.0	0.9999999810061002	$1.8993900008368314e-8$	5	0
5.0	0.9999996427095682	$3.572904956339329e-7$	54	0
7.0	-296.4287934927351	$1.4848540676800243e129$	100	1
8.0	NaN	NaN	100	1
13.0	13.0	-0.9999938557876467	1	2

Metoda siecznych:

x_0	x_1	r	f(r)	iteracje	errorcode
0.0	2.0	1.0000017597132702	$-1.7597117218937086e-6$	6	0
0.0	1.0	1.0	0.0	1	0
-1.0	0.0	0.9999990043764041	$9.956240916153547e-7$	6	0
2.0	3.0	0.9999997021053945	$2.978946498366497e-7$	8	0
-5.0	5.0	4.975665372740593	-0.9812331895845449	3	0

A teraz dla funkcji $g(x)$:
Metoda bisekcji:

Przedział	r	g(r)	iteracje	errorcode
$[-0.5, 0.5]$	0.0	0.0	1	0
$[-0.5, 0]$	$-7.62939453125e-6$	$-7.629452739132958e-6$	16	0
$[0, 0.5]$	$7.62939453125e-6$	$7.62933632381113e-6$	16	0

Metoda Newtona:

x_0	r	g(r)	iteracje	errorcode
-1.0	$-3.0642493416461764e-7$	$-3.0642502806087233e-7$	5	0
-0.75	$-1.0216540434016073e-9$	$-1.0216540444453843e-9$	5	0
-0.5	$-3.0642493416461764e-7$	$-3.0642502806087233e-7$	4	0
-0.25	$-5.65546883836681e-6$	$-5.655500822785036e-6$	3	0
0.0	0.0	0.0	0	0
0.25	$-1.6669929638735538e-9$	$-1.6669929666524193e-9$	4	0
0.5	$-3.0642493416461764e-7$	$-3.0642502806087233e-7$	5	0
0.75	$-1.147975137025985e-7$	$-1.1479752688106842e-7$	8	0
1.0	1.0	0.36787944117144233	1	2
2.0	14.398662765680003	$8.036415344217211e-6$	10	0
15.0	15.0	$4.588534807527386e-6$	0	0

Metoda siecznych:

x_0	x_1	r	f(r)	iteracje	errorcode
-1.0	1.0	$1.744165849924562e-8$	$1.7441658195034172e-8$	18	0
-0.5	0.5	$5.38073548562323e-6$	$5.380706533386756e-6$	6	0
0.0	1.0	0.0	0.0	1	0

4.3 Wnioski

Jeżeli dobierzemy odpowiednio dane, to metoda Newtona jest najbardziej odpowiednią metodą, niewiele gorsza jest metoda siecznych, niestety ich wadą jest to, że są zbieżne lokalnie, metoda bisekcji trwa dłużej, ale mamy za to pewność, że wynik będzie poprawny. Zostaliśmy też zapytani co się dzieje podczas wykonywania metody Newtona dla $f(x)$ dla $x_0 > 1$. Dochodzi tam do tego, że pochodna ujemna i bliska zeru, więc po pierwszej iteracji oddalamy się znacznie od rzeczywistego pierwiaska, dla x_0 od 1 do około 8 potrafimy wrócić do pierwiastka, po dużej liczbie iteracji, dla x_0 od 8 do 12 wartość $f(x)$ przyjmuje ∞, a następnie robimy działanie ∞/∞, co zwraca nam NaN. Powyżej 12 nasza dokładność wyłapuje nam bliską zeru pochodną i zwraca errorcode 2. Drugim zadanym nam pytaniem było co się dzieje podczas wykonywania metody Newtona dla $g(x)$ dla $x_0 > 1$ oraz $x_0 = 1$. Dla $x_0 = 1$ otrzymujemy pochodną bliską zeru (w rzeczywistości ta pochodna jest równa 0). Dla x_0 od 1 do 14 otrzymujemy wyniki, jakby miejsce zerowe było w okolicach 14. Dla większych wartości metoda zwraca bez wykonywania obliczeń x_0 ponieważ, wartość funkcji jest bliska zeru. Wszystko dlatego, że granica tej funkcji w nieskończoności wynosi 0, przez co kolejne x zostaną wychwyconę przez metodę jako miejsca zerowe, chociaż w rzeczywistości tak nie będzie.